Chủ đề X

Vấn đề cần nắm:

1. Phương trình đường thẳng.
2. Phương trình đường tròn
3. Phương trình Elip.
4. Một số vài toán cực trị.
5. Một số bài toán sử dụng tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

Trong chủ đề này chúng ta sẽ sử dụng phương pháp tọa độ để giải các bài toán liên quan đến đường thẳng, đường tròn, đường elip trong mặt phẳng.

Đây là chủ đề lớn và quan trọng trong chương trình THPT và chắc chắn sẽ có trong đề thi THPT quốc gia các năm tới. Vì vậy để đạt được kết quả tốt chúng ta phải học và nắm chắc hệ thống lí thuyết, các dạng bài tập cơ bản, điển hình, từ đó áp dụng để giải các bài toán tổng hợp khó hơn.

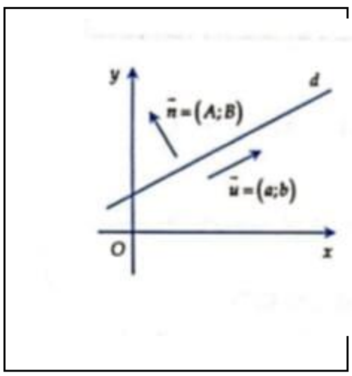
Chủ đề này cũng là nền tảng cơ bản để mở rộng ra chủ đề " Phương pháp tọa độ trong không gian" sẽ học ở lớp.

$1. Phương trình đường thẳng.

A.Lý thuyết.

1.Véc tơ pháp tuyến, vectơ chỉ phương và hệ số góc của đường thẳng.

a. Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với đường thẳng d được gọi là **vectơ pháp tuyến**(VTPT) của đường thẳng d.



b. Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là **vectơ chỉ phương** (VTCP) của đường thẳng d.

c. Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}=(a;b)$ với $a \neq 0$ thì có hệ số góc $k=\frac{b}{a}$.

Nhận xét:

+ Nếu $\vec{n}$ là VTPT của đường thẳng d thì $k\vec{n}\,(k \neq 0)$ là VTPT của đường thẳng d.

+ Nếu $\vec{u}$ là VTCP của đường thẳng d thì $k\vec{u}\,(k \neq 0)$ là VTCP của đường thẳng d.

(một đưởng thẳng có vô số VTPT và VTCP)

+ Nếu VTCP của d là $\vec{n}=(A;B) \Rightarrow d$ có VTCP là $\vec{u}=(-B;A)$ (hoặc $\vec{u}=(B;-A)$) và ngược lại.

+ Nếu đường thẳng d có hệ số góc là k thì có VTCP là $\vec{u}=(1;k)$.

STUDY TIP

+ Nếu $\vec{n}=(A;B)$ là VTPT của $d \Rightarrow \vec{u}=(-B;A)$ là VTCP của d

+ Đường thẳng d có hệ số góc k

$\Rightarrow$ có VTCP: $\vec{u}=(1;k)$

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d qua $A(1;2)$ và $B(-1);3$. Phát biểu nào sau đây là sai?

A. VTPT của d là $\vec{n}=(1;2)$.

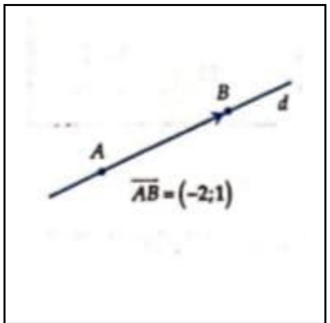
B. VTCP của d là $\vec{u}=(2;-1)$.

C. Hệ số góc của đường thẳng d là 2.

D. Hệ số góc của đường thẳng d là $-\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Đường thẳng d có VTCP là $\overrightarrow{AB}=(-2;1)$



$\Rightarrow$ Hệ số góc của đường thẳng d là $k=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow$ C sai.

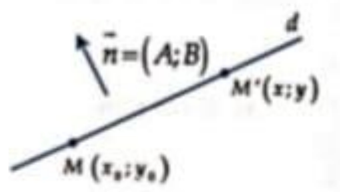
2. Phương tình đường thẳng.

a. Phương trình tổng quát của đường thẳng.

DTUDY TIP

Đường thẳng d đi qua M(x_0;y_0) và có VTCP $\vec{n}=(A;B)$ có phương trình tổng quát là:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d qua $M(x_0;y_0)$ và có VTPT là $\vec{n}=(A;B)$

$\Rightarrow \forall M'(x;y)\in d$, ta có $\overrightarrow{MM'}\perp\vec{n}$

$\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{MM'}=0 \Leftrightarrow$ $\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}$ (1)

+ phương tình (1) gọi là phương trình đường thẳng d đi qua $M(x_0;y_0)$ và có $VTCP\vec{n}=(A;B)$.

+Phương trình $Ax+By+C=0\left(A^2+B^2>0\right)$ biểu thị một đường thẳng có VTPT là $\vec{n}=(A;B)$ và VTCP $\vec{u}=(-B;A)$.

STUDY TIP

+ Đường thẳng có hệ số góc k $\Rightarrow$VTCP là $\vec{u}=(1;k)$

+ Đường thẳng t = ax + b$\Rightarrow$ hệ số góc là a

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng d đi qua $M(1;2)$ và có hệ số góc k = -2 là:

A. 2x – y =0. **B.** 2x + y – 4=0. **C.** 2x + y = 0. **D.** 2x + y + 4 =0

Lời giải:

Cách 1:

+ Đường thẳng d có hệ số góc k = -2 $\Rightarrow VTCP\ \vec{u}=(1;-2)\Rightarrow VTCP\ \vec{n}=(2;1)$

+ Đường thẳng d đi qua M (2; 1) và có VTPT $\vec{n}=(2;1)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d là: $2(x-1)+1(y-2)=0\Leftrightarrow 2x+y-4=0$

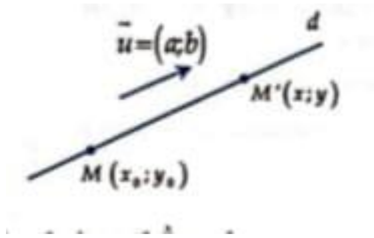
Cách 2:

+ **Bước 1**: Kiểm tra đường thẳng qua M (1;2), loại phương án C,D.

+ **Bước 2:** Kiểm tra phương án A: $d=2x-y=0\Rightarrow y=2x\Rightarrow$ hệ số góc k = 2(loại)

Vậy đáp án B đúng.

b. Phương trình tham số của đường thẳng



> **STYDY TIP**
>
> Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $M(x_0;y_0)$ và nhận $\vec{u}=(a;b)$ làm VTPT có dạng:
>
> $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$

Cho đường thẳng d đi qua $M(x_0;y_0)$ và có VTCP là $\vec{u}=(a;b)$

$\Rightarrow \forall M'(x;y)\in d \Rightarrow \overrightarrow{MM'}$ và $\vec{u}$ cùng phương

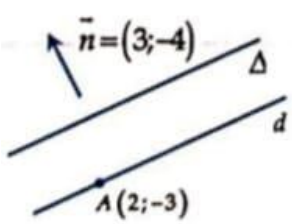
$\Rightarrow \overrightarrow{MM'}=t\vec{u}$ (t là tham số)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-x_0=ta \\ y-y_0=tb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$ (2)

$\Rightarrow$ Phương trình (2) gọi là phương trình tham số của đường thẳng d.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua A (2;-3) và song song với đường thẳng $\Delta: 3x-4y+5=0$ là

A. $\begin{cases} x=2+4t \\ y=-3+3t \end{cases}$. **B.** 3x – 4y – 18 =0. **C.** $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$. **D.** $\begin{cases} x=4+2t \\ y=3-3t \end{cases}$.



Lời giải

Đường thẳng $d // \Delta \Rightarrow$ nhận VTCP của Δ là $\vec{n}=(3;-4)$ làm VTPT

$\Rightarrow$ nhận $\vec{u}=(4;3)$ làm VTCP$\Rightarrow$ d đi qua A(2;-3) và nhận $\vec{u}=(4;3)$ làm VTCP

$\Rightarrow$ phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=2+4t \\ y=-3+3t \end{cases}$.

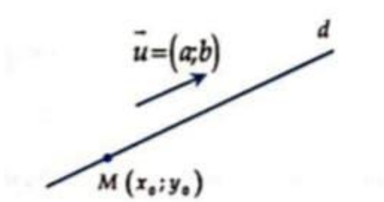
Lưu ý:

+ Đối với Ví dụ 3 ta có thể loại ngay phương án C và B, do không phải là phương trình tham số (dạng khác của đường thẳng d).

+ Đường thẳng ở phương án D thì không đi qua A, suy ra chọn đáp án A.

> **STUDY TIP**
>
> Đường thẳng Δ có phương trình $Ax+By+C=0$
>
> $\Rightarrow$ VTPT của Δ là $\vec{n}=(A;B)$.

c. Phương trình chính tắc của đường thẳng.



Đường thẳng d đi qua $M(x_0;y_0)$ và nhận $\vec{u}=(a;b)$ làm VTCP có phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (2)$$

Với $a.b \neq 0$ thì hệ phương trình(2)

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} t = \dfrac{x-x_0}{a} \\ t = \dfrac{y-y_0}{b} \end{cases}} \quad (3)$$

$\Rightarrow$ Phương trình (3) được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng d.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, Phương trình chính tắc của đường thẳng qua A(-1; -2) và B(0;3) là:

A. $5(x+1)-1(y+2)=0.$ **B.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2+5t \end{cases}.$

C. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{5}.$ **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{5}.$

Lời giải

Đường thẳng AB đi qua A(-1;-2) và có VTCP $\overrightarrow{AB}=(1;5)$

$\Rightarrow$ phương trình chính tắc của d là: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{5}.$

Lưu ý: Phương trình ở phương án A và B không phải ở dạng chính tắc của đường thẳng AB.

STUDY TIP

Phương trình đường thẳng qua hai điểm $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$ là: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$

Với $(x_B-x_A)(y_B-y_A)\neq 0$

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua 2 điểm $A(x_A;y_A);B(x_B;y_B)$ với $(x_B-x_A)(y_B-y_A)\neq 0$ không phải là phương trình nào sau đây?

A. $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_A-y_B}.$ **B.** $\dfrac{x-x_B}{x_A-x_B}=\dfrac{y-y_B}{y_A-y_B}.$

C. $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}.$ **D.** $\dfrac{x-x_B}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_B}{y_B-y_A}.$

Lời giải:

Nhận thấy ở phương án A, VTCP của AB là $\vec{u}=(x_B-x_A;y_A-y_B)$ không cùng pương với $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A\Rightarrow)$ mâu thuẫn $\Rightarrow$ phương án A không phải là phương trình chính tắc của đường thẳng AB.

Nhận xét: + Phương án B: AB đi qua B và có VTCP là $\overrightarrow{BA}$

+ Phương án C: AB đi qua A và có VTCP là $\overrightarrow{AB}$

+ Phương án D: AB đi qua B và có VTCP là $\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow$ Cả 3 phương án B, C, D đều đúng.

d. Phương trình đường thẳng theo hệ số góc

+ Cho đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k

Khi đó d có VTCP là $\vec{u} = (1; k) \Rightarrow d$ có VTPT là $\vec{n} = (k; 1)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d: $k(x - x_0) - 1(y - y_0) = 0$

$$\Leftrightarrow y = k(x - x_0) + y_0 \ (4)$$

$\Rightarrow$ Phương trình (4) gọi là phương trình đường thẳng d theo hệ số góc k.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng d qua A(-1;2) và song song với $\Delta: y = 5x + 2$ có phương trình là:

A. y = 5x -3. **B.** y = 3x + 5. **C.** y= -7x -5. **D.** y = 5x +7.

Lời giải:

Đường thẳng d đi qua A(-1;2) và có hệ số góc k = 5

$\Rightarrow d: y = 5[x - (-1)] + 2 \Leftrightarrow y = 5x + 7.$

Đáp án D.

e. Phương trình đường thẳng dạng đoạn chắn

Phương trình đường thẳng qua 2 điểm A(a;0) và B(0;b) với $a.b \neq 0$ là

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \Leftrightarrow -\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b} \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ (5)$$

$\Rightarrow$ Phương trình (5) gọi là phương trình đường thẳng theo dạng đoạn chắn qua A và B.

Ví dụ 7: Đường thẳng d qua M(2;4) cắt Ox; Oy lần lượt tại A, B cho M là trung điểm của AB có phương trình là:

A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1.$ **B.** $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1.$ **C.** 2x – y =0. **D.** y = ax + 2.

Lời giải:

$A \in Ox \Rightarrow A(a; 0); B \in Oy \in B(0; b)$

M(2;4) là trung điểm của AB $\Rightarrow \begin{cases} \frac{a+0}{2} = 2 \\ \frac{0+b}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(4;0) \\ B(0;8) \end{cases} \Rightarrow AB: \frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1$

Ví dụ 8: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường thẳng Δ qua M(1;4) cắt các tia Ox; Oy lần lượt tại hai điểm A, B sao cho diện tích ΔOAB đạt GTNN là: $ax + by + 8 = 0.$ Khi đó a + b đạt giá trị:

A. 5 **B.** -5. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải:

+ Gọi $A(a; 0); B(0; b); a, b > 0$ (do Δ cắt các tia Ox; Oy) $\Rightarrow AB: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

STUDY TIP

+ Đường thẳng d: $y = ax + b$ có hệ số góc là a.

+ 2 đường thẳng song song thì cùng hệ số góc (có hệ số góc bằng nhau-lớp 9).

STUDY TIP

Phương trình đường thẳng dạng đoạn chắn qua $A(a;0) \in Ox; B(0;b) \in Oy$ $(ab \neq 0)$ là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

STUDY TIP

Cho $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$, trung điểm AB là:

$I\left(\frac{x_A + y_A}{2}; \frac{x_B + y_B}{2}\right)$

+ AB qua M(1;4) $\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$

$$\Rightarrow 1=\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{a}.\frac{4}{b}}=\frac{4}{\sqrt{ab}}\Rightarrow \sqrt{ab}\ge 4\Leftrightarrow ab\ge 16$$

STUDY TIP

Cho $x, y\ge 0$

$\Rightarrow x+y\ge 2\Leftrightarrow 2\sqrt{xy}$

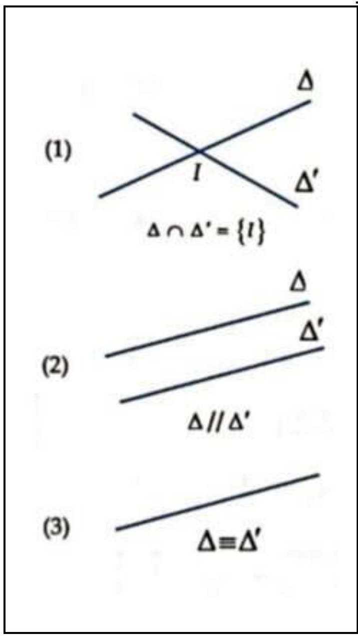
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y$

$$+\ S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}|a|.|b|=\frac{1}{2}ab\ge\frac{1}{2}.16$$

$$\Rightarrow \min S_{OAB}=8\ \text{khi}\ \begin{cases}\frac{1}{a}=\frac{4}{b}\\ \frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=8\end{cases}$$

$$\Rightarrow AB:\frac{x}{2}+\frac{y}{8}=1\Leftrightarrow 8x+2y-16=0\Leftrightarrow 4x+y-8=0\Rightarrow a+b=5.$$

Đáp án A.



3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng.

a. Cách 1:

Cho 2 đường thẳng $\begin{cases}\Delta: Ax+By+C=0\\ \Delta': A'x+B'y+C'=0\end{cases}$ khi đó:

+ Nếu $\frac{A}{A'}\ne\frac{B}{B'}\Rightarrow \Delta$ và Δ' cắt nhau.

+ Nếu $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\ne\frac{C}{C'}\Rightarrow \Delta$ và Δ' song song với nhau.

+ Nếu $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\Rightarrow \Delta$ và Δ' trùng nhau.

b. Cách 2:

Xét hệ gồm phương trình 2 đường thẳng $\begin{cases}\Delta; Ax+By+C=0\\ \Delta': A'x+B'y+C'=0\end{cases}$ (I), khi đó:

+ Nếu hệ (I) có 1 nghiệm $(x_0;y_0)\Rightarrow \Delta_1\cap\Delta_2=M(x_0;y_0)$

+ Nếu hệ (I) vô nghiệm $\Rightarrow \Delta_1//\Delta_2$

+ Nếu hệ (I) có vô số nghiệm $\Rightarrow \Delta_1\equiv\Delta_2$

Ví dụ 9: Trong mặt phẳng Oxy, cho các đường thẳng $d_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}$;

$d_2:\begin{cases}x=1+2t\\ y=3+t\end{cases}$; $d_3:-x+2y+5=0.$ Khi đó ta có

A. $d_1//d_2$. **B.** $d_2\equiv d_3$. **C.** $d_2//d_3$. **D.** $d_1\equiv d_3$.

Lời giải:

STUDY TIP

Nên đưa các đường thẳng về phương trình tổng quát trước khi xét vị trí tương đối.

$+\ d_1: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} \Leftrightarrow x+1 = 2(y-2) \Leftrightarrow x-2y+5=0\ \ (1)$

$+\ d_2: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3+t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} \Leftrightarrow x-1 = 2y-6 \Leftrightarrow x-2y+5=0\ \ (2)$

$+\ d_3: x-2y-5=0\ \ (3)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d_1 \equiv d_2$, loại phương án A.

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \dfrac{1}{1} = \dfrac{-2}{-2} \neq \dfrac{5}{-5} \Rightarrow d_2 // d_3$, loại B.

Vậy ta chọn đáp án C.

Ví dụ 10: Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 đường thẳng $d_1: 2x-m=0$ và $d_2: mx-y+3=0$ với m là tham số, biết tập hợp giao điểm của d_1 và d_2 là một parabol. Khi đó tọa độ đỉnh đỉnh của parabol đó là:

A. I(1;3). **B.** I(0;3). **C.** I(0;0). **D.** I(2;3).

Lời giải

$+$ Xét hệ $\begin{cases} 2x-m=0(1) \\ mx-y+3=0(2) \end{cases}$ (*) có $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ m & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - m.0 = -2$

$\Rightarrow D \neq 0 \Rightarrow$ Hệ có 1 nghiệm $\Rightarrow d_1$ luôn cắt d_2 tại 1 điểm

STUDY TIP

$(D): y = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ có đỉnh $I\left(\dfrac{-b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

+ Gọi giao điểm của d1 và d_2 là M(x;y) thỏa mãn (*)

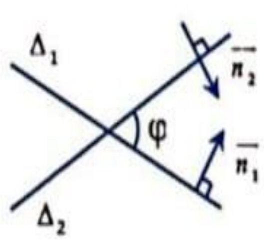
Từ phương trình (1) $\Rightarrow m = 2x$ thế vào phương trình (2)

$\Rightarrow 2.x.x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2x^2+3\ \ (3)$

Tọa độ M thỏa mãn phương trình (3) $\Rightarrow$ tập hợp điểm M là (P): $y = 2x^2+3$

$\Rightarrow I(0;3)$.

4. Góc giữa hai đường thẳng



a. Cho Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành 4 góc:

+ Nếu Δ_1 không vuông góc với Δ_2 thì góc nhọn trong 4 góc đó được gọi là góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) < 90^0$

+ Nếu $\Delta_1 \perp \Delta_2$ thì góc giữa chúng là 90^0.

+ Nếu $\Delta_1 // \Delta_2$ (hoặc $\Delta_1 \equiv \Delta_2$) góc giữa chúng là 0^0.

STUDY TIP

+ $\varphi:(\Delta_1,\Delta_2)$

+ Nếu $\varphi=(\Delta_1,\Delta_2)$

$\Rightarrow 0^0\le\varphi\le 90^0$

b. Cho 2 đường thẳng $\Delta_1: Ax+By+C=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(A;B)$

$\Delta_2: A'x+B'y+C'=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(A';B')$

Gọi α là góc giữa $\Delta_1 và \Delta_2$

$$\Rightarrow\varphi=(\Delta_1,\Delta_2)\Rightarrow\cos\varphi=\cos\left(\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\Rightarrow\cos\varphi=\frac{|AA'+BB'|}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}}\quad(6)$$

Chú ý:

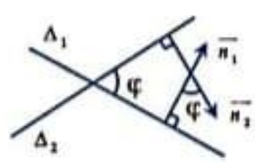
$\varphi=(\Delta_1,\Delta_2)\Rightarrow 0\le\varphi\le 90^0$

$\Delta_1\perp\Delta_2\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow AA'+BB'=0$

$\Delta_1: y=k_1x+m_1;\Delta_2: y=k_2x+m_2\Rightarrow\Delta_1\perp\Delta_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$

Ví dụ 11: Trong mặt phẳng Oxy, cho $d_1: x-2y+5=0$ và $d_2: 3x-y+1=0$, góc giữa d_1 và d_2 là:

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.



Lời giải:

+ VTPT của d_1 và d_2 lần lượt là: $\overrightarrow{n_1}=(1;-2);\overrightarrow{n_2}=(3;-1)$

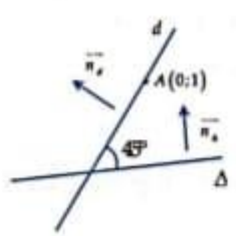
+ Gọi φ là góc giữa Δ_1,Δ_2. Khi đó:

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{|1.3+(-2).(-1)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=45^0.$$

Ví dụ 12: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng đi qua A(0;1) và tạo với đường thẳng $\Delta: x+2y+3=0$ một góc 45^0 có dạng $3x+by+c=0\,(b,c\in Z)$. Khi đó b + 3c là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải:



Cách 1:

+ Gọi VTPT của d qua A và tạo với Δ một góc 45^0 là $\overrightarrow{n_1}=(a;b)\ne\vec{0}$

+ Δ có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(1;2)$

+ Góc giữa d và Δ bằng 45^0

$$\Rightarrow\cos 45^0=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{5}}\Leftrightarrow 3a^2-8ab-3b^2=0\ (*)$$

TH1: $b=0 \Rightarrow a=0$ (loại)

TH2: $b \neq 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8\frac{a}{b} - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=3 \\ \frac{a}{b}=-\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3b \\ a=-\frac{1}{3}b \end{array}\right.$

- Với a = 3b chọn $b=1 \Rightarrow a=3 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(3;1)$

$\Rightarrow d: 3(x-0)+1(y-1)=0 \Rightarrow 3x+y-1=0$ (1)

- Với $a=-\frac{1}{3}b$, chọn $b=-3 \Rightarrow a=1 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(1;-3)$

$\Rightarrow d: 1(x-0)-3(y-1)=0 \Leftrightarrow x-3y+3=0$

Từ phương trình (1) $\Rightarrow d: 3x+y-1=0 \Rightarrow b+3c=-2 \Rightarrow$ chọn đáp án D.

Cách 2:

STUDY TIP

Đường thẳng qua $A(x_0;y_0)$ có dạng:

$\left[\begin{array}{ll} x_0=0 & (1) \\ y=k(x-x_0)+y_0 & (2) \end{array}\right.$ với k là hệ số góc

-TH (1) là d qua A và vuông góc Ox.

- TH (2) là d qua A và không vuông góc với Ox.

+ Đường thẳng d đi qua A(0;1) có dạng: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=k(x-0)+1 \end{array}\right.$

Với $d: x=0 \Rightarrow$ góc tạo với $\Delta: x+2y+3=0$ không phải 45^0 (loại)

Với $d: y=kx+1 \Leftrightarrow kx-y+1=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(k;-1)$

+ Đường thẳng $\Delta: x+2y+3=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(1;2)$ mà được tạo với Δ một góc 45 độ

$\Rightarrow \cos 45^0 = \frac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{5}} \Leftrightarrow 3k^2+8k-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-3 \\ k=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn đề bài trên:

- Với $k=-3 \Rightarrow d: 3x+y-1=0$
- Với $k=-\frac{1}{3} \Rightarrow d: x-3y+3=0$

Suy ra, phương trình thỏa mãn bài toán: $3x+y-1=0$

$\Rightarrow b=1; c=-1 \Rightarrow b+3c=-2.$

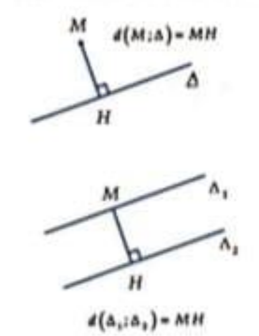
Lưu ý:

+ Với cách 2 thông thường ta sẽ giải đồng hợp đường thẳng d có dạng $y=k(x-0)+1$ trước, nếu đủ trường hợp cảy ra là thôi, nếu thiếu trường hợp thì mới kiểm tra đến đường thẳng x =0.

+ ở bài toán trên chỉ có 2 đường thẳng đi qua A thỏa mãn nên không cần xét đường thẳng x= 0 nữa, khi đó bài toán sec giải nhanh hơn.

5. Khoảng cách.

a. Cho điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ và đường thẳng $\Delta: Ax+By+Cz=0\left(A^2+B^2\neq 0\right)$



Khi đó khoảng cách từ M đến Δ được xác định theo công thức:

$$d_{(M;\Delta)}=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (7)$$

b. Cho hai đường thẳng song song với nhau lần lượt có phương trình $\Delta_1: Ax+By+C=0$ $\Delta_1: Ax+By+C'=0.$ Khi đó:

$$d_{(\Delta_1;\Delta_2)}=\frac{\left|C-C'\right|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (8)$$

Ví dụ 13: Trong mặt phẳng Oxy, cho $d: 2x-3y+1=0$ và $\Delta: -4x+6y-5=0.$ Khi đó khoảng cách từ d đến Δ là:

A. $\frac{7\sqrt{13}}{26}.$ **B.** $\frac{3\sqrt{13}}{26}.$ **C.** $\frac{3\sqrt{13}}{13}.$ **D.** 0.

Lời giải:

STUDY TIP

Khoảng cách giữa hai đường thẳng là khoảng cách từ 1 điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Cách 1:

+ Ta có: $\begin{cases} d: 2x-3y+1=0 & (1) \\ \Delta: -4x+6y-5=0 & (2) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{-4}=\frac{-3}{6}\neq\frac{1}{-5}\Rightarrow d//\Delta$

+ Chọn x= 0 thế vào (1) $\Rightarrow 2.0-3.y+1=0 \Rightarrow y=\frac{1}{3}\Rightarrow M\left(0;\frac{1}{3}\right)\in d$

$$\Rightarrow d_{(d;\Delta)}=d_{(M;\Delta)}=\frac{\left|-4.0+6.\frac{1}{3}-5\right|}{\sqrt{(-4)^2+6^2}}=\frac{3\sqrt{13}}{26}$$

Cách 2:

+ $\Delta: -4x+6y-5=0 \Leftrightarrow 2x-3y+\frac{5}{2}=0$ (1)

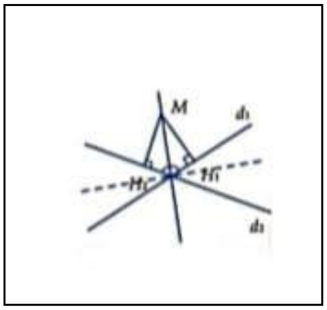
+ Đường thẳng $d: 2x-3y+1=0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d//\Delta \Rightarrow d_{(d;\Delta)}=\frac{\left|\frac{5}{2}-1\right|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{3\sqrt{13}}{26}.$

6. Đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau

Cho $d_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ và $d_2: A_2x+B_2y+C_2=0$

Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường thẳng cắt nhau d_1 và d_2 $\Leftrightarrow d_{(M;d_1)} = d_{(M;d_2)} \Leftrightarrow \dfrac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \dfrac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ (9)



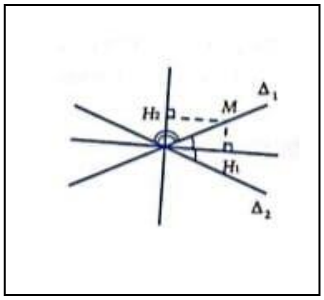
$\Rightarrow$ Phương trình (9) gọi là phương trình đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường thẳng cắt nhau d_1 và d_2.

Ví dụ 14: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường phân giác góc nhọn của góc tạo bởi 2 đường thẳng $\Delta_1: 3x+4y-3=0$ và $\Delta_2: 4x+3y-1=0$ là:

A. $x-y+2=0.$ **B.** $7x+7y-4=0.$

C. $x+y-2=0.$ **D.** $7x+7y+4=0.$

Lời giải:



Phương trình đường phân giác cần tìm là:

$$\frac{|3x+4y-3|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|4x+3y-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y+2=0 \\ 7x+7y-4=0 \end{array}\right.$$

+ Gọi phân giác 1 là $d_1: x-y+2=0$

Phân gíac 2 là $d_2: 7x+7y-4=0$

+ Chọn $M(1;0) \in \Delta_1$

Tính $d_{(M;d_1)} = \dfrac{|1+2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}; d_{(M;d_2)} = \dfrac{|7-2|}{\sqrt{7^2+7^2}} = \dfrac{3}{7\sqrt{2}} < \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow d_2: 7x+7y-4=0$ là đường phân giác góc nhọn

Đáp án B.

STUDY TIP

Viết phương trình đường phân giác của góc nhọn:

+ Viết phương trình 2 đường phân giác: phân giác 1 và phân giác 2.

+ Chọn $M \in \Delta_1$ tính $d_{(M;PG1)}$ và $d_{(M;PG2)}$.

Khi đó khoảng cách

7. Vị trí tương đối của 2 điểm đối với 1 đường thẳng

Cho đường thẳng d: Ax + By + C = 0 và 2 điểm $A(x_A;y_A); B(x_B;y_B)$

Xét tích $(Ax_A+By_A+C)(Ax_B+By_B+C)=a$. Khi này:

+ Nếu $a<0 \Rightarrow$ A và B nằm về 2 phía của đường thẳng d.

+ Nếu $a>0 \Rightarrow$ A và B nằm cùng phía của đường thẳng d.

+ Nếu $a=0 \Rightarrow$ A và B nằm trên đường thẳng d.

Ví dụ 15: Trong mặt phẳng Oxy, cho A(1;2); B(-3;5); C(-5;-6). Phương trình đường phân giác trong hạ từ A của ΔABC là:

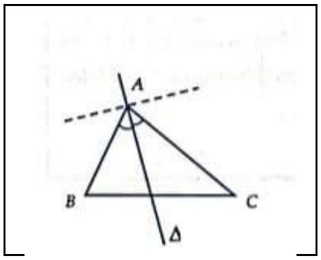
A. $x-7y+13=0.$ **B.** $7x+y-9=0.$

C. $x-7y-13=0.$ **D.** $7x+y+9=0.$

Lời giải

+ Đường thẳng AB: 3x + 4y – 11 =0

Đường thẳng AC: 4x – 3y + 2= 0



$\Rightarrow M\left(x;y\right)$ thuộc đường phân giác tạo bởi AB, AC

$$\Rightarrow d_{(M;AB)} = d_{(M;AC)} \Leftrightarrow \frac{|3x+4y-11|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|4x-3y+2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-7y+13=0 \\ 7x+y-9=0 \end{array}\right.$$

+ Xét đường thẳng $\Delta_1: x-7y+13=0$ với hai điểm B(-3;5) , C(-5;-6)

Có $(-3-7.5+13)(-5-7(-6)+13)<0 \Rightarrow$ B và C nằm về hai phía của đường thẳng Δ_1

$\Rightarrow$ Đường phân giác trong hạ từ A của $\triangle ABC$ là $\Delta_1: x-7y+13=0.$

Lưu ý:

+ Đường thẳng $\Delta_2: 7x+y-9=0$ ở trên là đường phân giác ngoài hạ từ đỉnh A của $\triangle ABC$.

+ Bạn có thể giải bài toán này bằng cách tìm chân đường phân giác trong hạ từ A xuống BC là điểm D $\Rightarrow$ DDuongf phân giác cần tìm qua A và B. (Xem phần tích có hướng của 2 vectơ.).

8. Một số phương pháp tham số hóa 1 điểm thuộc đường thẳng

a. $M \in Ox \Rightarrow M\left(a;0\right)$

b. $M \in Oy \Rightarrow M\left(0;b\right)$

c. $M \in d: y = ax+b \Rightarrow M\left(m;am+b\right)$

d. $M \in d: x = ay+b \Rightarrow M\left(am+b;m\right)$

e. $M \in d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \Rightarrow M\left(x_0+at; y_0+bt\right)$

STUDY TIP

Một số bài khi tham số hóa điểm dẫn đến các bài tập phức tạp, ta nên chuyển về phương trình dạng tham số.

Ví dụ 16: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 2x+3y-4=0$. Điểm $M \in d$ thì tọa độ có dang

A. $M\left(m;-2m+4\right)$. **B.** $M\left(-3m+4;m\right)$.

C. $M\left(2+3m;-2m\right)$. **D.** $M\left(0;2m+3m-4\right)$.

Lời giải:

Đường thẳng d: 2x + 3y – 4 = 0. Chọn $M\left(2;0\right) \in d$

$\Rightarrow d$ đi qua M(2;0) và có VTPT $\vec{n} = \left(2;3\right) \Rightarrow VTCP\ \vec{u} = \left(3;-2\right)$

$\Rightarrow d:\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -2t \end{cases}$ trong đó t là tham số.

$\Rightarrow M \in d \Rightarrow M\left(2+3t;-2t\right)$

Ví dụ 17: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d: 2x – y + 3 =0 và $\Delta: x+2y-6=0.$ Tìm M có hoành độ âm thuộc Δ sao cho khoảng cách từ M đến d là $\sqrt{5}.$ Khi đó được điểm $M\left(a;b\right)$. Tính a + b (với a< 0).

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -2.

+ $M \in \Delta: x+2y-6=0 \Leftrightarrow x=-2y+6$

$\Rightarrow M\left(-2m+6;m\right)$ với m là tham số.

+ $d_{(m;d)} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{\left|2\left(-2m+6\right)-m+3\right|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left|-5m+15\right| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \Rightarrow M\left(2;2\right) \\ m=4 \Rightarrow M\left(-2;4\right) \end{array}\right.$

Suy ra điểm M cần tìm là $M\left(-2;4\right) \Rightarrow a+b=2.$

B. Các dạng toán điển hình

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng $d:3x-y-6=0$ là đường thẳng

A. đi qua $M(0;-6)$ và có VTCP $\vec{u}=(3;-1)$

B. đi qua $B(0;-6)$; $C(-1;2)$

C. đi qua $D(2;0)$ và có VTPT $\vec{n}=(1;3)$

D. qua $N(2;0)$ và có hệ số góc là 3.

STUDY TIPS

Phương trình đường thẳng qua $N(x_0;y_0)$ và có hệ có góc k là: $y-y_0=k(x-x_0)$

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $N(2;0)$ và có hệ số góc là $k=3$ có phương trình là: $y-0=3(x-2)\Leftrightarrow 3x-y-6=0$

Đáp án D.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường thẳng d đi qua $A(1;-3)$ có VTCP là $\vec{u}=(-1;2)$ là

A. $\begin{cases}x=-1+t\\y=2-3t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-3+2t\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=3t\\y=-1-6t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\end{cases}$

STUDY TIPS

Cho 2 đường thẳng Δ_1,Δ_2:

$+\Delta_1\equiv\Delta_2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_1\\\Delta_2\end{cases}$ có vô số nghiệm

Lời giải

+ d đi qua qua $A(1;-3)$ có VTCP là $\vec{u}=(-1;2)\Rightarrow d:\begin{cases}x=1-t'\\y=-3+2t'\end{cases}$

Đến đây ta kiểm tra xem đường thẳng d có trùng với đường nào trong các phương án trên.

+ A. đường thẳng $b:\begin{cases}x=1+t\\y=-3+2t\end{cases}$ có VTPT $\overrightarrow{u'}=(1;-3)$ không cùng phương với $\vec{u}=(-1;2)$ nên loại.

+ B. đường thẳng $a:\begin{cases}x=-1+t\\y=2-3t\end{cases}$ có VTPT $\overrightarrow{u'}=(1;2)$ không cùng phương với $\vec{u}=(-1;2)$ nên loại.

+ C. đường thẳng $c:\begin{cases}x=3t\\y=-1-6t\end{cases}$ có VTPT $\overrightarrow{u'}=(3;-6)$ cùng phương với $\vec{u}=(-1;2)$ nên đường thẳng c song song hoặc trùng với đường thẳng d.

(Đến đây ta sẽ chọn một điểm bất kì thuộc đường thẳng d rồi thay vào phương trình đường c nếu thỏa mãn thì d trùng với c còn không thì d song song với c)

+ Từ $d:\begin{cases}x=1-t'\\y=-3+2t'\end{cases}$, giả sử chọn $t'=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}\Rightarrow M(1;-3)\in\Delta$ (Bạn có thể chọn giá trị t bất kì sao cho dễ tính toán)

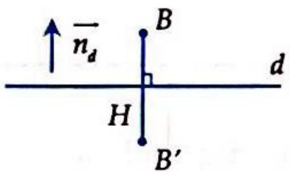
Thế vào đường thẳng $c:\begin{cases}x=3t\\y=-1-6t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=3t\\-3=-1-6t\end{cases}\Rightarrow t=\frac{1}{3}$ thỏa mãn

$\Rightarrow c\equiv d\Rightarrow$ phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=3t\\y=-1-6t\end{cases}$

(Tương tự như vậy ta sẽ thấy đường thẳng ở ý D song song với đường d)

Đáp án C

<u>Lưu ý:</u> Bạn có thể tìm hai đường thẳng trùng nhau bằng cách xét hệ phương trình của hai đường đó (nếu hệ đó có vô số nghiệm thì hai đường thẳng trùng nhau).



Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(1;3)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=4+t\end{cases}$.

Tọa độ điểm B đối xứng với A qua d là

A. $B(1;5)$ **B.** $B(1;-5)$ **C.** $B(-1;5)$ **D.** $B(-1;-5)$

Lời giải

STUDY TIPS

B đối xứng với A qua đường thẳng d $\Leftrightarrow$ H là trung điểm của AB với H là hình chiếu của A lên d

+ Gọi hình chiếu của A lên d là H $\Rightarrow H(t;4+t)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(t-1;t+1)$

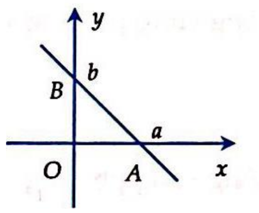
+ VTCP của d là $\vec{u}=(1;1)\Rightarrow\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t-1+t+1=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow H(0;4)$

+ B đối xứng với A qua d nên H là trung điểm của AB

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x_A+x_B}{2}=x_H\\\dfrac{y_A+y_B}{2}=y_H\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1+x_B}{2}=0\\\dfrac{3+y_B}{2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=-1\\y_B=5\end{cases}\Rightarrow B(-1;5)$$

<u>Lưu ý:</u> Bạn có thể viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với d $\Rightarrow H=\Delta\cap d$

Đáp án C.



Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng đi qua $M(1;2)$ và chắn trên 2 trục tọa độ hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau là

A. $x+y-3=0;\ 2x+y-4=0$ **B.** $x+y+3=0;\ x-y+1=0$

C. $x+y-3=0;\ x-y+1=0$ **D.** $x+2y-5=0;\ x-y+1=0$

Lời giải

STUDY TIPS

Đường thẳng đi qua $A(a;0);\ B(0;b)$ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

+ Giả sử đường thẳng cần tìm là d đi qua $M(1;2)$ cắt Ox, Oy lần lượt tại $A(a;0);\ B(0;b)\Rightarrow d:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

+ d qua M $\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1 \quad (1)$, mà $OA=OB\Rightarrow |a|=|b|\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right.$

- Với $a=b$ thế vào (1) $\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{a}=1\Rightarrow \frac{3}{a}=1\Rightarrow a=3\Rightarrow b=3$

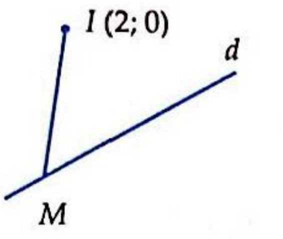
$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng cần tìm $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1\Leftrightarrow x+y-3=0$

- Với $a=-b$ thế vào (1) $\Rightarrow \frac{1}{a}-\frac{2}{a}=1\Rightarrow a=-1\Rightarrow b=1$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng cần tìm $\frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1\Leftrightarrow x-y+1=0$

Đáp án C

Lưu ý: Bạn có thể giải bằng cách thử từng đáp án để kiểm tra.



Ví dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: x+y-5=0$ và $I(2;0)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $MI=3$

A. $(2;3);\ (5;0)$ **B.** $(2;3);\ (-1;6)$

C. $(-1;6);\ (5;0)$ **D.** $(3;2);\ (2;3)$

Lời giải

Cách 1:

+ $M\in d: y=-x+5\Rightarrow M(m;-m+5)\Rightarrow \overrightarrow{MI}=(2--m;m-5)$

+ $MI=3\Leftrightarrow \left(2-m^2\right)+\left(-m+5\right)^2=9$

$\Leftrightarrow 4-4m+m^2+m^2-10m+25=9$

$\Leftrightarrow 2m^2-14m+20=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=5 \end{array}\right.\Rightarrow M(2;3);\ M(5;0)$

STUDY TIPS

Tìm $M \in d$ sao cho $IM = a$

- Cách 1

+ Bước 1: Tham số hóa M theo d

+ Bước 2: Từ $IM = a \Rightarrow$ kết quả

- Cách 2: $IM = a \Rightarrow I$ thuộc đường tròn (C) tâm I bán kính $R \equiv a \Rightarrow \{M\} = (C) \cap d$

(Xem lại khi đã học xong về phưng trình đường tròn)

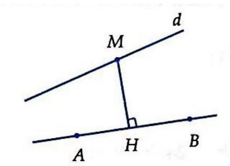
<u>**Cách 2:**</u> (dùng khi đã học phương trình đường tròn)

+ Ta có $IM = 3 \Rightarrow$ M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(2;0)$, bán kính $R = 3$

$\Rightarrow (C): (x-2)^2 + y^2 = 9$

+ Xét hệ $\begin{cases} d \\ (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x+5 \\ (x-2)^2 + y^2 = 9 \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow M(2;3);\ M(5;0)$

Đáp án A.



Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(1;1); B(4;-3)$, điểm $M_1(x_1;y_1); M_2(x_2;y_2)$ thuộc đường thẳng $dx - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ M đến AB là 6. Khi đó $x_1 + x_2$ là

A. $\frac{120}{11}$ **B.** $\frac{6}{11}$ **C.** $\frac{34}{11}$ **D.** $\frac{-70}{11}$

Lời giải

+ Phương trình đường thẳng AB: $4x + 3y - 7 = 0$

+ $M \in d: x = 2y + 1 \Rightarrow M(2t+1;t)$

Mà $d_{(M;AB)} = 6 \Rightarrow |11t - 3| = 30 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \frac{-27}{11} \end{array} \right.$

- Với $t = 3 \Rightarrow M(7;3)$

- Với $t = -\frac{27}{11} \Rightarrow M\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right)$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 7 - \frac{43}{11} = \frac{34}{11}$

Đáp án C

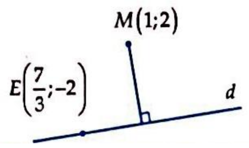
STUDY TIPS

Tìm $M \in d$ sao $d_{(M;\Delta)} = a$

Bước 1: Tham số hóa M theo d $\Rightarrow M(t)$

Bước 2: $d(M;\Delta) = a$ $\Rightarrow f(t) = 0 \Rightarrow t \Rightarrow M$

<u>**Lưu ý:**</u> Ví dụ 5 và Ví dụ 6 là hai bài toán tìm điểm cơ bản, nó là công cụ định hướng để ta giải quyết những bài toán tổng hợp khó hơn sau này.



Ví dụ 7: Trong mặt phẳng Oxy, một trong các đường thẳng qua $E\left(\frac{7}{3};-2\right)$ và cách $M(1;2)$ một khoảng là 4, có dạng $d: Ax+By-15=0$. Khi đó giá trị $A+B$ là

A. 1 **B.** – 1 **C.** 3 **D.** 7

STUDY TIPS

Viết phương trình đường thẳng d qua M và cách N một khoảng k.

- Bước 1:

Gọi VTPT của d là $\vec{n}(A;B)\neq\vec{0}$, suy ra phương trình đường thẳng d

$Ax+By+C=0$

- Bước 2:

Mà $d_{(N;d)}=k$

$\Rightarrow f(A;B)=0\Rightarrow A=kB$

Biện luận $\Rightarrow A,B\Rightarrow$ kết quả (phương trình $f(A;B)=0$ là phương trình đẳng cấp bậc 2 với ẩn A; B)

Lời giải

+ Gọi VTPT của d là $\vec{n}=(A;B)\neq\vec{0}$

+ d qua $E\left(\frac{7}{3};-2\right)\Rightarrow A\left(x-\frac{7}{3}\right)+B(y+2)=0$

$\Leftrightarrow 3Ax+3By-7A+6B=0$

+ Mà $d(M;d)=4\Leftrightarrow \frac{|3A+6B-7A+6B|}{\sqrt{9A^2+9B^2}}=4$

$\Leftrightarrow 8A^2+6AB=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=0\\4A=-3B\end{array}\right.$

- Với $A=0$, chọn $B=1$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $d: 3x+6=0\Leftrightarrow y+2=0$

- Với $4A=-3B$, chọn $A=3\Rightarrow B=-4$

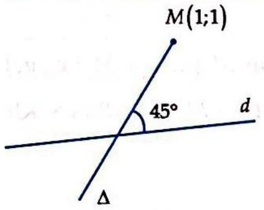
$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $d: 3x-4y-15=0$

Vậy $A+B=-1$

Đáp án B

<u>Lưu ý:</u> Với ví dụ này bạn có thể giải hệ điều kiện gồm:

$$\begin{cases}E\in d\\ d_{(M;d)}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{7}{3}A-2B-15=0\\ \frac{|A+2B-15|}{\sqrt{A^2+B^2}}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3\\B=-4\end{cases}$$



Ví dụ 8: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng Δ qua $M(1;1)$ và tạo với đường thẳng $d: 2x+3y+1=0$ một góc 45^0 có dạng $ax-5y+4=0$ và $a'x+y-6=0$. Khi đó giá trị $a+a'$ là

A. 4 **B.** 6 **C.** – 6 **D.** –4

Lời giải

Gọi VTPT của Δ là $\overrightarrow{n_1}=(a;b)\neq\vec{0}$, VTPT của d là $\overrightarrow{n_2}=(2;3)$

Mà góc giữa d và Δ là góc 45^0

STUDY TIPS

Phương pháp viết phương trình đường thẳng Δ qua điểm M và tạo với đường thẳng d một góc α

- Bước 1: Gọi VTPT của d là $\overrightarrow{n_\Delta}=(a;b)\neq\vec{0}$
- Bước 2: $\Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_\Delta}.\overrightarrow{n_d}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\Delta}\right|\left|\overrightarrow{n_d}\right|}$

$\Rightarrow ma^2+nab+pb^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=kb \\ a=k'b \end{array}\right.$

Chọn b $\Rightarrow \overrightarrow{n_\Delta}\Rightarrow\Delta$

$$\Rightarrow \cos 45^0=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|2a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2^2+3^2}}\Leftrightarrow 5a^2-5b^2-24ab=0\ (1)$$

- Với $b=0\Rightarrow 5a^2=0\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=(0;0)\Rightarrow$ loại

- Với $b\neq 0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 5\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-24\left(\dfrac{a}{b}\right)-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=5\\ \dfrac{a}{b}=-\dfrac{1}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5b\\ a=-\dfrac{1}{5}b\end{array}\right.$

+ Với a = 5b chọn $b=1\Rightarrow n_1=(5;1)\Rightarrow\Delta:5x+y-6=0$

+ Với $a=-\dfrac{1}{5}b$ chọn $b=-5\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(1;-5)\Rightarrow\Delta:x-5y+4=0$

$\Rightarrow a=1;\ a'=5\Rightarrow a+a'=6$

Đáp án B

<u>Lưu ý:</u>

1. Với ví dụ 7 và ví dụ 8 ở trên là bài toán viết phương trình đường thẳng khi chưa biết VTPT (VTCP) nên ta đặt VTPT là $\vec{n}=(a;b)\neq\vec{0}$ rồi khai thác giả thiết tìm mối liên hệ giữa a, b (a = kb). Chọn b $\Rightarrow a\Rightarrow$ VTCP $\Rightarrow$ kết quả.

STUDY TIPS

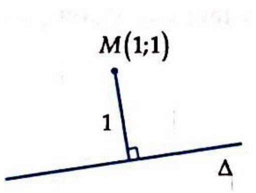
Đường thẳng qua $M(x_0;y_0)$ có dạng: $\Delta_1:y=k(x-x_0)+y_0$ và $\Delta_2:x=x_0$

(k là hệ số góc của Δ_1)

2. Bài này bạn cũng có thẻ sử dụng đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ là $\Delta_1:y=k(x-x_0)+y_0$ và $\Delta_2:x=x_0$

- Bước 1: Kiểm tra điều kiện Δ_2 với yêu cầu bài toán
- Bước 2: Từ giả thiết với $\Delta_1\Rightarrow$ phương trình $f(k)=0\Rightarrow k\Rightarrow\Delta_1$

Cái hay ở cách này là bạn chỉ có 1 ẩn k nhưng dễ bị quên mất trường hợp $\Delta_1:x=x_0\ (\Delta\perp Ox)$ nên khi giải mà thiếu trường hợp thì để ý và kiểm tra trường hợp Δ_1



Ví dụ 9: Trong mặt phẳng Oxy, có bao nhiêu đường thẳng song song với đường thẳng $\Delta:3x+4y-2=0$ và cách $M(1;1)$ một khoảng là 1?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

Lời giải

+ Gọi đường thẳng cần tìm là $d//\Delta\Rightarrow d:3x+4y+c=0\ (c\neq -2)$

STUDY TIPS

- Đường thẳng $d//\Delta: Ax+By+C=0$
$\Rightarrow d: Ax+By+C'(C\neq C')$

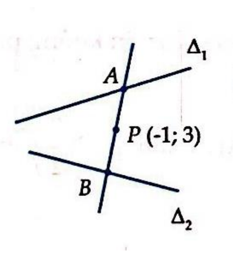
- Đường thẳng d có VTPT là $\vec{n}=(A;B)$
$\Rightarrow d: Ax+By+C=0$ (C là tham số)

+ Mà $d_{(M;d)}=1\Rightarrow \dfrac{|3+4+c|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1\Leftrightarrow |7+c|=5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-2(l)\\ c=-13(t/m)\end{array}\right.\Rightarrow$ có 1 đường thẳng thỏa mãn.

Đáp án B.

<u>**Lưu ý:**</u> Bạn có thể giải bài toán này bằng cách sau:

Vì $d//\Delta$ có VTPT là $\vec{n}=(3;4)\Rightarrow$ đường thẳng d có dạng $3x+4y+c=0$ (lưu ý là $d//\Delta\Rightarrow c\neq -2$) và làm tương tự.



Ví dụ 10: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\Delta_1:\begin{cases} x=1+t\\ y=4-2t\end{cases}$ và $\Delta_2: x-3y+9=0$, điểm $P(-1;3)$. Đường thẳng đi qua P và cắt Δ_1,Δ_2 tại A, B sao cho P là trung điểm của AB. Khi đó khoảng cách từ $M(1;-1)$ đến đường thẳng d là

A. $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** 5 **D.** $2\sqrt{5}$

Lời giải

STUDY TIPS

Nếu A, P, B thẳng hàng và

$PA=kPB\Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PB}\\ \overrightarrow{PA}=-k\overrightarrow{PB}\end{cases}$

+ $A\in\Delta_1\Rightarrow A(1+t;4-2t)$

+ $B\in\Delta_2: x=3y-9\Rightarrow B(3b-9;b)$

+ $P(-1;3)$ là trung điểm AB

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{1+t+3b-9}{2}=-1\\ \dfrac{4-2t+b}{2}=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} t+3b=6\\ -2t+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=0\\ b=2\end{cases}\Rightarrow A(1;4),\ B(-3;2)$$

$$\Rightarrow d:\dfrac{x-1}{-3-1}=\dfrac{y-4}{2-4}\Leftrightarrow d: x-2y+7=0$$

$$\Rightarrow d(M;d)=\dfrac{1-2(-1)+7}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

Đáp án D.

<u>**Lưu ý:**</u> Bài toán này có thể hỏi rộng hơn là: Viết phương trình đường thẳng d qua P cắt Δ_1,Δ_2 lần lượt tại A, B sao cho:

1. $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PB}$

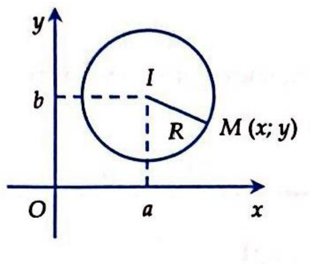
- Bước 1: Tham số hóa A, B theo Δ_1,Δ_2

- Bước 2: Từ hệ thức vecto $\Rightarrow$ tham số $\Rightarrow$ kết quả và làm tương tự như trên (do $P, A, B \in d$)

§2. Phương trình đường tròn

A. Lý thuyết

1. Phương trình đường tròn



+ Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) tâm $I(a;b)$; bán kính R

$\Rightarrow \forall M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow IM = R$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R \Leftrightarrow \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2}$ (1)

Phương trình (1) được gọi là phương trình (dạng chính tắc) của đường tròn $C(I;R)$

+ Từ $(1) \Rightarrow x^2+y^2-2ax = 2by+a^2+b^2-R^2 = 0$ (*)

Đặt $a^2+b^2-R^2 = c \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2-2ax-2by+c=0}$ (2)

$\Rightarrow$ Phương trình (2) với $a^2+b^2-c>0$ là phương trình (dạng tổng quát) đường tròn tâm $I(a;b)$; bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

STUDY TIPS

+ Đường tròn (C) tâm $I(a;b)$; bán kính R có phương trình (dạng chính tắc)
$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$

+ Phương trình
$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$
với $a^2+b^2-c>0$ là phương trình (dạng tổng quát) đường tròn tâm $I(a;b)$; bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

Ví dụ 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là phương trình đường tròn?

A. $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ **B.** $x^2+y^2-4x-6y-1=0$

C. $x^2+2y^2-4x-6y-1=0$ **D.** $2x^2+2y^2-4x-6y+1=0$

Lời giải

- Phương án A: Dạng phương trình (1), là đường tròn (C) tâm $I(2;1)$; bán kính R = 1.

- Phương án B: Dạng phương trình (2), có $a^2+b^2-c = 2^2+3^2+1>0 \Rightarrow$ là đường tròn

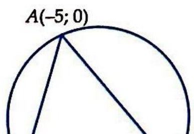
- Phương án C: Không đưa được về dạng phương trình (1) và (2) nên không phải là phương trình đường tròn.

- Phương án D: PT $\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-3y+\frac{1}{2}=0$ là đường tròn tâm $I\left(1;\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R=\sqrt{1^1+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

Đáp án C.

2.

$PA = kPB \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB} \\ \overrightarrow{PA} = -k\overrightarrow{PB} \end{cases}$



Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho phương trình đường tròn (C) đi qua 3 điểm $A(-5;0)$; $B(1;0)$; $C(-3;4)$ là:

A. $(x-2)^2+(y-1)^2=\sqrt{10}$ **B.** $(x-2)^2+(y+1)^2=10$

C. $x^2+y^2-4x+2y-5=0$ **D.** $x^2+y^2+4x-2y-5=0$

Lời giải

Cách 1: Gọi tâm của đường tròn là $I(a;b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-5-a)^2+b^2=(1-a)^2+b^2 \\ (-5-a)^2+b^2=(-3-a)^2+(4-b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow I(-2;1)$; bán kính $R=IA=\sqrt{10}$

$\Rightarrow$ đường tròn (C) có phương trình:

$$(x+2)^2+(y-1)^2=10 \Leftrightarrow x^2+y^2+4x-2y-5=0$$

Cách 2:

Gọi phương trình $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ $(a^2+b^2-c>0)$

Đường tròn (C) qua A, B, C

$$\Rightarrow \begin{cases} (-5)^2+0^2-2a.(-5)-2b.0+c=0 \\ 1^2+0^2-2.a.1-2.b.0+c=0 \\ (-3)^2+4^2-2a.(-3)-2b.4+c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10a+c=-25 \\ 2a-c=1 \\ 6a-8b+c=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=-5 \end{cases} \Rightarrow (C): x^2+y^2+4x-2y-5=0$$

Đáp án D.

Lưu ý:

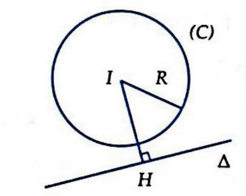
+ Bạn có thể tìm tâm (C) bằng cách tìm giao điểm của 2 đường trung trực của tam giác ABC

+ Đối với các phương án trong ví dụ này bạn có thể thử A, B, C vào các phương trình để tìm được phương trình đúng.

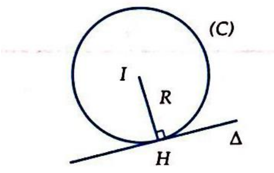
2. Vị trí tương đối của một đường thẳng với đường tròn, tiếp tuyến của đường tròn

a. Vị trí tương đối

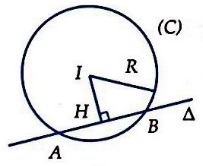
Cho đường tròn $(C): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ có tâm $I(a;b)$ và đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$



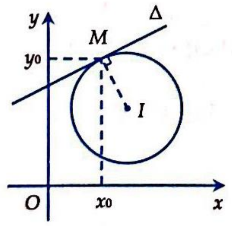
TH1: $d(I;\Delta) > R$



TH2: $d(I;\Delta) = R$



TH3: $d(I;\Delta) < R$



<u>Cách 1:</u> Xét $d(I;\Delta)=\dfrac{Aa+Bb+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

+ Nếu $d(I;\Delta)>R \Rightarrow \Delta$ và (C) không có điểm chung.

+ Nếu $d(I;\Delta)=R \Rightarrow \Delta$ tiếp xúc với (C) tại H (H là hình chiếu của I lên Δ). Khi này ta nói Δ là tiếp tuyến của (C) với H là tiếp điểm.

+ Nếu $d(I;\Delta)<R \Rightarrow \Delta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt (AB là một dây cung của đường tròn).

<u>Cách 2:</u> Xét hệ $\begin{cases}\Delta\\(C)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}Ax+By+C=0\\(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\end{cases} (1)$

+ Nếu hệ (1) vô nghiệm $\Rightarrow \Delta$ và (C) không có điểm chung

+ Nếu (1) có 1 nghiệm $(x_0;y_0) \Rightarrow \Delta$ tiếp xúc với (C) tại $H(x_0;y_0)$

+ Nếu (1) có 2 ngiệm $\Rightarrow \Delta$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B.

b. Tiếp tuyến của đường tròn $(\mathbf{C}):(\mathbf{x}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{y}-\mathbf{b})^2=\mathbf{R}^2$ tại điểm $\mathbf{M}(\mathbf{x_0};\mathbf{y_0})\in(\mathbf{C})$

Tiếp tuyến Δ tại $M(x_0;y_0)$ của (C) là đường thẳng qua $M(x_0;y_0)$ và vuông góc với MI $\Rightarrow$ có VTPT $\vec{n}=\overrightarrow{IM}=(x_0-a;y_0-b)$

$\Rightarrow$ phương trình Δ: $\boxed{(x_0-a)(x-x_0)+(y-b)(y-y_0)=0}$ (3)

$\Rightarrow (3)$ là phương trình tiếp tuyến của (C) tại M

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=4$ phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(3;-2)$ của (C) là $d:x+by+c=0$. Khi đó giá trị $b+c$ là

A. $b+c=-2$ **B.** $b+c=-3$ **C.** $b+c=-6$ **D.** $b+c=-5$

Lời giải

(C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=2$

$IM=\sqrt{2^2+0^2}=2=R \Rightarrow M\in(C)$

Tiếp tuyến của (C) tại M là đường thẳng Δ qua $M(3;-2)$ và có VTPT $\overrightarrow{IM}=(2;0)$

STUDY TIPS

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0;y_0)$ là:

$(x_0-a)(x-x_0)$
$+(y_0-b)(y-y_0)=0$

$\Rightarrow \Delta: 2(x-3)+0(y+2)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow b+c=-3$

Đáp án B.

<u>Lưu ý:</u> Bạn có thể áp dụng trực tiếp công thức (3) sẽ nhanh hơn:

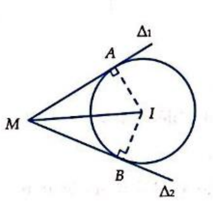
$(C):(x-1)^2+(y+2)^2=4;\ M(3;-2)$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến tại M của đường tròn (C) là:

$(3-1)(x-3)+[-2-(-2)][y-(-2)]=0 \Leftrightarrow x-3=0$

c. Tiếp tuyến của đường tròn (C) qua điểm M nằm ngoài đường tròn

Cho đường tròn (C) tâm I, bán kính R và điểm M thỏa mãn $IM > R$



Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho $(C): x^2+y^2-2x-2y-2=0$ và $M(3;5)$. Khi đó khoảng cách từ điểm $N(2;3)$ đến đường thẳng điqau M và tiếp xúc với (C) là

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 2 **D.** $\frac{3}{3}$

Lời giải

<u>Cách 1:</u>

+ (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+1^2+2}=2$

$IM=\sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}>R \Rightarrow$ Qua M có 2 tiếp tuyến đến (C)

+ Gọi $\vec{n}=(a;b)\neq 0$ là VTPT của đường thẳng Δ qua $M(3;5)$

$\Rightarrow \Delta: a(x-3)+b(y-5)=0 \Leftrightarrow ax+by-3a-5b=0$

+ Δ là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R$

$\Leftrightarrow \frac{|a+b-3a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow |-2a-4b|=2\sqrt{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow 3b^2+4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\frac{-4a}{3} \end{array}\right.$

- Với b =0 chọn a = 1

$\Rightarrow \vec{n}=(1;0) \Rightarrow \Delta_1: 1(x-3)+0(y-5)=0 \Leftrightarrow x-3=0$

- Với $b=\frac{-4a}{3}$ chọn a = 3

> **STUDY TIPS**
> $IM > R \Rightarrow$ qua M có 2 tiếp tuyến đến (C)

> **STUDY TIPS**
> Bài toán viết phương trình tiếp tuyến của $C(I;R)$ biết tiếp tuyến đi qua M là bài toán viết phương trình đường thẳng qua M và cách I một khoảng không đổi R.

$\Rightarrow b = -4 \Rightarrow \vec{n} = (3;-4) \Rightarrow \Delta_2 : 3x - 4y + 11 = 0$

Cách 2:

+ Δ qua $M(3;5)$ có hệ số góc k:

$y = k(x-3) + 5 \Leftrightarrow kx - y + 5 - 3k = 0$

+ Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow d(I;\Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|k - 1 + 5 - 3k|}{\sqrt{k^2+1}} = 2 \Leftrightarrow k = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow$ Tiếp tuyến là

$\Delta_1 : y = \dfrac{3}{4}(x-3) + 5 \Leftrightarrow 3x - 4y + 11 = 0 \Rightarrow d(N;\Delta_1) = 1$

Tiếp tuyến còn lại là đường thẳng $\Delta_2 : x - 3 = 0$

Thật vậy: $d(I;\Delta_2) = \dfrac{|1-3|}{\sqrt{1^2+0}} = 2 = R \Rightarrow d(N;\Delta_2) = 1$

STUDY TIPS
Qua điểm M nằm ngoài đường tròn (C) luôn có 2 tiếp tuyến đến C

Đáp án A.

<u>Tổng quát:</u> Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn qua $M(x_0;y_0)$

- Bước 1: Viết phương trình đường thẳng đi qua M có hệ số góc k:

$\Delta : y = k(x - x_0) + y_0$

- Bước 2: Buộc Δ tiếp xúc với (C) $\Rightarrow d(I;\Delta) = R \Leftrightarrow f(k) = 0$

$\Rightarrow$ 2 giá trị k tương ứng với 2 tiếp tuyến Δ_1 và Δ_2

(Nếu từ phương trình trên chỉ tìm được 1 tiếp tuyến thì tiếp tuyến thứ 2 là đường thẳng $\Delta_2 : x - x_0 = 0$)

B. Các dạng toán điển hình

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho

$(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 + m = 0$.

Số giá trị nguyên để (C_m) không phải là phương trình đường tròn là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

STUDY TIPS
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ không phải là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c \le 0$

Lời giải

(C_m) là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow m^2 + [2(m-2)]^2 - 6 - m > 0$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 17m + 10 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{17+\sqrt{89}}{10} \\ m < \dfrac{17-\sqrt{89}}{10} \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{17-\sqrt{89}}{10} \le m \le \frac{17+\sqrt{89}}{10} \Rightarrow$ có 2 giá trị nguyên thỏa mãn

Đáp án C.

Lời giải

Ta có $m^2 + \left[2(m+1)\right]^2 + 1 > 0\ \forall m \Rightarrow (C_m)$ là đường tròn với $\forall m$

Gọi tâm của (C_m) là $I(x;y) \Rightarrow \begin{cases} x = -m\ (1) \\ y = 2(m+1)\ (2) \end{cases}$

Từ $(1) \Rightarrow m = -x$ thế vào $(2) \Rightarrow y = 2(-x+1) \Rightarrow y = -2x + 2\ (3)$

$I(x;y)$ thỏa mãn phương trình (3) với $\forall m \Rightarrow$ tập hợp I là đường thẳng (3)

<u>Lưu ý:</u> Phương pháp tìm tập hợp tâm của đường tròn (C_m)

- Bước 1: Tìm điều kiện của m để (C_m) là đường tròn $\Rightarrow$ điều kiện (*)

- Bước 2: Gọi tâm là $I(x;y) \Rightarrow \begin{cases} x = f(m)(1) \\ y = h(m)(2) \end{cases}$

Rút m từ 1 phương trình thế vào phương trình còn lại $\Rightarrow f(x;y) = 0$

- Bước 3: Đối chiếu điều kiện (*)

Kết luận: Tập hợp là đường $\begin{cases} f(x;y) = 0 \\ t/m(*) \end{cases}$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 + 2mx - 4(m+1)y - 1 = 0$.

Khi đó tập hợp tâm của (C_m) khi m thay đổi là

A. một đường thẳng **B.** một đường tròn

C. một parabol **D.** một điểm cố định

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy, số điểm cố định mà đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - 4(m+1)y - 1 = 0$ luôn đi qua khi m thay đổi là

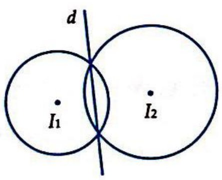
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Lời giải

Giả sử điểm cố định mà (C_m) luôn đi qua là $A(a;b)$

$\Rightarrow$ phương trình $a^2 + b^2 - 2am - 4b(m+1) - 1 = 0$ đúng với $\forall m$

$\Leftrightarrow (-2a - 4b)m + (a^2 + b^2 - 4b - 1) = 0$ đúng với $\forall m$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-4b=0 \\ a^2+b^2-4b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 5b^2-4b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{-2}{5} \\ b=\dfrac{-1}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

STUDY TIPS

$(I_1;R_1)$ cắt $(I_2;R_2)$

$\Rightarrow |R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2$

Vậy có hai điểm cố định mà đường tròn (C_m) luôn đi qua khi m thay đổi.

Đáp án C.

STUDY TIPS

Cho đường tròn $(C_1);(C_2)$ cắt nhau và luôn có phương trình $f(x;y)=0$ và $g(x;y)=0$. Khi đó phương trình đường thẳng qua điểm của $(C_1);(C_2)$ là:

$f(x;y)-g(x;y)=0$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 đường tròn:

$(C_1): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ và $(C_2): (x+1)^2+(y-1)^2=16$

Đường thẳng đi qua giao điểm của 2 đường tròn là:

A. $3x+2y+1=0$ **B.** $3x+2y-1=0$

C. $2x+3y-5=0$ **D.** $2x-3y-5=0$

Lời giải

(C_1) có tâm $I_1(1;-2)$, bán kính $R_1=3$

(C_2) có tâm $I_2(-1;1)$, bán kính $R_2=4$

$\Rightarrow |R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2 \Rightarrow (C_1)$ cắt (C_2)

Gọi điểm $M(x;y)$ thuộc đường thẳng cần tìm

$\Rightarrow$ Tọa độ M thỏa mãn hệ $\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y-4=0 \\ (x+1)^2+(y-1)^2=16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x+4y-4=0 \ (1) \\ x^2+y^2+2x-2y-14=0 \ (2) \end{cases}$$

Lấy $(1)-(2) \Rightarrow -4x+6y+10=0 \Leftrightarrow 2x-3y-5=0 \ (3)$

Nhận thấy $M(x;y)$ luôn thỏa mãn phương trình (3)

$\Rightarrow$ Đường thẳng qua giao điểm của hai đường tròn là: $2x-3y-5=0$

Đáp án D.

<u>Lưu ý:</u> Bạn có thể giải bài này bằng cách giải hệ $\begin{cases} (C_1) \\ (C_2) \end{cases} \Rightarrow$ 2 giao điểm A và B và viết phương trình đường thẳng qua AB. Tuy nhiên cách này sẽ dài hơn đặc biệt là nếu tọa độ A và B lẻ nên không phù hợp khi làm bài trắc nghiệm.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ và $(C_2): x^2+y^2=1$. Đường tròn (C) đi qua giao điểm $(C_1),(C_2)$ và $A(1;2)$ có tâm là $I(m;n)$. Khi đó giá trị $m+n$ là:

A. 3 **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** 4 **D.** $\frac{-4}{3}$

Lời giải

STUDY TIPS

Phương trình chùm đường tròn đi qua giao điểm của 2 đường tròn $(C_1): f(x;y)=0$ và $(C_2): g(x;y)=0$ là: $f(x;y)+g(x;y)=0$

Phương trình đường tròn (C) qua giao điểm của (C_1) và (C_2) có dạng:

$a\left(x^2+y^2-2x+4y-4\right)+b\left(x^2+y^2-1\right)=0\ (*)\ (a+b\neq 0)$

Đường tròn này qua $A(1;2)$

$\Rightarrow a\left(1^2+2^2-2+8-4\right)+b\left(1^2+2^2-1\right)=0 \Leftrightarrow 7a+4b=0$

Chọn $a=1 \Rightarrow b=\frac{-7}{4} \Rightarrow (C): x^2+y^2-2x+4y-4-\frac{-7}{4}\left(x^2+y^2-1\right)=0$

$(C): \frac{-3}{4}x^2-\frac{3}{4}y^2-2x+4y-\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{8}{3}x-\frac{16}{3}y+3=0$

$\Rightarrow (C)$ có tâm $I\left(\frac{-4}{3};\frac{8}{3}\right)$, bán kính $R=\sqrt{\left(\frac{-4}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2-3}=\frac{\sqrt{53}}{3}$

$\Rightarrow m+n=\frac{-4}{3}+\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$

Đáp án B.

Lưu ý:

+ Bạn có thể giải trực tiếp bằng cách tìm giao điểm của (C_1) và (C_2) là B và C rồi tìm tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (bạn đọc tự giải).

+ Phương pháp trên thường sử dụng trong các bài toán viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của 2 đường tròn và thỏa mãn điều kiện nào đó.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn đi qua $A(3;1)$; $B(5;5)$ và tâm nằm trên trục hoành có chu vi là:

A. 100 **B.** 100π **C.** $2\sqrt{50}\pi$ **D.** $2\sqrt{50}$

Lời giải

Gọi đường tròn cần tìm là (C) có tâm $I\in Ox \Rightarrow I(a;0)$

STUDY TIPS

Cho $C(I;R)$

+ Chu vi: $2\pi R$

Đường tròn qua A, B $\Rightarrow IA = IB \Leftrightarrow a = 10 \Rightarrow I(10;0)$

$\Rightarrow$ Bán kính $R = IA = \sqrt{(10-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{50}$

Chu vi là: $C = 2\pi R = 2\sqrt{50}\pi$

Đáp án C

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn (C) đi qua $A(1;1)$; $B(3;3)$ và ... thẳng $\Delta: x - 5 = 0$ có phương trình là:

A. ... $)^2 = 4$ và $(x-5)^2 + (y-9)^2 = 10$

B. ... $)^2 = 2$ và $(x+5)^2 + (y-9)^2 = 100$

C. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 100$

D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ và $(x+5)^2 + (y-9)^2 = 100$

Lời giải

Gọi tâm đường tròn (C) là tâm $I(a;b)$

(C) qua A, B $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow (1-a)^2 + (1-b)^2 = (3-a)^2 + (3-b)^2 \Leftrightarrow a + b = 4\ (1)$

(C) tiếp xúc với $\Delta \Rightarrow d(I;\Delta)$

$\Leftrightarrow \dfrac{|a-5|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2}\ (2)$

Từ $(1) \Rightarrow b = 4 - a$ thế vào

$(2) \Rightarrow |a-5| = \sqrt{(1-a)^2 + [1-(4-a)]^2}$

$\Leftrightarrow a^2 + 2a - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -5 \\ a = 3 \end{array}\right.$

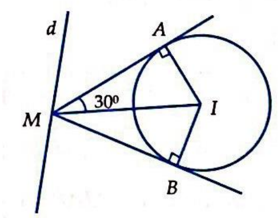
- Với $a = 3 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow (C)$ có tâm $I(3;1)$ và bán kính

$R = IA = \sqrt{(1-3)^2 + (1-1)^2} = 2 \Rightarrow (C): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

- Với $a = -5 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow (C)$ có tâm $I(-5;9)$ và bán kính

$R = \sqrt{(1+5)^2 + (1-9)^2} = 10 \Rightarrow (C): (x+5)^2 + (y-9)^2 = 100$

Đáp án D.

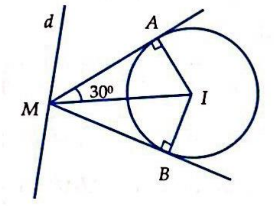


Ví dụ 8: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(3;5)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến đến (C) với A, B là tiếp điểm. Viết phương trình đường thẳng AB.

A. $2x + 3y + 17 = 0$ **B.** $2x + 3y - 17 = 0$

C. $2x + 3y + 16 = 0$ **D.** $2x + 3y - 16 = 0$

Lời giải Vậy phương trình đường thẳng AB là $2x+3y-17=0$



Ví dụ 9: Trong mặt phẳng Oxy, có bao nhiêu điểm $M\in d: x-y-3=0$ mà từ M kẻ được đến $(C): x^2+y^2-2x-4y+1=0$ hai tiếp tuyến mà hai tiếp tuyến đó tạo với nhau một góc 60^0

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Gọi hai tiếp điểm là A và B

(C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=2$

$M\in d: y=x-3 \Rightarrow M(m;m-3)$

MA tạo với MB một góc $60^0 \Rightarrow AMB=60^0$ hoặc $AMB=120^0$

- TH1: $AMB=60^0 \Rightarrow AMI=30^0 \Rightarrow \sin 30^0=\dfrac{AI}{IM}$

$IM=\sqrt{13}>R\Rightarrow$ Từ M có 2 tiếp tuyến đến (C)

Xét ΔAIM vuông góc tại A có

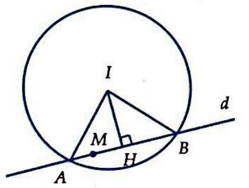
$AI=R=3;\ IM=\sqrt{13}$

$\Rightarrow AM=\sqrt{IM^2-AI^2}=\sqrt{13-3^2}=2$

Mà $AM=MB=2$ (tính chất tiếp tuyến đường tròn)

$\Rightarrow$ A, B cách điểm M một khoảng là 2 $\Rightarrow$ A, B nằm trên đường tròn (C_1) có tâm $M(3;5)$ và bán kính $R_1=MA=2$

$\Rightarrow (C_1): (x-3)^2$ ... $x-10y+30=0$



Tọa độ A, B thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y-4=0\ (1) \\ x^2+y^2-6x-10y+30=0\ (2) \end{cases}$$

Lấy

$(1)-(2)\Rightarrow 4x+6y-34=0 \Leftrightarrow 2x+3y-17=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{(m-1)^2+(m-5)^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right. \Rightarrow$ có 2 điểm M thỏa mãn (1)

- TH2: $\widehat{AMB}=120^0 \Rightarrow \widehat{AMI}=60^0 \Rightarrow \sin 60^0=\frac{AI}{IM}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{\sqrt{(m-1)^2+(m-5)^2}} \Leftrightarrow 6m^2-36m+62=0$ vô nghiệm (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ có 2 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán

Đáp án C

<u>Lưu ý:</u> Đối với ví dụ này bạn đọc phải nhớ có 2 trường hợp

Lời gi

Đường tròn (C có tâm $I(3;3)$,

> **STUDY TIPS**
>
> + $\sin \widehat{AIB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \widehat{AIB}=90^0$
>
> + $a.b \le \frac{a^2+b^2}{2}\ \forall a,b$
>
> Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

... mặt phẳng Oxy, đường thẳng qua $M(6;2)$ và cắt ... $y+14=0$ tại 2 điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$ là:

... $-26=0$ **B.** $x=2$ và $3x+4y-26=0$

C. $y=2$ và $3x+4y-30=0$ **D.** $x=2$ và $3x+4y-30=0$

bán kính $R=\sqrt{3^2+3^2-14}=2$

Gọi H là trung điểm AB $\Rightarrow IH \perp AB;\ HA=\frac{AB}{2}=\sqrt{3}$

ΔAIH vuông tại H $\Rightarrow IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1=d(I;d)$

$\Rightarrow$ đường thẳng d đi qua $M(6;2)$ và cách $I(3;3)$ một khoảng là 1

Gọi VTPT của d là $\vec{n}=(a;b)\neq\vec{0}$

$\Rightarrow d: a(x-6)+b(y-2)=0 \Leftrightarrow ax+by-6a-2b=0$

Mà $d(I;d)=1=\frac{|3a+3b-6a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1 \Leftrightarrow 8a^2-6ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\frac{3}{4}b \end{array}\right.$

- Với $a=0$ chọn $b=1 \Rightarrow d: y-2=0 \quad (1)$

- Với $a=\frac{3}{4}b$ chọn $b=4 \Rightarrow a=3 \Rightarrow d: 3x+4y-26=0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta chọn đáp án A

Đáp án A.

Lưu ý: Bài toán viết phương trình đường thẳng d qua M cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A, B thỏa mãn tính chất K ta thường làm như sau:

+ Bước 1: Từ tính chất K, tính $IH = a$ (với I là tâm (C), H là trung điểm AB)

+ Bước 2: Viết phương trình d qua M cách I một khoảng a $\Rightarrow$ kết quả

$$\Rightarrow d(I;d) = IH = 1 \Leftrightarrow \frac{|-2-2m-2m+3|}{\sqrt{1^2+m^2}} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0\,(tm) \\ m = \frac{8}{15}\,(ktm) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ có 1 giá trị m nguyên

Cách 2: $S_{IAB} = AH.IH \le \frac{AH^2+IH^2}{2} = \frac{AI^2}{2} = \frac{R^2}{2}$

$\max S_{IAB} = \frac{R^2}{2} \Leftrightarrow AH = IH \Leftrightarrow \Delta IAH$ vuông cân tại H

$\Rightarrow IH = \frac{R}{\sqrt{2}} = 1$, làm tương tự như trên ta được kết quả

Lời giải

Ví dụ 11: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng $d: x+my-2m+3=0$. Gọi I là tâm của (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho diện tích ΔIAB là lớn nhất

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Đáp án B

Cách 1: Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2)$, bán kính $R = \sqrt{2}$

Giả sử $d \cap (C)$ tại 2 điểm A, B

$$\Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{2}.IA.IB.\sin AIB$$

$$= \frac{1}{2}.R^2.\sin AIB \le \frac{1}{2}.R^2 \Rightarrow \max S_{IAB} = \frac{1}{2}R^2 \Leftrightarrow AIB = 90^0$$

$\Rightarrow AIH = 45^0$ (H là trung điểm AB)

$$\Rightarrow IH = AI.\cos 45^0 = \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

C. Bài tập rèn luyện kĩ năng

Xem đáp án chi tiết tại trang

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-6x+8y+9=0$. Tâm và bán kính đường tròn là

A. $I(6;8)$ và $R = \sqrt{19}$ **B.** $I(-3;4)$ và $R = 4$

C. $I(3;-4)$ và $R = 9$ **D.** $I(3;-4)$ và $R = 4$

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(2;3)$ và bán kính $R = 6$. Phương trình nào là phương trình đường tròn (C)?

A. $(x-2)^2+(y-3)^2 = 6$

B. $(x-2)^2+(y-3)^2=36$

C. $x^2+y^2-4x-6y-23=0$

D. Cả B và C

Câu 3: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn?

$(1)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=0$

$(2)\ (x-1)^2+(y-1)^2=8$

$(3)\ (x+6)^2+(y-3)^2=25$

A. Chỉ (1) và (3) **B.** Chỉ (2) và (3)

C. Cả (1); (2); (3) **D.** Chỉ (1) và (2)

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình tổng quát của đường tròn (C) có tâm $I(0;-1)$ và đi qua $A(1;4)$ là:

A. $x^2+y^2+2y-25=0$

B. $x^2+(y+1)^2=26$

C. Cả A và B

D. $x^2+y^2-2y+27=0$

Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường tròn (C) có đường kính AB với $A(2;8)$ và $B(6;-4)$ là:

A. $(x+2)^2+(y+6)^2=212$

B. $(x+4)^2+(y+6)^2=2\sqrt{10}$

C. $(x-4)^2+(y-2)^2=40$

D. $(x+4)^2+(y+2)^2=40$

Câu 6: Trong mặt phẳng Oxy, có bao nhiêu đường tròn (C) đi qua $A(-2;4)$ và $B(0;3)$, tâm I thuộc đường thẳng $d: x+2y-5=0$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** Vô số

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình chính tắc của đường tròn (C) có tâm $I(-4;-3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 4x+y-6=0$ là:

A. $(x-4)^2+(y-3)^2=\frac{625}{17}$

B. $(x+4)^2+(y+3)^2=\frac{169}{17}$

C. $(x+4)^2+(y+3)^2=\frac{625}{17}$

D. $(x-4)^2+(y-3)^2=\frac{169}{17}$

Câu 8: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường tròn (C) có tâm I nằm trên đường thẳng $d: x-2y+6=0$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ là

A. $(C):(x-6)^2+(y-6)^2=36$

B. $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=4$

C. $(C_1):(x+6)^2+(y+6)^2=36$

Hoặc $(C_2):(x+2)^2+(y-2)^2=4$

D. $(C_1):(x-6)^2+(y-6)^2=36$

Hoặc $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=4$

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: x-3y=0$ tiếp xúc với đường thẳng $d: x-y+8=0$ tại $A(-4;4)$. Có bao nhiêu đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán?

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** vô số

Câu 10: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=t\end{cases}$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: 2x+y+3=0$ và $d_2: 2x+y+3=0$ và $d_2: -x-2y+4=0$ là:

A. $(x-4)^2+(y-3)^2=\frac{49}{5}$

B. $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{5}$

C. Cả A và B

D. $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{5}$

Câu 11: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường tròn (C) đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(4;-3)$, $C(3;5)$ có dạng $x^2+y^2-ax-by+c=0$. Tính $P=a+b+c$

A. $\frac{-128}{9}$ **B.** $\frac{-9}{8}$ **C.** $\frac{16}{9}$ **D.** $\frac{8}{9}$

Câu 12: Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC biết tạo độ đỉnh $A(-3;7)$. Trực tâm $H(3;-1)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;0)$ khi đó tọa độ đỉnh $C(a;b)$ biết hoành độ điểm C dương khi đó giá trị $a+b$ là

A. $1+\sqrt{65}$ **B.** $1-\sqrt{65}$

C. $1+2\sqrt{65}$ **D.** $1-2\sqrt{65}$

Câu 13: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x+4y+3=0$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(0;-3)$ là $ax+by-3=0$ thì:

A. $a+b=-3$ **B.** $a+b=0$

C. $a+b=3$ **D.** $a+b=2$

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-3)^2=2$. Phương trình tiếp tuyến d của (C) đi qua $M(-1;3)$ có dạng $ax+by+c=0$. Tính $\frac{a}{b}$.

A. $\sqrt{2}$ **B.** $-\sqrt{2}$ **C.** ± 2 **D.** $\pm\sqrt{2}$

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-8x-4y+18=0$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: x-y=0$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** Vô số

Câu 16: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x+4)^2+y^2=5$. Phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: 2x-y+1=0$ là: $\Delta_1: x+2y+a=0$ và $\Delta_2: x+2y+b=0$. Khi đó:

A. $a+b=10$ **B.** $a+b=8$

C. $a+b=-10$ **D.** $a+b=-8$

Câu 17: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-5)^2+(y-1)^2=34$. Số tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng $d: x-4y+7=0$ một góc $\alpha=45^0$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** vô số **D.** 2

Câu 18: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x+4y-20=0$ với đường thẳng $\Delta: 2x-y+3=0$. Qua $M\in\Delta$, kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) với A, B là tiếp điểm. Tìm M biết $AB=4\sqrt{5}$

A. $M\left(1-2\sqrt{5};-2+\sqrt{5}\right)$ và $M\left(1-2\sqrt{5};\,-2-\sqrt{5}\right)$

B. $M\left(-2+\sqrt{5};-1+2\sqrt{5}\right)$ và $M\left(1-2\sqrt{5};\,-2-\sqrt{5}\right)$

C. $M\left(-1+2\sqrt{5};-2+\sqrt{5}\right)$ và $M\left(-1-2\sqrt{5};-2-\sqrt{5}\right)$

D. $M\left(-2-2\sqrt{5};-2+\sqrt{5}\right)$ và $M\left(-1-2\sqrt{5};-1+2\sqrt{5}\right)$

Câu 19: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+8x-6y+5=0$ với đường thẳng $\Delta: x-y-1=0$. Qua $M\in\Delta$, kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) với AB là tiếp điểm để ΔMAB đều biết $M(x_M;y_M)$ và $x_M>0$. Khi đó x_M-y_M là:

A. $x_M-y_M=-1$ **B.** $x_M-y_M=1$

C. $x_M - y_M = 4\sqrt{6} - 1$ **D.** $x_M - y_M = 4\sqrt{6}$

Câu 20: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 16$ với đường thẳng $\Delta: x - 2y = 0$. Qua $M \in \Delta$, kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB đến (C) với A, B là tiếp điểm. Điểm M thuộc cung phần tư thứ mấy? Biết $S_{\Delta AMB} = \frac{108}{25}$

A. Thứ I và thứ II **B.** Thứ II và thứ IV

C. Thứ I và thứ III **D.** Thứ II và thứ III

Câu 21: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 10x - 8y + 1 = 0$ với đường thẳng $\Delta: -x + y - 5 = 0$. Qua M thuộc đường thẳng Δ, kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là tiếp điểm. Số điểm M thỏa mãn để $S_{\Delta IAB}$ đạt giá trị lớn nhất (với I là tâm đường tròn (C)) là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Câu 22: Trong mặt phẳng Oxy, cho $M(2;3)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$. Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến (C) với A, B là tiếp điểm. Độ dài dây cung AB bằng

A. $\frac{15\sqrt{34}}{7}$ **B.** $\frac{34\sqrt{15}}{7}$

C. $\frac{90}{7}$ **D.** $\frac{25}{2}$

Câu 23: Trong mặt phẳng Oxy, lập phương trình đường thẳng d đi qua $M(4;0)$ cắt đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm AB.

A. $x + 2y - 4 = 0$ **B.** $x - 2y - 4 = 0$

C. $x - 2y + 4 = 0$ **D.** $x + 2y + 4 = 0$

Câu 24: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 8x + 10y + 16 = 0$. Đường thẳng d đi qua $M(-1;-7)$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$ có dạng $ax + by + a + 7b = 0$. Tính $P = \frac{b}{a}$

A. $P = 0$ hoặc $P = \frac{12}{5}$ **B.** $P = 0$ hoặc $P = \frac{5}{12}$

C. $P = \pm\frac{12}{5}$ **D.** $P = 0$ hoặc $P = \frac{-12}{5}$

Câu 25: Trong mặt phẳng Oxy, lập phương trình đường thẳng d đi qua $M(2;-2)$ cắt đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho diện tích $\Delta IAB = 1$ với I là tâm đường tròn (C).

A. $x - 2 = 0$ và $3x + 4y - 2 = 0$

B. $x - 2 = 0$ và $4x + 3y - 2 = 0$

C. $y - 2 = 0$ và $4x + 3y - 2 = 0$

D. $y - 2 = 0$ và $3x + 4y - 2 = 0$

Câu 26: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 12$. Đường thẳng d đi qua $M(3;-1)$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔIAB đều (I là tâm đường tròn (C)). Số đường thẳng d thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

Câu 27: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$. Đường thẳng d đi qua $M(1;3)$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Giá trị lớn nhất của diện tích ΔIAB là:

A. $\frac{25}{2}$ **B.** 25 **C.** $\frac{25}{4}$ **D.** $\frac{25}{3}$

Câu 28: Với giá trị nào của tham số m thì $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 6(m-2)y - 16m + 26 = 0$ là đường tròn?

A. $\forall m \in \mathbb{R}$

B. $M \neq 1$

C. $m \in \left(-\infty; \frac{-1}{5}\right] \cup [1; +\infty)$

D. $m \in \left(-\infty; \frac{-1}{5}\right) \cup (1; +\infty)$

Câu 29: Trong mặt phẳng Oxy, cho $(C_m): x^2 + y^2 + 2mx + 8(m-3)y - 28m + 17 = 0$.

Tập hợp của (C_m) khi m thay đổi là:

A. $y = 2x + 6$ **B.** $y = x + 3$

C. $y = 4x + 12$ **D.** $y = 4x - 12$

Câu 30: Trong mặt phẳng Oxy, cho $(C_m): x^2 + y^2 - 2(m+1)x - 4(m-2)y + m + \frac{23}{4} = 0$

Số điểm cố định mà (C_m) luôn đi qua là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 31: Trong mặt phẳng Oxy, cho $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - 2my + m - 1 = 0$. Gọi S là tập hợp các giá trị m để (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $d: x + 2y + 5 = 0$. Tính tổng các phần tử của S.

A. $\sqrt{745}$ **B.** $-\sqrt{745}$ **C.** 25 **D.** $\frac{25}{2}$

Câu 32: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ và đường thẳng $\Delta: (m-3)x + y + 2(m-3) = 0$. Tính giá trị của m để trên Δ tồn tại duy nhất một điểm M để từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là tiếp điểm sao cho diện tích ΔIAB đạt GTLN với I là tâm đường tròn.

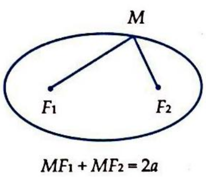
A. 24 **B.** 25 **C.** 26 **D.** 27

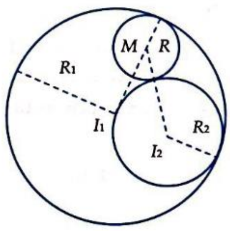
STUDY TIPS

+ Cho F_1, F_2 cố định, a không đổi. Tập hợp M thỏa mãn:

$MF_1 + MF_2 = 2a > 0$ là đường elip

$+(E): \{M \setminus MF_1 + MF_2 = 2a\}$





§3. Phương trình đường elip

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Elip là tập hợp tất cả những điểm thuộc mặt phẳng và tổng khoảng cách tới hai điểm cố định F_1, F_2 luôn là một số dương không đổi 2a.

Khi đó:

+ F_1, F_2 gọi là tiêu điểm của elip

+ $F_1F_2 = 2c\ (0 < c < a)$ gọi là tiêu cự của elip

+ Tỉ số $e = \frac{c}{a} < 1$ gọi là tâm sai

Ví dụ 1: Cho 2 đường tròn (C_1) và (C_2) thỏa mãn (C_2) qua tâm (C_1). Tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc ngoài với (C_2) và tiếp xúc trong với (C_1) là

A. một đường thẳng　　**B.** một đường tròn

C. một đường parabol　　**D.** một đường elip

Lời giải

+ Gọi đường tròn tiếp xúc ngoài với (C_2) và tiếp xúc trong với (C_1) là (C_m) có tâm M và bán kính là R.

(C_1) có tâm I_1 và bán kính R_1

(C_2) có tâm I_2 và bán kính R_2

+ Do (C_m) tiếp xúc trong với $(C_1) \Rightarrow MI_1 = R_1 - R$

(C_m) tiếp xúc ngoài với $(C_2) \Rightarrow MI_2 = R_2 + R$

$\Rightarrow MI_1 + MI_2 = R_1 + R_2\ (*)$

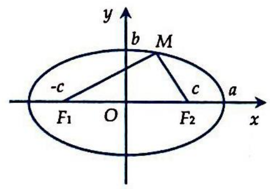
Do $(C_1),(C_2)$ cố định nên I_1, I_2 cố định và $R_1 + R_2 = 2a > 0$ là số không đổi nên $(*) \Rightarrow$ Tổng khoảng cách từ M đến 2 điểm cố định I_1, I_2 là một số dương không đổi $2a = R_1 + R_2$

$\Rightarrow$ Tập hợp M là một đường elip (tiêu điểm I_1, I_2)

Đáp án D.

2. Phương trình elip

$a > c > 0\ \forall M(x;y)$ thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$ ta được



$\begin{cases} MF_1 = a + \dfrac{cx}{a} \\ MF_2 = a - \dfrac{cx}{a} \end{cases} (1)$ gọi lá bán kính qua tiêu điểm của M

+ Từ $MF_1 = a + \dfrac{cx}{a} \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \dfrac{cx}{a} \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2x^2 = (a^2 - c^2)a^2$

Đặt $b^2 = a^2 - c^2 > 0 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}\ (2)$

Phương trình (2) được gọi là phương trình chính tắc của elip có:

+ Tiêu điểm $F_1(-c;0);\ F_2(c;0)$

+ Tiêu cự $F_1F_2 = c_1c_2$

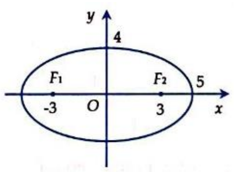
+ Tâm sai $e = \dfrac{c}{a}$

Lưu ý: (1) được chứng minh trong sách giáo khoa Hình học lớp 10 nâng cao

Ví dụ 2: Cho $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Một tiêu điểm của (E) có tọa độ là

A. $F_1(3;0)$ **B.** $F_1(0;-3)$ **C.** $F_1(-3;0)$ **D.** $F_1(0;5)$

Lời giải



Ta có $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow F_1(-3;0)$

Đáp án C.

Ví dụ 3: Cho $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Có bao nhiêu điểm $M \in (E)$ sao cho $MF_1 = 2MF_2$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Gọi $M(x;y) \in (E)$

Ta có $a = 5;\ b = 4;\ c = 3 \Rightarrow MF_1 = a + \dfrac{cx}{a} = 5 + \dfrac{3x}{5};\ MF_2 = a - \dfrac{cx}{a} = 5 - \dfrac{3x}{5}$

$$MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow 5 + \frac{3x}{5} = 2\left(5 - \frac{3x}{5}\right) \Rightarrow x = \frac{25}{9} \Rightarrow \frac{\left(\frac{25}{9}\right)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{8\sqrt{14}}{9}$$

+ Trong mặt phẳng Oxy, cho $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$ và độ dài không đổi 2a với

STUDY TIPS

Phương trình chính tắc của elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases}$.

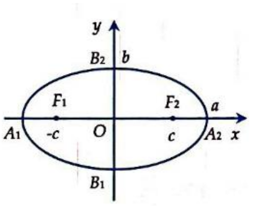
Tiêu điểm là $F_1(-c;0);\ F_2(c;0)$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn

Đáp án C

3. Dạng của elip

- Tính đối xứng:



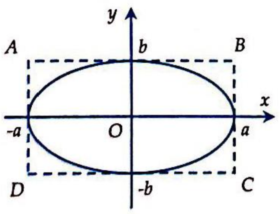
Cho $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow M_1(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(\pm x_0)^2}{a^2} + \frac{(\pm y_0)^2}{b^2} = 1$

$M_2(-x_0; y_0)$, $M_3(x_0; -y_0)$ và $M_4(-x_0; y_0)$ cũng thuộc (E)

(E) đối xứng qua hai trục tọa độ và gốc tọa độ bởi vậy để chứng minh một tính chất bất kì của (E) ta có quyền giả sử x, y là các số không âm.

- Giao điểm với các trục:

$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ cắt Ox tại $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ và cắt Oy tại $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$



$\Rightarrow A_1A_2 = 2a$ là trục lớn của (E)

$B_1B_2 = 2b$ là trục nhỏ của (E)

- **Hình chữ nhật cơ sở** là hình chữ nhật ABCD với $A(-a; b), B(a; b), C(a; -b), D(-a; -b)$

$\Rightarrow$ Diện tích hình chữ nhật cơ sở là $S_{ABCD} = 2a.2b = 4ab$

STUDY TIPS

Phương pháp viết phương trình elip:

Bước 1: Gọi $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases} (1)$.

Bước 2: Từ giả thiết suy ra hai phương trình: $\begin{cases} f(a, b, c) = 0 \\ g(a, b, c) = 0 \end{cases} (2)$

Bước 3: giải hệ $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \\ b \Rightarrow (E) \\ c \end{cases}$

(Mục tiêu là từ giả thiết ta tìm ra a và b)

Ví dụ 4: (E) có một tiêu điểm là $F(-2; 0)$ và một đỉnh $A(5; 0)$ có phương trình là

A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$ **C.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ **D.** $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{25} = 1$

Lời giải

Gọi elip cần tìm là $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases}$

Tiêu điểm $F(-2; 0) \Rightarrow c = 2$

Đỉnh $A(5; 0) \Rightarrow a = 5$

Có $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 4 = 21 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

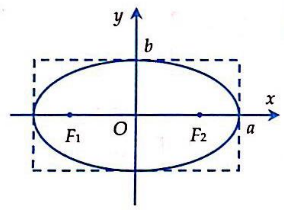
Đáp án B.

Lưu ý: Với bài này bạn có thể giải bằng cách thử từng phương án tìm tiêu điểm và đỉnh rồi kiểm tra lại với giả thiết và kết luận

Ví dụ 5: Elip có phương trình $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ biết (E) có tâm sai là $\frac{\sqrt{5}}{3}$; hình chữ nhật cơ sở có chu vi là 20. Khi đó giá trị $a + 2b$ là

A. 35 **B.** – 5 **C.** 7 **D.** 8

Lời giải



Ta có $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ b^2 = a^2 - c^2 \ (1) \end{cases}$

Tâm sai của (E) là $\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{3}a \ (2)$

STUDY TIPS

Chu vi hình chữ nhật cơ sở là $2(2a + 2b)$

Chu vi hình chữ nhật cơ sở là 20 $\Rightarrow 2.(2a + 2b) = 20 \Leftrightarrow a + b = 5 \Rightarrow b = 5 - a \ (3)$

Thế (2), (3) vào (1) $\Rightarrow (5 - a)^2 = a^2 - \frac{5}{9}a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = 15 \end{array}\right.$

- Với $a = 3 \Rightarrow b = 2$ thỏa mãn $\Rightarrow a + 2b = 27$ (đáp án C)

- Với $a = 15 \Rightarrow b = -10$ (loại) do $a, b, c > 0$

Đáp án C

4. Vị trí tương đối của một điểm với (E), của một đường thẳng với (E)

a. Vị trí tương đối của một điểm với (E)

Cho $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a, b, c > 0$ và điểm $M(x_0; y_0)$

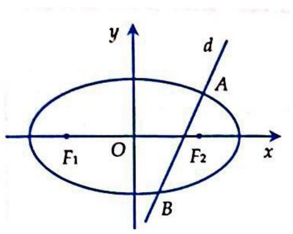
Xét biểu thức $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = T$

+ Nếu $T > 1 \Rightarrow M$ nằm ngoài (E)

+ Nếu $T = 1 \Rightarrow M$ nằm trên (E) (hay $M \in (E)$)

+ Nếu $T < 1 \Rightarrow M$ nằm trong (E)

b. Vị trí tương đối của đường thẳng với (E)



Cho $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a, b, c > 0$ và đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$

Xét hệ $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \ (1) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2) \end{cases}$

Rút y từ (1) thế vào (2) $\Rightarrow A_1x^2 + B_1y + C_1 = 0 \ (3)$

+ Nếu (3) vô nghiệm $\Rightarrow \Delta$ và (E) không có điểm chung

+ Nếu (3) có nghiệm kép $\Rightarrow \Delta$ và (E) tiếp xúc nhau.

+ Nếu (3) có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow \Delta$ và (E) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 6: Cho $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2(m-1)x + 2y - 1 = 0$. Số giá trị m nguyên để đường tròn (C_m) có tâm nằm hoàn toàn tròn (E) là:

A. 7 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10

Lời giải

(C) có tâm là $I(m-1;-1)$. Tâm I nằm trong (E)

$$\Rightarrow \frac{(m-1)^2}{25} + \frac{(-1)^2}{9} < 1 \Leftrightarrow (m-1)^2 < \frac{8}{9}.25 \Leftrightarrow 1 - \frac{10\sqrt{2}}{3} < m < 1 + \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

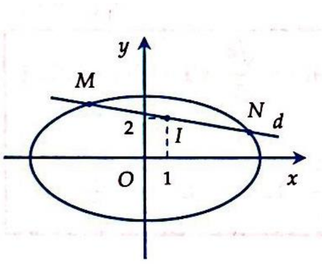
$\Rightarrow$ có 9 giá trị m nguyên thỏa mãn

Đáp án C.

Ví dụ 7: Cho $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $I(1;2)$ đường thẳng d đi qua I cắt (E) tại hai điểm M, N sao cho I là trung điểm của MN có vecto chỉ phương là $\vec{u} = (a;b)$ .Khi đó giá trị $\frac{b}{a}$ là:

A. $\frac{32}{9}$ **B.** không tồn tại **C.** $-\frac{9}{32}$ **D.** $\frac{9}{32}$

Lời giải



Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u} = (a;b) \Rightarrow \frac{b}{a} = k$ là hệ số góc của đường thẳng d

$\Rightarrow$ d qua I và có hệ số góc k $\Rightarrow d: y = k(x-1) + 2$ (1)

Tọa độ M, N là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = k(x-1) + 2 & (1) \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow$ thế (1) vào (2) $\Rightarrow 9x^2 + 16[k(x-1)+2]^2 = 144$

$\Leftrightarrow (16k^2+9)x^2 + 16(4k-2k^2) + 16k^2 - 64k - 80 = 0$ (3)

Nhận thấy qua I luôn có đường thẳng cắt (E) tại hai điểm phân biệt, (3) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $\forall k$ là hoành độ của M, N.

Mà M, N, I thẳng hàng (cùng thuộc d) $\Rightarrow$ I là trung điểm của MN

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 \Leftrightarrow \frac{-16(4k-2k^2)}{2(16k^2+9)} = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{9}{32}$$

Đáp án C.

B. Các dạng toán điển hình

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, elip (E) có tiêu cự bằng 12 và tâm sai $e=\frac{3}{5}$.

Cho các mệnh đề sau:

(1) (E) có tiêu điểm $F_1\left(-8;0\right)$ và $F_2\left(8;0\right)$

(2) (E) có độ dài trục nhỏ bằng 16.

(3) (E) có đỉnh $A_2\left(-10;0\right)$

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào sai?

A. (1) và (2) **B.** (2) và (3) **C.** (1), (2) và (3) **D.** (1) và (3)

Lời giải

(E) có tiêu cự bằng 12 $\Rightarrow 2c=12\Rightarrow c=6$

Tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}\Rightarrow a=10\Rightarrow b=8$

Vậy mệnh đề (1), (3) là mệnh đề sai

Đáp án D

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, elip $\left(E\right):\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{49}=1$. Tìm khẳng định đúng?

A. (E) có đỉnh $A_1\left(9;0\right)$ và $B_1\left(0;-7\right)$

B. (E) có dộ dài trục bé bằng $4\sqrt{2}$

C. (E) có dộ dài trục lớn bằng 18

D. (E) có diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 63.

Lời giải

$\left(E\right):\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{49}=1\Rightarrow a=9;\ b=7\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=4\sqrt{2}$

Độ dài trục lớn là $2a=18$

Đáp án C.

Ví dụ 3: Tìm phương trình chính tắc của elip có tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=0$ **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ **D.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của elip $\left(E\right):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \left(a,b>0\right)$

STUDY TIPS

Cho $\left(E\right):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a,b,c>0$:

$b^2=a^2-c^2$

1. $F_1\left(c;0\right)$, $F_2\left(c;0\right)$ là tiêu điểm; $F_1F_2=2c$ là tiêu cự.

2. $A_1\left(-a;0\right);A_2\left(a;0;\right)$ $B_1\left(0;-b\right)$; $B_2\left(0;b\right)$ là 4 đỉnh của (E).

$A_1A_2=2a$ là độ dài trục lớn

$B_1B_2=2b$ là độ dài trục bé.

3. Tâm sai $e=\frac{c}{a}<1$; phương trình đường chuẩn $x=\pm\frac{a}{e}$

4. Khoảng cách giữa hai đường chuẩn: $2\frac{a}{e}$

5. Diện tích hình chữ nhật cơ sở: $S=2a.2b=4ab$

STUDY TIPS

Chu vi hình chữ nhật

Tâm sai **Đáp án B.**

$e=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ (1)

Hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20

$\Rightarrow 2(2a+2b)=20$ (2)

Có

$c^2=a^2-b^2$ (3)

Từ

$(1),(2),(3)\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow (E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Đáp án C.

Ví dụ 5: Tìm phương trình elip đi qua hai điểm $M(\sqrt{3};3)$, $N(-3\sqrt{3};1)$

A. $30x^2+10y^2=1$ **B.** $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{10}=1$

C. $\frac{x^2}{30}-\frac{y^2}{10}=1$ **D.** $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{10}=0$

Lời giải

Giả sử $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$

Vì $M,N\in(E)$ nên ta có hệ $(I):\begin{cases} \frac{3}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \\ \frac{27}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=30 \\ b^2=10 \end{cases} \Rightarrow (E):\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{10}=1$

Đáp án B.

Ví dụ 4: Trong ... (E) có độ dài trục nhỏ bằng 8, tâm sai $e=\frac{3}{5}$. Khi đó hì... tích bằng:

A. 20 (đvdt) ... . 18 (đvdt) **D.** 36 (đvdt)

Lời giải

Độ dài trục nh... bằng

$\Rightarrow 2b=8\Rightarrow b=$ ...

Tâm s...

$e=\frac{3}{5}\Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{3}{5}=$ ...

Có

$a^2-c^2=b^2\Leftrightarrow a$ ... (loai)

Diện tích hì... chữ nhật cơ sở là:

$S=2a.2b=2.5.2$... (đvdt)

STUDY TIPS

Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có $\Delta=b^2-4ac$ hoặc $\Delta'=\frac{b^2}{2}-ac$

+ Nếu Δ hoặc $\Delta'<0\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

+ Nếu Δ hoặc $\Delta'=0\Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép

+ Nếu Δ hoặc $\Delta'>0\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt

STUDY TIPS

$(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và

$\Delta: Ax+By+C=0$

$$16.1^2 + 9.1^2 = c^2 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = \pm 5$$

Đáp án C.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và đường thẳng $\Delta: x + 2y - 5 = 0$. Đường thẳng Δ cắt (E) tại mấy điểm?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

Lời giải

Xét hệ tọa độ giao điểm

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 \ (1) \\ x + 2y - 5 = 0 \ (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow y = \frac{5-x}{2}$$

thế vào (1) ta được:

$$\frac{x^2}{4} + \left(\frac{5-x}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + x^2 - 10 + 25 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 21 = 0 \ (*)$$

Xét phương trình (*) có $\Delta' = (-5)^2 - 2.21 = -17 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Vậy đường thẳng Δ không cắt (E).

Đáp án A.

Ví dụ 8: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$. Số đường thẳng d cắt elip (E) tại hai điểm phân biệt có tọa độ nguyên là:

A. 9 **B.** 18 **C.** 120 **D.** 1

Lời giải

Giả sử $M(x_0; y_0) \in (E)$ có tọa độ nguyên

$$\Rightarrow \frac{x_0^2}{32} + \frac{y_0^2}{16} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 = 32\left(1 - \frac{y_0^2}{16}\right) = 2\left(16 - y_0^2\right) \geq 0 \Rightarrow 16 - y_0^2 \geq 0 \Rightarrow y_0^2 = 16$$

Mà $y_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_0 \in \{\pm 4; \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\}$

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $\Delta: x + y + c = 0$. là tiếp tuyến của (E) ?

A. 5 ± 5 **D.** -5

STUDY TIPS

d đi qua $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k

$\Rightarrow d: y = k(x - x_0) + y_0$

Lời giải

(E) c

$a^2 = 16;\ b^2 = 9$

Để Δ là tiếp tuyến của (E) thì

Với $y_0 = 4 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow M_1(0;4)$ (nhận)

Với $y_0 = -4 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow M_2(0;-4)$ (nhận)

Với $y_0 = 3 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{34} \notin \mathbb{Z}$

Với $y_0 = -3 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{34} \notin \mathbb{Z}$

…

Với $y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{32} \notin \mathbb{Z}$

Vậy chỉ có duy nhất môtj đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm có tọa độ nguyên.

Đáp án D.

Ví dụ 9: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$ và điểm $M(1;-2)$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua M cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là tring điểm của AB.

A. $2x - 9y - 20 = 0$ **B.** $2x - y - 20 = 0$

C. $2x + 9y - 20 = 0$ **D.** $9x - 2y - 13 = 0$

Lời giải

Giả sử d đi qua $M(1;-2)$ và có hệ số góc k

$\Rightarrow d: y = k(x-1) - 2 \Leftrightarrow d: y = kx - k - 2$

Xét hệ tọa độ giao điểm

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ y = kx - k - 2 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 9(kx - k - 2)^2 = 36$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 9(k^2x^2 + k^2 + 4 - 2k^2x - 4kx + 4k) - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4 + 9k^2)x^2 - 2k(9k + 18)x + (9k^2 + 36k) = 0 \quad (*)$$

Để (E) cắt d tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt x_A, x_B

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow k^2(9k + 18)^2 - (4 + 9k^2)(9k^2 + 36k) > 0$$

$$\Leftrightarrow k^2(81k^2 + 324k + 324) - (36k^2 + 144k + 81k^4 + 324k^3) > 0$$

$$\Leftrightarrow 288k^2 - 144k > 0 \Leftrightarrow 0 < k < \frac{1}{2} \ (1)$$

Với k thỏa mãn điều kiện (1) thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt x_A, x_B

Khi đó theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{18k^2 + 36k}{9k^2 + 4} \\ x_A x_B = \dfrac{9k^2 + 36k}{4 + 9k^2} \end{cases}$

Vì M là trung điểm của AB nên $x_A + x_B = 2x_M$

$$\Leftrightarrow \frac{18k^2+36k}{9k^2+4} = 2.1 = 2 \Leftrightarrow 18k^2+36k = 18k^2+8 \Leftrightarrow k = \frac{2}{9} \text{ (TMĐK (1))}$$

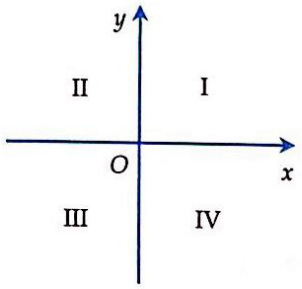
Với $k = \frac{2}{9} \Rightarrow d: y = \frac{2}{9}x - \frac{20}{9} \Rightarrow d: 2x - 9y - 20 = 0$

Đáp án A.

Ví dụ 10: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$. Điểm $M \in (E)$ thỏa mãn bán kính qua tiêu điểm trái bằng 4 lần bán kính qua tiêu điểm phải. Điểm M thuộc cung phần tư thứ mấy?

A. I và III **B.** I và II **C.** I và IV **D.** II và III

Lời giải



(E) có $a = 4$; $b = 2\sqrt{2}$; $c = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow (E)$ có hai tiêu điểm $F_1\left(-2\sqrt{2};0\right)$ và $F_2\left(2\sqrt{2};0\right)$

Giả sử $M(x;y) \in (E)$ là điểm cần tìm

Khi đó $MF_1 = 4MF_2 \Leftrightarrow a + ex = 4(a - ex) \Leftrightarrow \frac{3a}{5e} = \frac{3a^2}{5c} = \frac{3.4^2}{5.2\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{5}$

Vì $M \in (E) \Rightarrow y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{16}\right).8 = \left(1 - \frac{18}{25}\right).8 \Rightarrow y^2 = \frac{56}{25} \Leftrightarrow y = \frac{\pm 2\sqrt{14}}{5}$

Vậy có 3 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$M_1\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}; \frac{2\sqrt{14}}{5}\right); M_2\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}; \frac{-2\sqrt{14}}{5}\right)$$

Đáp án C.

Ví dụ 11: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$. Tìm $M \in (E)$ sao cho $F_1MF_2 = 120^0$ (F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip)?

A. $M(0;5)$ **B.** $M(0;-5)$

C. $M_1(5;0)$ hoặc $M_2(-5;0)$ **D.** Cả A và B đều đúng

STUDY TIPS

M nhìn F_1, F_2 dưới một góc α

$$\cos\alpha = \frac{MF_1^2 + MF_2^2 - F_1F_2^2}{2.MF_1.MF_2}$$

Lời giải

(E) có $a = 10$; $b = 5 \Rightarrow c = 5\sqrt{3}$

$\Rightarrow (E)$ có hai tiêu điểm $F_1\left(-5\sqrt{3};0\right)$; $F_2\left(5\sqrt{3};0\right)$

Giả sử $M(x;y) \in (E)$

Có $MF_1 = 10 + \frac{\sqrt{3}}{2}x$; $MF_2 = 10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$

Có $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2.MF_1.MF_2.\cos F_1MF_2$

$$\Leftrightarrow \left(10\sqrt{3}\right)^2 = \left(10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(10 + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 - 2\left(10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(10 + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\cos 120^0$$

$$= 300 = 100 + \frac{3}{4}x^2 - 10\sqrt{3}x + 100 + \frac{3}{4}x^2 + 10\sqrt{3}x - 2\left(100 - \frac{3}{4}x^2\right)\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm 5$

$\Rightarrow M_1(0;5)$; $M_2(0;-5)$

Đáp án D.

Ví dụ 12: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$ và đường thẳng $\Delta: x - 2\sqrt{2}y = 0$ cắt elip (E) tại hai điểm phân biệt B và C. Điểm $A \in (E)$ sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất. Tính giá trị của $P = x_A^2 - y_A^2$.

A. 2 **B.** 0 **C.** 6 **D.** –6

STUDY TIPS

Phương trình chính tắc của $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ phương trình tham số của $(E): \begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t \end{cases} t \in [0;2\pi]$

Lời giải

Phương trình tham số của $(E): \begin{cases} x = 4\sqrt{2}\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases} t \in [0;2\pi]$

Vì $A \in (E)$ nên $A\left(4\sqrt{2}\sin t;\ 2\cos t\right)$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.BC.d(A;\Delta)$

Vì BC không đổi nên $S_{\Delta ABC}\max \Leftrightarrow d(A;\Delta)\max$

Có $d(A;\Delta) = \frac{\left|4\sqrt{2}\sin t - 4\sqrt{2}\cos t\right|}{\sqrt{1 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{4\sqrt{2}\left|\sin t - \cos t\right|}{3}$

$$= \frac{4\sqrt{2}.\sqrt{2}\left|\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right|}{3} = \frac{8\left|\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right|}{3} \le \frac{8}{3}$$

STUDY TIPS

1. $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right. \end{cases}$

2. $\sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\sin\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{-\pi}{2} + k2\pi$

$(k \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}\max \Leftrightarrow \left|\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ t-\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \\ t=\frac{-\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy $t\in[0;2\pi]\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{3\pi}{4} \\ t=\frac{-\pi}{4} \end{array}\right.$

- Với $t=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow A\left(2;-\sqrt{2}\right)\Rightarrow P=x_A^2-y_A^2=2^2-\left(-\sqrt{2}\right)^2=2$

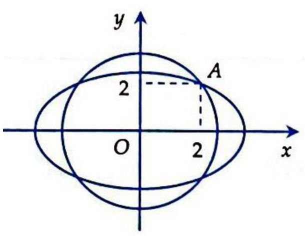
- Với $t=-\frac{3\pi}{4}\Rightarrow A\left(-2;\sqrt{2}\right)\Rightarrow P=x_A^2-y_A^2=(-2)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=2$

Đáp án A.

Ví dụ 13: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=8$. Phương trình nào là phương trình chính tắc của elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại 4 điểm tạo thành 4 đỉnh của một hình vuông?

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{3y^2}{16}=1$ **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{3y^2}{\frac{16}{3}}=1$ **C.** $\frac{x^2}{16}-\frac{3y^2}{\frac{16}{3}}=1$ **D.** $\frac{x^2}{16}-\frac{3y^2}{16}=1$

Lời giải



Phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

(E) có độ dài trục lớn bằng 8 $\Rightarrow 2a=8\Rightarrow a=4$

Do (E) và (C) cùng nhận Ox, Oy làm trục đối xứng và các giao điểm là các đỉnh của hình vuông nên (E) và (C) có 1 giao điểm với tọa độ dạng $A(t;t)$ với $t>0$

Vì $A\in(C)\Rightarrow t^2+t^2=8\Rightarrow t=2$

Vì $A(2;2)\in(E)\Leftrightarrow \frac{4}{16^2}+\frac{4}{b^2}=1\Leftrightarrow b^2=\frac{16}{3}$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{16}+\frac{3y^2}{\frac{16}{3}}=1$

Đáp án B.

Ví dụ 14: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thoi ABCD có $AC = 2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D của hình thoi. Biết $A \in Ox$.

A. $x^2 + 4y^2 = 20$ **B.** $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{25} = 1$ **C.** $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ **D.** $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$

Lời giải

Giả sử $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(a > b > 0\right)$

Hình thoi ABCD có $\begin{cases} AC = 2BD \\ A, B, C, D \in (E) \end{cases} \Rightarrow OA = 2OB$

Giả sử $A(a;0)$ và $B\left(0;\frac{a}{2}\right)$

H là hình chiếu vuông góc của O trên AB.

$\Rightarrow$ OH là bán kính của đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow OH = 2$

Ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow a^2 = 20$

Có $OA^2 = 20 \Rightarrow OB^2 = b^2 = \frac{OA^2}{4} = 5$

Vậy phương trình chính tắc của $(E): \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

Đáp án C.

§4. Một số dạng bài toán điển hình

I. Một số bài toán về giải tam giác

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $A(-2;3)$, phương trình đường trung tuyến từ B, C lần lượt là $d_1: 2x + 7y - 30 = 0$ và $d_2: 7x + 5y - 14 = 0$. Phương trình đường thẳng AB có dạng $ax + by + c = 0$. Khi đó giá trị biểu thức $Q = a + bc$ bằng:

A. 34 **B.** 32 **C.** -22 **D.** 44

Lời giải

+ $A(-2;3) \notin d_1; d_2$

+ Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là nghiệm của hệ

STUDY TIPS

G là trọng tâm của ΔABC

$\Rightarrow \begin{cases} 3x_G = x_A + x_B + x_C \\ 3y_G = y_A + y_B + y_C \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+7y=30 \\ 7x+5y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-4}{3} \\ y = \dfrac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{-4}{3};\dfrac{14}{3}\right)$$

+ $B \in d_1 \Rightarrow B\left(b;\dfrac{-2b+30}{7}\right)$; $C \in d_2 \Rightarrow C\left(\dfrac{14-5c}{7};c\right)$

+ Ta có: $\begin{cases} -2+b+\dfrac{14-5c}{7} = -4 \\ \dfrac{-2b+30}{7}+3+c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=7 \end{cases} \Rightarrow B(1;4);\ C(-3;7)$

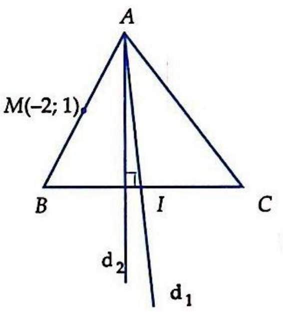
+ AB: $\begin{cases} \text{qua } A(-2;3) \\ \text{qua } B(1;4) \end{cases} \Rightarrow AB: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{1} \Leftrightarrow x-3y+11=0$

Khi đó: $a=1;\ b=-3;\ c=11 \Rightarrow Q = 1+(-3).11 = -32$

Đáp án B.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $M(2;-1)$ là trung điểm AB. Đường trung tuyến và đường cao qua A lần lượt là: $d_1: x+y-7=0$ và $d_2: 5x+3y-29=0$. Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng AC?

A. $P(3;2)$ **B.** $Q(2;-7)$ **C.** $R(2018;2017)$ **D.** $S(1056;1055)$



Lời giải

+ $A = d_1 \cap d_2 \Rightarrow A(4;3)$

+ $M(-2;1)$ trung điểm AB $\Rightarrow B(-8;-1)$

+ $BC \perp d_2 \Rightarrow BC: -3x+5y+c=0$

Mà $B(-8;-1) \in BC \Rightarrow C=-19 \Rightarrow BC: -3x+5y-19=0$

+ $I = d_1 \cap BC \Rightarrow I(2;5)$ là trung điểm BC $\Rightarrow C(12;11)$

+ AC $\begin{cases} \text{qua } A(4;3) \\ \text{qua } C(12;11) \end{cases} \Rightarrow AC: \dfrac{x-4}{8} = \dfrac{y-3}{8} \Leftrightarrow x-y-1=0$

STUDY TIPS

$\Delta \perp d: Ax+By+C=0$

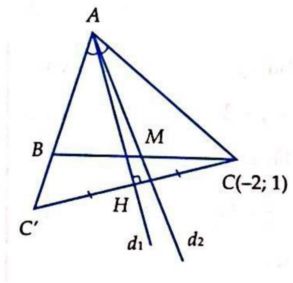
$\Rightarrow \Delta: Bx-Ay+C'=0$

Đáp án B.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $C(-2;1)$. Đường phân giác góc A và đường trunh tuyến AM lần lượt là $d_1: 2x+y-1=0$ và $d_2: x+y-2=0$. Tìm tọa độ điểm B.

A. $B\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{7}{3}\right)$ **B.** $B\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$ **C.** $B\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ **D.** $B\left(\dfrac{-4}{3};\dfrac{13}{3}\right)$

Lời giải



+ $A = d_1 \cap d_2 \Rightarrow A(-1;3)$

+ C' đối xứng với C qua d_1

+ $CC'\begin{cases}\text{qua } C(-2;1)\\ \perp d_1: 2x+y-1=0\end{cases} \Rightarrow CC': -x+2y-4=0$

+ $H = d_1 \cap CC' \Rightarrow H\left(\frac{-2}{5};\frac{9}{5}\right)$ là trung điểm CC' $\Rightarrow C'\left(\frac{6}{3};\frac{13}{5}\right)$

+ $AB:\begin{cases}\text{qua } A(-1;3)\\ \text{qua } C'\left(\frac{6}{5};\frac{13}{5}\right)\end{cases} \Rightarrow AB: 2x+11y-31=0$

+ $B \in AB \Rightarrow B\left(\frac{31-11b}{2};b\right)$

$M \in d_2 \Rightarrow M(m;2-m)$

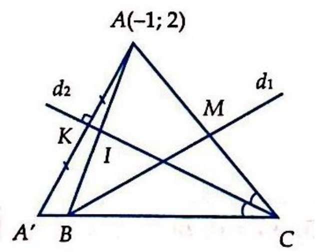
+ M là trung điểm BC $\Rightarrow \begin{cases}\frac{31-11b}{2}-2=2m\\ b+1=4-2m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\frac{7}{3}\\ m=\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{8}{3};\frac{7}{3}\right)$

Đáp án A.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $A(-1;2)$. Đường trung tuyến BM và phân giác trong CI có phương trình lần lượt là $d_1: x-y+2=0$ và $d_2: 2x+y-3=0$. Tìm tọa độ điểm $B(a;-b)$. Tính $P=a+b$.

A. $\frac{31}{6}$ **B.** -2 **C.** $-\frac{31}{6}$ **D.** 2

Lời giải



+ A' đối xứng với A qua d_2, $AA' \cap d_2 = K$

+ $AA'\begin{cases}\text{qua } A(-1;2)\\ \perp d_2: 2x+y-3=0\end{cases} \Rightarrow AA': -x+2y-5=0$

+ $K = AA' \cap d_2 \Rightarrow K\left(\frac{1}{5};\frac{13}{5}\right) \Rightarrow A'\left(\frac{7}{5};\frac{16}{5}\right)$

+ $M \in d_1 \Rightarrow M(a;a+2)$

$C \in d_2 \Rightarrow C(b;3-2b)$

STUDY TIPS

Nếu đề bài cho đường phân giác, ta sẽ lấy điểm đối xứng qua đường phân giác

M là trung điểm AC có: $\begin{cases} 2a - b = -1 \\ 2a + 4 - 3 + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-1}{6} \\ b = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(\dfrac{-1}{6}; \dfrac{11}{6}\right) \\ C\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{5}\right) \end{cases}$

$+\ BC \begin{cases} \text{qua } A'\left(\dfrac{7}{5}; \dfrac{16}{5}\right) \\ \text{qua } C\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{5}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow BC: 23x - 11y + 3 = 0$

$+\ B = BC \cap d_1 \Rightarrow B\left(\dfrac{19}{12}; \dfrac{43}{12}\right) \Rightarrow a = \dfrac{19}{12};\ b = \dfrac{-43}{12} \Rightarrow P = -2$

Đáp án B.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy, có $A(2;-1)$. Đường phân giác trong góc B và C có phương trình lần lượt là $d_1: x - 2y + 1 = 0$ và $d_2: x + y + 3 = 0$. Phương trình đường thẳng đi qua B và song song với AC là đường thẳng:

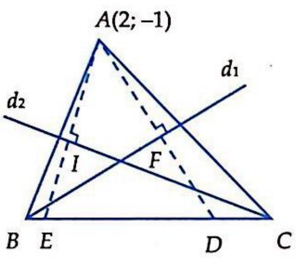
A. $-4x + y - \dfrac{9}{7} = 0$ **B.** $-4x + y + \dfrac{9}{7} = 0$

C. $7x - 28y + 9 = 0$ **D.** $x - 4y + 9 = 0$

Lời giải

+ D đối xứng với A qua $d_1: F = AD \cap d_1$

+ E đối xứng với A qua $d_2: I = AE \cap d_2$



$+\ AD \begin{cases} \text{qua } A(2;-1) \\ \perp d_1: x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow AD: 2x + y - 3 = 0$

$F = AD \cap d_1 \Rightarrow P(1;1)$ là trung điểm AD $\Rightarrow D(0;3)$

$+\ AE \begin{cases} \text{qua } A(2;-1) \\ \perp d_2: x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow AE: -x + y + 3 = 0$

$I = AE \cap d_2 \Rightarrow I(0;-3)$ là trung điểm AE $\Rightarrow E(-2;-5)$

$+\ BC \begin{cases} \text{qua } D(0;3) \\ \text{qua } E(-2;-5) \end{cases} \Rightarrow BC: 4x - y + 3 = 0$

$B = BC \cap d_1 \Rightarrow B\left(\dfrac{-5}{7}; \dfrac{1}{7}\right);\ C = d_2 \cap BC \Rightarrow C\left(\dfrac{-6}{5}; \dfrac{-9}{5}\right)$

STUDY TIPS

$\Delta // d: Ax+By+C=0$

$\Rightarrow \Delta: Ax+By+C'=0$

$(C \ne C')$

+ $AC\begin{cases}\text{qua } A(2;-1)\\ \text{qua } C\left(\frac{-6}{5};\frac{-9}{5}\right)\end{cases} \Rightarrow AC: x-4y-6=0$

+ $\Delta // AC \Rightarrow \Delta: x-4y+c=0 \ (c \ne -6)$

$B\left(\frac{-5}{7};\frac{1}{7}\right) \in \Delta \Rightarrow c=\frac{9}{7}(t/m) \Rightarrow \Delta: 7x-28y+9=0$

Đáp án C.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC có $A \in d: 2x-5y+7=0$; $BC // d$, đường cao BH có phương trình $d_1: x-2y+1=0$. $M(-2;1)$ là trung điểm AC. Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC

A. $(13;11)$ **B.** $\left(\frac{50}{9};\frac{11}{3}\right)$ **C.** $\left(13;\frac{11}{3}\right)$ **D.** $\left(\frac{13}{3};\frac{11}{3}\right)$

B. Các dạng toán điển hình

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng $d: 3x - y - 6 = 0$ là đường thẳng

A. đi qua $M(0;-6)$ và có VTCP $\vec{u} = (3;-1)$

B. đi qua $B(0;-6)$; $C(-1;2)$

C. đi qua $D(2;0)$ và có VTPT $\vec{n} = (1;3)$

D. qua $N(2;0)$ và có hệ số góc là 3.

STUDY TIPS

Phương trình đường thẳng qua $N(x_0;y_0)$ và có hệ có góc k là: $y - y_0 = k(x - x_0)$

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $N(2;0)$ và có hệ số góc là $k = 3$ có phương trình là: $y - 0 = 3(x-2) \Leftrightarrow 3x - y - 6 = 0$

Đáp án D.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường thẳng d đi qua $A(1;-3)$ có VTCP là $\vec{u} = (-1;2)$ là

A. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3t \\ y = -1 - 6t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

STUDY TIPS

Cho 2 đường thẳng Δ_1, Δ_2:

$+ \Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{cases}$ có vô số nghiệm

Lời giải

+ d đi qua qua $A(1;-3)$ có VTCP là $\vec{u} = (-1;2) \Rightarrow d: \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -3 + 2t' \end{cases}$

Đến đây ta kiểm tra xem đường thẳng d có trùng với đường nào trong các phương án trên.

+ A. đường thẳng $b: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ có VTPT $\vec{u'} = (1;-3)$ không cùng phương với $\vec{u} = (-1;2)$ nên loại.

+ B. đường thẳng $a: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$ có VTPT $\vec{u'} = (1;2)$ không cùng phương với $\vec{u} = (-1;2)$ nên loại.

+ C. đường thẳng $c:\begin{cases} x=3t \\ y=-1-6t \end{cases}$ có VTPT $\vec{u}'=(3;-6)$ cùng phương với $\vec{u}=(-1;2)$ nên đường thẳng c song song hoặc trùng với đường thẳng d.

(Đến đây ta sẽ chọn một điểm bất kì thuộc đường thẳng d rồi thay vào phương trình đường c nếu thỏa mãn thì d trùng với c còn không thì d song song với c)

+ Từ $d:\begin{cases} x=1-t' \\ y=-3+2t' \end{cases}$, giả sử chọn $t'=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow M(1;-3)\in\Delta$ (Bạn có thể chọn giá trị t bất kì sao cho dễ tính toán)

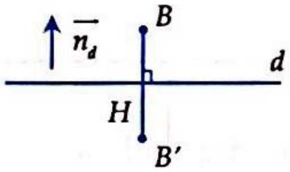
Thế vào đường thẳng $c:\begin{cases} x=3t \\ y=-1-6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=3t \\ -3=-1-6t \end{cases} \Rightarrow t=\frac{1}{3}$ thỏa mãn

$\Rightarrow c\equiv d \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $d:\begin{cases} x=3t \\ y=-1-6t \end{cases}$

(Tương tự như vậy ta sẽ thấy đường thẳng ở ý D song song với đường d)

Đáp án C

Lưu ý: Bạn có thể tìm hai đường thẳng trùng nhau bằng cách xét hệ phương trình của hai đường đó (nếu hệ đó có vô số nghiệm thì hai đường thẳng trùng nhau).



Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(1;3)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=t \\ y=4+t \end{cases}$.

Tọa độ điểm B đối xứng với A qua d là

A. $B(1;5)$ **B.** $B(1;-5)$ **C.** $B(-1;5)$ **D.** $B(-1;-5)$

Lời giải

STUDY TIPS

B đối xứng với A qua đường thẳng d $\Leftrightarrow$ H là trung điểm của AB với H là hình chiếu của A lên d

+ Gọi hình chiếu của A lên d là H $\Rightarrow H(t;4+t)\Rightarrow \overrightarrow{AH}=(t-1;t+1)$

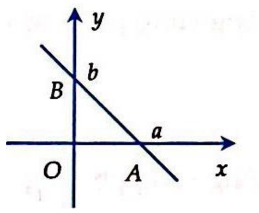
+ VTCP của d là $\vec{u}=(1;1)\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow t-1+t+1=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow H(0;4)$

+ B đối xứng với A qua d nên H là trung điểm của AB

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_A+x_B}{2}=x_H \\ \frac{y_A+y_B}{2}=y_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+x_B}{2}=0 \\ \frac{3+y_B}{2}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=-1 \\ y_B=5 \end{cases} \Rightarrow B(-1;5)$$

Lưu ý: Bạn có thể viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với d $\Rightarrow H=\Delta\cap d$

Đáp án C.



Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng đi qua $M(1;2)$ và chắn trên 2 trục tọa độ hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau là

A. $x+y-3=0;\ 2x+y-4=0$ **B.** $x+y+3=0;\ x-y+1=0$

C. $x+y-3=0;\ x-y+1=0$ **D.** $x+2y-5=0;\ x-y+1=0$

Lời giải

STUDY TIPS

Đường thẳng đi qua $A(a;0);\ B(0;b)$ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

+ Giả sử đường thẳng cần tìm là d đi qua $M(1;2)$ cắt Ox, Oy lần lượt tại $A(a;0);\ B(0;b) \Rightarrow d:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

+ d qua M $\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1 \quad (1)$, mà $OA=OB \Rightarrow |a|=|b| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right.$

- Với $a=b$ thế vào (1) $\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{a}=1 \Rightarrow \frac{3}{a}=1 \Rightarrow a=3 \Rightarrow b=3$

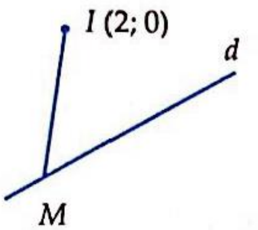
$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng cần tìm $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1 \Leftrightarrow x+y-3=0$

- Với $a=-b$ thế vào (1) $\Rightarrow \frac{1}{a}-\frac{2}{a}=1 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow b=1$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng cần tìm $\frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1 \Leftrightarrow x-y+1=0$

Đáp án C

<u>**Lưu ý:**</u> Bạn có thể giải bằng cách thử từng đáp án để kiểm tra.



Ví dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: x+y-5=0$ và $I(2;0)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $MI=3$

A. $(2;3);\ (5;0)$ **B.** $(2;3);\ (-1;6)$

C. $(-1;6);\ (5;0)$ **D.** $(3;2);\ (2;3)$

Lời giải

<u>**Cách 1:**</u>

+ $M \in d: y=-x+5 \Rightarrow M(m;-m+5) \Rightarrow \overrightarrow{MI}=(2--m;m-5)$

+ $MI=3 \Leftrightarrow (2-m^2)+(-m+5)^2=9$

$\Leftrightarrow 4-4m+m^2+m^2-10m+25=9$

$\Leftrightarrow 2m^2-14m+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=5 \end{array}\right. \Rightarrow M(2;3);\ M(5;0)$

STUDY TIPS
Tìm $M \in d$ sao cho $IM = a$
- Cách 1
+ Bước 1: Tham số hóa M theo d
+ Bước 2: Từ $IM = a \Rightarrow$ kết quả
- Cách 2: $IM = a \Rightarrow I$ thuộc đường tròn (C) tâm I bán kính $R \equiv a \Rightarrow \{M\} = (C) \cap d$

(Xem lại khi đã học xong về phưng trình đường tròn)

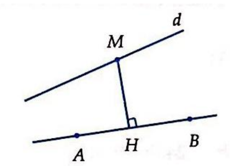
Cách 2: (dùng khi đã học phương trình đường tròn)

+ Ta có $IM = 3 \Rightarrow$ M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(2;0)$, bán kính $R = 3$

$\Rightarrow (C): (x-2)^2 + y^2 = 9$

+ Xét hệ $\begin{cases} d \\ (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x+5 \\ (x-2)^2 + y^2 = 9 \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow M(2;3);\ M(5;0)$

Đáp án A.



Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(1;1); B(4;-3)$, điểm $M_1(x_1;y_1); M_2(x_2;y_2)$ thuộc đường thẳng $dx - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ M đến AB là 6. Khi đó $x_1 + x_2$ là

A. $\frac{120}{11}$ **B.** $\frac{6}{11}$ **C.** $\frac{34}{11}$ **D.** $\frac{-70}{11}$

Lời giải

+ Phương trình đường thẳng AB: $4x + 3y - 7 = 0$

+ $M \in d: x = 2y + 1 \Rightarrow M(2t+1;t)$

Mà $d_{(M;AB)} = 6 \Rightarrow |11t - 3| = 30 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \frac{-27}{11} \end{array} \right.$

- Với $t = 3 \Rightarrow M(7;3)$

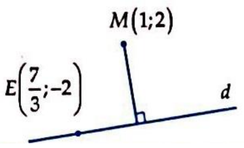
- Với $t = -\frac{27}{11} \Rightarrow M\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right)$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 7 - \frac{43}{11} = \frac{34}{11}$

Đáp án C

STUDY TIPS
Tìm $M \in d$ sao $d_{(M;\Delta)} = a$
Bước 1: Tham số hóa M theo d $\Rightarrow M(t)$
Bước 2: $d(M;\Delta) = a$
$\Rightarrow f(t) = 0 \Rightarrow t \Rightarrow M$

Lưu ý: Ví dụ 5 và Ví dụ 6 là hai bài toán tìm điểm cơ bản, nó là công cụ định hướng để ta giải quyết những bài toán tổng hợp khó hơn sau này.



Ví dụ 7: Trong mặt phẳng Oxy, một trong các đường thẳng qua $E\left(\frac{7}{3};-2\right)$ và cách $M(1;2)$ một khoảng là 4, có dạng $d: Ax+By-15=0$. Khi đó giá trị $A+B$ là

A. 1 **B.** -1 **C.** 3 **D.** 7

STUDY TIPS

Viết phương trình đường thẳng d qua M và cách N một khoảng k.

- Bước 1:

Gọi VTPT của d là $\vec{n}(A;B)\neq\vec{0}$, suy ra phương trình đường thẳng d

$Ax+By+C=0$

- Bước 2:

Mà $d_{(N;d)}=k$

$\Rightarrow f(A;B)=0 \Rightarrow A=kB$

Biện luận $\Rightarrow A,B \Rightarrow$ kết quả (phương trình $f(A;B)=0$ là phương trình đẳng cấp bậc 2 với ẩn A; B)

Lời giải

+ Gọi VTPT của d là $\vec{n}=(A;B)\neq\vec{0}$

+ d qua $E\left(\frac{7}{3};-2\right) \Rightarrow A\left(x-\frac{7}{3}\right)+B(y+2)=0$

$\Leftrightarrow 3Ax+3By-7A+6B=0$

+ Mà $d(M;d)=4 \Leftrightarrow \frac{|3A+6B-7A+6B|}{\sqrt{9A^2+9B^2}}=4$

$\Leftrightarrow 8A^2+6AB=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ 4A=-3B \end{array}\right.$

- Với $A=0$, chọn $B=1$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $d: 3x+6=0 \Leftrightarrow y+2=0$

- Với $4A=-3B$, chọn $A=3 \Rightarrow B=-4$

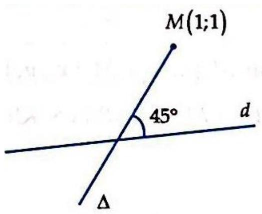
$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $d: 3x-4y-15=0$

Vậy $A+B=-1$

Đáp án B

Lưu ý: Với ví dụ này bạn có thể giải hệ điều kiện gồm:

$$\begin{cases} E\in d \\ d_{(M;d)}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{3}A-2B-15=0 \\ \frac{|A+2B-15|}{\sqrt{A^2+B^2}}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-4 \end{cases}$$



Ví dụ 8: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng Δ qua $M(1;1)$ và tạo với đường thẳng $d: 2x+3y+1=0$ một góc 45^0 có dạng $ax-5y+4=0$ và $a'x+y-6=0$. Khi đó giá trị $a+a'$ là

A. 4 **B.** 6 **C.** -6 **D.** -4

Lời giải

Gọi VTPT của Δ là $\overrightarrow{n_1}=(a;b)\neq\vec{0}$, VTPT của d là $\overrightarrow{n_2}=(2;3)$

Mà góc giữa d và Δ là góc 45^0

$$\Rightarrow \cos 45^0 = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|2a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2^2+3^2}} \Leftrightarrow 5a^2-5b^2-24ab=0 \ (1)$$

- Với $b=0 \Rightarrow 5a^2=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(0;0) \Rightarrow$ loại

- Với $b \neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 5\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 24\left(\frac{a}{b}\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=5 \\ \frac{a}{b}=-\frac{1}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5b \\ a=-\frac{1}{5}b \end{array}\right.$

+ Với a = 5b chọn $b=1 \Rightarrow n_1=(5;1) \Rightarrow \Delta: 5x+y-6=0$

+ Với $a=-\frac{1}{5}b$ chọn $b=-5 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(1;-5) \Rightarrow \Delta: x-5y+4=0$

$\Rightarrow a=1;\ a'=5 \Rightarrow a+a'=6$

Đáp án B

> **STUDY TIPS**
> Phương pháp viết phương trình đường thẳng Δ qua điểm M và tạo với đường thẳng d một góc α
> - Bước 1: Gọi VTPT của d là $\overrightarrow{n_\Delta}=(a;b) \neq \vec{0}$
> - Bước 2: $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_\Delta}.\overrightarrow{n_d}|}{|\overrightarrow{n_\Delta}||\overrightarrow{n_d}|}$
> $\Rightarrow ma^2+nab+pb^2=0$
> $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=kb \\ a=k'b \end{array}\right.$
> Chọn b $\Rightarrow \overrightarrow{n_\Delta} \Rightarrow \Delta$

Lưu ý:

1. Với ví dụ 7 và ví dụ 8 ở trên là bài toán viết phương trình đường thẳng khi chưa biết VTPT (VTCP) nên ta đặt VTPT là $\vec{n}=(a;b) \neq \vec{0}$ rồi khai thác giả thiết tìm mối liên hệ giữa a, b (a = kb). Chọn b $\Rightarrow$ a $\Rightarrow$ VTCP $\Rightarrow$ kết quả.

2. Bài này bạn cũng có thể sử dụng đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ là $\Delta_1: y=k(x-x_0)+y_0$ và $\Delta_2: x=x_0$

- Bước 1: Kiểm tra điều kiện Δ_2 với yêu cầu bài toán

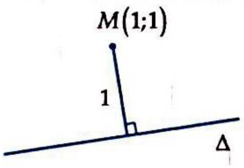
- Bước 2: Từ giả thiết với $\Delta_1 \Rightarrow$ phương trình $f(k)=0 \Rightarrow k \Rightarrow \Delta_1$

Cái hay ở cách này là bạn chỉ có 1 ẩn k nhưng dễ bị quên mất trường hợp $\Delta_1: x=x_0\ (\Delta \perp Ox)$ nên khi giải mà thiếu trường hợp thì để ý và kiểm tra trường hợp Δ_1

> **STUDY TIPS**
> Đường thẳng qua $M(x_0;y_0)$ có dạng:
> $\Delta_1: y=k(x-x_0)+y_0$
> và $\Delta_2: x=x_0$
> (k là hệ số góc của Δ_1)

Ví dụ 9: Trong mặt phẳng Oxy, có bao nhiêu đường thẳng song song với đường thẳng $\Delta: 3x+4y-2=0$ và cách $M(1;1)$ một khoảng là 1?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số



Lời giải

+ Gọi đường thẳng cần tìm là $d//\Delta \Rightarrow d: 3x+4y+c=0\ (c \neq -2)$

STUDY TIPS

- Đường thẳng $d//\Delta: Ax+By+C=0$ $\Rightarrow d: Ax+By+C'\left(C\ne C'\right)$

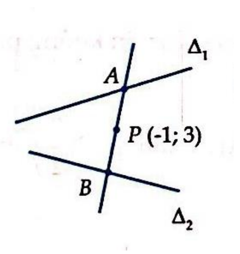
- Đường thẳng d có VTPT là $\vec{n}=\left(A;B\right)$ $\Rightarrow d: Ax+By+C=0$ (C là tham số)

+ Mà $d_{(M;d)}=1\Rightarrow \dfrac{\left|3+4+c\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1\Leftrightarrow \left|7+c\right|=5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-2\left(l\right)\\ c=-13\left(t/m\right)\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ có 1 đường thẳng thỏa mãn.

Đáp án B.

Lưu ý: Bạn có thể giải bài toán này bằng cách sau:

Vì $d//\Delta$ có VTPT là $\vec{n}=\left(3;4\right)\Rightarrow$ đường thẳng d có dạng $3x+4y+c=0$ (lưu ý là $d//\Delta\Rightarrow c\ne -2$) và làm tương tự.



Ví dụ 10: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\Delta_1:\begin{cases} x=1+t\\ y=4-2t\end{cases}$ và $\Delta_2: x-3y+9=0$, điểm $P\left(-1;3\right)$. Đường thẳng đi qua P và cắt Δ_1,Δ_2 tại A, B sao cho P là trung điểm của AB. Khi đó khoảng cách từ $M\left(1;-1\right)$ đến đường thẳng d là

A. $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** 5 **D.** $2\sqrt{5}$

Lời giải

+ $A\in\Delta_1\Rightarrow A\left(1+t;4-2t\right)$

+ $B\in\Delta_2: x=3y-9\Rightarrow B\left(3b-9;b\right)$

+ $P\left(-1;3\right)$ là trung điểm AB

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+t+3b-9}{2}=-1\\ \dfrac{4-2t+b}{2}=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} t+3b=6\\ -2t+b=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} t=0\\ b=2\end{cases}\Rightarrow A\left(1;4\right),\ B\left(-3;2\right)$$

$$\Rightarrow d: \frac{x-1}{-3-1}=\frac{y-4}{2-4}\Leftrightarrow d: x-2y+7=0$$

$$\Rightarrow d\left(M;d\right)=\frac{1-2\left(-1\right)+7}{\sqrt{1^2+\left(-2\right)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

Đáp án D.

STUDY TIPS

Nếu A, P, B thẳng hàng và

$PA=kPB\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PB}\\ \overrightarrow{PA}=-k\overrightarrow{PB}\end{array}\right.$

Lưu ý: Bài toán này có thể hỏi rộng hơn là: Viết phương trình đường thẳng d qua P cắt Δ_1,Δ_2 lần lượt tại A, B sao cho:

1. $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PB}$

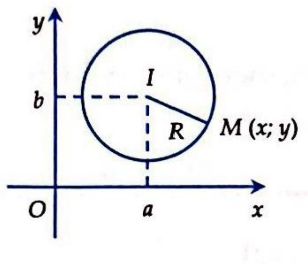
- Bước 1: Tham số hóa A, B theo Δ_1,Δ_2

- Bước 2: Từ hệ thức vecto $\Rightarrow$ tham số $\Rightarrow$ kết quả và làm tương tự như trên (do $P, A, B \in d$)

§2. Phương trình đường tròn

A. Lý thuyết

1. Phương trình đường tròn



+ Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) tâm $I(a;b)$; bán kính R

$\Rightarrow \forall M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow IM = R$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R \Leftrightarrow \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2} \; (1)$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình (dạng chính tắc) của đường tròn $C(I;R)$

+ Từ $(1) \Rightarrow x^2+y^2-2ax = 2by + a^2+b^2-R^2 = 0 \; (*)$

Đặt $a^2+b^2-R^2 = c \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2-2ax-2by+c=0} \; (2)$

$\Rightarrow$ Phương trình (2) với $a^2+b^2-c>0$ là phương trình (dạng tổng quát) đường tròn tâm $I(a;b)$; bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

STUDY TIPS

+ Đường tròn (C) tâm $I(a;b)$; bán kính R có phương trình (dạng chính tắc)

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

+ Phương trình

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

với $a^2+b^2-c>0$ là phương trình (dạng tổng quát) đường tròn tâm $I(a;b)$; bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

Ví dụ 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là phương trình đường tròn?

A. $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ **B.** $x^2+y^2-4x-6y-1=0$

C. $x^2+2y^2-4x-6y-1=0$ **D.** $2x^2+2y^2-4x-6y+1=0$

Lời giải

- Phương án A: Dạng phương trình (1), là đường tròn (C) tâm $I(2;1)$; bán kính R = 1.

- Phương án B: Dạng phương trình (2), có $a^2+b^2-c=2^2+3^2+1>0 \Rightarrow$ là đường tròn

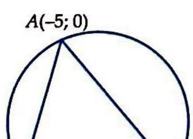
- Phương án C: Không đưa được về dạng phương trình (1) và (2) nên không phải là phương trình đường tròn.

- Phương án D: PT $\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-3y+\frac{1}{2}=0$ là đường tròn tâm $I\left(1;\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R=\sqrt{1^1+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

2.

Đáp án C.

$$PA = kPB \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB} \\ \overrightarrow{PA} = -k\overrightarrow{PB} \end{cases}$$



Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho phương trình đường tròn (C) đi qua 3 điểm $A(-5;0)$; $B(1;0)$; $C(-3;4)$ là:

A. $(x-2)^2+(y-1)^2=\sqrt{10}$ **B.** $(x-2)^2+(y+1)^2=10$

C. $x^2+y^2-4x+2y-5=0$ **D.** $x^2+y^2+4x-2y-5=0$

Lời giải

Cách 1: Gọi tâm của đường tròn là $I(a;b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-5-a)^2+b^2=(1-a)^2+b^2 \\ (-5-a)^2+b^2=(-3-a)^2+(4-b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow I(-2;1)$; bán kính $R=IA=\sqrt{10}$

$\Rightarrow$ đường tròn (C) có phương trình:

$$(x+2)^2+(y-1)^2=10 \Leftrightarrow x^2+y^2+4x-2y-5=0$$

Cách 2:

Gọi phương trình $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \; (a^2+b^2-c>0)$

Đường tròn (C) qua A, B, C

$$\Rightarrow \begin{cases} (-5)^2+0^2-2a.(-5)-2b.0+c=0 \\ 1^2+0^2-2.a.1-2.b.0+c=0 \\ (-3)^2+4^2-2a.(-3)-2b.4+c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10a+c=-25 \\ 2a-c=1 \\ 6a-8b+c=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=-5 \end{cases} \Rightarrow (C): x^2+y^2+4x-2y-5=0$$

Đáp án D.

Lưu ý:

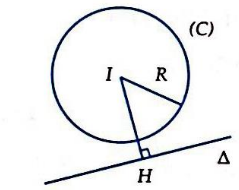
+ Bạn có thể tìm tâm (C) bằng cách tìm giao điểm của 2 đường trung trực của tam giác ABC

+ Đối với các phương án trong ví dụ này bạn có thể thử A, B, C vào các phương trình để tìm được phương trình đúng.

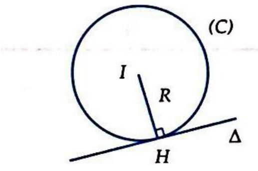
2. Vị trí tương đối của một đường thẳng với đường tròn, tiếp tuyến của đường tròn

a. Vị trí tương đối

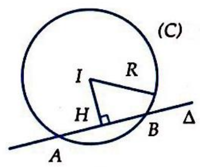
Cho đường tròn $(C): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ có tâm $I(a;b)$ và đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$



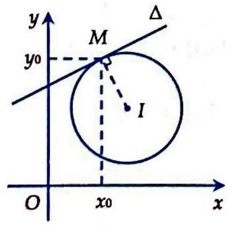
TH1: $d(I;\Delta) > R$



TH2: $d(I;\Delta) = R$



TH3: $d(I;\Delta) < R$



Cách 1: Xét $d(I;\Delta) = \dfrac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

+ Nếu $d(I;\Delta) > R \Rightarrow \Delta$ và (C) không có điểm chung.

+ Nếu $d(I;\Delta) = R \Rightarrow \Delta$ tiếp xúc với (C) tại H (H là hình chiếu của I lên Δ). Khi này ta nói Δ là tiếp tuyến của (C) với H là tiếp điểm.

+ Nếu $d(I;\Delta) < R \Rightarrow \Delta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt (AB là một dây cung của đường tròn).

Cách 2: Xét hệ $\begin{cases} \Delta \\ (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \end{cases} (1)$

+ Nếu hệ (1) vô nghiệm $\Rightarrow \Delta$ và (C) không có điểm chung

+ Nếu (1) có 1 nghiệm $(x_0; y_0) \Rightarrow \Delta$ tiếp xúc với (C) tại $H(x_0; y_0)$

+ Nếu (1) có 2 ngiệm $\Rightarrow \Delta$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B.

b. Tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ tại điểm $M(x_0;y_0) \in (C)$

Tiếp tuyến Δ tại $M(x_0; y_0)$ của (C) là đường thẳng qua $M(x_0; y_0)$ và vuông góc với MI $\Rightarrow$ có VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{IM} = (x_0 - a; y_0 - b)$

$\Rightarrow$ phương trình Δ: $\boxed{(x_0 - a)(x - x_0) + (y - b)(y - y_0) = 0}$ (3)

$\Rightarrow (3)$ là phương trình tiếp tuyến của (C) tại M

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho $(C):(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(3;-2)$ của (C) là $d: x + by + c = 0$. Khi đó giá trị $b + c$ là

A. $b + c = -2$ **B.** $b + c = -3$ **C.** $b + c = -6$ **D.** $b + c = -5$

Lời giải

(C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = 2$

$IM = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2 = R \Rightarrow M \in (C)$

Tiếp tuyến của (C) tại M là đường thẳng Δ qua $M(3;-2)$ và có VTPT $\overrightarrow{IM} = (2;0)$

STUDY TIPS

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0; y_0)$ là:

$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$

$$\Rightarrow \Delta: 2(x-3)+0(y+2)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow b+c=-3$$

Đáp án B.

Lưu ý: Bạn có thể áp dụng trực tiếp công thức (3) sẽ nhanh hơn:

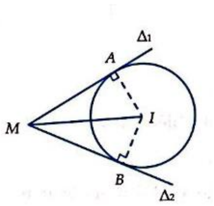
$(C):(x-1)^2+(y+2)^2=4;\ M(3;-2)$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến tại M của đường tròn (C) là:

$(3-1)(x-3)+[-2-(-2)][y-(-2)]=0 \Leftrightarrow x-3=0$

c. Tiếp tuyến của đường tròn (C) qua điểm M nằm ngoài đường tròn

Cho đường tròn (C) tâm I, bán kính R và điểm M thỏa mãn $IM > R$



Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho $(C): x^2+y^2-2x-2y-2=0$ và $M(3;5)$. Khi đó khoảng cách từ điểm $N(2;3)$ đến đường thẳng điqau M và tiếp xúc với (C) là

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 2 **D.** $\frac{3}{3}$

Lời giải

Cách 1:

+ (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+1^2+2}=2$

$IM=\sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}>R \Rightarrow$ Qua M có 2 tiếp tuyến đến (C)

+ Gọi $\vec{n}=(a;b)\neq 0$ là VTPT của đường thẳng Δ qua $M(3;5)$

$\Rightarrow \Delta: a(x-3)+b(y-5)=0 \Leftrightarrow ax+by-3a-5b=0$

+ Δ là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+b-3a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow |-2a-4b|=2\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow 3b^2+4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\frac{-4a}{3} \end{array}\right.$$

- Với b =0 chọn a = 1

$\Rightarrow \vec{n}=(1;0) \Rightarrow \Delta_1: 1(x-3)+0(y-5)=0 \Leftrightarrow x-3=0$

- Với $b=\frac{-4a}{3}$ chọn a = 3

STUDY TIPS

$IM > R \Rightarrow$ qua M có 2 tiếp tuyến đến (C)

STUDY TIPS

Bài toán viết phương trình tiếp tuyến của $C(I;R)$ biết tiếp tuyến đi qua M là bài toán viết phương trình đường thẳng qua M và cách I một khoảng không đổi R.

$\Rightarrow b=-4\Rightarrow \vec{n}=(3;-4)\Rightarrow \Delta_2: 3x-4y+11=0$

Cách 2:

+ Δ qua $M(3;5)$ có hệ số góc k:

$y=k(x-3)+5\Leftrightarrow kx-y+5-3k=0$

+ Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R\Leftrightarrow \dfrac{|k-1+5-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=2\Leftrightarrow k=\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow$ Tiếp tuyến là

$\Delta_1: y=\dfrac{3}{4}(x-3)+5\Leftrightarrow 3x-4y+11=0\Rightarrow d(N;\Delta_1)=1$

Tiếp tuyến còn lại là đường thẳng $\Delta_2: x-3=0$

Thật vậy: $d(I;\Delta_2)=\dfrac{|1-3|}{\sqrt{1^2+0}}=2=R\Rightarrow d(N;\Delta_2)=1$

Đáp án A.

STUDY TIPS

Qua điểm M nằm ngoài đường tròn (C) luôn có 2 tiếp tuyến đến C

Tổng quát: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn qua $M(x_0;y_0)$

- Bước 1: Viết phương trình đường thẳng đi qua M có hệ số góc k:

$\Delta: y=k(x-x_0)+y_0$

- Bước 2: Buộc Δ tiếp xúc với (C) $\Rightarrow d(I;\Delta)=R\Leftrightarrow f(k)=0$

$\Rightarrow$ 2 giá trị k tương ứng với 2 tiếp tuyến Δ_1 và Δ_2

(Nếu từ phương trình trên chỉ tìm được 1 tiếp tuyến thì tiếp tuyến thứ 2 là đường thẳng $\Delta_2: x-x_0=0$)

B. Các dạng toán điển hình

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho

$(C_m): x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6+m=0.$

Số giá trị nguyên để (C_m) không phải là phương trình đường tròn là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

Lời giải

(C_m) là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow m^2+[2(m-2)]^2-6-m>0$

$\Leftrightarrow 5m^2-17m+10>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{17+\sqrt{89}}{10}\\ m<\dfrac{17-\sqrt{89}}{10}\end{array}\right.$

STUDY TIPS

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ không phải là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c\le 0$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{17-\sqrt{89}}{10} \le m \le \dfrac{17+\sqrt{89}}{10} \Rightarrow$ có 2 giá trị nguyên thỏa mãn

Đáp án C.

Lời giải

Ta có $m^2+\left[2(m+1)\right]^2+1>0\ \forall m \Rightarrow (C_m)$ là đường tròn với $\forall m$

Gọi tâm của (C_m) là

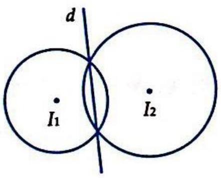
$$I(x;y) \Rightarrow \begin{cases} x=-m\ (1) \\ y=2(m+1)\ (2) \end{cases}$$

Từ $(1) \Rightarrow m=-x$ thế vào $(2) \Rightarrow y=2(-x+1) \Rightarrow y=-2x+2\ (3)$

$I(x;y)$ thỏa mãn phương trình (3) với $\forall m \Rightarrow$ tập hợp I là đường thẳng (3)

Lưu ý: Phương pháp tìm tập hợp tâm của đường tròn (C_m)

- Bước 1: Tìm điều kiện của m để (C_m) l



đường tròn $\Rightarrow$ điều kiện (*)

- Bước 2: Gọi tâm là $I(x;y) \Rightarrow \begin{cases} x=f(m)(1) \\ y=h(m)(2) \end{cases}$

Rút m từ 1 phương trình thế vào phương trình còn lại $\Rightarrow f(x;y)=0$

- Bước 3: Đối chiếu điều kiện (*)

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C_m): x^2+y^2+2mx-4(m+1)y-1=0$.

Khi đó tập hợp tâm của (C_m) khi m thay đổi là

A. một đường thẳng **B.** một đường tròn

C. một parabol **D.** một điểm cố định

Kết luận: Tập hợp là đường $\begin{cases} f(x;y)=0 \\ t/m(*) \end{cases}$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy, số điểm cố định mà đường tròn $(C_m): x^2+y^2-2mx-4(m+1)y-1=0$ luôn đi qua khi m thay đổi là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Lời giải

Giả sử điểm cố định mà (C_m) luôn đi qua là $A(a;b)$

$\Rightarrow$ phương trình $a^2+b^2-2am-4b(m+1)-1=0$ đúng với $\forall m$

$\Leftrightarrow (-2a-4b)m+\left(a^2+b^2-4b-1\right)=0$ đúng với $\forall m$

STUDY TIPS

$(I_1;R_1)$ cắt $(I_2;R_2)$

$\Rightarrow |R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a-4b=0\\ a^2+b^2-4b-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2b\\ 5b^2-4b-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=\dfrac{-2}{5}\\ b=\dfrac{-1}{5}\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm cố định mà đường tròn (C_m) luôn đi qua khi m thay đổi.

Đáp án C.

STUDY TIPS

Cho đường tròn $(C_1);(C_2)$ cắt nhau và luôn có phương trình $f(x;y)=0$ và $g(x;y)=0$. Khi đó phương trình đường thẳng qua điểm của $(C_1);(C_2)$ là:

$f(x;y)-g(x;y)=0$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 đường tròn:

$(C_1): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ và $(C_2):(x+1)^2+(y-1)^2=16$

Đường thẳng đi qua giao điểm của 2 đường tròn là:

A. $3x+2y+1=0$ **B.** $3x+2y-1=0$

C. $2x+3y-5=0$ **D.** $2x-3y-5=0$

Lời giải

(C_1) có tâm $I_1(1;-2)$, bán kính $R_1=3$

(C_2) có tâm $I_2(-1;1)$, bán kính $R_2=4$

$\Rightarrow |R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2 \Rightarrow (C_1)$ cắt (C_2)

Gọi điểm $M(x;y)$ thuộc đường thẳng cần tìm

$\Rightarrow$ Tọa độ M thỏa mãn hệ $\begin{cases}x^2+y^2-2x+4y-4=0\\ (x+1)^2+(y-1)^2=16\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2x+4y-4=0\ (1)\\ x^2+y^2+2x-2y-14=0\ (2)\end{cases}$$

Lấy $(1)-(2)\Rightarrow -4x+6y+10=0 \Leftrightarrow 2x-3y-5=0\ (3)$

Nhận thấy $M(x;y)$ luôn thỏa mãn phương trình (3)

$\Rightarrow$ Đường thẳng qua giao điểm của hai đường tròn là: $2x-3y-5=0$

Đáp án D.

Lưu ý: Bạn có thể giải bài này bằng cách giải hệ $\begin{cases}(C_1)\\ (C_2)\end{cases} \Rightarrow$ 2 giao điểm A và B và viết phương trình đường thẳng qua AB. Tuy nhiên cách này sẽ dài hơn đặc biệt là nếu tọa độ A và B lẻ nên không phù hợp khi làm bài trắc nghiệm.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ và $(C_2): x^2+y^2=1$. Đường tròn (C) đi qua giao điểm $(C_1),(C_2)$ và $A(1;2)$ có tâm là $I(m;n)$. Khi đó giá trị $m+n$ là:

A. 3 **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** 4 **D.** $\frac{-4}{3}$

Lời giải

STUDY TIPS

Phương trình chùm đường tròn đi qua giao điểm của 2 đường tròn $(C_1): f(x;y)=0$ và $(C_2): g(x;y)=0$ là: $f(x;y)+g(x;y)=0$

Phương trình đường tròn (C) qua giao điểm của (C_1) và (C_2) có dạng:

$$a\left(x^2+y^2-2x+4y-4\right)+b\left(x^2+y^2-1\right)=0\ (*)\ (a+b\neq 0)$$

Đường tròn này qua $A(1;2)$

$$\Rightarrow a\left(1^2+2^2-2+8-4\right)+b\left(1^2+2^2-1\right)=0 \Leftrightarrow 7a+4b=0$$

Chọn $a=1 \Rightarrow b=\frac{-7}{4} \Rightarrow (C): x^2+y^2-2x+4y-4-\frac{-7}{4}\left(x^2+y^2-1\right)=0$

$$(C): \frac{-3}{4}x^2-\frac{3}{4}y^2-2x+4y-\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{8}{3}x-\frac{16}{3}y+3=0$$

$\Rightarrow (C)$ có tâm $I\left(\frac{-4}{3};\frac{8}{3}\right)$, bán kính $R=\sqrt{\left(\frac{-4}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2-3}=\frac{\sqrt{53}}{3}$

$$\Rightarrow m+n=\frac{-4}{3}+\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

Đáp án B.

Lưu ý:

+ Bạn có thể giải trực tiếp bằng cách tìm giao điểm của (C_1) và (C_2) là B và C rồi tìm tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (bạn đọc tự giải).

+ Phương pháp trên thường sử dụng trong các bài toán viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của 2 đường tròn và thỏa mãn điều kiện nào đó.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn đi qua $A(3;1)$; $B(5;5)$ và tâm nằm trên trục hoành có chu vi là:

A. 100 **B.** 100π **C.** $2\sqrt{50}\pi$ **D.** $2\sqrt{50}$

Lời giải

Gọi đường tròn cần tìm là (C) có tâm $I \in Ox \Rightarrow I(a;0)$

STUDY TIPS

Cho $C(I;R)$

+ Chu vi: $2\pi R$

Đường tròn qua A, B $\Rightarrow IA = IB \Leftrightarrow a = 10 \Rightarrow I(10;0)$

$\Rightarrow$ Bán kính $R = IA = \sqrt{(10-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{50}$

Chu vi là: $C = 2\pi R = 2\sqrt{50}\pi$

Đáp án C

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn (C) đi qua $A(1;1)$; $B(3;3)$ và ... thẳng $\Delta: x-5=0$ có phương trình là:

A. ... $)^2 = 4$ và $(x-5)^2 + (y-9)^2 = 10$

B. ... $)^2 = 2$ và $(x+5)^2 + (y-9)^2 = 100$

C. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 100$

D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ và $(x+5)^2 + (y-9)^2 = 100$

Lời giải

Gọi tâm đườn... tròn (C) là tâ... $I(a;b)$

(C) qua A, B $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow (1-a)^2 + (1-b)^2 = (3-a)^2 + (3-b)^2 \Leftrightarrow a+b=4\ (1)$

(C) tiếp xúc với $\Delta \Rightarrow d(I;\Delta)$

$\Leftrightarrow \dfrac{|a-5|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2}\ (2)$

Từ $(1) \Rightarrow b = 4-a$ thế vào

$(2) \Rightarrow |a-5| = \sqrt{(1-a)^2 + [1-(4-a)]^2}$

$\Leftrightarrow a^2 + 2a - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-5 \\ a=3 \end{array}\right.$

- Với $a = 3 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow (C)$ có tâm $I(3;1)$ và bán kính

$R = IA = \sqrt{(1-3)^2 + (1-1)^2} = 2 \Rightarrow (C): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

- Với $a = -5 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow (C)$ có tâm $I(-5;9)$ và bán kính

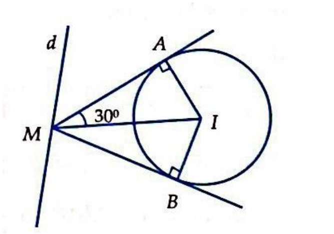
$R = \sqrt{(1+5)^2 + (1-9)^2} = 10 \Rightarrow (C): (x+5)^2 + (y-9)^2 = 100$

Đáp án D.

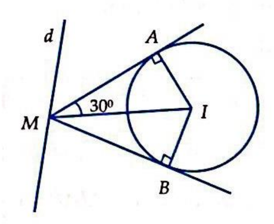
Ví dụ 8: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(3;5)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến đến (C) với A, B là tiếp điểm. Viết phương trình đường thẳng AB.

A. $2x+3y+17=0$ **B.** $2x+3y-17=0$

C. $2x+3y+16=0$ **D.** $2x+3y-16=0$



Lời giải Vậy phương trình đường thẳng AB là $2x+3y-17=0$



Ví dụ 9: Trong mặt phẳng Oxy, có bao nhiêu điểm $M\in d: x-y-3=0$ mà từ M kẻ được đến $(C): x^2+y^2-2x-4y+1=0$ hai tiếp tuyến mà hai tiếp tuyến đó tạo với nhau một góc 60^0

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

$IM=\sqrt{13}>R\Rightarrow$ Từ M có 2 tiếp tuyến đến (C)

Xét ΔAIM vuông góc tại A có

$AI=R=3;\ IM=\sqrt{13}$

$\Rightarrow AM=\sqrt{IM^2-AI^2}=\sqrt{13-3^2}=2$

Mà $AM=MB=2$ (tính chất tiếp tuyến đường tròn)

$\Rightarrow$ A, B cách điểm M một khoảng là 2 $\Rightarrow$ A, B nằm trên đường tròn (C_1) có tâm $M(3;5)$ và bán kính $R_1=MA=2$

$\Rightarrow (C_1):(x-3)^2$ ... $x-10y+30=0$

Tọa độ A, B thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y-4=0\ (1)\\ x^2+y^2-6x-10y+30=0\ (2)\end{cases}$$

Lấy

$(1)-(2)\Rightarrow 4x+6y-34=0\Leftrightarrow 2x+3y-17=0$

Lời giải

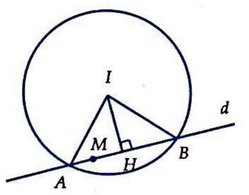
Gọi hai tiếp điểm là A và B

(C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=2$

$M\in d: y=x-3\Rightarrow M(m;m-3)$

MA tạo với MB một góc $60^0\Rightarrow AMB=60^0$ hoặc $AMB=120^0$

- TH1: $AMB=60^0\Rightarrow AMI=30^0\Rightarrow \sin 30^0=\dfrac{AI}{IM}$



bán kính $R=\sqrt{3^2+3^2-14}=2$

Gọi H là trung điểm AB $\Rightarrow IH\perp AB;\ HA=\frac{AB}{2}=\sqrt{3}$

ΔAIH vuông tại H $\Rightarrow IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1=d\left(I;d\right)$

$\Rightarrow$ đường thẳng d đi qua $M\left(6;2\right)$ và cách $I\left(3;3\right)$ một khoảng là 1

Gọi VTPT của d là $\vec{n}=\left(a;b\right)\neq\vec{0}$

$\Rightarrow d:a\left(x-6\right)+b\left(y-2\right)=0\Leftrightarrow ax+by-6a-2b=0$

Mà $d\left(I;d\right)=1=\frac{\left|3a+3b-6a-2b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1\Leftrightarrow 8a^2-6ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=\frac{3}{4}b\end{array}\right.$

- Với $a=0$ chọn $b=1\Rightarrow d:y-2=0\quad\left(1\right)$

- Với $a=\frac{3}{4}b$ chọn $b=4\Rightarrow a=3\Rightarrow d:3x+4y-26=0\quad\left(2\right)$

Từ (1) và (2) ta chọn đáp án A

Đáp án A.

Lưu ý: Bài toán viết phương trình đường thẳng d qua M cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A, B thỏa mãn tính chất K ta thường làm như sau:

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{\left(m-1\right)^2+\left(m-5\right)^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=5\end{array}\right.\Rightarrow$ có 2 điểm M thỏa mãn (1)

- TH2: $\widehat{AMB}=120^0\Rightarrow\widehat{AMI}=60^0\Rightarrow\sin60^0=\frac{AI}{IM}$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{\sqrt{\left(m-1\right)^2+\left(m-5\right)^2}}\Leftrightarrow 6m^2-36m+62=0$ vô nghiệm (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ có 2 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán

Đáp án C

Lưu ý: Đối với ví dụ này bạn đọc phải nhớ có 2 trường hợp

STUDY TIPS

+ $\sin\widehat{AIB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow\widehat{AIB}=90^0$

+ $a.b\le\frac{a^2+b^2}{2}\ \forall a,b$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

... mặt phẳng Oxy, đường thẳng qua $M\left(6;2\right)$ và cắt ... $y+14=0$ tại 2 điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$ là:

... $-26=0$ **B.** $x=2$ và $3x+4y-26=0$

... $-30=0$ **D.** $x=2$ và $3x+4y-30=0$

Lời giải

Đường tròn (C ... có tâm $I\left(3;3\right)$,

$$\Rightarrow d(I;d)=IH=1 \Leftrightarrow \frac{|-2-2m-2m+3|}{\sqrt{1^2+m^2}}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\,(tm) \\ m=\frac{8}{15}\,(ktm) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ có 1 giá trị m nguyên

Cách 2: $S_{IAB}=AH.IH \le \frac{AH^2+IH^2}{2}=\frac{AI^2}{2}=\frac{R^2}{2}$

$\max S_{IAB}=\frac{R^2}{2} \Leftrightarrow AH=IH \Leftrightarrow \Delta IAH$ vuông cân tại H

$\Rightarrow IH=\frac{R}{\sqrt{2}}=1$, làm tương tự như trên ta được kết quả

Ví dụ 11: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng $d: x+my-2m+3=0$. Gọi I là tâm của (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho diện tích ΔIAB là lớn nhất

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Đáp án B

+ Bước 1: Từ tính chất K, tính $IH=a$ (với I là tâm (C), H là trung điểm AB)

+ Bước 2: Viết phương trình d qua M cách I một khoảng a $\Rightarrow$ kết quả

Lời giải

Cách 1: Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2)$, bán kính $R=\sqrt{2}$

Giả sử $d \cap (C)$ tại 2 điểm A, B

$\Rightarrow S_{IAB}=\frac{1}{2}.IA.IB.\sin AIB$

$=\frac{1}{2}.R^2.\sin AIB \le \frac{1}{2}.R^2 \Rightarrow \max S_{IAB}=\frac{1}{2}R^2 \Leftrightarrow AIB=90^0$

$\Rightarrow AIH=45^0$ (H là trung điểm AB)

$\Rightarrow IH=AI.\cos 45^0=\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

C. Bài tập rèn luyện kĩ năng

Xem đáp án chi tiết tại trang

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-6x+8y+9=0$. Tâm và bán kính đường tròn là

A. $I(6;8)$ và $R=\sqrt{19}$ **B.** $I(-3;4)$ và $R=4$

C. $I(3;-4)$ và $R=9$ **D.** $I(3;-4)$ và $R=4$

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(2;3)$ và bán kính $R=6$. Phương trình nào là phương trình đường tròn (C)?

A. $(x-2)^2+(y-3)^2=6$

B. $(x-2)^2+(y-3)^2=36$

C. $x^2+y^2-4x-6y-23=0$

D. Cả B và C

Câu 3: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn?

(1) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=0$

(2) $(x-1)^2+(y-1)^2=8$

(3) $(x+6)^2+(y-3)^2=25$

A. Chỉ (1) và (3) **B.** Chỉ (2) và (3)

C. Cả (1); (2); (3) **D.** Chỉ (1) và (2)

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình tổng quát của đường tròn (C) có tâm $I(0;-1)$ và đi qua $A(1;4)$ là:

A. $x^2+y^2+2y-25=0$

B. $x^2+(y+1)^2=26$

C. Cả A và B

D. $x^2+y^2-2y+27=0$

Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường tròn (C) có đường kính AB với $A(2;8)$ và $B(6;-4)$ là:

A. $(x+2)^2+(y+6)^2=212$

B. $(x+4)^2+(y+6)^2=2\sqrt{10}$

C. $(x-4)^2+(y-2)^2=40$

D. $(x+4)^2+(y+2)^2=40$

Câu 6: Trong mặt phẳng Oxy, có bao nhiêu đường tròn (C) đi qua $A(-2;4)$ và $B(0;3)$, tâm I thuộc đường thẳng $d:x+2y-5=0$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** Vô số

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình chính tắc của đường tròn (C) có tâm $I(-4;-3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d:4x+y-6=0$ là:

A. $(x-4)^2+(y-3)^2=\frac{625}{17}$

B. $(x+4)^2+(y+3)^2=\frac{169}{17}$

C. $(x+4)^2+(y+3)^2=\frac{625}{17}$

D. $(x-4)^2+(y-3)^2=\frac{169}{17}$

Câu 8: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường tròn (C) có tâm I nằm trên đường thẳng $d:x-2y+6=0$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ là

A. $(C):(x-6)^2+(y-6)^2=36$

B. $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=4$

C. $(C_1):(x+6)^2+(y+6)^2=36$

Hoặc $(C_2):(x+2)^2+(y-2)^2=4$

D. $(C_1):(x-6)^2+(y-6)^2=36$

Hoặc $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=4$

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta:x-3y=0$ tiếp xúc với đường thẳng $d:x-y+8=0$ tại $A(-4;4)$. Có bao nhiêu đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán?

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** vô số

Câu 10: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=t\end{cases}$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1:2x+y+3=0$ và $d_2:2x+y+3=0$ và $d_2:-x-2y+4=0$ là:

A. $(x-4)^2+(y-3)^2=\frac{49}{5}$

B. $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{5}$

C. Cả A và B

D. $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{5}$

Câu 11: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường tròn (C) đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(4;-3)$, $C(3;5)$ có dạng $x^2+y^2-ax-by+c=0$. Tính $P=a+b+c$

A. $\frac{-128}{9}$ **B.** $\frac{-9}{8}$ **C.** $\frac{16}{9}$ **D.** $\frac{8}{9}$

Câu 12: Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC biết tạo độ đỉnh $A(-3;7)$. Trực tâm $H(3;-1)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;0)$ khi đó tọa độ đỉnh $C(a;b)$ biết hoành độ điểm C dương khi đó giá trị $a+b$ là

A. $1+\sqrt{65}$ **B.** $1-\sqrt{65}$

C. $1+2\sqrt{65}$ **D.** $1-2\sqrt{65}$

Câu 13: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x+4y+3=0$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(0;-3)$ là $ax+by-3=0$ thì:

A. $a+b=-3$ **B.** $a+b=0$

C. $a+b=3$ **D.** $a+b=2$

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x+2)^2+(y-3)^2=2$. Phương trình tiếp tuyến d của (C) đi qua $M(-1;3)$ có dạng $ax+by+c=0$. Tính $\frac{a}{b}$.

A. $\sqrt{2}$ **B.** $-\sqrt{2}$ **C.** ± 2 **D.** $\pm\sqrt{2}$

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-8x-4y+18=0$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: x-y=0$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** Vô số

Câu 16: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x+4)^2+y^2=5$. Phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: 2x-y+1=0$ là: $\Delta_1: x+2y+a=0$ và $\Delta_2: x+2y+b=0$. Khi đó:

A. $a+b=10$ **B.** $a+b=8$

C. $a+b=-10$ **D.** $a+b=-8$

Câu 17: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-5)^2+(y-1)^2=34$. Số tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng $d: x-4y+7=0$ một góc $\alpha=45^0$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** vô số **D.** 2

Câu 18: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x+4y-20=0$ với đường thẳng $\Delta: 2x-y+3=0$. Qua $M\in\Delta$, kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) với A, B là tiếp điểm. Tìm M biết $AB=4\sqrt{5}$

A. $M\left(1-2\sqrt{5};-2+\sqrt{5}\right)$ và $M\left(1-2\sqrt{5};-2-\sqrt{5}\right)$

B. $M\left(-2+\sqrt{5};-1+2\sqrt{5}\right)$ và $M\left(1-2\sqrt{5};-2-\sqrt{5}\right)$

C. $M\left(-1+2\sqrt{5};-2+\sqrt{5}\right)$ và $M\left(-1-2\sqrt{5};-2-\sqrt{5}\right)$

D. $M\left(-2-2\sqrt{5};-2+\sqrt{5}\right)$ và $M\left(-1-2\sqrt{5};-1+2\sqrt{5}\right)$

Câu 19: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+8x-6y+5=0$ với đường thẳng $\Delta: x-y-1=0$. Qua $M\in\Delta$, kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) với AB là tiếp điểm để ΔMAB đều biết $M(x_M;y_M)$ và $x_M>0$. Khi đó x_M-y_M là:

A. $x_M-y_M=-1$ **B.** $x_M-y_M=1$

C. $x_M - y_M = 4\sqrt{6} - 1$ **D.** $x_M - y_M = 4\sqrt{6}$

Câu 20: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 16$ với đường thẳng $\Delta: x - 2y = 0$. Qua $M \in \Delta$, kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB đến (C) với A, B là tiếp điểm. Điểm M thuộc cung phần tư thứ mấy? Biết $S_{\Delta AMB} = \frac{108}{25}$

A. Thứ I và thứ II **B.** Thứ II và thứ IV

C. Thứ I và thứ III **D.** Thứ II và thứ III

Câu 21: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 10x - 8y + 1 = 0$ với đường thẳng $\Delta: -x + y - 5 = 0$. Qua M thuộc đường thẳng Δ, kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là tiếp điểm. Số điểm M thỏa mãn để $S_{\Delta IAB}$ đạt giá trị lớn nhất (với I là tâm đường tròn (C)) là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Câu 22: Trong mặt phẳng Oxy, cho $M(2;3)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$. Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến (C) với A, B là tiếp điểm. Độ dài dây cung AB bằng

A. $\frac{15\sqrt{34}}{7}$ **B.** $\frac{34\sqrt{15}}{7}$

C. $\frac{90}{7}$ **D.** $\frac{25}{2}$

Câu 23: Trong mặt phẳng Oxy, lập phương trình đường thẳng d đi qua $M(4;0)$ cắt đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm AB.

A. $x + 2y - 4 = 0$ **B.** $x - 2y - 4 = 0$

C. $x - 2y + 4 = 0$ **D.** $x + 2y + 4 = 0$

Câu 24: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 8x + 10y + 16 = 0$. Đường thẳng d đi qua $M(-1;-7)$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$ có dạng $ax + by + a + 7b = 0$. Tính $P = \frac{b}{a}$

A. $P = 0$ hoặc $P = \frac{12}{5}$ **B.** $P = 0$ hoặc $P = \frac{5}{12}$

C. $P = \pm\frac{12}{5}$ **D.** $P = 0$ hoặc $P = \frac{-12}{5}$

Câu 25: Trong mặt phẳng Oxy, lập phương trình đường thẳng d đi qua $M(2;-2)$ cắt đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho diện tích $\Delta IAB = 1$ với I là tâm đường tròn (C).

A. $x - 2 = 0$ và $3x + 4y - 2 = 0$

B. $x - 2 = 0$ và $4x + 3y - 2 = 0$

C. $y - 2 = 0$ và $4x + 3y - 2 = 0$

D. $y - 2 = 0$ và $3x + 4y - 2 = 0$

Câu 26: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 12$. Đường thẳng d đi qua $M(3;-1)$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔIAB đều (I là tâm đường tròn (C)). Số đường thẳng d thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

Câu 27: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$. Đường thẳng d đi qua $M(1;3)$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Giá trị lớn nhất của diện tích ΔIAB là:

A. $\frac{25}{2}$ **B.** 25 **C.** $\frac{25}{4}$ **D.** $\frac{25}{3}$

Câu 28: Với giá trị nào của tham số m thì $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 6(m-2)y - 16m + 26 = 0$ là đường tròn?

A. $\forall m \in \mathbb{R}$

B. $M \neq 1$

C. $m\in\left(-\infty;\frac{-1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$

D. $m\in\left(-\infty;\frac{-1}{5}\right)\cup(1;+\infty)$

Câu 29: Trong mặt phẳng Oxy, cho $(C_m): x^2+y^2+2mx+8(m-3)y-28m+17=0$.

Tập hợp của (C_m) khi m thay đổi là:

A. $y=2x+6$ **B.** $y=x+3$

C. $y=4x+12$ **D.** $y=4x-12$

Câu 30: Trong mặt phẳng Oxy, cho $(C_m): x^2+y^2-2(m+1)x-4(m-2)y+m+\frac{23}{4}=0$

Số điểm cố định mà (C_m) luôn đi qua là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 31: Trong mặt phẳng Oxy, cho $(C_m): x^2+y^2-2mx-2my+m-1=0$. Gọi S là tập hợp các giá trị m để (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $d: x+2y+5=0$. Tính tổng các phần tử của S.

A. $\sqrt{745}$ **B.** $-\sqrt{745}$ **C.** 25 **D.** $\frac{25}{2}$

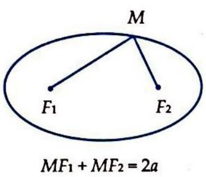
Câu 32: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=1$ và đường thẳng $\Delta:(m-3)x+y+2(m-3)=0$. Tính giá trị của m để trên Δ tồn tại duy nhất một điểm M để từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là tiếp điểm sao cho diện tích ΔIAB đạt GTLN với I là tâm đường tròn.

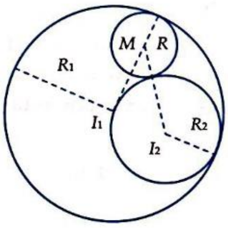
A. 24 **B.** 25 **C.** 26 **D.** 27

STUDY TIPS

+ Cho F_1, F_2 cố định, a không đổi. Tập hợp M thỏa mãn: $MF_1+MF_2=2a>0$ là đường elip

+ $(E):\{M \setminus MF_1+MF_2=2a\}$





§3. Phương trình đường elip

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Elip là tập hợp tất cả những điểm thuộc mặt phẳng và tổng khoảng cách tới hai điểm cố định F_1, F_2 luôn là một số dương không đổi 2a.

Khi đó:

+ F_1, F_2 gọi là tiêu điểm của elip

+ $F_1F_2 = 2c\ (0 < c < a)$ gọi là tiêu cự của elip

+ Tỉ số $e = \dfrac{c}{a} < 1$ gọi là tâm sai

Ví dụ 1: Cho 2 đường tròn (C_1) và (C_2) thỏa mãn (C_2) qua tâm (C_1). Tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc ngoài với (C_2) và tiếp xúc trong với (C_1) là

A. một đường thẳng | **B.** một đường tròn

C. một đường parabol | **D.** một đường elip

Lời giải

+ Gọi đường tròn tiếp xúc ngoài với (C_2) và tiếp xúc trong với (C_1) là (C_m) có tâm M và bán kính là R.

(C_1) có tâm I_1 và bán kính R_1

(C_2) có tâm I_2 và bán kính R_2

+ Do (C_m) tiếp xúc trong với $(C_1) \Rightarrow MI_1 = R_1 - R$

(C_m) tiếp xúc ngoài với $(C_2) \Rightarrow MI_2 = R_2 + R$

$\Rightarrow MI_1 + MI_2 = R_1 + R_2\ (*)$

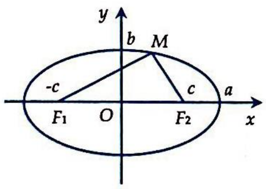
Do $(C_1),(C_2)$ cố định nên I_1, I_2 cố định và $R_1 + R_2 = 2a > 0$ là số không đổi nên $(*) \Rightarrow$ Tổng khoảng cách từ M đến 2 điểm cố định I_1, I_2 là một số dương không đổi $2a = R_1 + R_2$

$\Rightarrow$ Tập hợp M là một đường elip (tiêu điểm I_1, I_2)

Đáp án D.

2. Phương trình elip

$a > c > 0\ \forall M(x;y)$ thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$ ta được



$$\begin{cases} MF_1 = a + \dfrac{cx}{a} \\ MF_2 = a - \dfrac{cx}{a} \end{cases} (1)$$ gọi lá bán kính qua tiêu điểm của M

+ Từ $MF_1 = a + \dfrac{cx}{a} \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \dfrac{cx}{a} \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2x^2 = (a^2 - c^2)a^2$

Đặt $b^2 = a^2 - c^2 > 0 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}\ (2)$

Phương trình (2) được gọi là phương trình chính tắc của elip có:

+ Tiêu điểm $F_1(-c;0);\ F_2(c;0)$

+ Tiêu cự $F_1F_2 = c_1c_2$

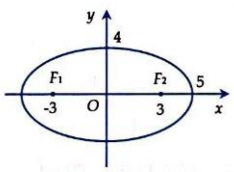
+ Tâm sai $e = \dfrac{c}{a}$

Lưu ý: (1) được chứng minh trong sách giáo khoa Hình học lớp 10 nâng cao

Ví dụ 2: Cho $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Một tiêu điểm của (E) có tọa độ là

A. $F_1(3;0)$ **B.** $F_1(0;-3)$ **C.** $F_1(-3;0)$ **D.** $F_1(0;5)$

Lời giải



Ta có $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow F_1(-3;0)$

Đáp án C.

+ Trong mặt phẳng Oxy, cho $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$ và độ dài không đổi 2a với

Ví dụ 3: Cho $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Có bao nhiêu điểm $M \in (E)$ sao cho $MF_1 = 2MF_2$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Gọi $M(x;y) \in (E)$

Ta có $a = 5;\ b = 4;\ c = 3 \Rightarrow MF_1 = a + \dfrac{cx}{a} = 5 + \dfrac{3x}{5};\ MF_2 = a - \dfrac{cx}{a} = 5 - \dfrac{3x}{5}$

$$MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow 5 + \frac{3x}{5} = 2\left(5 - \frac{3x}{5}\right) \Rightarrow x = \frac{25}{9} \Rightarrow \frac{\left(\frac{25}{9}\right)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{8\sqrt{14}}{9}$$

STUDY TIPS

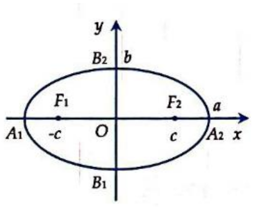
Phương trình chính tắc của elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases}$.

Tiêu điểm là $F_1(-c;0);\ F_2(c;0)$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn

Đáp án C

3. Dạng của elip



- Tính đối xứng:

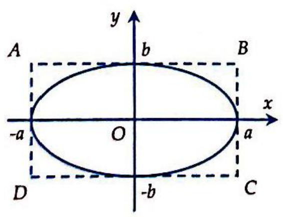
Cho $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow M_1(x_0;y_0)\in(E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{(\pm x_0)^2}{a^2}+\frac{(\pm y_0)^2}{b^2}=1$

$M_2(-x_0;y_0)$, $M_3(x_0;-y_0)$ và $M_4(-x_0;y_0)$ cũng thuộc (E)

(E) đối xứng qua hai trục tọa độ và gốc tọa độ bởi vậy để chứng minh một tính chất bất kì của (E) ta có quyền giả sử x, y là các số không âm.

- Giao điểm với các trục:

$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ cắt Ox tại $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ và cắt Oy tại $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$



$\Rightarrow A_1A_2=2a$ là trục lớn của (E)

$B_1B_2=2b$ là trục nhỏ của (E)

- **Hình chữ nhật cơ sở** là hình chữ nhật ABCD với $A(-a;b), B(a;b), C(a;-b), D(-a;-b)$

$\Rightarrow$ Diện tích hình chữ nhật cơ sở là $S_{ABCD}=2a.2b=4ab$

STUDY TIPS

Phương pháp viết phương trình elip:

Bước 1: Gọi $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $\begin{cases} a,b,c>0 \\ b^2=a^2-c^2 \end{cases} (1)$.

Bước 2: Từ giả thiết suy ra hai phương trình: $\begin{cases} f(a,b,c)=0 \\ g(a,b,c)=0 \end{cases} (2)$

Bước 3: giải hệ $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \\ b \Rightarrow (E) \\ c \end{cases}$

(Mục tiêu là từ giả thiết ta tìm ra a và b)

Ví dụ 4: (E) có một tiêu điểm là $F(-2;0)$ và một đỉnh $A(5;0)$ có phương trình là

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$ **C.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ **D.** $\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{25}=1$

Lời giải

Gọi elip cần tìm là $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $\begin{cases} a,b,c>0 \\ b^2=a^2-c^2 \end{cases}$

Tiêu điểm $F(-2;0) \Rightarrow c=2$

Đỉnh $A(5;0) \Rightarrow a=5$

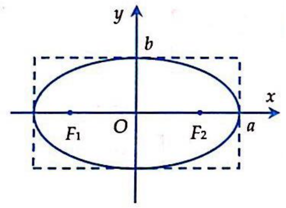
Có $b^2=a^2-c^2=25-4=21 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$

Đáp án B.

Lưu ý: Với bài này bạn có thể giải bằng cách thử từng phương án tìm tiêu điểm và đỉnh rồi kiểm tra lại với giả thiết và kết luận

Ví dụ 5: Elip có phương trình $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ biết (E) có tâm sai là $\frac{\sqrt{5}}{3}$; hình chữ nhật cơ sở có chu vi là 20. Khi đó giá trị $a+2b$ là

A. 35 **B.** – 5 **C.** 7 **D.** 8



Lời giải

Ta có $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $\begin{cases} a,b,c>0 \\ b^2=a^2-c^2\,(1) \end{cases}$

Tâm sai của (E) là $\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow c=\frac{\sqrt{5}}{3}a\,(2)$

STUDY TIPS

Chu vi hình chữ nhật cơ sở là $2(2a+2b)$

Chu vi hình chữ nhật cơ sở là 20 $\Rightarrow 2.(2a+2b)=20 \Leftrightarrow a+b=5 \Rightarrow b=5-a$ (3)

Thế (2), (3) vào (1) $\Rightarrow (5-a)^2=a^2-\frac{5}{9}a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=15 \end{array}\right.$

- Với $a=3 \Rightarrow b=2$ thỏa mãn $\Rightarrow a+2b=27$ (đáp án C)

- Với $a=15 \Rightarrow b=-10$ (loại) do $a,b,c>0$

Đáp án C

4. Vị trí tương đối của một điểm với (E), của một đường thẳng với (E)

a. Vị trí tương đối của một điểm với (E)

Cho $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a,b,c>0$ và điểm $M(x_0;y_0)$

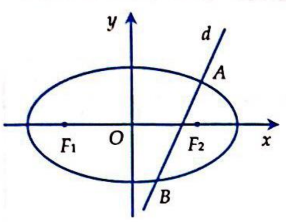
Xét biểu thức $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=T$

+ Nếu $T>1 \Rightarrow M$ nằm ngoài (E)

+ Nếu $T=1 \Rightarrow M$ nằm trên (E) (hay $M \in (E)$)

+ Nếu $T<1 \Rightarrow M$ nằm trong (E)

b. Vị trí tương đối của đường thẳng với (E)



Cho $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a,b,c>0$ và đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$

Xét hệ $\begin{cases} Ax+By+C=0\ (1) \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (2) \end{cases}$

Rút y từ (1) thế vào (2) $\Rightarrow A_1x^2+B_1y+C_1=0$ (3)

+ Nếu (3) vô nghiệm $\Rightarrow \Delta$ và (E) không có điểm chung

+ Nếu (3) có nghiệm kép $\Rightarrow \Delta$ và (E) tiếp xúc nhau.

+ Nếu (3) có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow \Delta$ và (E) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 6: Cho $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ và đường tròn $(C_m): x^2+y^2-2(m-1)x+2y-1=0$. Số giá trị m nguyên để đường tròn (C_m) có tâm nằm hoàn toàn tròn (E) là:

A. 7 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10

Lời giải

(C) có tâm là $I(m-1;-1)$. Tâm I nằm trong (E)

$$\Rightarrow \frac{(m-1)^2}{25}+\frac{(-1)^2}{9}<1 \Leftrightarrow (m-1)^2<\frac{8}{9}.25 \Leftrightarrow 1-\frac{10\sqrt{2}}{3}<m<1+\frac{10\sqrt{2}}{3}$$

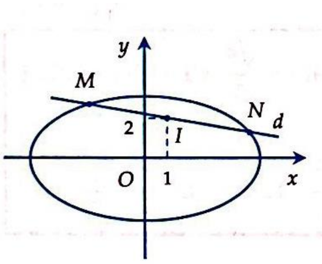
$\Rightarrow$ có 9 giá trị m nguyên thỏa mãn

Đáp án C.

Ví dụ 7: Cho $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và điểm $I(1;2)$ đường thẳng d đi qua I cắt (E) tại hai điểm M, N sao cho I là trung điểm của MN có vecto chỉ phương là $\vec{u}=(a;b)$ .Khi đó giá trị $\frac{b}{a}$ là:

A. $\frac{32}{9}$ **B.** không tồn tại **C.** $-\frac{9}{32}$ **D.** $\frac{9}{32}$

Lời giải



Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}=(a;b) \Rightarrow \frac{b}{a}=k$ là hệ số góc của đường thẳng d

$\Rightarrow$ d qua I và có hệ số góc k $\Rightarrow d: y=k(x-1)+2$ (1)

Tọa độ M, N là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=k(x-1)+2 & (1) \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow$ thế (1) vào (2) $\Rightarrow 9x^2+16[k(x-1)+2]^2=144$

$\Leftrightarrow (16k^2+9)x^2+16(4k-2k^2)+16k^2-64k-80=0$ (3)

Nhận thấy qua I luôn có đường thẳng cắt (E) tại hai điểm phân biệt, (3) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $\forall k$ là hoành độ của M, N.

Mà M, N, I thẳng hàng (cùng thuộc d) $\Rightarrow$ I là trung điểm của MN

$$\Rightarrow \frac{x_1+x_2}{2}=x_1 \Leftrightarrow \frac{-16(4k-2k^2)}{2(16k^2+9)}=1 \Leftrightarrow k=-\frac{9}{32}$$

Đáp án C.

B. Các dạng toán điển hình

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, elip (E) có tiêu cự bằng 12 và tâm sai $e=\frac{3}{5}$.

Cho các mệnh đề sau:

(1) (E) có tiêu điểm $F_1(-8;0)$ và $F_2(8;0)$

(2) (E) có độ dài trục nhỏ bằng 16.

(3) (E) có đỉnh $A_2(-10;0)$

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào sai?

A. (1) và (2) **B.** (2) và (3) **C.** (1), (2) và (3) **D.** (1) và (3)

Lời giải

(E) có tiêu cự bằng 12 $\Rightarrow 2c=12\Rightarrow c=6$

Tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}\Rightarrow a=10\Rightarrow b=8$

Vậy mệnh đề (1), (3) là mệnh đề sai

Đáp án D

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, elip $(E):\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{49}=1$. Tìm khẳng định đúng?

A. (E) có đỉnh $A_1(9;0)$ và $B_1(0;-7)$

B. (E) có dộ dài trục bé bằng $4\sqrt{2}$

C. (E) có dộ dài trục lớn bằng 18

D. (E) có diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 63.

Lời giải

$(E):\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{49}=1\Rightarrow a=9;\ b=7\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=4\sqrt{2}$

Độ dài trục lớn là $2a=18$

Đáp án C.

Ví dụ 3: Tìm phương trình chính tắc của elip có tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=0$ **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ **D.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$

STUDY TIPS

Cho $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a,b,c>0$:

$b^2=a^2-c^2$

1. $F_1(c;0)$, $F_2(c;0)$ là tiêu điểm; $F_1F_2=2c$ là tiêu cự.

2. $A_1(-a;0);A_2(a;0;)$ $B_1(0;-b)$; $B_2(0;b)$ là 4 đỉnh của (E).

$A_1A_2=2a$ là độ dài trục lớn

$B_1B_2=2b$ là độ dài trục bé.

3. Tâm sai $e=\frac{c}{a}<1$; phương trình đường chuẩn $x=\pm\frac{a}{e}$

4. Khoảng cách giữa hai đường chuẩn: $2\frac{a}{e}$

5. Diện tích hình chữ nhật cơ sở: $S=2a.2b=4ab$

STUDY TIPS

Chu vi hình chữ nhật

Tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\ (1)$

Đáp án B.

Hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20

$\Rightarrow 2(2a+2b)=20\ (2)$

Có $c^2=a^2-b^2\ (3)$

Từ $(1),(2),(3)\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=\sqrt{5} \end{cases}\Rightarrow (E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Đáp án C.

Ví dụ 5: Tìm phương trình elip đi qua hai điểm $M\left(\sqrt{3};3\right)$, $N\left(-3\sqrt{3};1\right)$

A. $30x^2+10y^2=1$ **B.** $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{10}=1$

C. $\frac{x^2}{30}-\frac{y^2}{10}=1$ **D.** $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{10}=0$

Lời giải

Giả sử $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$

Vì $M,N\in(E)$ nên ta có hệ $(I):\begin{cases} \frac{3}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \\ \frac{27}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a^2=30 \\ b^2=10 \end{cases}\Rightarrow (E):\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{10}=1$

Đáp án B.

Ví dụ 4: Trong ... (E) có độ dài trục nhỏ bằng 8, tâm sai $e=\frac{3}{5}$. Khi đó hì... tích bằng:

A. 20 (đvdt) ... . 18 (đvdt) **D.** 36 (đvdt)

Lời giải

Độ dài trục nh... bằng

$\Rightarrow 2b=8\Rightarrow b=$ ...

Tâm s...

$e=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{3}{5}=$ ...

Có

$a^2-c^2=b^2\Leftrightarrow a$ ... (loai)

Diện tích hì... chữ nhật cơ sở là:

$S=2a.2b=2.5.2$ ...

(đvdt)

STUDY TIPS

Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ có $\Delta=b^2-4ac$ hoặc $\Delta'=\frac{b^2}{2}-ac$

+ Nếu Δ hoặc $\Delta'<0\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

+ Nếu Δ hoặc $\Delta'=0\Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép

+ Nếu Δ hoặc $\Delta'>0\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt

STUDY TIPS

$(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và

$\Delta: Ax+By+C=0$

$$16.1^2+9.1^2=c^2 \Rightarrow c^2=25 \Rightarrow c=\pm 5$$

Đáp án C.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{4}+y^2=1$ và đường thẳng $\Delta: x+2y-5=0$. Đường thẳng Δ cắt (E) tại mấy điểm?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

Ví dụ 8: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$. Số đường thẳng d cắt elip (E) tại hai điểm phân biệt có tọa độ nguyên là:

A. 9 **B.** 18 **C.** 120 **D.** 1

Lời giải

Giả sử $M(x_0;y_0)\in(E)$ có tọa độ nguyên

$$\Rightarrow \frac{x_0^2}{32}+\frac{y_0^2}{16}=1 \Leftrightarrow x_0^2=32\left(1-\frac{y_0^2}{16}\right)=2\left(16-y_0^2\right)\ge 0 \Rightarrow 16-y_0^2\ge 0 \Rightarrow y_0^2=16$$

Mà $y_0\in\mathbb{Z}\Rightarrow y_0\in\{\pm4;\pm3;\pm2;\pm1;0\}$

Lời giải

Xét hệ tọa độ giao điểm

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2\ (1)\\ x+2y-5=0\ (2)\end{cases}$$

$(2)\Rightarrow y=\frac{5-x}{2}$

thế vào (1) ta được:

$$\frac{x^2}{4}+\left(\frac{5-x}{2}\right)^2=1\Rightarrow x^2+x^2-10+25-4=0\Leftrightarrow 2x^2-10x+21=0\ (*)$$

Xét phương trình (*) có $\Delta'=(-5)^2-2.21=-17<0\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Vậy đường thẳng Δ không cắt (E).

Đáp án A.

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $\Delta: x+y+c=0$. là tiếp tuyến của (E) ?

A. 5 ±5 **D.** -5

STUDY TIPS

d đi qua $M(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k

$\Rightarrow d: y=k(x-x_0)+y_0$

Lời giải

(E) c

$a^2=16;\ b^2=9$

Để Δ là tiếp tuyến của (E) thì

Với $y_0 = 4 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow M_1(0;4)$ (nhận)

Với $y_0 = -4 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow M_2(0;-4)$ (nhận)

Với $y_0 = 3 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{34} \notin \mathbb{Z}$

Với $y_0 = -3 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{34} \notin \mathbb{Z}$

…

Với $y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{32} \notin \mathbb{Z}$

Vậy chỉ có duy nhất môtj đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm có tọa độ nguyên.

Đáp án D.

Ví dụ 9: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$ và điểm $M(1;-2)$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua M cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là tring điểm của AB.

A. $2x - 9y - 20 = 0$ **B.** $2x - y - 20 = 0$

C. $2x + 9y - 20 = 0$ **D.** $9x - 2y - 13 = 0$

Lời giải

Giả sử d đi qua $M(1;-2)$ và có hệ số góc k

$\Rightarrow d: y = k(x-1) - 2 \Leftrightarrow d: y = kx - k - 2$

Xét hệ tọa độ giao điểm

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ y = kx - k - 2 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 9(kx - k - 2)^2 = 36$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 9(k^2x^2 + k^2 + 4 - 2k^2x - 4kx + 4k) - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4 + 9k^2)x^2 - 2k(9k + 18)x + (9k^2 + 36k) = 0 \ (*)$$

Để (E) cắt d tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt x_A, x_B

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow k^2(9k+18)^2 - (4 + 9k^2)(9k^2 + 36k) > 0$$

$$\Leftrightarrow k^2(81k^2 + 324k + 324) - (36k^2 + 144k + 81k^4 + 324k^3) > 0$$

$$\Leftrightarrow 288k^2 - 144k > 0 \Leftrightarrow 0 < k < \frac{1}{2} \ (1)$$

Với k thỏa mãn điều kiện (1) thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt x_A, x_B

Khi đó theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{18k^2 + 36k}{9k^2 + 4} \\ x_A x_B = \dfrac{9k^2 + 36k}{4 + 9k^2} \end{cases}$

Vì M là trung điểm của AB nên $x_A + x_B = 2x_M$

$$\Leftrightarrow \frac{18k^2+36k}{9k^2+4} = 2.1 = 2 \Leftrightarrow 18k^2+36k = 18k^2+8 \Leftrightarrow k = \frac{2}{9} \text{ (TMĐK (1))}$$

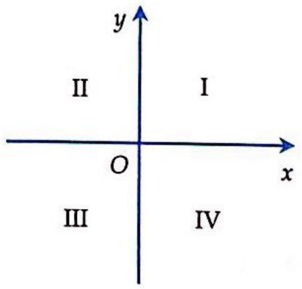
Với $k = \frac{2}{9} \Rightarrow d: y = \frac{2}{9}x - \frac{20}{9} \Rightarrow d: 2x - 9y - 20 = 0$

Đáp án A.

Ví dụ 10: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$. Điểm $M \in (E)$ thỏa mãn bán kính qua tiêu điểm trái bằng 4 lần bán kính qua tiêu điểm phải. Điểm M thuộc cung phần tư thứ mấy?

A. I và III **B.** I và II **C.** I và IV **D.** II và III

Lời giải



(E) có $a = 4;\ b = 2\sqrt{2};\ c = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow (E)$ có hai tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{2};0)$ và $F_2(2\sqrt{2};0)$

Giả sử $M(x;y) \in (E)$ là điểm cần tìm

Khi đó $MF_1 = 4MF_2 \Leftrightarrow a + ex = 4(a - ex) \Leftrightarrow \frac{3a}{5e} = \frac{3a^2}{5c} = \frac{3.4^2}{5.2\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{5}$

Vì $M \in (E) \Rightarrow y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{16}\right).8 = \left(1 - \frac{18}{25}\right).8 \Rightarrow y^2 = \frac{56}{25} \Leftrightarrow y = \frac{\pm 2\sqrt{14}}{5}$

Vậy có 3 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$M_1\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}; \frac{2\sqrt{14}}{5}\right);\ M_2\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}; \frac{-2\sqrt{14}}{5}\right)$

Đáp án C.

Ví dụ 11: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$. Tìm $M \in (E)$ sao cho $F_1MF_2 = 120^0$ (F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip)?

A. $M(0;5)$ **B.** $M(0;-5)$

C. $M_1(5;0)$ hoặc $M_2(-5;0)$ **D.** Cả A và B đều đúng

Lời giải

STUDY TIPS

M nhìn F_1, F_2 dưới một góc α

$$\cos\alpha = \frac{MF_1^2 + MF_2^2 - F_1F_2^2}{2.MF_1.MF_2}$$

(E) có $a = 10;\ b = 5 \Rightarrow c = 5\sqrt{3}$

$\Rightarrow (E)$ có hai tiêu điểm $F_1(-5\sqrt{3};0);\ F_2(5\sqrt{3};0)$

Giả sử $M(x;y) \in (E)$

Có $MF_1 = 10 + \frac{\sqrt{3}}{2}x;\ MF_2 = 10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$

Có $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2.MF_1.MF_2.\cos F_1MF_2$

$$\Leftrightarrow \left(10\sqrt{3}\right)^2 = \left(10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(10 + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 - 2\left(10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(10 + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\cos 120^0$$

$$= 300 = 100 + \frac{3}{4}x^2 - 10\sqrt{3}x + 100 + \frac{3}{4}x^2 + 10\sqrt{3}x - 2\left(100 - \frac{3}{4}x^2\right)\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm 5$

$\Rightarrow M_1(0;5);\ M_2(0;-5)$

Đáp án D.

Ví dụ 12: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$ và đường thẳng $\Delta: x - 2\sqrt{2}y = 0$ cắt elip (E) tại hai điểm phân biệt B và C. Điểm $A \in (E)$ sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất. Tính giá trị của $P = x_A^2 - y_A^2$.

A. 2 **B.** 0 **C.** 6 **D.** –6

STUDY TIPS

Phương trình chính tắc của $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ phương trình tham số của $(E): \begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t \end{cases} t \in [0; 2\pi]$

Lời giải

Phương trình tham số của $(E): \begin{cases} x = 4\sqrt{2}\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases} t \in [0; 2\pi]$

Vì $A \in (E)$ nên $A\left(4\sqrt{2}\sin t;\ 2\cos t\right)$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.BC.d(A;\Delta)$

Vì BC không đổi nên $S_{\Delta ABC}\max \Leftrightarrow d(A;\Delta)\max$

Có $d(A;\Delta) = \frac{\left|4\sqrt{2}\sin t - 4\sqrt{2}\cos t\right|}{\sqrt{1 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{4\sqrt{2}\left|\sin t - \cos t\right|}{3}$

$$= \frac{4\sqrt{2}.\sqrt{2}\left|\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right|}{3} = \frac{8\left|\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right|}{3} \le \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}\max \Leftrightarrow \left|\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{array}\right.$$

STUDY TIPS

1. $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right. \end{cases}$

2. $\sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\sin\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{-\pi}{2} + k2\pi$

$(k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ t-\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \\ t=\frac{-\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy $t\in[0;2\pi]\Rightarrow\left[\begin{array}{l} t=\frac{3\pi}{4} \\ t=\frac{-\pi}{4} \end{array}\right.$

- Với $t=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow A\left(2;-\sqrt{2}\right)\Rightarrow P=x_A^2-y_A^2=2^2-\left(-\sqrt{2}\right)^2=2$

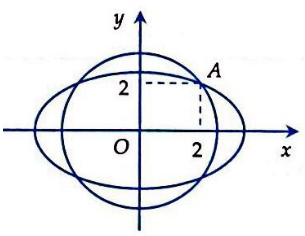
- Với $t=-\frac{3\pi}{4}\Rightarrow A\left(-2;\sqrt{2}\right)\Rightarrow P=x_A^2-y_A^2=(-2)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=2$

Đáp án A.

Ví dụ 13: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=8$. Phương trình nào là phương trình chính tắc của elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại 4 điểm tạo thành 4 đỉnh của một hình vuông?

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{3y^2}{16}=1$ **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{3y^2}{\frac{16}{3}}=1$ **C.** $\frac{x^2}{16}-\frac{3y^2}{\frac{16}{3}}=1$ **D.** $\frac{x^2}{16}-\frac{3y^2}{16}=1$

Lời giải



Phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

(E) có độ dài trục lớn bằng 8 $\Rightarrow 2a=8\Rightarrow a=4$

Do (E) và (C) cùng nhận Ox, Oy làm trục đối xứng và các giao điểm là các đỉnh của hình vuông nên (E) và (C) có 1 giao điểm với tọa độ dạng $A(t;t)$ với $t>0$

Vì $A\in(C)\Rightarrow t^2+t^2=8\Rightarrow t=2$

Vì $A(2;2)\in(E)\Leftrightarrow\frac{4}{16^2}+\frac{4}{b^2}=1\Leftrightarrow b^2=\frac{16}{3}$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{16}+\frac{3y^2}{\frac{16}{3}}=1$

Đáp án B.

Ví dụ 14: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thoi ABCD có $AC = 2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D của hình thoi. Biết $A \in Ox$.

A. $x^2 + 4y^2 = 20$ **B.** $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{25} = 1$ **C.** $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ **D.** $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$

Lời giải

Giả sử $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

Hình thoi ABCD có $\begin{cases} AC = 2BD \\ A, B, C, D \in (E) \end{cases} \Rightarrow OA = 2OB$

Giả sử $A(a;0)$ và $B\left(0;\frac{a}{2}\right)$

H là hình chiếu vuông góc của O trên AB.

$\Rightarrow$ OH là bán kính của đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow OH = 2$

Ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow a^2 = 20$

Có $OA^2 = 20 \Rightarrow OB^2 = b^2 = \frac{OA^2}{4} = 5$

Vậy phương trình chính tắc của $(E): \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

Đáp án C.

§4. Một số dạng bài toán điển hình

I. Một số bài toán về giải tam giác

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $A(-2;3)$, phương trình đường trung tuyến từ B, C lần lượt là $d_1: 2x + 7y - 30 = 0$ và $d_2: 7x + 5y - 14 = 0$. Phương trình đường thẳng AB có dạng $ax + by + c = 0$. Khi đó giá trị biểu thức $Q = a + bc$ bằng:

A. 34 **B.** 32 **C.** -22 **D.** 44

Lời giải

+ $A(-2;3) \notin d_1; d_2$

+ Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là nghiệm của hệ

STUDY TIPS

G là trọng tâm của ΔABC

$\Rightarrow \begin{cases} 3x_G = x_A + x_B + x_C \\ 3y_G = y_A + y_B + y_C \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+7y=30 \\ 7x+5y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-4}{3} \\ y=\dfrac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{-4}{3};\dfrac{14}{3}\right)$

+ $B \in d_1 \Rightarrow B\left(b;\dfrac{-2b+30}{7}\right)$; $C \in d_2 \Rightarrow C\left(\dfrac{14-5c}{7};c\right)$

+ Ta có: $\begin{cases} -2+b+\dfrac{14-5c}{7}=-4 \\ \dfrac{-2b+30}{7}+3+c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=7 \end{cases} \Rightarrow B(1;4);\ C(-3;7)$

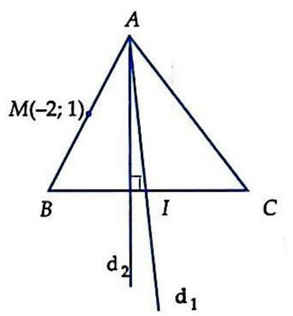
+ AB: $\begin{cases} \text{qua } A(-2;3) \\ \text{qua } B(1;4) \end{cases} \Rightarrow AB: \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{1} \Leftrightarrow x-3y+11=0$

Khi đó: $a=1;\ b=-3;\ c=11 \Rightarrow Q=1+(-3).11=-32$

Đáp án B.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $M(2;-1)$ là trung điểm AB. Đường trung tuyến và đường cao qua A lần lượt là: $d_1: x+y-7=0$ và $d_2: 5x+3y-29=0$. Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng AC?

A. $P(3;2)$ **B.** $Q(2;-7)$ **C.** $R(2018;2017)$ **D.** $S(1056;1055)$



Lời giải

+ $A = d_1 \cap d_2 \Rightarrow A(4;3)$

+ $M(-2;1)$ trung điểm AB $\Rightarrow B(-8;-1)$

+ $BC \perp d_2 \Rightarrow BC: -3x+5y+c=0$

Mà $B(-8;-1) \in BC \Rightarrow C=-19 \Rightarrow BC: -3x+5y-19=0$

+ $I = d_1 \cap BC \Rightarrow I(2;5)$ là trung điểm BC $\Rightarrow C(12;11)$

+ AC $\begin{cases} \text{qua } A(4;3) \\ \text{qua } C(12;11) \end{cases} \Rightarrow AC: \dfrac{x-4}{8}=\dfrac{y-3}{8} \Leftrightarrow x-y-1=0$

STUDY TIPS

$\Delta \perp d: Ax+By+C=0$

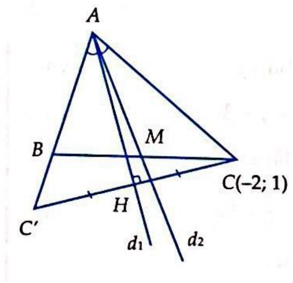
$\Rightarrow \Delta: Bx-Ay+C'=0$

Đáp án B.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $C(-2;1)$. Đường phân giác góc A và đường trunh tuyến AM lần lượt là $d_1: 2x+y-1=0$ và $d_2: x+y-2=0$. Tìm tọa độ điểm B.

A. $B\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{7}{3}\right)$ **B.** $B\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$ **C.** $B\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ **D.** $B\left(\dfrac{-4}{3};\dfrac{13}{3}\right)$

Lời giải



$+\ A = d_1 \cap d_2 \Rightarrow A(-1;3)$

+ C’ đối xứng với C qua d_1

$+\ CC'\begin{cases} \text{qua } C(-2;1) \\ \perp d_1: 2x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow CC': -x+2y-4=0$

$+\ H = d_1 \cap CC' \Rightarrow H\left(\frac{-2}{5};\frac{9}{5}\right)$ là trung điểm CC’ $\Rightarrow C'\left(\frac{6}{3};\frac{13}{5}\right)$

$+\ AB: \begin{cases} \text{qua } A(-1;3) \\ \text{qua } C'\left(\frac{6}{5};\frac{13}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow AB: 2x+11y-31=0$

$+\ B \in AB \Rightarrow B\left(\frac{31-11b}{2};b\right)$

$M \in d_2 \Rightarrow M(m;2-m)$

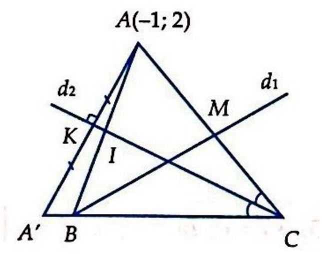
+ M là trung điểm BC $\Rightarrow \begin{cases} \frac{31-11b}{2} - 2 = 2m \\ b+1 = 4-2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{7}{3} \\ m = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{8}{3};\frac{7}{3}\right)$

Đáp án A.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $A(-1;2)$. Đường trung tuyến BM và phân giác trong CI có phương trình lần lượt là $d_1: x-y+2=0$ và $d_2: 2x+y-3=0$. Tìm tọa độ điểm $B(a;-b)$. Tính $P=a+b$.

A. $\frac{31}{6}$ **B.** -2 **C.** $-\frac{31}{6}$ **D.** 2

Lời giải



+ A’ đối xứng với A qua d_2, $AA' \cap d_2 = K$

$+\ AA'\begin{cases} \text{qua } A(-1;2) \\ \perp d_2: 2x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow AA': -x+2y-5=0$

$+\ K = AA' \cap d_2 \Rightarrow K\left(\frac{1}{5};\frac{13}{5}\right) \Rightarrow A'\left(\frac{7}{5};\frac{16}{5}\right)$

$+\ M \in d_1 \Rightarrow M(a;a+2)$

$C \in d_2 \Rightarrow C(b;3-2b)$

STUDY TIPS
Nếu đề bài cho đường phân giác, ta sẽ lấy điểm đối xứng qua đường phân giác

M là trung điểm AC có: $\begin{cases} 2a-b=-1 \\ 2a+4-3+2b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-1}{6} \\ b=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(\dfrac{-1}{6};\dfrac{11}{6}\right) \\ C\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{5}\right) \end{cases}$

$+\ BC\begin{cases} \text{qua } A'\left(\dfrac{7}{5};\dfrac{16}{5}\right) \\ \text{qua } C\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow BC: 23x-11y+3=0$

$+\ B=BC\cap d_1 \Rightarrow B\left(\dfrac{19}{12};\dfrac{43}{12}\right) \Rightarrow a=\dfrac{19}{12};\ b=\dfrac{-43}{12} \Rightarrow P=-2$

Đáp án B.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy, có $A(2;-1)$. Đường phân giác trong góc B và C có phương trình lần lượt là $d_1: x-2y+1=0$ và $d_2: x+y+3=0$. Phương trình đường thẳng đi qua B và song song với AC là đường thẳng:

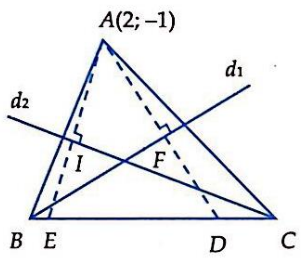
A. $-4x+y-\dfrac{9}{7}=0$ **B.** $-4x+y+\dfrac{9}{7}=0$

C. $7x-28y+9=0$ **D.** $x-4y+9=0$

Lời giải

+ D đối xứng với A qua $d_1: F=AD\cap d_1$

+ E đối xứng với A qua $d_2: I=AE\cap d_2$



$+\ AD\begin{cases} \text{qua } A(2;-1) \\ \perp d_1: x-2y+1=0 \Rightarrow AD: 2x+y-3=0 \end{cases}$

$F=AD\cap d_1 \Rightarrow P(1;1)$ là trung điểm AD $\Rightarrow D(0;3)$

$+\ AE\begin{cases} \text{qua } A(2;-1) \\ \perp d_2: x+y+3=0 \end{cases} \Rightarrow AE: -x+y+3=0$

$I=AE\cap d_2 \Rightarrow I(0;-3)$ là trung điểm AE $\Rightarrow E(-2;-5)$

$+\ BC\begin{cases} \text{qua } D(0;3) \\ \text{qua } E(-2;-5) \end{cases} \Rightarrow BC: 4x-y+3=0$

$B=BC\cap d_1 \Rightarrow B\left(\dfrac{-5}{7};\dfrac{1}{7}\right);\ C=d_2\cap BC \Rightarrow C\left(\dfrac{-6}{5};\dfrac{-9}{5}\right)$

STUDY TIPS

$\Delta // d: Ax+By+C=0$

$\Rightarrow \Delta: Ax+By+C'=0$

$(C \neq C')$

$+\ AC\begin{cases} \text{qua } A(2;-1) \\ \text{qua } C\left(\dfrac{-6}{5};\dfrac{-9}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow AC: x-4y-6=0$

$+\ \Delta // AC \Rightarrow \Delta: x-4y+c=0\ (c \neq -6)$

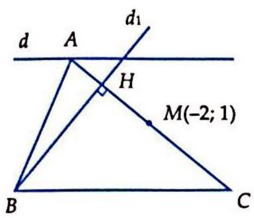
$B\left(\dfrac{-5}{7};\dfrac{1}{7}\right) \in \Delta \Rightarrow c=\dfrac{9}{7}(t/m) \Rightarrow \Delta: 7x-28y+9=0$

Đáp án C.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC có $A \in d: 2x-5y+7=0$; $BC//d$, đường cao BH có phương trình $d_1: x-2y+1=0$. $M(-2;1)$ là trung điểm AC. Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC

A. $(13;11)$ **B.** $\left(\dfrac{50}{9};\dfrac{11}{3}\right)$ **C.** $\left(13;\dfrac{11}{3}\right)$ **D.** $\left(\dfrac{13}{3};\dfrac{11}{3}\right)$

Lời giải



$+\ AC\begin{cases} \perp BH \\ \text{qua } M(-2;1) \end{cases} \Rightarrow AC: 2x+y+3=0$

$+\ A = AC \cap d \Rightarrow A\left(\dfrac{-11}{6};\dfrac{2}{3}\right)$

$+$ M là trung điểm AC $\Rightarrow C\left(\dfrac{-13}{6};\dfrac{4}{3}\right)$

$+\ BC\begin{cases} // d: 2x-5y+7=0 \\ \text{qua } C\left(\dfrac{-13}{6};\dfrac{4}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow BC: 2x-5y+11=0$

$+\ B = BC \cap BH \Rightarrow B(17;9)$

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\dfrac{13}{3};\dfrac{11}{3}\right)$

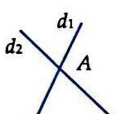
Đáp án D

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC có phương trình cạnh AB, AC lần lượt là $d_1: 8x+5y-15=0$; $d_2: 2x-5y-3=0$. Trung điểm của BC là $M(6;1)$. Đỉnh C và đỉnh B thuộc cung phần tư thứ mấy?

A. I và IV **B.** I và II **C.** IV và I **D.** II và III

Lời giải

$+\ A = d_1 \cap d_2 \Rightarrow A\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{3}{25}\right)$



+ Gọi P là trung điểm AB . Ta có:

$MP\begin{cases}//AC\\ \text{qua } M(6;1)\end{cases} \Rightarrow MP: 2x-5y-7=0$

+ $P=MP\cap d_1 \Rightarrow P\left(\frac{11}{5};\frac{-13}{25}\right) \Rightarrow B\left(\frac{13}{25};\frac{-29}{25}\right) \Rightarrow C\left(\frac{47}{25};\frac{79}{25}\right)$

$\Rightarrow$ B thuộc cung phần tư thứ IV và C thuộc cung phần tư thứ nhất.

Đáp án A.

Ví dụ 8: Trong mặt phẳng, ΔABC có phương trình cạnh $AB: 3x-y+4=0;\ AC: x+y-8=0$. Hai đường cao có phương trình lần lượt là $d_1: x+3y-8=0;\ d_2: 6x+y-13=0$. Phương trình đường thẳng đi qua B và vuông góc với BC là:

A. $-x+6y+8=0$ **B.** $6x+y-\frac{220}{17}=0$

C. $102x+17y+220=0$ **D.** $-x+6y+\frac{220}{17}=0$

Lời giải

+ $A=AB\cap AC \Rightarrow A(1;7)$

+ $d_1\perp AB \Rightarrow d_1$ là đường cao xuất phát từ C của ΔABC

$A\in d_2 \Rightarrow d_2$ là đường cao xuất phát từ A của ΔABC

+ $C=d_1\cap AC \Rightarrow C(8;0)$

+ $BC\begin{cases}\text{qua } C(8;0)\\ \perp d_2: 6x+y-13=0\end{cases} \Rightarrow BC: -x+6y+8=0$

+ $B=BC\cap AB \Rightarrow B\left(\frac{-32}{17};\frac{-28}{17}\right)$

+ $\Delta\perp BC: -x+6y+8=0 \Rightarrow \Delta: 6x+y+c=0$

$B\left(\frac{-32}{17};\frac{-28}{17}\right)\in\Delta \Rightarrow c=\frac{220}{17} \Rightarrow \Delta: 6x+y+\frac{220}{17}=0 \Rightarrow \Delta: 102x+17y+220=0$

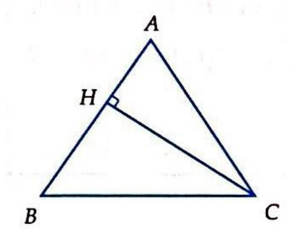
Đáp án C.

Lưu ý: Cần nhận ra được 2 đường thẳng $d_1;d_2$ là những đường cao của ΔABC

Ví dụ 9: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC có phương trình cạnh AB, AC, BC lần lượt là $2x-3y+1=0;\ x+y-3=0$ và $x-y+4=0$. H là chân đường cao hạ từ C. Điểm H thuộc cung phần tư thứ mấy?

A. IV **B.** III **C.** II **D.** I

Lời giải



+ $C = AC \cap BC \Rightarrow C\left(\frac{-1}{7};\frac{7}{2}\right)$

+ $CH\begin{cases} \text{qua } C\left(\frac{-1}{2};\frac{7}{2}\right) \\ \perp AB: 2x-3y+1=0 \end{cases} \Rightarrow CH: 3x+2y-\frac{11}{2}=0$

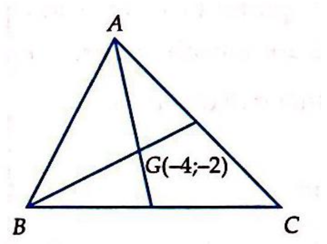
+ $H = CH \cap AB \Rightarrow H\left(\frac{29}{26};\frac{14}{13}\right) \Rightarrow H$ thuộc cung phần tư thứ I

Đáp án D.

Ví dụ 10: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC có trọng tâm $G(-4;-2)$, phương trình cạnh $AB: 2x+y+3=0$; phương trình cạnh $AC: 4x-y+9=0$. Tìm tung độ lớn nhất trong 3 điểm A, B, C.

A. -2 **B.** 1 **C.** -13 **D.** 6

Lời giải



+ $A = AB \cap AC \Rightarrow A(-2;1)$

+ $C \in AC: 4x-y+9=0 \Rightarrow C(c;4c+9)$

+ $B \in AB: 2x+y+3=0 \Rightarrow B(b;-3-2b)$

+ $G(-4;-2)$ là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow \begin{cases} -2+b+c=-12 \\ 1-3-2b+4c+9=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{-9}{2} \\ c=\frac{-11}{2} \end{cases}$

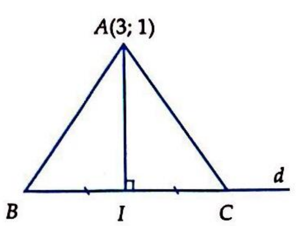
$\Rightarrow B\left(\frac{-9}{2};6\right);\ C\left(\frac{-11}{2};-13\right)$

Đáp án D.

Ví dụ 11: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC cân tại $A(3;1)$. $B,C \in d: x-7y+54=0$. Xác định hoành độ lớn nhất của điểm B biết $S_{\Delta ABC}=10$

A. $\frac{17}{5}$ **B.** $\frac{41}{5}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{39}{5}$

Lời giải



+ Gọi I là trung điểm BC.

Tam giác ABC cân $\Rightarrow$ AI vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến $\Rightarrow AI \perp BC$

+ $d(A;BC) = \frac{|3.1-7.1+54|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}} = 5\sqrt{2} = AI$

STUDY TIPS

1. Cho điểm $M(x_0;y_0)$ và đường thẳng:

$d: Ax+By+C=0$

$\Rightarrow d:(M;d)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

2. $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$+\ S_{\Delta ABC}=10\Rightarrow S_{\Delta ABI}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.10=5\Rightarrow\frac{1}{2}.AI.BI=5\Rightarrow BI=\frac{10}{AI}=\frac{10}{5\sqrt{2}}=\sqrt{2}\ (1)$

$+\ AI\begin{cases}\text{qua } A(3;1)\\ \perp BC: x-7y+54=0\end{cases}\Rightarrow AI: 7x+y-22=0$

$+\ I=AI\cap BC\Rightarrow I(2;8)$

$B\in BC: x-7y+54=0\Rightarrow B(7b-54b;b)$

Có: $BI=\sqrt{2}\Rightarrow BI^2=2\Rightarrow(2-7b+54)^2+(8-b)^2=2\Rightarrow(56-7b)^2+(8-b)^2=2$

$$\Rightarrow 50b^2-800b+3198=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} b=\frac{41}{5}\Rightarrow B\left(\frac{17}{5};\frac{41}{5}\right)\\ B=\frac{39}{5}\Rightarrow B\left(\frac{3}{5};\frac{39}{5}\right)\end{array}\right.$$

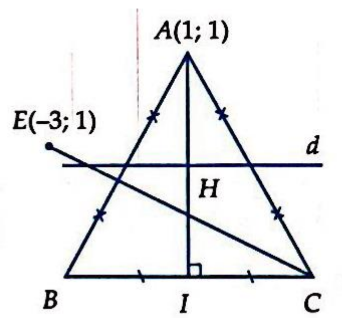
Đáp án A.

Ví dụ 12: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC cân tại $A(1;1)$. Đường thẳng d đi qua trung điểm AB, AC có phương trình: $2x+y-5=0$. Tìm tọa độ điểm C biết $E(-3;1)$ nằm trên đường cao qua C và $x_B>3$.

A. $\left(\frac{11+2\sqrt{13}}{5};\frac{13-4\sqrt{13}}{5}\right)$ **B.** $\left(11-\frac{2\sqrt{13}}{5};13+\frac{4\sqrt{13}}{5}\right)$

C. $\left(\frac{11+2\sqrt{13}}{5};\frac{47-4\sqrt{13}}{5}\right)$ **D.** $\left(\frac{11-2\sqrt{13}}{5};\frac{13+4\sqrt{13}}{5}\right)$

Lời giải



+ d đi qua trung điểm AB; AC $\Rightarrow d//BC$

I là trung điểm BC $\Rightarrow\begin{cases}AI\perp BC\\ d//BC\end{cases}$ (do tam giác ABC cân tại A) $\Rightarrow d\perp AI$

$+\ AI\begin{cases}\perp d: 2x+y-5=0\\ \text{qua } A(1;1)\end{cases}\Rightarrow AI: -x+2y-1=0$

$+\ H=AI\cap d\Rightarrow H\left(\frac{9}{5};\frac{7}{5}\right)\Rightarrow I\left(\frac{13}{5};\frac{9}{5}\right)$

$I\left(\frac{13}{5};\frac{9}{5}\right)\in BC\Rightarrow c'=-7\,(tm)\Rightarrow BC: 2x+y-7=0$

$+\ B\in BC\Rightarrow B(b;7-2b)\Rightarrow C\left(\frac{26}{5}-b;\frac{-17}{5}+2b\right)$

$+\ \overrightarrow{BA}=(1-b;2b-6);\ \overrightarrow{CE}=\left(\frac{-41}{5}+b;\frac{22}{5}-2b\right)$

STUDY TIP

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$

Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CE} = 0$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{a-4.(4a+3)-17}{\sqrt{1^1+(-4)^2}}\right| = 4\sqrt{17} \Leftrightarrow |-15a-29| = 68 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 15a+29=68 \\ 15a+29=-68 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{13}{5} \\ a=\dfrac{-97}{15} \end{array}\right.$

$\Rightarrow (1-b).\left(\dfrac{-41}{5}+b\right)+(2b-6).\left(\dfrac{22}{5}-2b\right)=0$

- Với $a=\dfrac{13}{5} \Rightarrow G\left(\dfrac{13}{5};\dfrac{67}{5}\right) \Rightarrow C\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{236}{5}\right)$

$\Leftrightarrow -5b^2+30b-\dfrac{173}{5}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{15+2\sqrt{13}}{5} \\ b=\dfrac{15-2\sqrt{13}}{5}(loai)(x_B>3) \end{array}\right.$

- Với $a=\dfrac{-97}{15} \Rightarrow G\left(\dfrac{-97}{5};\dfrac{-343}{15}\right) \Rightarrow C\left(\dfrac{-127}{5};\dfrac{-308}{5}\right)$

Đáp án C.

Với

$b=\dfrac{15+2\sqrt{13}}{5} \Rightarrow C\left(\dfrac{11-2\sqrt{13}}{5};\dfrac{13+4\sqrt{13}}{5}\right)$

Đáp án D.

Ví dụ 13: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC có $A(1;-4)$; $B(5;-3)$. Trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng d có phương trình: $4x-y+3=0$. Tìm hoành độ nhỏ nhất của điểm C. Biết $S_{\Delta ABC}=102$.

A. $\dfrac{-308}{5}$ **B.** $\dfrac{236}{5}$ **C.** $\dfrac{-127}{5}$ **D.** $\dfrac{9}{5}$

Lời giải

+

$A(1;-4);\ B(5;-3) \Rightarrow AB=\sqrt{17}$

+

$G \in d: 4x-y+3=0 \Rightarrow G(a;4a+3)$

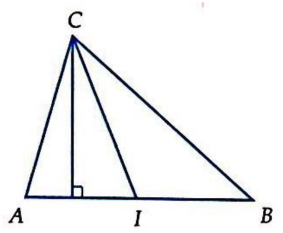
$AB\begin{cases} \text{qua } A(1;-4) \\ \text{qua } B(5-3) \end{cases} \Rightarrow AB: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+4}{1} \Leftrightarrow x-4y-17=0$

+

$S_{\Delta ABG}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.102=34 \Rightarrow \dfrac{1}{2}.d(G;AB).AB=34 \Leftrightarrow d(G;AB)=4\sqrt{17}$

Ví dụ 14: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC có $C(-5;3)$. $A,B\in\Delta: x+y-4=0$. $I(-3;5)$ là trung điểm AB. Tìm tung độ lớn nhất của điểm A biết $S_{\Delta ABC}=12$

A. $-2+\sqrt{3}$ **B.** $6+\sqrt{3}$ **C.** $2-\sqrt{3}$ **D.** $6-\sqrt{3}$



Lời giải

$+\ d(C;\Delta)=\dfrac{|-5.1+3.1-4|}{\sqrt{1^2+1^1}}=3\sqrt{2}$

$+\ S_{\Delta ABC}=12\Rightarrow S_{\Delta ACI}=6\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AI.d(C;\Delta)=6\Leftrightarrow AI.3\sqrt{2}=12\Leftrightarrow AI=2\sqrt{2}$

$+\ A\in\Delta: x+y-4=0\Rightarrow A(a;4-a)$

STUDY TIP

I là trung điểm AB

$\Rightarrow S_{\Delta ACI}=S_{\Delta CBI}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC}$

$\Rightarrow AI-2\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{(-3-a)^2+(5-4+a)^2}=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow a^2+6a+9+a^2+2a+1=8\Leftrightarrow 2a^2+8a+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2+\sqrt{3} \\ a=-2-\sqrt{3}\end{array}\right.$

- Với $a=-2+\sqrt{3}\Rightarrow A(-2+\sqrt{3};6-\sqrt{3})$

- Với $a=-2-\sqrt{3}\Rightarrow A(-2-\sqrt{3};6+\sqrt{3})$

Đáp án B.

Ví dụ 15: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC có $C(-2;1)$. Đường phân gaics trong góc A có phương trình $d: x-y+5=0$. Nhận xét nào sau đây là sai khi nói về đường thẳng AB? Biết tam giác ABC vuông tại A và $x_A\in[-3;1]$

A. Đường thẳng AB luôn đi qua 1 điểm cố định.

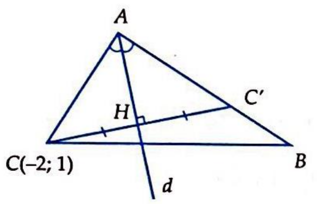
B. Đường thẳng AB có VTCP $\vec{u}=(-1;0)$, VTPT $\vec{n}=(0;1)$

C. Đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $x+2=0$

D. Đường thẳng AB có hệ số góc $k=1$

Lời giải

+ C' đối xứng với C qua d; $CC'\cap d=H$



$+\ CC'\begin{cases}\text{qua } C(-2;1)\\ \perp d: x-y+5=0\end{cases}\Rightarrow CC': x+y+1=0$

$H=CC'\cap d\Rightarrow H(-3;2)\Rightarrow C'(-4;3)$

$+\ A\in d: x-y+5=0\Rightarrow A(a;a+5)$

$\overrightarrow{AC}=(-2-a;-4-a);\ \overrightarrow{AC'}=(-4-a;-2-a)$

STUDY TIP

Đường thẳng $\Delta\begin{cases}\text{qua}\,(x_A;y_A)\\ \text{qua}\,(x_B;y_B)\end{cases}$

+ Nếu $x_A = x_B \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $\Delta: x = a_A$

+ Nếu $y_A = y_B \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $\Delta: y = y_A$

+ Nếu $x_A \ne x_B;\ y_A \ne y_B$ $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_B}{y_B-y_A}$$

+ Tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC'}=0$

$\Rightarrow(-2-a).(-4-a)+(-4-a).(-2-a)=0$

$\Leftrightarrow 2a^2+12a+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2\,(tm)\\ a=-4\,(loai)\,(\text{vì } x_A\in[-3;1])\end{array}\right.$

Với $a=-2 \Rightarrow A(-2;3)$

+ $AB\begin{cases}\text{qua}\,A(-2;3)\\ \text{qua}\,C'(-4;3)\end{cases} \Rightarrow AB: y=3$

Vậy ta có đường thẳng $AB: y=3$:

- Luôn đi qua điểm $I(0;3)$ cố định.

- Có VTCP $\vec{u}=(-1;0)$, VTPT $\vec{n}=(0;1)$

- Vuông góc với đường thẳng $AC: x=-2$

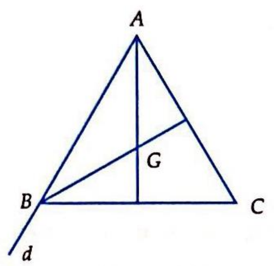
- Hệ số góc $k=0$

Đáp án D.

Ví dụ 16: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC cân tại A. $A, B \in d: x-2y-2=0$. $B, C \in Oy$. Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC biết chu vi tam giác ABC bằng $2+2\sqrt{5}$.

A. $G\left(\frac{-2}{3};-2\right)$ **B.** $G\left(\frac{2}{3};0\right)$ **C.** $\left[\begin{array}{l}G\left(\frac{-2}{3};-2\right)\\ G\left(\frac{2}{3};0\right)\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}G\left(2;\frac{2}{3}\right)\\ G(-2;-6)\end{array}\right.$

Lời giải



+ $B\in Oy \Rightarrow B(0;y)$

$B\in d \Rightarrow x-2y=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow B(0;-1)$

+ $C\in Oy \Rightarrow C(0;c)$

+ $A\in d: x-2y-2=0 \Rightarrow A(2a+2;a)$

+ ΔABC cân tại A $\Rightarrow AB=AC \Rightarrow AB^2=AC^2$

$\Rightarrow(2a+2)^2+(a+1)^2=(2a+2)^2+(c-a)^2$

$\Leftrightarrow a^2+2a+1=c^2-2ac+a^2 \Leftrightarrow 2a(1+c)+(1-c).(1+c)=0$

STUDY TIP

$\Leftrightarrow (2a+1-c).(1+c)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-1 \text{ (loại) (vì } c\neq -1) \\ 2a-c+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow c=2a+1$

+ $AB=\sqrt{(2a+2)^2+(a+1)^2}$

$AC=\sqrt{(2a+2)^2+(c-a)^2}=\sqrt{(2a+2)^2+(a+1)^2}$

$BC=\sqrt{(c+1)^2}=\sqrt{(2a+2)^2}$ (vì $c=2a+1$)

Có:

$AB+AC+BC=2+2\sqrt{5}$

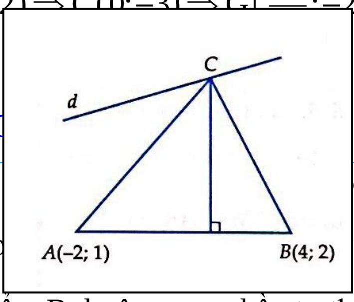
$\Rightarrow \sqrt{(2a+2)^2+(a+1)^2}+\sqrt{(2a+2)^2+(a+1)^2}+\sqrt{(2a+2)^2}=2+2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{5(a+1)^2}+2\sqrt{(a+1)^2}=2+2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5}.|a+1|+|a+1|=1+\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |a+1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+1=1 \\ a+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-2 \end{array}\right.$

- Với $a=0 \Rightarrow A(2;0) \Rightarrow C(0;1) \Rightarrow G\left(\frac{2}{3};0\right)$

- Với $a=-2 \Rightarrow A(-2;2) \Rightarrow C(0;-3) \Rightarrow G\left(\frac{-2}{3};-2\right)$



Đáp án C

Ví dụ 17: Trong ... phân giác trong AD, đường cao CH lần lượt có phươ... là $2x-y+5=0$. $M(-3;4)$ là trung điểm của AC. Điểm B thuộc cung phần tư thứ mấy? Biết $AB=2AM$.

A. II và IV **B.** I và III **C.** I và IV **D.** II và III

Lời giải

+ M' đối xứng với M qua AD. MM' cắt AD tại I

+ $MM'\begin{cases} \text{qua } M(-3;4) \\ \perp AD: 2x-4y-25=0 \end{cases} \Rightarrow MM': 4x+3y=0$

$I=MM'\cap AD \Rightarrow I(3;-4) \Rightarrow M'(9;-12)$

+ $AB\begin{cases} \text{qua } M'(9;-12) \\ \perp CH: 2x-y+5=0 \end{cases} \Rightarrow AB: x+2y+15=0$

+ $A=AB\cap AD \Rightarrow A(-1;-7)$

$B\in AB: x+2y+15=0 \Rightarrow B(-15-2b;b)$

Có $AB=2AM \Rightarrow \sqrt{(15-2b+1)^2+(b+7)^2}=2\sqrt{(-3+1)^2+(4+7)^2}$

STUDY TIP

$|A|=B \Leftrightarrow \begin{cases} B\geq 0 \\ \left[A=B \right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4.(b+7)^2+(b+7)^2} = 2.5\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}.\sqrt{(b+7)^2} = 10\sqrt{5} \Leftrightarrow |b+7| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=-17 \end{array}\right.$

- Với $b=3 \Rightarrow B(-21;3)$

- Với $b=-17 \Rightarrow B(19;-17)$

Vậy điểm B thuộc cung phần tư thứ II và IV.

Đáp án A.

Lưu ý: Chúng ta có thể tìm điểm B qua biểu thức $AB = AC$ (vì $AB = AC = 2AM$). Bạn đọc tự giải

+ $d(C;AB) = \dfrac{|4c-12-6c+8|}{\sqrt{1^2+(-6)^2}} = \dfrac{|-2c-4|}{\sqrt{37}}$

+ $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.d(C;AB).AB = 74 \Rightarrow \dfrac{1}{2}.\dfrac{|-2c-4|}{\sqrt{37}}.\sqrt{37} = 74$

$\Leftrightarrow |2c+4| = 148 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2c+4=148 \\ 2c+4=-148 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=72 \\ c=-76 \end{array}\right.$

- Với $c=72 \Rightarrow C(276;72)$

- Với $c=-76 \Rightarrow C(-316;-76)$

Có $P_1 = 276.72 = 19872 < P_2 = (-316).(-76) = 24016 \Rightarrow P_{max} = 24016$

Đáp án A.

Ví dụ 18: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC có $A(-2;1)$, $B(4;2)$. $C \in d: x-4y+12=0$. $S_{\Delta ABC} = 74$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = x_C.y_C$

A. 20416 **B.** 87216 **C.** 19872 **D.** 5472

Lời giải

+ $A(-2;1)$, $B(4;2) \Rightarrow AB = \sqrt{37}$

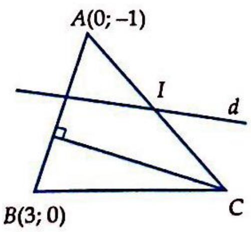
+ $AB \left\{\begin{array}{l} \text{qua } A(-2;1) \\ \text{qua } B(4;2) \end{array}\right. \Rightarrow AB: x-6y+8=0$

+ $C \in d: x-4y+12=0 \Rightarrow C(4c-12;c)$

Ví dụ 19: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC có $A(0;-1)$, $B(3;0)$. Trung điểm I của AC nằm trên đường thẳng $d: x+y=0$. $S_{\Delta ABC}=10$. Điểm C thuộc cung phần tư thứ IV thì $y_C=?$

A. $\frac{9}{2}$ **B.** $\frac{-11}{2}$ **C.** $\frac{-7}{2}$ **D.** $\frac{13}{2}$

Lời giải



$+\ AB\begin{cases}\text{qua } A(0;-1)\\ \text{qua } B(3;0)\end{cases} \Rightarrow AB: \frac{x-0}{3}=\frac{y+1}{1} \Rightarrow AB: x-3y-3=0$

$+\ A(0;-1),\ B(3;0) \Rightarrow AB=\sqrt{10}$

$+\ I\in d: x+y=0 \Rightarrow I(a;-a) \Rightarrow C(2a;1-2a)$

$+\ d(C;AB)=\frac{|2a-3(1-2a)-3|}{\sqrt{a^2+(-3)^2}}=\frac{|8a-6|}{\sqrt{10}}=10$

$\Leftrightarrow |8a-6|=20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8a-6=20\\ 8a-6=-20\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=\frac{13}{4}\\ a=\frac{-7}{4}\end{array}\right.$

- Với $a=\frac{13}{4} \Rightarrow C\left(\frac{13}{2};\frac{-11}{2}\right)$

- Với $a=\frac{-7}{4} \Rightarrow C\left(\frac{-7}{4};\frac{9}{2}\right)$

Vì C thuộc cung phần tư thứ IV $\Rightarrow y_C=\frac{-11}{2}$

Đáp án B.

STUDY TIP

Cho điểm $M(x_0;y_0)$ và đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$

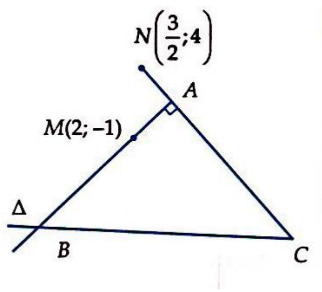
$\Rightarrow d(M;\Delta)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Ví dụ 20: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC vuông cân tại A. Cạnh huyền nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x+y-8=0$. Điểm $M(2;-1)$ thuộc đường thẳng AB. Điểm $N\left(\frac{3}{2};4\right)$ thuộc đường thẳng AC. Phương trình đường thẳng AB có dạng: $ax+by+c=0$. Tìm tọa độ điểm A biết $a=kb\ (k>0)$

A. $A\left(\frac{69}{20};\frac{67}{20}\right)$ **B.** $A(3,45;3,35)$ **C.** $A(0,05;0,35)$ **D.** Cả A và B

Lời giải

ΔABC vuông cân tại A $\Rightarrow$ AB và AC đều tạo với đường thẳng Δ một góc 45^0



Giả sử d là đường thẳng tạo với Δ một góc 45^0

d có VTCP $\overrightarrow{n_1}=(a;b)$

Δ có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(2;1)$

Ta có: $\cos 45^0=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2^2+1^2}}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{|2a+b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}}$

STUDY TIP

Đường thẳng d có VTPT $\overrightarrow{n_1}$

Đường thẳng Δ có VTPT $\overrightarrow{n_2}$

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng

$\Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$

$\Leftrightarrow 10a^2+10b^2=4\left(4a^2+b^2+4ab\right)\Leftrightarrow 6a^2+16ab-6b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{1}{3}b\\ a=-3b\end{array}\right.$

+ Với $a=\frac{1}{3}b$. Chọn $a=1;\ b=3\Rightarrow d:x+3y+c=0$

$M(2;-1)\in d\Rightarrow c=1\Rightarrow AB:x+3y+1=0$

+ Với $a=-3b$. Chọn $a=-3;\ b=1\Rightarrow d:-3x+y+c'=0$

$N\left(\frac{3}{2};4\right)\in d\Rightarrow c'=\frac{1}{2}\Rightarrow AC:-3x+y+\frac{1}{2}=0$

$A=AB\cap AC\Rightarrow A\left(\frac{1}{20};\frac{-7}{20}\right)$

Đáp án C.

Ví dụ 21: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC có $A(2;-1);\ B(4;0);\ C(6;m)$. G là trọng tâm ΔABC. Tìm m để ΔGBC vuông tại G.

A. Không có giá trị nào của m. **B.** $m=49$

C. $m\in\left\{\frac{-1}{2};1\right\}$ **D.** $m=-47$

Lời giải

STUDY TIP

ΔABC vuông tại A

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

+ G là trọng tâm tam giác ABC

$\Rightarrow G\left(4;\frac{-1+m}{3}\right);\ \overrightarrow{GB}=\left(0;\frac{1-m}{3}\right);\ \overrightarrow{GC}=\left(2;\frac{2m+1}{3}\right)$

+ Để ΔABC vuông tại G $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}=0\Leftrightarrow 0.2+\frac{1-m}{3}.\frac{2m+1}{3}=0$

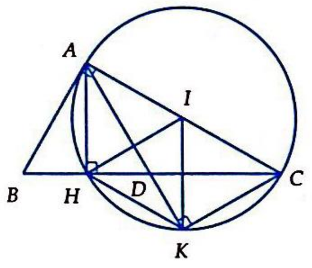
$\Leftrightarrow(1-m).(2m+1)=0\Leftrightarrow -2m^2+m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\frac{-1}{2}\end{array}\right.$

Đáp án C.

Ví dụ 22: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC vuông tại A. H là hình chiếu của A lên cạnh BC. D là điểm đối xứng của B qua H. Kl là hình chiếu của C lên AD. $H(-2;-4)$; $K(7;-1)$. Trung điểm AC nằm trên đường thẳng $d: x-y+4-0$. Điểm A thuộc cung phần tư thứ mấy?

A. II **B.** III **C.** IV **D.** I

Lời giải



+ Gọi I là trung điểm AC. Có $IH = IK = \frac{AC}{2} \Rightarrow IH^2 = IK^2$

$\Rightarrow (a+2)^2 + (a+8)^2 = (a-7)^2 + (a+5)^2$

$\Leftrightarrow a^2 + 4a + 4 + a^2 + 16a + 64 = a^2 - 14a + 49 + a^2 + 10a + 25$

$\Leftrightarrow 24a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow I\left(\frac{1}{4}; \frac{17}{4}\right)$

+ AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến.

$\Rightarrow \Delta ABD$ cân tại A $\Rightarrow$ AH là đường phân giác $\Rightarrow HAB = HAD$ (1)

+ $AHC = AKC = 90^0 \Rightarrow$ A; H; K; C thuộc đường tròn tâm I bán kính IA.

+ Có: $HAB = HKA = \frac{1}{2}$sđ AH (2)

STUDY TIP

$BA = BD$, $CA = CD$

$\Rightarrow$ A và D đối xứng nhau qua BC

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HKA = HAD \Rightarrow \Delta AHK$ cân tại H $\Rightarrow HA = HK$

Mặt khác: $IA = IK \Rightarrow$ A đối xứng với K qua IH

+ $IH \begin{cases} \text{qua } I\left(\frac{1}{4}; \frac{17}{4}\right) \\ \text{qua } H(-2;-4) \end{cases} \Rightarrow IH: x + 7y + 30$

+ Giả sử $A(a;b)$. $AK \begin{cases} \text{qua } K(7;-1) \\ \perp IH: x + 7y + 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow AK: -7x + y + 50 = 0$

Có trung điểm AK thuộc IH và $AK \perp IH$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} -7a + b + 50 = 0 \\ \frac{a+7}{2} + 7.\frac{b-1}{2} + 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{29}{5} \\ b = \frac{-47}{5} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{29}{5}; \frac{-47}{5}\right)$$

Đáp án C.

II. Một số bài toán sử dụng tính chất hình học phẳng

Bài toán 1: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I có H, G lần lượt là trực tâm và trọng tâm, D là giao điểm của AH và (C).

Chứng minh rằng:

a) D đối xứng với H qua BC.

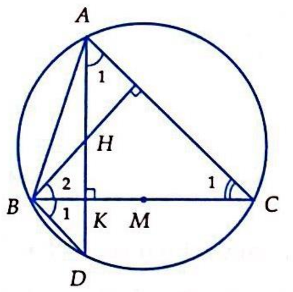
b) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ (M là trung điểm của BC).

c) $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HI}$ (G, H, I thẳng hàng – đường thẳng Euler).

Chứng minh:

a) Ta có: $B_1 = A_2$ (cùng chắn cung DC)

$B_2 = A_1$ (cùng phụ với C_1)



$\Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \Delta BHD$ cân tại B, mà $BC \perp HD$

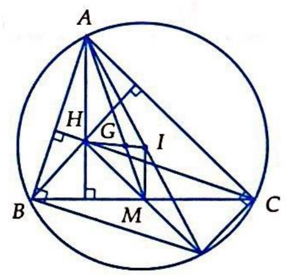
$\Rightarrow$ H đối xứng với D qua BC (đpcm)

b) Gọi $A' = AI \cap (C)$

$\Rightarrow BH // A'C$ (cùng vuông góc với AC)

$CH // A'C$ (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow BHCA'$ là hình bình hành



Mà M là trung điểm của B $\Rightarrow$ M là trung điểm của HA'

$\Rightarrow$ MI là đường trung bình trong $\Delta AHA' \Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ (đpcm)

c) G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ (1)

Xét $\Delta AHA'$ có AM là trung tuyến mà $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ theo (1)

$\Rightarrow$ G là trọng tâm $\Delta AHA'$ mà HI là đường trung tuyến trong $\Delta AHA'$

$\Rightarrow \overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HI}$ (đpcm)

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có đỉnh $A(-1;-3); H(1;-1)$ và $I(2;-2)$ lần lượt là trực tâm và tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Tìm phát biểu sai?

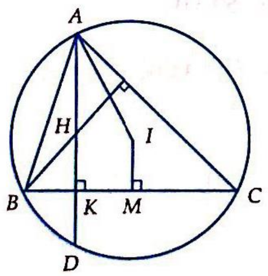
A. Tọa độ trung điểm của BC là $M(3;-1)$.

B. Chân đường cao của ΔABC hạ từ A là $K(2;0)$.

C. Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là $G\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$

D. Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là $G\left(\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right)$

Lời giải



+ Gọi $M(x;y)$ mà $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}\Rightarrow\begin{cases}2=2(x-2)\\2=2(y+2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}\Rightarrow M(3;-1)\Rightarrow$ A đúng

+ Gọi D là giao điểm thứ 2 của AH với đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC.

(C) có tâm $I(2;-2)$, bán kính $IA=\sqrt{10}\Rightarrow(C):(x-2)^2+(y+2)^2=10$

$AH: x-y-2=0$

Xét hệ $\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2=10\\x-y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow D(3;1)$ do $A(-1;-3)$

Mà K là trung điểm của HD $\Rightarrow K(2;0)\Rightarrow$ B đúng

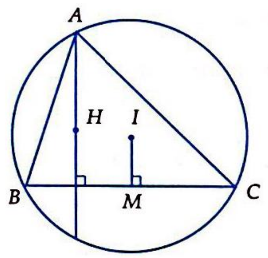
+ Ta có: $\overrightarrow{HG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HI}\Rightarrow\begin{cases}x_G-1=\frac{2}{3}(2-1)\\y_G+1=\frac{2}{3}(-2+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_G=\frac{5}{3}\\y_G=-\frac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow G\left(\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right)\Rightarrow$ D đúng.

Đáp án C.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(3;-7)$, trực tâm là $H(3;-1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-2;0)$, biết $C(a;b)$ với $a>0$. Khi đó giá trị $a+b$ là:

A. $1+\sqrt{65}$ **B.** $1-\sqrt{65}$ **C.** $5+\sqrt{65}$ **D.** $5-\sqrt{65}$

Lời giải



+ Ta có $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$ với $M(x;y)$ là trung điểm BC.

$\Rightarrow\begin{cases}0=2(x+2)\\6=2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}\Rightarrow M(-2;3)$

+ BC đi qua $M(-2;3)$ và vuông góc với MI $\Rightarrow$ vecto pháp tuyến $\overrightarrow{MI}=(0;-3)$

$\Rightarrow BC: y=3$

+ Gọi $C\in BC\Rightarrow C(t;3)$ ($t>0$ tham số)

Mà $CI=AI\Rightarrow CI=\sqrt{74}\Rightarrow(1+2)^2+3^2=74$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2+\sqrt{65}\,(tm) \\ t=-2-\sqrt{65}\,(loai) \end{array}\right. \Rightarrow C\left(-2+\sqrt{65};3\right) \Rightarrow a+b=1+\sqrt{65}$$

Đáp án A.

Lưu ý: Yêu cầu bài toán tìm tọa độ C nên ta sẽ viết phương trình đường thẳng qua C, rồi tham số hóa C theo đường thẳng tìm được (ở đây là đường thẳng BC). Dựa vào giả thiết lập phương trình với ẩn là tham số của C, suy ra kết quả.

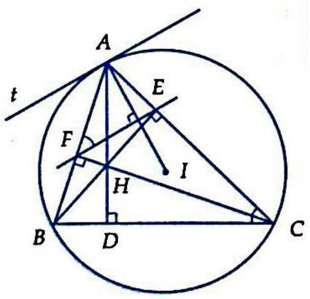
Bài toán 2: Cho ΔABC, E, F, D lần lượt là chân đường cao hạ từ B, C, A; I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, H là trực tâm.

Chứng minh rằng:

a) $AI \perp EF$, $BI \perp FD$ và $CI \perp DE$

b) DH là phân giác của EDF. Từ đó suy ra H là tâm của đường tròn nội tiếp ΔDEF

Chứng minh



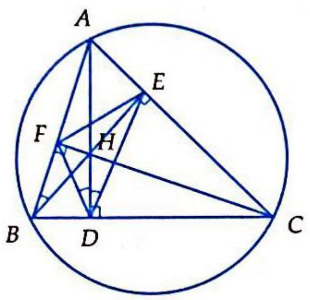
a) Kẻ tiếp tuyến At của đường tròn (C) ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow At \perp AI$

Có $tAB = ACB$ (1) (góc tạo bởi tiếp tuyến và góc nội tiếp cùng chắn AB)

Lại có $BEC = BFC = 90^0 \Rightarrow$ BFEC nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow ECB = EFA$ (2) (cùng bù với EFB)

Từ (1) và (2) có $tAB = EFA \Rightarrow At / EF$ (góc so le) $\Rightarrow EF \perp AI\,(At \perp AI) \Rightarrow$ đpcm.



b) Ta có tứ giác BFHD nội tiếp (F, D nhìn BH dưới một góc vuông)

$\Rightarrow HDF = HBF$ (3) (cùng chắn cung FH của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFHD)

Tứ giác AEDB nội tiếp (E, D cùng nhìn AB dưới một góc vuông)

$\Rightarrow EAB = EDA$ (4) (cùng chắn cung AE của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEDB)

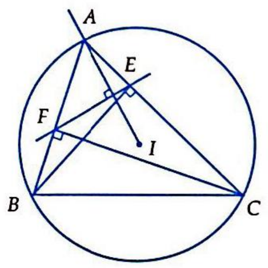
Từ (3) và (4) $\Rightarrow HDF = EDA \Rightarrow HD$ là đường phân giác của góc EDF

Tương tự HE, HF lần lượt là phân giác của góc FED và EFD

$\Rightarrow$ H là trực tâm đường tròn nội tiếp ΔEFD

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=25$ ngoại tiếp ΔABC có tọa độ chân đường cao hạ từ B và C lần lượt là $E(0;2)$ và $F(1;2)$. Khi đó tọa độ đỉnh $A(a;b)$ với $b<0$ thì a^2-2b là:

A. – 9 **B.** 9 **C.** –11 **D.** 11



Lời giải

Tâm đường tròn (C) nội tiếp ΔABC là $I(1;1)$, bán kính $R=5$

Vì $AI \perp EF \Rightarrow$ AI qua $I(1;1)$ và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{EF}=(1;0) \Rightarrow AI: x=1$

Mà $A=(C)\cap AI \Rightarrow$ tạo độ A là ngiệm của hệ: $\begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=25 \end{cases}$

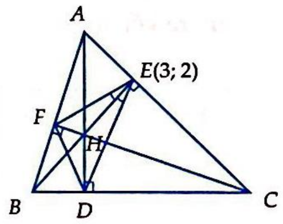
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases} (ktm) \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} (tm) \end{array}\right. \Rightarrow A(1;-4) \Rightarrow a^2-2b=1+8=9$$

Đáp án B.

Lưu ý: Ta có thể tìm tọa độ điểm A bằng cách tham số hóa A theo AI rồi tính $AI=R \Leftrightarrow AI=5 \Rightarrow$ tọa độ A.

Ví dụ 2: Cho ΔABC, $D(3;-1)$; $E(3;2)$; $F(-1;2)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B, C. Khi đó đường thẳng AC có phương trình là:

A. $x-y-1=0$ **B.** $x+y-1=0$ **C.** $x-y+5=0$ **D.** $x+y-5=0$



Lời giải

+ Ta có BE là phân giác của góc DEF (tính chất)

$ED: x-3=0$

$EF: y-2=0$

$\Rightarrow$ đường phân giác tạo bởi ED và EF là:

$$|x-3|=|y-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y-1=0\ (\Delta_1) \\ x+y-5=0\ (\Delta_2) \end{array}\right.$$

STUDY TIP

2 đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường thẳng cắt nhau thì vuông góc với nhau

+ Xét vị trí tương đối của D và F với Δ_1 được:

$[3-(-1)-1](-1-2-1)=-12<0$

$\Rightarrow$ D, F nằm về hai phía của $\Delta_1 \Rightarrow \Delta_1$ là đường BE.

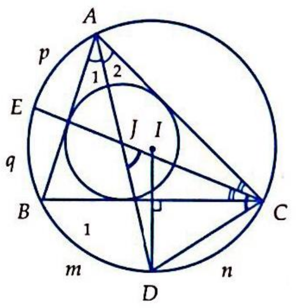
Mà $AC \perp BE \Rightarrow$ AC là đường $\Delta_2: x+y-5=0$

Đáp án D.

Bài toán 3: Cho ΔABC có I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp, gọi D là giao điểm thứ 2 của đường tròn ngoại tiếp ΔABC với đường thẳng AJ. Chứng minh rằng:

a) $DI \perp BC$

b) D là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔJBC



Chứng minh

a) Ta có $BAD = CAD \Rightarrow DmB = DnC \;(1)$

$\Rightarrow$ D nằm giữa cùn BC $\Rightarrow DI \perp BC$ (tính chất bán kính dây cung)

b) Gọi E là giao điểm thứ 2 của CJ với đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow ApE = BqE \;(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DmB + BqE = DnC + ApE \Rightarrow DBE = CnD + ApE$

$\Rightarrow ECD = CJD \Rightarrow \Delta DJC$ cân tại D.

$\Rightarrow DC = DJ$ mà $DC = DB\left(A_1 = A_2\right)$

$\Rightarrow DC = DJ = DB \Rightarrow$ D là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCJB

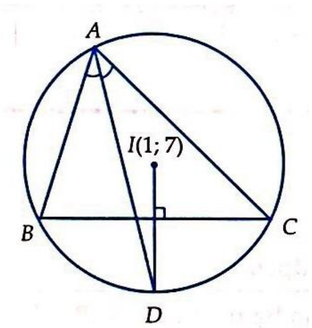
Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $A(-3;4)$, đường phân giác trong góc A là $d: x+y-1=0$; tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1;7)$. Khi đó hệ số góc của đường thẳng BC là:

A. $k=\frac{3}{4}$ **B.** $k=-\frac{4}{3}$ **C.** $k=-\frac{3}{4}$ **D.** $k=\frac{4}{3}$

Lời giải

Đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có tâm $I(1;7)$ và bán kính $R = AI = 5$

$\Rightarrow (C):(x-1)^2+(y-7)^2=5$



Gọi D là giao điểm thứ hai của $d: x+y-1=0$ và (C)

$\Rightarrow$ tọa độ điểm D thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+y-1=0 \\ (x-1)^2+(y-7)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow D(-2;3)$

Tọa độ $D(-3;4) \equiv A$ (loại)

$I(1;7),\ D(-2;3) \Rightarrow \overrightarrow{DI}=(3;4)$. $BC \perp DI \Rightarrow$ Vecto pháp tuyến của BC là $\overrightarrow{DI}=(3;4)$

$\Rightarrow$ Vecto chỉ phương của BC là $\vec{u}=(4;-3)$

$\Rightarrow$ Hệ số góc $k=-\frac{3}{4}$

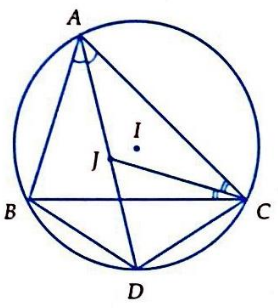
Đáp án C.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $A(2;3)$; $I(6;6)$; $J(4;5)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC. Khi đó phương trình đường thẳng BC là:

A. $3x+4y-42=0$ **B.** $3x-4y-42=0$

C. $3x+4y+42=0$ **D.** $3x-4y+42=0$

Lời giải



Đường tròn (C_1) ngoại tiếp ΔABC có $\begin{cases} I(6;6) \\ R=IA=5 \end{cases} \Rightarrow (C_1):(x-6)^2+(y-6)^2=25$

$AJ: x-y+1=0$ (qua A, J)

Gọi D là giao điểm của (C_1) với AJ $\Rightarrow$ Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ (x-6)^2+(y-6)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow D(2;3) \equiv A\,(\text{ktm}) \\ \begin{cases} x=9 \\ y=10 \end{cases} \Rightarrow D(9;10)\,(\text{tm}) \end{array}\right.$$

Mà $DJ=BD=DC$ (tính chất)

$\Rightarrow$ BC nằm trên đường tròn (C_2) có tâm $D(9;10)$ bán kính $R=DJ=5\sqrt{2}$

$\Rightarrow (C_2):(x-9)^2+(y-10)^2=50$

$\Rightarrow$ Tọa độ B, C thỏa mãn hệ: $\begin{cases} (x-6)^2+(y-6)^2=25 & (1) \\ (x-9)^2+(y-10)^2=50 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) $\Rightarrow 3x+4y-42=0$

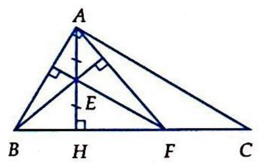
$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng BC: $3x+4y-42=0$

Đáp án A.

Bài toán 4:

Tính chất 1: Cho ΔABC vuông tại A; F; E lần lượt là trung điểm HC, HA (H là chân đường cao hạ từ A). Khi đó $BE \perp AF$

Chứng minh



Ta có: $FE//AC$ (đường trung bình trong ΔHAC)

$\Rightarrow EF \perp AB$ (vì $AB \perp AC$)

Lại có $AE \perp BC \Rightarrow \Delta ABF$ có E là trực tâm $\Rightarrow BE \perp AF$ (đpcm)

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông tại A, H là chân đường cao hạ từ A của ΔABC. F là trung điểm của HC, biết $A(-1;2)$; $H(3;-4)$; $F(3;-5)$. Khi đó đường trung tuyến hạ từ đỉnh B của ΔABH có phương trình là: $ax+by+11=0$ thì $a+b$ là

A. – 3 **B.** 3 **C.** 11 **D.** – 11

Lời giải

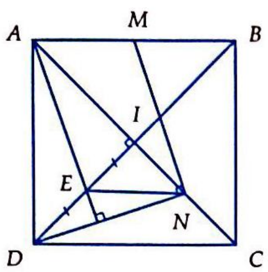
Gọi E là trung điểm của AH $\Rightarrow E(1;-1) \Rightarrow$ đường cần tìm là BE

Dựa vào tính chất 1 $\Rightarrow BE \perp AF \Rightarrow$ BE qua $E(1;-1)$ và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{AF}=(4;-7) \Rightarrow BE:-4x+7y+11=0 \Rightarrow a+b=-4+7=3$

Đáp án B.

Tính chất 2: Cho hình vuông ABCD tâm I. M, N lần lượt là trung điểm của AB, IC. Khi đó $MN \perp ND$.

Chứng minh



Gọi E là trung điểm của DI $\Rightarrow NE//DC \Rightarrow NE \perp AD$ (chứng minh tương tự với tính chất 1)

$\Rightarrow$ E là trực tâm $\Delta ADN \Rightarrow AE \perp DN$ (1)

Lại có $\begin{cases} NE=\dfrac{1}{2}DC \\ NE//DC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NE//AM \\ NE=AM \end{cases} \Rightarrow AMNE$ là hình bình hành

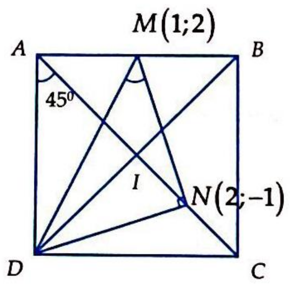
$\Rightarrow MN//AE$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow MN \perp DN$ (đpcm)

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD có M là trung điểm của AB, N là một điểm thuộc AC sao cho $AN=3NC$. Tính diện tích tam giác AMN biết $M(1;2)$, $N(2;-1)$.

A. 10 **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ **D.** 5

Lời giải



Theo tính chất 2 $\Rightarrow MN \perp DN \Rightarrow$ tứ giác AMND nội tiếp

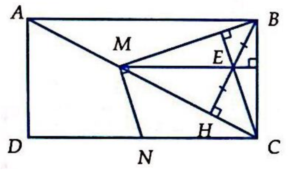
$\Rightarrow DAN = DMN$ (cùng chắn cung DN)

Mà $ADN=45^0 \Rightarrow DMN=45^0 \Rightarrow \Delta DMN$ vuông cân tại N

$\Rightarrow S_{\Delta DMN}=\dfrac{1}{2}DN.MN=\dfrac{1}{2}MN^2=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{10}\right)^2=5$

Đáp án D.

Tính chất 3: Cho hình chữ nhật ABCD, H là hình chiếu của B lên AC. M, N lần lượt là trung điểm của AH, DC. Khi đó $BM \perp MN$.



Chứng minh

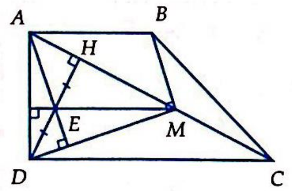
Gọi E là trung điểm của BH, theo tính chất 1 ta có: $CE \perp BM$

$ME//AB$ và $ME = \frac{1}{2}AB$ (là đường trung bình trong ΔHBA)

$\Rightarrow ME//NC$ và $ME = NC \Rightarrow MECN$ là hình bình hành

$\Rightarrow MN//EC$ mà $EC \perp BM \Rightarrow MN \perp BM$ (đpcm)

Tính chất 4: Hình thang vuông ABCD vuông tại A, D; $AB = \frac{1}{2}CD$. H là chan đường vuông góc hạ từ D xuống AC, M là trung điểm của HC. Khi đó $BM \perp DM$.



Chứng minh

Gọi E là trung điểm của HD, theo tính chất 1 ta có: $AE \perp DM$

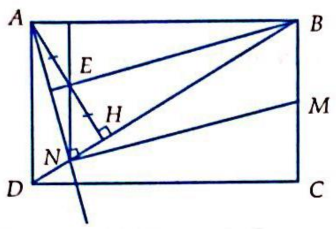
Ta có $EM//DC$ và $EM = \frac{1}{2}DC \Rightarrow$ AEMB là hình bình hành

$\Rightarrow AE//BM \Rightarrow BM \perp DM$ (đpcm)

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $H\left(-\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right)$ là chân đường cao hạ từ A lên BD, trung điểm BC là $M(-1;0)$. Phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của ΔADH là $7x + y - 3 = 0$. Tọa độ đỉnh $D(a;b)$. Khi đó

A. $a + b = 3$ **B.** $a + b = -1$ **C.** $a + b = 1$ **D.** $a + b = -3$

Lời giải



Gọi N là trung điểm của HD $\Rightarrow AN: 7x + y - 3 = 0$

Theo tính chất 3 $\Rightarrow AN \perp MN \Rightarrow$ MN qua $M(-1;0)$ và vuông góc với AN

$\Rightarrow MN: x - 7y + 1 = 0$

Mà $N = MN \cap AN \Rightarrow N\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$

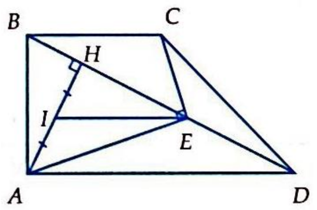
N là trung điểm của HD $\Rightarrow D(2;-1) \Rightarrow a + b = 1$

Đáp án C.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A, B; $AD = 2BC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BD và E trung điểm của HD. Giả sử $H(-1;3)$, $AE: 4x + y + 3 = 0$ và $C\left(\frac{5}{2};4\right)$. Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

A. $x + 2y + 3 = 0$ **B.** $x - 2y - 3 = 0$ **C.** $x - 2y + 3 = 0$ **D.** $x + 2y - 3 = 0$

Lời giải



Theo tính chất 4 ta có: $AE \perp CE \Rightarrow CE: x - 4y + c = 0$

CE qua $C\left(\frac{5}{2};4\right) \Rightarrow \frac{5}{2} - 4.4 + c = 0 \Rightarrow c = \frac{27}{2} \Rightarrow CE: 2x - 8y + 27 = 0$

$E = AE \cap CE \Rightarrow E\left(-\frac{3}{2};3\right)$

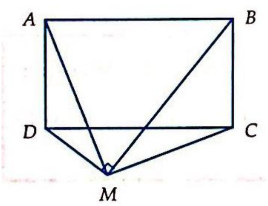
E là trung điểm của HD $\Rightarrow D(-2;3) \Rightarrow BD: y - 3 = 0 \Rightarrow AH: x + 1 = 0$

$A = AE \cap AH \Rightarrow A(-1;1) \Rightarrow$ AB qua $A(-1;1)$ và vecto pháp tuyến $\overrightarrow{AD} = (-1;2)$

$\Rightarrow AB: -1(x+1) + 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0$

Đáp án C.

Bài toán 5: Cho hình chữ nhật ABCD, M là điểm bất kì thỏa mãn $MD \perp MB$. Khi đó $MA \perp MC$



Chứng minh

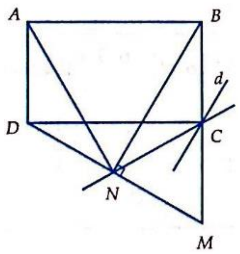
$MD \perp MB \Rightarrow$ M thuộc đường tròn đường kính BD

$\Rightarrow$ M, B, C, A, D cùng thuộc đường tròn đường kính BD cũng là đường tròn đường kính AC $\Rightarrow MA \perp MC$

Ví dụ 1: Cho hình chữ nhật ABCD có $A(1;5)$ điểm $C \in d: x + 3y + 7 = 0$. M là điểm nằm trên tia đối của tia BC, N là hình chiếu của B lên MD. Biết $N\left(\frac{-5}{2};\frac{1}{2}\right)$ tọa độ điểm $C(a;b)$. Tính $a + b$

A. – 1 **B.** 1 **C.** 3 **D.** – 3

Lời giải



Hình chữ nhật ABCD có $NB \perp ND \Rightarrow NA \perp NC$ (bài toán 5)

$\Rightarrow$ NC qua N và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{NA} = \left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right) \Rightarrow NC: 7x + 9y + 13 = 0$

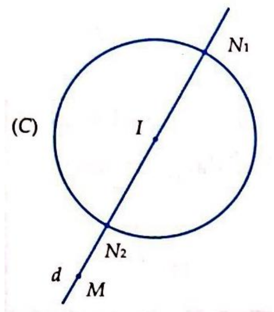
Do $C = NC \cap d \Rightarrow C(2;-3) \Rightarrow a + b = -1$

Đáp án A.

III. Một số bài toán cực trị

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=13$ và điểm $M(-5;-3)$. Tìm trên (C) điểm $N(a;b)$ sao cho khoảng cách từ N đến M là lớn nhất. Khi đó $a+b$ là:

A. 3 **B.** –3 **C.** 7 **D.** –7



Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{13}$

$IM=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}>R\Rightarrow$ M nằm ngoài (C)

Đường thẳng d đi qua $I(1;1)$ và $M(-5;-3)$ có phương trình $\begin{cases}x=1+3t\\y=1+2t\end{cases}$

Tọa độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x=1+3t\\y=1+2t\\(x-1)^2+(y-1)^2=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1+3t\\y=1+2t\\9t^2+4t^2=13\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}\\\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow d\cap(C)$ tại 2 điểm $N_1(4;3)$ và $N_2(-2;-1)$

Ta có: $MN_1>MN_2\Rightarrow\forall N\in(C)$ thì $MN_2\le MN\le MN_1$

$\Rightarrow$ MN đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow N\equiv N_1(4;3)\Rightarrow a+b=7$

Đáp án C.

STUDY TIP

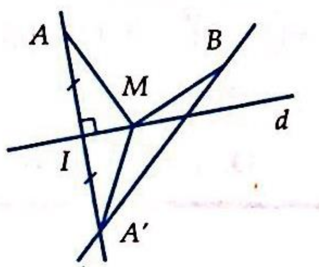
Tìm trên đường tròn (C) điểm có khoảng cách đến M là lớn nhất.

- Bước 1: Viết phương trình đường thẳng MI.
- Bước 2: Tìm giao điểm N_1, N_2 của (C) và MI.
- Bước 3: So sánh MN_1 và $MN_2\Rightarrow$ Kết luận

Lưu ý: Với bài này điểm $N_2(-2;-1)$ là điểm thuộc (C) sao cho khoảng cách đến M là nhỏ nhất.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d:x+y+2=0$ và các điểm $A(2;1),B(1;3)$. Tìm điểm $M\in d$ sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó đường tròn tâm O đi qua M và có bán kính là:

A. $R=\sqrt{2}$ **B.** $R=\frac{5\sqrt{10}}{11}$ **C.** $R=\sqrt{130}$ **D.** $R=\frac{244}{121}$



Lời giải

Ta có: $(2+1+2)(1+3+2)>0\Rightarrow$ A, B cùng một phía với đường thẳng d.

Gọi A' đối xứng với A qua đường thẳng d $\Rightarrow MA=MA'$

$\Rightarrow MA+MB=MA'+MB\ge A'B$ (không đổi)

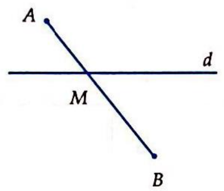
$\Rightarrow MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất là $A'B\Leftrightarrow M=A'B\cap d$

STUDY TIP

ΔABC có cạnh a, b, c ta có:

$(1)\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases}$

$(2)\begin{cases} |a-b|<c \\ |b-c|<a \\ |c-a|<b \end{cases}$



Đường thẳng Δ qua A và vuông góc với d $\Rightarrow \Delta: x-y-1=0$

Xét hệ $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$

A’ đối xứng với A qua d $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của AA’ $\Rightarrow A'(-3;-4)$

$\Rightarrow A'B: 7x-4y+5=0$

Xét hệ $\begin{cases} 7x-4y+5=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{13}{11} \\ x=-\dfrac{9}{11} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{13}{11};-\dfrac{9}{11}\right) \Rightarrow OM=R=\dfrac{5\sqrt{10}}{11}$

Đáp án B.

Lưu ý: Nếu A, B không cùng phía với đường thẳng d

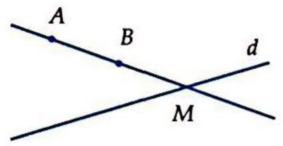
$\Rightarrow MA+MB \geq AB$ (không đổi)

$\Rightarrow MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất là AB $\Leftrightarrow M=AB\cap d$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y+3=0$ và hai điểm $A(2;-1), B(0;2)$. Khi đó điểm M thuộc d sao cho $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất có khoảng cách đến đường thẳng $\Delta: 3x-4y+5=0$ là:

A. $\dfrac{39}{7}$ **B.** $\dfrac{39}{35}$ **C.** $\dfrac{10}{9}$ **D.** $\dfrac{39}{5}$

Lời giải



Xét $[2.2-(-1)+3](2.0-2+3)>0 \Rightarrow$ A, B nằm cùng phía với đường thẳng d

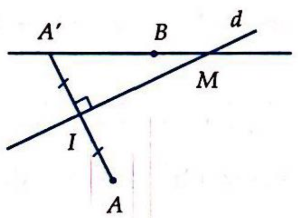
Với đường thẳng d $\Rightarrow |MA-MB| \leq AB \Leftrightarrow |MA-MB|_{max} = AB \Leftrightarrow M = AB\cap d$

Đường thẳng AB có phương trình:

$\dfrac{x-2}{0-2} - \dfrac{y+1}{2+1} \Leftrightarrow 3x-6=-2y-2 \Leftrightarrow 3c+2y-4=0$

Xét hệ $\begin{cases} 3x+2y-4=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{7} \\ y=\dfrac{17}{7} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{2}{7};\dfrac{17}{7}\right) \Rightarrow d_{(M;\Delta)}=\dfrac{39}{35}$

Đáp án B.



Lưu ý: Nếu A, B khác phía đối xứng với đường thẳng d, lấy A’ đối xứng với A qua đường thẳng d

$\Rightarrow |MA-MB| = |MA'-MB| \leq A'B$ (không đổi)

$|MA-MB|_{max} = A'B \Leftrightarrow M = A'B\cap d$

theo một dây cung.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-3)^2=8$. Đường thẳng d qua $M(3;2)$ cắt (C) theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất là:

A. $x-y-1=0$ **B.** $x+y-1=0$ **C.** $x+y+1=0$ **D.** $x-2y-1=0$

Đáp án A.

Lời giải

Giả sử AB là dây cung có M là trung điểm. Khi đó

$d_{(I;AB)}=IM\ge IH$

(I là tâm của (C) và H là trung điểm của một dây cung tùy ý qua M)

$\Rightarrow$ AB là dây cung có độ dài nhỏ nhất

$\Rightarrow$ d qua $M(2;3)$ và vuông góc với IM $\Rightarrow$ Vecto pháp tuyến $\overrightarrow{IM}=(1;-1)$

$\Rightarrow$ phương tình đường thẳng $d:x-y-1=0$

(C) có tâm $I(2;3)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$: $IM=\sqrt{2}<R\Rightarrow$ M nằm trong (C)

$\Rightarrow$ Đường thẳn

$d:x-y-1=0$

thỏa mãn cắt (C

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(-2;3),B(2;2)$ và đường thẳng $d:x-1=0$. Tìm $M(a;b)$ trên d sao cho MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $a-b$?

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $-\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $-\frac{5}{2}$

Lời giải

$d:x=1$ mà $M\in d\Rightarrow M(1;m)$

$$MA^2+MB^2=3^2+(m-3)^2+(-1)^2+(m-2)^2=2m^2-10m+23$$

m		$\frac{5}{2}$	
$2m^2-10m+23$	$\searrow$	$\frac{21}{2}$	$\nearrow$

$MA^2+MB^2\ge\frac{21}{2}\Rightarrow MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{21}{2}$

$$\Rightarrow m=\frac{5}{2}\Rightarrow M\left(1;\frac{5}{2}\right)\Rightarrow a-b=-\frac{3}{2}$$

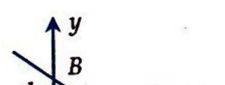
Đáp án B.

STUDY TIP

$A(a;0)\in Ox$;

$B(0;b)\in Oy$; $(a,b\ne 0)$

$\Rightarrow AB:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$



$\Rightarrow$ Phương trình AB: $\frac{x}{-19}+\frac{y}{\frac{19}{6}}=1 \Leftrightarrow x-6y+19=0$

Đáp án D.

Lưu ý:

+ Với ví dụ trên ta phải khéo léo tách (1) như biểu thức (3) để khi sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho ta biểu thức (2) cần tìm.

+ Ta có bài toán tổng quát: Viết phương trình đường thẳng đi qua $M(x_0;y_0)$ cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $\frac{m}{OA^2}+\frac{n}{OB^2}\,(m,n>0)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng qua $M(-1;3)$ cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $\frac{2}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất có phương trình:

A. $x+6y-19=0$ **B.** $x+6y+19=0$

C. $\frac{x}{19}+\frac{y}{-19}=1$ **D.** $x-6y+19=0$

Lời giải

Giả sử $A(a;0),\ B(0;b);\ a,b\neq 0 \Rightarrow AB:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

AB qua $M(-1;3)\Rightarrow \frac{-1}{a}+\frac{3}{b}=1 \qquad (1)$

Ta có: $\frac{2}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2} \qquad (2)$

Từ $(1)\Rightarrow 1^2=\left(-\frac{1}{a}+\frac{3}{b}\right)^2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{a}+3.\frac{1}{b}\right)^2 \qquad (3)$

$\leq\left(\frac{1}{2}+9\right)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b^2}\right)$ (bđt Bunhiacopxki)

$\Rightarrow \frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{2}{19}$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}-\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=1\\ \dfrac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{a}}=\dfrac{3}{\frac{1}{b}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-19\\ b=\frac{19}{6}\end{cases}$$

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng d qua $M(1;4)$ cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA+OB$ nhỏ nhất có phương trình là:

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-6}=1$ **B.** $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$ **C.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$ **D.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1$

Lời giải

Giả sử $A(a;0), B(0;b)$.

Vì d cắt các tia Ox, Oy $\Rightarrow a;b>0$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng $d:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

d qua $M(1;4)\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$

$OA+OB=a+b$

Ta có

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{b}}\right)^2\right]\ge(1+2)^2=9\Rightarrow a+b\ge 9$$

Dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1\\ \frac{\sqrt{a}}{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{\sqrt{b}}{\frac{2}{\sqrt{b}}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=6\end{cases}\Rightarrow d:\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$$

Đáp án C.

Lưu ý: Đối với bài toán tổng quát là tìm điều kiện để $\alpha OA+\beta OB$ đạt giá trị nhỏ nhất $(\alpha>0;\ \beta>0)$ ta làm tương tự.

Ví dụ 8: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng d qua $M(4;9)$ cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích ΔAOB nhor nhất có phương trình là $ax+by+72=0$. Khi đó $a+b$ bằng:

A. 13 **B.** – 13 **C.** 26 **D.** – 26

Lời giải

Giả sử $A(a;0),\ B(0;b)(a>0;b>0)$

$\Rightarrow$ Phương trình AB: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ qua M $\Rightarrow\frac{4}{a}+\frac{9}{b}=1$

$$\Rightarrow 1=\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\ge 2\sqrt{\frac{4.9}{ab}}\Rightarrow 1\ge\frac{12}{\sqrt{ab}}\Rightarrow ab\ge 144 \text{ (bđt Cô-si)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{a}+\frac{9}{b}=1 \\ \frac{4}{a}=\frac{9}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=18 \end{cases}$

$\Rightarrow AB: \frac{x}{8}+\frac{y}{18}=1 \Leftrightarrow 9x+4y-72=0$

$\Rightarrow d: -9x-4y+72=0 \Rightarrow a+b=-9-4=-13$

Đáp án B.

C. Bài tập rèn luyện kĩ năng

Xem đáp án chi tiết tại trang

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có điểm $H(0;4); I(-2;-4); K(0;2)$ lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, chân đường cao hạ từ A. Tìm tung độ lớn nhất của 3 điểm A, B, C.

A. 8 **B.** 2 **C.** – 6 **D.** 0

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có trực tâm $H(-1;2)$. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B, C của ΔABC và $O(0;0)$ là trung điểm của BC. Đường thẳng chứa $BC: x+2y=0$; $EF: 2x-3y+14=0$. Tọa độ điểm $A(a;b)$. Tính $P=7a+b$.

A. $\frac{-53}{7}$ **B.** $\frac{58}{7}$ **C.** $\frac{10}{7}$ **D.** $\frac{22}{7}$

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn tâm $J(2;1)$. Biết đường cao xuất phát từ A của ΔABC có phương trình $d: 2x+y-10=0$ và $D(2;-4)$ là giao điểm thứ hai của AJ với đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó hệ số góc của phương trình đường thẳng AC là bo nhiêu biết B có hoành độ âm và B thuộc đường thẳng $\Delta: x+y+7=0$.

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** 2 **C.** – 2 **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC vuông tại A. $H(-2;3)$ là chân đường cao hạ từ A. $E(-4;1); F(1;-3)$ thuộc đoạn AH và BH sao cho $EH=\frac{2}{3}AH$, $BF=\frac{1}{3}BH$. Đường thẳng AC có dạng $ax+by+c=0$. Tính $a+b+c$ biết a, b, c là các số nguyên tố cùng nhau.

A. $\frac{53}{3}$ **B.** – 47 **C.** 77 **D.** 26

Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy cho hình vuông ABCD có tâm $I(0;1)$. Trung điểm của cạnh AB là $M(0;3)$. Trung điểm IC là $E(1;0)$. Tính chu vi của hình vuông ABCD.

A. 16 **B.** $16\sqrt{2}$ **C.** 32 **D.** 8

Câu 6: Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có $A(-2;3)$, $I(-4;-1)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Trung điểm của BC là $M(-1;-4)$. Tìm khẳng định đúng?

A. Tọa độ trực tâm $H(-12;-7)$

B. Tọa độ chân đường cao hạ từ A là $K(6;-5)$

C. Trọng tâm G của ΔABC thuộc cung phần tư thứ IV.

D. Tọa độ trọng tâm $G\left(-\frac{4}{3};-\frac{5}{3}\right)$

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật ABCD có $H(3;0)$ là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BD. Trung điểm BC là $K(0;-2)$. Phương trình đường trung tuyến đi qua A của ΔADH là $d: 7x+9y-47=0$. Tính diện tích tam giác AMK với M là trung điểm của DH.

A. $\frac{15\sqrt{13}}{4}$ **B.** $\frac{85}{4}$ **C.** $\frac{65}{4}$ **D.** $\frac{15\sqrt{5}}{4}$

Câu 8: Trong mặt phẳng Oxy cho hình thang vuông ABCD ($BAD = ADC = 90^0$ có đỉnh $D(2;2)$; $CD = 2AB$). Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên đường chéo AC. Điểm $M\left(\frac{22}{5};\frac{14}{5}\right)$ là trung điểm HC. Trung điểm E của HD thuộc cung phần tư thứ mấy biết đỉnh B thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y+4=0$

A. IV **B.** III **C.** II **D.** I

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy cho hình nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng $d: 3x+y+6=0$ và đỉnh $A(-3;9)$. E là điểm đối xứng với B qua C. Hình chiếu vuông góc của B trên ED là $F(6;-3)$. Khi đó diện tích hình chữ nhật ABCD là:

A. $\frac{105}{2}$ **B.** 105 **C.** $21\sqrt{5}$ **D.** $\frac{21\sqrt{5}}{2}$

Câu 10: Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có $D(2;-2)$; $E(2;1)$; $F(1;-2)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh A, B, C. Khi đó tọa độ trực tâm của ΔABC:

A. $H\left(-\frac{5+2\sqrt{10}}{4+\sqrt{10}};\frac{5+2\sqrt{10}}{4+\sqrt{10}}\right)$ **B.** $H\left(\frac{\sqrt{10}}{2};-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

C. $H\left(\frac{7}{5};-\frac{7}{5}\right)$ **D.** $H\left(-\frac{7}{5};\frac{7}{5}\right)$

Câu 11: Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có phương trình đường phân giác trong góc a là $d: x+2y-6=0$. Tâm $I(2;1)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $J(-2;4)$, biết bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R=2$ và hoành độ của điểm A nhỏ hơn 1. Khi đó phương trình đường thẳng BC là:

A. $4x+29=0$ **B.** $4x-53=0$

C. $y=1$ **D.** $32x-16y-77=0$

Câu 12: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: x-2y+4=0$ và các điểm $A(1;-4); B(-3;7)$. Điểm M thuộc đường thẳng d sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $x_M + y_M$

A. $\frac{53}{10}$ **B.** $\frac{-1}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Câu 13: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: 2x-y+7=0$ và các điểm $A(1;3); B(-5;-1)$. Điểm M thuộc đường thẳng d sao cho $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó bán kính R của đường tròn (C) tâm $I(3;-5)$ đi qua M là:

A. $2\sqrt{37}$ **B.** $\frac{6\sqrt{170}}{5}$ **C.** $6\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{\frac{373}{5}}$

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d đi qua $M(5;-2)$ cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $\left(\frac{25}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó đường thẳng d vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. $2x-5y-20=0$ **B.** $5x+2y+7=0$

C. $2x-5y-9=0$ **D.** $4x-10y-8=0$

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(-1;2)$; $B(1;1)$ và đường thẳng $d: x+y-1=0$. Tìm $M(a;b)$ thuộc d sao cho MA^2-3MB^2 đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $\frac{a}{b}$

A. -5 **B.** 5 **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Câu 16: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-3)^2=5$. Điểm $M(-4;7)$ thỏa mãn trên (C) lấy N sao cho khoảng cách từ N đến M đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó N thuộc đường thẳng nào sau đây?

A. $x+2y-1=0$ **B.** $x+y-2=0$

C. $x-2y+1=0$ **D.** $x+y+2=0$

Câu 17: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d đi qua $M(3;1)$ cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $(3OA+4OB)$ nhỏ nhất có phương trình là $x+by+c=0$ với b, c là các số nguyên. Khi đó $b-c=?$

A. –8 **B.** 8 **C.** –3 **D.** 7

Câu 18: Trong mặt phẳng Oxy cho $M(6;8)$ đường thẳng d đi qua M cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích ΔAOB đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó hệ số góc của đường thẳng d là:

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{-3}{4}$ **D.** $\frac{-4}{3}$

Câu 19: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+5)^2=36$. Phương trình đường thẳng d đi qua $M(-1;4)$ cắt (C) theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất là 1 vecto pháp tuyến là:

A. $\vec{n}=(4;1)$ **B.** $\vec{n}=(1;-4)$

C. $\vec{n}=(4;-1)$ **D.** $\vec{n}=(1;4)$

Câu 20: Trong mặt phẳng Oxy cho hình thang cân ABCD có 2 đường chéo vuông góc với nhau và $AD=3BC$. Đường thẳng BD có phương trình $x+2y-6=0$ và ΔABD có trực tâm $H(-3;2)$. Phương trình đường thẳng CD có dạng $x+y+c=0$ với $c\in\mathbb{Z}$. Khi đó giá trị c là:

A. 5 **B.** –41 **C.** –5 **D.** 41

Câu 21: Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật ABCD có đường thẳng CD: $3x+4y-1=0$. Điểm $I(-2;3)$ thuộc đoạn AC sao cho $IA=2IC$, biết $AB=2BC$ và điểm C có hoành độ nguyên là x_C khi đó:

A. $x_C=-\frac{21}{5}$ **B.** $x_C=-1$

C. $x_C=1$ **D.** $x_C=-4$

Câu 22: Trong mặt phẳng Oxy cho hình thang ABCD với hai đáy AB, CD và $CD=2AB$. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AC và M là trung điểm HC. Đỉnh $B(4;5)$, phương trình đường thẳng DH: $x-y=0$ và đường thẳng DM: $2+3y+5=0$. Tọa độ điểm $A(a;b)$. Khi đó $a+b$

A. 26 **B.** $\frac{16}{3}$ **C.** $\frac{-97}{6}$ **D.** $\frac{-59}{6}$

Câu 23: Trong mặt phẳng Oxy cho hình thoi ABCD biết phương trình đường chéo là $3x+y-7=0$; $B(0;-3)$, diện tích hình thoi là 20 (đvdt). Khi đó tọa độ đỉnh $A(2;b)$ thì:

A. $b=-5$ **B.** $b=4$ **C.** $b=-2$ **D.** $b=1$

Câu 24: Trong mặt phẳng Oxy cho hình bình hành ABCD có diện tích là 6 và 2 đỉnh $A(1;-2)$; $B(2;-3)$. Khi đó tọa độ đỉnh $D(a;b)$ thì $a+b$ bằng: (biết giao điểm 2 đường chéo nằm trên Ox và có hoành độ dương)

A. –5 **B.** 5 **C.** 10 **D.** –7

Câu 25: Trong mặt phẳng Oxy cho $(C):x^2+y^2=2$, phương trình tiếp tuyến của (C) là $\Delta:ax+by-2=0$ cắt tia Ox, Oy lần lượt tại A và B cho diện tích tam giacs ABC đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a+b$ bằng

A. 2　　**B.** 4　　**C.** 1　　**D.** $\frac{1}{2}$

BÀI KIỂM TRA CHỦ ĐỀ X

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy, vecto nào dưới đây là vecto chỉ phương của đường thẳng đi qua $A(4;5);\ B(10;4)$?

A. $\vec{u}=(10;3)$ **B.** $\vec{u}=(6;-1)$

C. $\vec{u}=(1;6)$ **D.** $\vec{u}=(-6;-1)$

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường thẳng song song với $d:3x+7y+9=0$ và qua điểm $A(0;3)$

A. $3x+7y+21=0$ **B.** $3x+7y+10=0$

C. $3x+7y-21=0$ **D.** $3x+7y-9=0$

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy, tọa độ của điểm $I(x_I;y_I)$ là trung điểm của AB với $A(7;5);B(8;9)$ là:

A. $I\left(\frac{1}{2};2\right)$ **B.** $I\left(\frac{15}{2};-4\right)$

C. $I\left(\frac{15}{2};7\right)$ **D.** $I(1;4)$

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy, tọa độ tâm I của (O) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2=3$ là:

A. $I(1;-2)$ **B.** $I(-1;2)$

C. $I(-1;-2)$ **D.** $I(1;2)$

Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy, tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $d:3x+2y-8=0$ và $d':5x+6y-9=0$ là:

A. $I\left(\frac{15}{4};\frac{13}{8}\right)$ **B.** $I\left(-\frac{15}{4};-\frac{13}{8}\right)$

C. $I\left(\frac{15}{4};-\frac{13}{8}\right)$ **D.** $I\left(-\frac{15}{4};\frac{13}{8}\right)$

Câu 6: Trong mặt phẳng Oxy, với giá trị nào của m thì $d:3x-2y+m=0$ và đường thẳng $d':6x-4y+m^2=0$ có điểm chung?

A. $m=2$

B. $m\neq 2$

C. Không có giá trị của m

D. $m=-2$

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy, tìm m để 3 đường thẳng: $\Delta_1:3x+4y+m=0;\ \Delta_2=3x+y=0;$ $\Delta_3:9x+2y+6=0$ đồng quy.

A. $m=-18$ **B.** $m=18$

C. $m=10$ **D.** $m=-10$

Câu 8: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường tròn tâm $I(2;-3)$ qua $A(4;6)$ là:

A. $(x-2)^2+(y+3)^2=\sqrt{85}$

B. $(x+2)^2+(y+3)^2=85$

C. $(x-2)+(y+3)=85$

D. $(x-2)^2+(y+3)^2=85$

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường tròn ngoại tiếp 3 điểm $A(7;1);\ B(0;0);$ $C(-1;7)$

A. $(x+3)^2+(y-4)^2=25$

B. $(x+3)^2+(y-4)^2=25$

C. $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

D. $(x+3)^2+(y+4)^2=25$

Câu 10: Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường thẳng qua $M(0;1)$ có hệ số góc $k=3$

A. $y=3x$ **B.** $y=3$ **C.** $y=3x+1$ **D.** $y=3x-1$

Câu 11: Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường thẳng vuông góc với $3x+4y-3=0$ và cách điểm $M(2;3)$ một khoảng bằng 5.

A. $\left[\begin{array}{l}4x-3y-24=0\\4x-3y+26=0\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}4x+3y-42=0\\4x+3y+8=0\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}4x-3y-26=0\\4x-3y+24=0\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}4x+3y-8=0\\4x+3y-42=0\end{array}\right.$

Câu 12: Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(2;3)$; $B(3;4)$; $G(2;1)$. Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì C có tọa độ là:

A. $C(-1;4)$ **B.** $C(1;4)$

C. $C(-1;-4)$ **D.** $C(1;-4)$

Câu 13: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E):\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$. Hỏi elip có tâm sai bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2\sqrt{2}}{6}$ **B.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy, tìm điểm C đối xứng với $A(2;4)$ qua $B(3;8)$.

A. $C(1;0)$ **B.** $C\left(\frac{5}{2};6\right)$

C. $C(4;12)$ **D.** $C(5;12)$

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-4)^2=25$ và đường thẳng $d:4x-3y+8=0$ có bao nhiêu giao điểm?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

Câu 16: Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình chính tắc của elip có trục lớn bằng 8, trục nhỏ bằng 6

A. $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$ **B.** $36x^2+64y^2=1$

C. $9x^2+16y^2=144$ **D.** $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=0$

Câu 17: Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;3)$; $B(0;-3)$; $C(3;3)$. Lập phương trình đường cao kẻ từ A.

A. $3x-6y+24=0$ **B.** $x+2y+8=0$

C. $x-2y-8=0$ **D.** $3x+6y-24=0$

Câu 18: Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường thẳng qua $F(4;-1)$ và cách $G(3;-1)$ một khoảng bằng 1.

A. $x-4=0$ **B.** $y+1=0$

C. $4x+y-3=0$ **D.** $3x+4y-5=0$

Câu 19: Trong mặt phẳng Oxy, tam giác ABC có $A(3;-3)$; $B\in d:2x-y+1=0$ và $C\in d':x+y-8=0$. Tìm tọa độ của B và C biết tam giác có trọng tâm $G(2;3)$

A. $B(2;5)$ và $C(1;7)$

B. $B(-2;5)$ và $C(1;7)$

C. $B(2;-5)$ và $C(-1;7)$

D. $B(2;5)$ và $C(-1;-7)$

Câu 20: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2+4x-8y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng song song với $d:4x+3y-3=0$ cắt đường tròn theo dây cung bằng 8.

A. $4x+3y+11=0$; $4x+3y+19=0$

B. $4x+3y-11=0$; $4x+3y-19=0$

C. $4x+3y+11=0$; $4x+3y-19=0$

D. $4x+3y-11=0$; $4x+3y+19=0$

Câu 21: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\Delta:x+2y-1=0$

$A(2;3)$ và $B(5;6)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{9}{10};\frac{1}{20}\right)$ **B.** $M\left(\frac{13}{20};\frac{3}{20}\right)$

C. $M\left(-\frac{13}{10};-\frac{3}{20}\right)$ **D.** $M\left(-\frac{13}{20};\frac{3}{10}\right)$

Câu 22: Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 đường thẳng $3x+4y+1=0$ và $8x+6y-5=0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc d_1, d_2 biết tâm $I \in Ox$

A. $\left[\begin{array}{l}\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{23}{10}\right)^2\\(x-0)^2=\left(\frac{73}{10}\right)^2\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{23}{10}\right)^2\\\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\left(\frac{23}{70}\right)^2\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}(x-8)^2=\left(\frac{10}{8}\right)^2\\(x-9)^2=\left(\frac{9}{10}\right)^2\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}(x-3)^2=\frac{23}{10}\\\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{10}{9}\right)^2\end{array}\right.$

Câu 23: Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình (C) bán kính $R=4$ tiếp xúc trục hoành và tâm $I \in (d): 3x+y-8=0$.

A. $\left[\begin{array}{l}\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+(y-4)^2=16\\\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+(y-4)^2=16\end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l}(x-4)^2+(y-4)^2=16\\(x+4)^2+(y-4)^2=16\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+(y-4)^2=16\\(x-4)^2+(y-4)^2=16\end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+(y-4)^2=16\\(x-4)^2+(y+4)^2=16\end{array}\right.$

Câu 24: Trong mặt phẳng Oxy, có bao nhiêu đường thẳng d đi qua $M(0;5)$ tạo với các trục tọa độ một tam giác diện tích bằng $S=5$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 25: Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(3;6)$ với đường thẳng $d: 2x+3y-8=0$. Lập phương trình đường thẳng qua A tạo với một góc 45^0.

A. $5x+y-21=0;\ 5x+y-9=0$

B. $5x+y+21=0;\ 5x+y+9=0$

C. $5x+y+21=0;\ x-5y-9=0$

D. $5x+y-21=0;\ x-5y+27=0$

Câu 26: Trong mặt phẳng Oxy, cho $M \in d: 2x+y+3=0$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất với $A(3;5)$ và $B(0;6)$.

A. $M\left(\frac{123}{115};-\frac{591}{115}\right)$ **B.** $M\left(\frac{123}{115};\frac{591}{115}\right)$

C. $M\left(-\frac{369}{115};\frac{393}{115}\right)$ **D.** $M\left(-\frac{123}{115};-\frac{591}{115}\right)$

Câu 27: Trong mặt phẳng Oxy, ΔABC cân tại A, trọng tâm $G\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$. Phương trình cạnh BC: $x+3y+4=0$, phương trình BG: $x+y-2=0$. Tìm tọa độ B, C.

A. $B(5;-3);\ C\left(-3;\frac{1}{3}\right)$ **B.** $B(5;-3);\ C\left(3;\frac{1}{3}\right)$

C. $B(5;-3);\ C\left(-3;-\frac{1}{3}\right)$ **D.** $B(5;-3);\ C\left(3;\frac{-1}{3}\right)$

Câu 28: Trong mặt phẳng Oxy, lập phương trình đường thẳng d qua $M(2;3)$ và chắn 2 trục tọa độ 2 đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

A. $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1;\ x+y=1$ **B.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1;\ -x+y=1$

C. $\frac{x}{5}-\frac{y}{5}=1;\ -x+y=1$ **D.** $-\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1;-x+y=1$

Câu 29: Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình elip (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở có chu bi bằng 40.

A. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$ **B.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=1$

C. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$ **D.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

Câu 30: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-12x+4y-27=0$ và điểm $A(4;9)$. Viết phương trình đường thẳng qua A cắt đường tròn (C) tại 2 điểm sao cho độ dài cạnh hình vuông ngoại tiếp đường tròn (C) bằng khoảng cách 2 điểm trên.

A. $2x-11y+10=0$ **B.** $2x-11y+34=0$

C. $2x-11y-10=0$ **D.** $11x+2y-62=0$

Câu 31: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-12x+4y+15=0$ và điểm $A(9;2)$. Lập phương trình đường thẳng qua A cắt đường tròn (C) tại 2 điểm sao cho khoảng cách giữa 2 điểm bằng cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn (C).

A. $\left[\begin{array}{l}7x+y-65=0\\x+7y-5=0\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}7x+y-63=0\\x+7y-5=0\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}7x-y+5=0\\x-7y+63=0\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}7x-y-63=0\\x-7y-65=0\end{array}\right.$

Câu 32: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip: $\frac{x^2}{64}+y^2=1$ và điểm $C(8;0)$. Tìm $A,B\in(E)$ biết A, B đối xứng qua trục hoành và ΔABC đều. A, B là một trong 2 điểm nào dưới đây?

A. $\left(\frac{488}{67};\frac{16\sqrt{3}}{67}\right)$ và $\left(\frac{488}{67};\frac{-16\sqrt{3}}{67}\right)$

B. $\left(\frac{488}{64};\frac{16\sqrt{3}}{64}\right)$ và $\left(\frac{488}{64};\frac{-16\sqrt{3}}{64}\right)$

C. $\left(\frac{488}{64};\frac{16\sqrt{3}}{67}\right)$ và $\left(\frac{488}{67};\frac{-16\sqrt{3}}{64}\right)$

D. $\left(-\frac{488}{64};\frac{16\sqrt{3}}{67}\right)$ và $\left(-\frac{488}{64};\frac{-16\sqrt{3}}{67}\right)$

Câu 33: Trong mặt phẳng Oxy, tam giác ABC vuông cân tại A có $G(2;2)$ và $M(3;3)$ là trung điểm BC. Tìn tọa độ A, B, C.

A. $A(0;0)$, $B(0;6)$, $C(6;0)$

B. $A(1;1)$, $B(5;1)$, $C(1;5)$

C. $A(2;3)$, $B(4;2)$, $C(2;4)$

D. $A(4;3)$, $B(0;6)$, $C(0;0)$

Câu 34: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $M(2;3)$, $N(4;1)$, $P(6;2)$ lần lượt là trung điểm 3 cạnh AB, AC, BC. Tìm tọa độ điểm A.

A. $A(8;0)$ **B.** $A(0;2)$ **C.** $A(4;4)$ **D.** $A(2;4)$

Câu 35: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường thẳng qua $M(2;3)$ tạo với $d: 3x-4y+8=0$ một góc bằng 60^0 là phương trình nào dưới đây?

A. $\left(24+7\sqrt{3}\right)(x-2)+11(y-3)=0$

B. $\left(24+76\sqrt{3}\right)(x-2)+11(y-3)=0$

C. $\left(24+5\sqrt{3}\right)(x-2)+11(y-3)=0$

D. $\left(24+7\sqrt{3}\right)(x-2)+12(y-3)=0$

Câu 36: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $M(2;0)$, $N(8;-6)$ lần lượt là trung điểm AB, AC và $D(3;12)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống BC. Tìm tọa độ B.

A. $B(-10;-1)$ **B.** $B(14;-1)$

C. $B(26;-11)$ **D.** $B(14;1)$

Câu 37: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $M(3;4)$ là trung điểm của AC, đường trung tuyến kẻ từ C có phương trình $x-y-3=0$, đỉnh B nằm trên đường thẳng $3x-y+1=0$. Khi đó tổng giữa tung độ và hoành độ của B là.

A. 23 **B.** -23 **C.** -11 **D.** 11

Câu 38: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(1;0)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại 2 điểm M, N sao cho ΔAMN vuông cân tại A.

A. $y=1;\ y=2$ **B.** $y=1;\ y=4$

C. $y=1;\ y=-3$ **D.** $y=2;\ y=3$

Câu 39: Trong mặt phẳng Oxy, tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$. Gọi I là tâm (C), M là điểm thuộc Δ. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M biết tứ giác MAIB có diện tích bằng 10.

A. $M(-2;-4), M(3;1)$ **B.** $M(2;4), M(3;1)$

C. $M(-2;4), M(3;1)$ **D.** $M(2;-4), M(-3;1)$

Câu 40: Trong mặt phẳng Oxy, tam giác ABC vuông tại A . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC, D là điểm đối xứng B qua H; K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AD. Giả sử $H(-5;5)$; $K(9;-3)$ và trung điểm của cạnh AC thuộc đường thẳng $x-y+10=0$. Tìm tọa độ điểm A

A. $A(15;-5)$ **B.** $A(-13;19)$

C. $A(-15;-5)$ **D.** $A(15;5)$

Câu 41: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tam giác ABC có chân đường cao từ A là $H\left(\frac{17}{5};-\frac{1}{5}\right)$, chân phân giác góc A là $D(5;3)$, trung điểm AB là $M(0;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

A. $C(8;3)$ **B.** $C(9;12)$ **C.** $C(4;6)$ **D.** $C(9;11)$

Câu 42: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính BD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BC, BD và P là giao điểm MN, AC. Biết đường thẳng AC có phương trình $x-y-1=0$, $M(0;4), N(2;2)$ và hoành độ điểm A nhỏ hơn 2. Tìm tọa độ các điểm P, A, B.

A. $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$, $A(0;-1)$, $B(-1;4)$

B. $P\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $A(-1;0)$, $B(-1;4)$

C. $P\left(\frac{5}{3};\frac{3}{2}\right)$, $A(0;-1)$, $B(-1;4)$

D. $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$, $A(0;-1)$, $B(4;1)$

Câu 43: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC có chân đường phân giác trong của góc A là điểm $D(1;-1)$. Đường thẳng AB có phương trình: $3x+2y-9=0$. Tiếp tuyến A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x+2y-7=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

A. $x-4y-5=0$ **B.** $x-3y-4=0$

C. $x-2y-3=0$ **D.** $x-2y-6=0$

Câu 44: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho tam giác ABC cóđiểm $M\left(\frac{-9}{2};\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm cạnh AB, điểm $H(-2;4)$ và điểm $I(-1;1)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ điểm C.

A. $C(-4;-1)$, $C(1;6)$ **B.** $C(4;1)$, $C(-1;6)$

C. $C(4;-1)$, $C(-1;6)$ **D.** $C(4;1)$, $C(1;-6)$

Câu 45: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: x\cos\alpha + y\sin\alpha + 2\cos\alpha + 1 = 0$. Biết rằng khi (α) thay đổi thì đường thẳng d luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định. Khi đó tâm và bán kính đường tròn đó lần lượt là:

A. tâm $I(-2;0)$, $R=1$ **B.** tâm $I(2;0)$, $R=1$

C. tâm $I(0;2)$, $R=2$ **D.** tâm $I(0;-2)$, $R=2$

Câu 46: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x+y+5=0$ và $A(-4;8)$. Gọi M là điểm đối xứng với B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Tìm tọa độ B, C biết $N(5;-4)$

A. $B(4;-7), C(-1;-7)$ **B.** $B(-4;7), C(1;7)$

C. $B(-4;-7), C(1;-7)$ **D.** $B(4;-7), C(-1;-7)$

Câu 47: Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 điểm $A(3;4), B(5;3)$. Xác định điểm M trên elip $(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ sao cho diện tích MAB nhỏ nhất.

A. $M(-2;-1)$ **B.** $M(2;-1)$

C. $M(2;1)$ **D.** $M(-2;1)$

Câu 48: Trong mặt phẳng Oxy, cho:

$(C): x^2+y^2-2x-4y+1=0$, $\Delta: x-y+7=0$.

Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm) sao cho diện tích tứ giác MAIB nhỏ nhất.

A. $M(-2;-5)$ **B.** $M(2;-5)$

C. $M(2;5)$ **D.** $M(-2;5)$

Câu 49: Trong mặt phẳng Oxy, cho $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

Tìm tọa độ A, B thuộc (E) sao cho A, B có hoành độ dương ΔOAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

A. $A\left(2;\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$

B. $A\left(-\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

C. $A\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

D. $A\left(2;\frac{1}{2}\right)$, $B\left(2;-\frac{1}{2}\right)$

Câu 50: Trong mặt phẳng Oxy, cho $M(3;1)$. Đường thẳng đi qua M cắt chiều dương tia Ox, Oy lần lượt tại A, B. Viết phương trình đường thẳng d sao cho $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

A. $3x+y-10=0$ **B.** $3x-y-10=0$

C. $-3x+y-10=0$ **D.** $-3x-y-10=0$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT CHỦ ĐỀ X

I. Phương trình đường tròn

Câu 1: Đáp án D

$(C): x^2+y^2-2.3x-2(-4).y+9=0$

$\Rightarrow (C)$: tâm $I(3;-4)$; bán kính

$R=\sqrt{3^2+(-4)^2-9}=4$

Câu 2: Đáp án D

(C) có tâm $I(2;3)$ và $R=6$

$\Rightarrow (C):(x-2)^2+(y-3)^2=36$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+6y-23=0$

Câu 3: Đáp án B

+ (1) không phải là đường tròn vì bán kính $R>0$

+ (2) là đường tròn có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$

+ (3) là đường tròn có tâm $I(-6;3)$ và bán kính $R=5$

Chú ý: Bán kính R của đường tròn (C) là một số thực dương.

Câu 4: Đáp án A

Bán kính $R=IA\sqrt{26}$

(C) có tâm $I(0;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{26}$

$\Rightarrow (C): x^2+(y+1)^2=26$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2y-25=0$

Chú ý: Phương trình tổng quát của đường tròn (C) có dạng:

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

(với $a^2+b^2-c>0$)

Câu 5: Đáp án C

(C) có đường kính AB $\Rightarrow$ (C) có tâm $I(4;2)$ là trung điểm AB và bán kính $R=IA=2\sqrt{10}$

$\Rightarrow (C):(x-4)^2+(y-2)^2=\left(2\sqrt{10}\right)^2=40$

Chú ý:

Cho $A(x_A;y_A);B(x_B;y_B)$

(1) Trung điểm AB là:

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ (2)

$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|$

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Câu 6: Đáp án A

$I\in d: x+2y-5=0 \Rightarrow I(5-2a;a)$

(C) đi qua $A(-2;4)$ và $B(0;-3)$

$\Rightarrow IA=IB \Rightarrow IA^2=IB^2$

$\Leftrightarrow (-2-5+2a)^2+(4-a)^2=(2a-5)^2+(-3-a)^2$

$\Leftrightarrow (2a-7)^2+(a-4)^2=(5-a)^2+(a+3)^2$

$\Leftrightarrow 49+4a^2-28a+a^2-8a+16=25+4a^2-20a+a^2+6a+9$

$\Leftrightarrow -22a=-31 \Leftrightarrow a=\frac{31}{22}$

Chú ý: Phương trình $IA=IB$ có bao nhiêu nghiệm thì sẽ có bấy nhiêu đường tròn (C) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7: Đáp án C

(C) tiếp xúc với đường thẳng $d: 4x+y-6=0$

$\Rightarrow d(I;d)=R \Rightarrow \frac{|-4.4+(-3).1-6|}{\sqrt{4^2+1^2}}=R$

$\Rightarrow (C)$ có tâm $I(-4;-3)$ và bán kính $R=\frac{25\sqrt{17}}{17}$

$\Rightarrow (C):(x+4)^2+(y+3)^2=\frac{625}{17}$

Chú ý: Phương trình chính tắc của đường tròn:

$(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Câu 8: Đáp án D

$I\in d: x-2y+6=0 \Rightarrow I(2a-6;a)$

Vì (C) tiếp xúc với 2 trục tọa độ nên $d(I;Ox)=d(I;Oy)=R$

$\Rightarrow |a|=|2a-6| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2a-6\\ a=-2a+6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=6\\ a=2\end{array}\right.$

TH1: $a=6 \Rightarrow I(6;6)$ và $R=6$

$\Rightarrow (C):(x-6)^2+(y-6)^2=36$

TH2: $a=2 \Rightarrow I(-2;2)$ và $R=2$

$\Rightarrow (C):(x+2)^2+(y-2)^2=4$

Chú ý: $|A|=|B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=B \\ A=-B \end{array}\right.$

Câu 9: Đáp án B

Cách 1:

$I \in \Delta \Rightarrow I(3a;a)$

Vì C tiếp xúc với d tại $A(-4;4)$

$\Rightarrow d_{(I;d)}=IA$

$\Leftrightarrow \dfrac{|3a-a+8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$

$=\sqrt{(-4-3a)^2+(4-a)^2}$

$\Leftrightarrow a=0 \Rightarrow$ tâm $I(0;0)$ trùng với gốc tọa độ.

Vậy có 1 đường tròn (C) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Vì d tiếp xúc với (C) tại A

$\Rightarrow IA \perp d \Rightarrow$ IA đi qua $A(-4;4)$ và có VTPT $\vec{n}=(1;1)$

$\Rightarrow IA: x+4+y-4=0 \Leftrightarrow x+y=0$

Mà $I \in \Delta \Rightarrow$ tọa độ điểm I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow I(0;0) \Rightarrow$ có 1 đường tròn.

Câu 10: Đáp án B

$I \in d: x-y-1=0 \Rightarrow I(a;a-1)$

(C) tiếp xúc với d_1 và d_2 nên $d(I;d_1)=d(I;d_2)=R$

$\Rightarrow \dfrac{|2a+a-1+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|-a-2(a-1)+4|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}}$

$\Leftrightarrow |3a+2|=|-3a+6|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a+2=-3a+6 \\ 3a+2=-(-3a+6) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{2}{3} \\ 0a=4 \text{ (vô lý)} \end{array}\right. \Leftrightarrow a=\dfrac{2}{3}$

Với $a=\dfrac{2}{3} \Rightarrow I\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{-1}{3}\right)$

và $R=d(I;d_1)=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

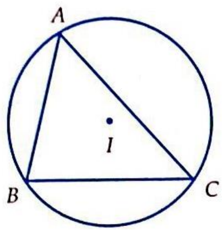
$\Rightarrow (C):\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{16}{5}$

Lưu ý:

$d:\begin{cases} x=1+t \\ y=t \end{cases}$

$\Rightarrow d: x=1+t \Leftrightarrow x-y-1=0$

Câu 11: Đáp án C



Vì A, B, C đều thuộc (C) nên ta có hệ: $\begin{cases} (-1)^2+1^2+a-b+c=0 \\ 4^2+(-3)^2-4a+3b+c=0 \\ 3^2+5^2-3a-5b+c=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{55}{9} \\ b=\dfrac{17}{9} \\ c=\dfrac{-56}{9} \end{cases} \Rightarrow P=a+b+c=\dfrac{16}{9}$

Lưu ý: Có thể giải bài toán này bằng cách:

+ Giả sử (C) có tâm $I(x;y)$

+ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \end{cases}$

$\Rightarrow$ tìm tọa độ điểm I.

+ Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I và bán kính IA. Bạn đọc tự giải.

Câu 12: Đáp án A

Ta có $AI=\sqrt{74}$; $\overrightarrow{AH}=(0;6)$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$(C):(x+2)^2+y^2=74$

Gọi M là trung điểm cạnh BC ta có

$\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M+2=0 \\ y_M=\dfrac{1}{2}.6 \end{cases}$

$\Rightarrow M(-2;3) \Rightarrow \overrightarrow{IM}=(0;3)$

Đường thẳng BC qua M và vuông góc với IM $\Rightarrow BC: y-3=0$

Tọa độ C là nghiệm của hệ

$\begin{cases} (x+2)^2+y^2=0 \\ y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2+\sqrt{65} \\ y=3 \end{cases}$

$\Rightarrow C(-2+\sqrt{65};3)$

Vậy $a+b=1+\sqrt{65}$

Câu 13: Đáp án B

(C) có tâm $I(-1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$

Tiếp tuyến d của (C) tại $A(0;-3)\Leftrightarrow$ d đi qua $A(0;-3)$ và nhận $\overrightarrow{IA}=(1;-1)$ làm VTPT

$\Rightarrow d: x-y-3=0 \Rightarrow a+b=0$

Chú ý: Δ qua $A(x_0;y_0)$ và nhận $\vec{n}=(a;b)$ làm VTPT

$\Rightarrow \Delta: a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

Câu 14: Đáp án D

(C) có tâm $I(-2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$

+ Tiếp tuyến qua $M(-1;3)$ nên $c=a-3b$

+ Có $d(I;d)=R$

$\Leftrightarrow \dfrac{|-2a+3b+a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |-a|=\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow a^2=2a^2+2b^2 \Leftrightarrow 2b^2-a^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\sqrt{2}b \\ a=-\sqrt{2}b \end{array}\right. \Rightarrow \dfrac{a}{b}=\pm\sqrt{2}$

Câu 15: Đáp án A

Giả sử Δ là tiếp tuyến của (C)

$\Delta//d: x-y=0$

$\Rightarrow \Delta: x-y+c=0 (c\neq 0)$

(C) có tâm $I(4;2)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$

$d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|4-2+c|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |2+c|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+c=2 \\ 2+c=-2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \ (ktm) \\ c=-4 (t/m) \end{array}\right.$

Vậy có 1 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán vì nếu $c=0$ thì $\Delta \equiv d$

Chú ý: $\Delta//d: Ax+By+C=0$

$\Rightarrow \Delta: Ax+By+C'=0 \ (C\neq C')$

Câu 16: Đáp án B

+ (C) có tâm $I(-4;0)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

+ Δ là tiếp tuyến của (C)

$\Delta \perp d: 2x-y+1=0$

$\Rightarrow \Delta: x+2y+c=0$

Ta có $d(I;\Delta)=R$

$\Leftrightarrow \dfrac{|-4.1+2.0+c|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |c-4|=5$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c-4=5 \\ c-4=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=9 \\ c=-1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu là:

$\Delta_1: x+2y+9=0$

và $\Delta_2: x+2y-1=0$

Vậy $a+b=9-1=8$

Chú ý:

1. $\Delta \perp d: Ax+By+C=0$

$\Rightarrow \Delta A: -Bx+Ay+C'=0$

2. $|A|=B \Leftrightarrow \begin{cases} B\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A=B \\ A=-B \end{array}\right. \end{cases}$

Câu 17: Đáp án D

+ (C) có tâm $I(5;1)$ và bán kính $R=\sqrt{34}$

+ Giả sử Δ là tiếp tuyến của (C) và có VTCP $\overrightarrow{n_\Delta}=(a;b)$

Đường thẳng d có VTPT $\overrightarrow{n_d}=(1;-4)$

+ Δ tạo với d một góc $\alpha=45^0$ nên

$\cos 45^0=\dfrac{|\overrightarrow{n_d}.\overrightarrow{n_\Delta}|}{|\overrightarrow{n_d}|.|\overrightarrow{n_\Delta}|}$

$=\dfrac{|a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{1^2+(-4)^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{|a-4b|}{\sqrt{17}.\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{34}.\sqrt{a^2+b^2}=2|a-4b|$

$\Leftrightarrow 30a^2+32ab-30b^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3}{5}b \\ a=\dfrac{-5}{3}b \end{array}\right.$

Vậy có 2 tiếp tuyến của (C) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý:

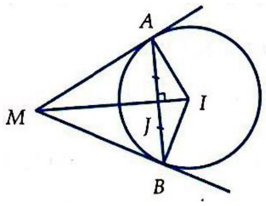
Δ có VTPT $\overrightarrow{n_1}$ và VTCP $\overrightarrow{u_1}$

d có VTPT $\overrightarrow{n_2}$ và VTCP $\overrightarrow{u_2}$

Gọi α là góc tạo bởi giữa Δ và d $(0<\alpha<90^0)$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$$

Câu 18: Đáp án C



(C) có tâm $I(-1;-2)$ và bán kính $R=5$

$M \in \Delta: 2x-y+3=0 \Rightarrow M(2a+3;a)$

Ta có: $2S_{\Delta AMI} = MI.AJ = AI.AM$

$\Leftrightarrow MI.\frac{AB}{2} = AI.\sqrt{MI^2-AI^2}$

$\Leftrightarrow MI.2\sqrt{5} = 5\sqrt{MI^2-25}$

$\Leftrightarrow 20.MI^2 - 25MI^2 - 125$

$\Leftrightarrow MI^2 = 25$

$\Leftrightarrow (-1-2a-3)^2 + (-2-a)^2 = 25$

$\Leftrightarrow 4a^2+16+16a+a^2+4a+4=25$

$\Leftrightarrow a = -2 \pm \sqrt{5}$

- Với $a=-2+\sqrt{5}$

$\Rightarrow M\left(-1+2\sqrt{5};-2+\sqrt{5}\right)$

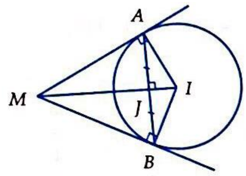
- Với $a=-2-\sqrt{5}$

$\Rightarrow M\left(-1-2\sqrt{5};-2-\sqrt{5}\right)$

Chú ý: MA, MB là hai tiếp tuyến đến (C) $\Rightarrow MA = MB$

$\Rightarrow$ MJ là đường trung trực của AB $(J = AB \cap MI)$

Câu 19: Đáp án B



(C) có tâm $I(-4;3)$ và bán kính $R=2\sqrt{5}$

$M \in d: x-y-1=0 \Rightarrow M(a;a-1)$

$S_{\Delta AMI} = MI.AJ = MA.IA = MI.\frac{MA}{2}$

(vì $AJ = \frac{AB}{2} = \frac{MA}{2}$)

$\Leftrightarrow MI = 2AI = 2.2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow MI^2 = 80$

$\Leftrightarrow (-4-a)^2 + (4-a)^2 = 80$

$\Leftrightarrow 16+a^2+8a+16+a^2-8a=80$

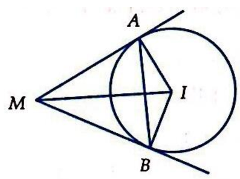
$\Leftrightarrow 2a^2 = 48 \Leftrightarrow a^2 = 24$

$\Leftrightarrow a = 2\sqrt{6}$ (nhận); $a = -2\sqrt{6}$ (loại vì $x_M > 0$)

Với $a = 2\sqrt{6} \Rightarrow M\left(2\sqrt{6};2\sqrt{6}-1\right)$

Vậy $x_M - y_M = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 1 = 1$

Câu 20: Đáp án C



(C) có tâm $I(0;0)$ và bán kính $R=4$

$M \in \Delta: x-2y=0 \Rightarrow M(2a;a)$

$S_{\Delta AMB} = \frac{108}{25}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.MA.MB.\sin AMB = \frac{108}{25}$

$\Leftrightarrow MA^2.\sin AMI.\cos AMI = \frac{108}{25}$

$\Leftrightarrow MA^2.\frac{AI}{MI}.\frac{MA}{MI} = \frac{108}{25}$

$\Leftrightarrow \left(MI^2-AI^2\right).\frac{AI.\sqrt{MI^2-AI^2}}{MI^2} = \frac{108}{25}$

$\Leftrightarrow MI = 5 \Leftrightarrow MI^2 = 25$

$\Leftrightarrow (-2a)^2 + (-a)^2 = 25$

$\Leftrightarrow 5a^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \Rightarrow M(2;1) \\ 1=-1 \Rightarrow M(-2;-1) \end{array}\right.$

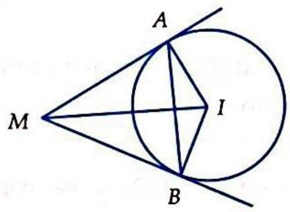
Chú ý:

1. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin A$

$= \frac{1}{2}.BC.BA.\sin B = \frac{1}{2}.CB.CA.\sin C$

2. $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

Câu 21: Đáp án C



(C) có tâm $I(-5;4)$ và bán kính $R = 2\sqrt{10}$

$M \in \Delta: -x+y-5=0 \Rightarrow M(a-5;a)$

$S_{\Delta AIB} = \frac{1}{2}.IA.IB.\sin AIB = \frac{1}{2}R^2.\sin AIB$

$S_{\Delta IAB}$ đạt giá trị lớn nhất

$\Leftrightarrow \sin AIB = 1 \Leftrightarrow AIB = 90^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMBI là hình vuông

$\Rightarrow IM = IA\sqrt{2} = R\sqrt{2}$

$$MI^2 = 2R^2 = 2.\left(2\sqrt{10}\right)^2 = 80$$

$$\Leftrightarrow \left[-5-(a-5)\right]^2 + (4-a)^2 = 80$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 8a + 16 - 80 = 0$$

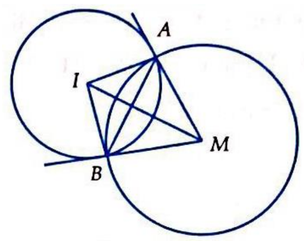
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 8 \Rightarrow M(3;8) \\ a = -4 \Rightarrow M(-9;-4) \end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý:

$-1 \le \sin\alpha \le 1;\ -1 \le \cos\alpha \le 1$

Câu 22: Đáp án A



(C) có tâm $I(-1;-2)$ và $R = 3$

$$MI = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}$$

ΔAMI vuông tại A

$$\Rightarrow AM = \sqrt{MI^2 - IA^2}$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{34-9} = 5$$

Ta có $MA = MB \Rightarrow A, B \in$ đường tròn (C') tâm M, bán kính MA.

$$\Rightarrow (C'): (x-2)^2 + (y-3)^2 = MA^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

Có

$$AB = (C) \cap (C') \Rightarrow (C) - (C') = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 - \left(x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x + 10y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 5y + 4 = 0$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng AB: $3x + 5y + 4 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-4-5y}{3}$ thế vào (C) ta có:

$$\left(\frac{-4-5y}{3}\right)^2 + y^2 + 2.\frac{-4-5y}{3} + 4y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16 + 25y^2 + 40y}{9} + \frac{9y^2}{9} + \frac{6(-4-5y)}{9} + \frac{36y}{9} - \frac{36}{9} = 0$$

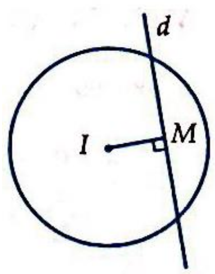
$$\Leftrightarrow 34y^2 + 46y - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{11}{17} \Rightarrow x = \dfrac{-41}{17} \\ y = -2 \Rightarrow x = 2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow A(2;-2);\ B\left(\frac{-41}{17}; \frac{11}{17}\right)$$

$$\Rightarrow AB = \frac{15\sqrt{34}}{17}$$

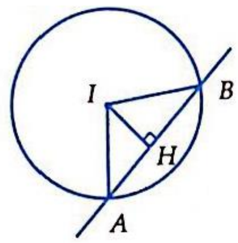
Câu 23: Đáp án B



(C) có tâm $I(3;2)$ và bán kính $R = 3;\ MI = \sqrt{5} < R$

M là trung điểm AB $\Rightarrow$ d đi qua $M(4;0)$ và nhận $\overrightarrow{IM} = (1;-2)$ làm VTPT $\Rightarrow d: x - 2y - 4 = 0$

Câu 24: Đáp án D



(C) có tâm $I(-4;-5)$ và bán kính $R = 5$

Gọi H là trung điểm AB

$$\Rightarrow d(I;d) = IH = \sqrt{IA^2 - AH^2}$$

$$\Rightarrow \frac{|-4a - 5b + a + 7b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} = 3$$

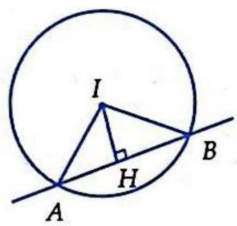
$$\Leftrightarrow |-3a + 2b| = 3\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 + 4b^2 - 12ab = 9a^2 + 9b^2$$

$$\Leftrightarrow 5b^2 + 12ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = \dfrac{-12}{5}a \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow P = 0 \text{ hoặc } P = \frac{-12}{5}$$

Câu 25: Đáp án B



(C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$

Gọi H là trung điểm AB. Ta có:

$S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}.IH.AB=IH.AH=1$

$\Rightarrow IH.\sqrt{IA^2-IH^2}=1$

$\Leftrightarrow IH.\sqrt{2-IH^2}=1$

$\Leftrightarrow IH^2.\left(2-IH^2\right)=1$

$\Leftrightarrow IH^2=1\Leftrightarrow IH=1$

d đi qua $M(2;-2)$ và có VTPT $\vec{n}=(a;b)\Rightarrow d:ax+by-2a+2b=0$

Ta có:

$d(I;d)=IH\frac{|a+b-2a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$

$\Leftrightarrow |3b-a|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow 9b^2+a^2-6ab=a^2+b^2$

$\Leftrightarrow 8b^2-6ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ b=\frac{3}{4}a\end{array}\right.$

TH1: Với $b=0$; chọn $a=1$

$\Rightarrow d:x-2=0$

TH2: Với $b=\frac{3}{4}a$;chọn $a=4;b=3$

$\Rightarrow d:4x+3y-2=0$

Câu 26: Đáp án C

(C) có tâm $I(0;0)$ và bán kính $R=2\sqrt{3}$

Gọi H là trung điểm AB.

ΔAIB đều $\Rightarrow IH=2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

d đi qua $M(3;-1)$ và có VTPT $\vec{n}=(a;b)$

$\Rightarrow d:ax+by-3a+b=0$

Có $d(I;d)=IH$

$\Leftrightarrow\frac{|0.a+0.b-3a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3$

$\Leftrightarrow 9a^2+b^2-6ab=9a^2+9b^2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ b=\frac{-3}{4}a\end{array}\right.$

Vậy có 2 đường thẳng d thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27: Đáp án A

(C) có tâm $I(-2;5)$ và bán kính $R=5$

$S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB$

$=\frac{1}{2}IA^2.\sin AIB$

Để $S_{\Delta IAB}\max$ thì $\sin AIB=1$

$\Leftrightarrow AIB=90^0$

$S_{\Delta IAB}\max=\frac{1}{2}IA^2=\frac{1}{2}.5^2=\frac{25}{2}$

Câu 28: Đáp án B

Để (C_m) là đường tròn thì:

$m^2+9(m-2)^2-(-16m+26)>0$

$\Leftrightarrow m^2+9\left(m^2-4m+4\right)$
$+16m-26>0$

$\Leftrightarrow 10m^2-20m+10>0$

$\Leftrightarrow (m-1)^2>0\Leftrightarrow m\neq 1$

Chú ý:

$(C):x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

Để (C) là đường tròn thì $a^2+b^2-c>0$

Câu 29: Đáp án C

Ta có:

$m^2+\left[4.(m-3)\right]^2-(-28+17)$

$=17m^2-68m+127>0\ \forall m$

$\Rightarrow$ với mọi giá trị của m thì (C_m) là đường tròn

Tâm của (C_m) là $I(x;y)$ với $\forall m$

$\Rightarrow\begin{cases}x=-m & (1)\\ y=-4(m-3) & (2)\end{cases}$

Thế (1) vào (2) ta được $y=4x+12$

Vậy tập hợp của (C_m) là đường thẳng $y=4x+12$

Câu 30: Đáp án B

+ Với mọi giá trị của $m\neq\frac{3}{2}$ thì (C_m) là đường tròn.

+ Giả sử điểm cố định là $A(x_A;y_A)$

$\Rightarrow x_A^2+y_A^2-2(m+1)x_A$
$-4(m-2)y_A+m+\frac{23}{4}=0$

$\Leftrightarrow x_A^2+y_A^2+8y_A+\frac{23}{4}$
$-2mx_A-4my_A+m=0$

$\Leftrightarrow x_A^2+y_A^2+8y_A+\frac{23}{4}$
$+m(-2x_A-4y_A+1)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_A - 4y_A + 1 = 0 & (1) \\ x_A^2 + y_A^2 - 2x_A + 8y_A + \dfrac{23}{4} = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow x_A = \dfrac{1-4y_A}{2}$ thế vào (2) ta được:

$$\left(\frac{1-4y_A}{2}\right)^2 + y_A^2 - 2.\frac{1-4y_A}{2} + 8y_A + \frac{23}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 16y_A^2 - 8y_A + 1 + 4y_A^2 - 4 + 16y_A + 32y_A + 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow 20y_A^2 + 40y_A + 20 = 0 \Leftrightarrow y_A = -1$$

$\Rightarrow x_A = \dfrac{5}{2} \Rightarrow$ có 1 điểm cố định (C_m) luôn đi qua là $A\left(\dfrac{5}{2};1\right)$

Câu 31: Đáp án C

Để (C_m) là đường tròn thì

$$2m^2 + m - 1 > 0$$

$$\Rightarrow m \in (-\infty;1) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$$

Giả sử (C_m) có tâm $I(m;m)$ và $R = \sqrt{2m^2 + m - 1}$

(C_m) tiếp xúc với $d: x + 2y + 5 = 0$

$$\Rightarrow d(I;d) = R$$

$$\Rightarrow \frac{|m + 2m + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{2m^2 + m - 1}$$

$$\Leftrightarrow |3m + 5| = \sqrt{5}.\sqrt{2m^2 + m - 1}$$

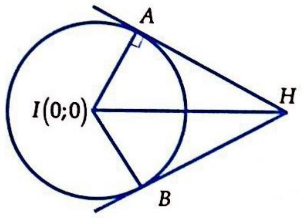
$$\Leftrightarrow 9m^2 + 25 + 30m = 5(2m^2 + m - 1)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 25m - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{25+\sqrt{745}}{2} (t/m) \\ m = \dfrac{25-\sqrt{745}}{2} (t/m) \end{array}\right.$$

Vậy tổng $S = 25$

Câu 32: Đáp án C



(C) có tâm $I(0;0)$ và $R = 1$

$$M \in \Delta: (m-3)x + y + 2(m-3) = 0$$

$$\Rightarrow M(a;(3-m)(a+2))$$

$$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA.IB.\sin AIB$$

$$= \frac{1}{2} IA^2.\sin AIB$$

$S_{\Delta IAB} max \Leftrightarrow \sin AIB = 1 \Leftrightarrow AIB = 90^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMBI là hình vuông

$$\Rightarrow MI = \sqrt{2}IA \Rightarrow MI^2 = 2IA^2$$

$$\Rightarrow a^2 + (3-m)^2(a+2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (3-m)^2 a^2 + 4(3-m)^2 a + 4(3-m)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 6m + 10)a^2 + 4(3-m)^2 a + 4(m^2 - 6m + 9) - 1 = 0 (*)$$

Để tồn tại duy nhất một điểm M thì phương trình (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0$

$$\Leftrightarrow 4(3-m)^4 - \left[(3-m)^2 + 1\right]\left[4(3-m)^2 - 1 = 0\right] (1)$$

Đặt $(3-m)^2 = t (t \ge 0)$

$$(1) \Leftrightarrow 4t^2 - (t+1)(4t-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 - (4t^2 - t + 4t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} (t/m)$$

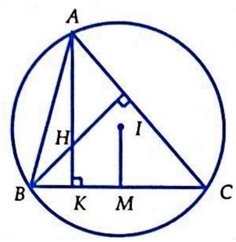
Với $t = \dfrac{1}{3} \Rightarrow (3-m)^2 = \dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3 - m = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ 3 - m = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{9-\sqrt{3}}{3} \\ m = \dfrac{9+\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \frac{9-\sqrt{3}}{3}.\frac{9+\sqrt{3}}{3} = 26$$

Bài tập rèn luyện chủ đề X

Câu 1: Đáp án A



$$\overrightarrow{HK} = (0;-2)$$

Gọi M là trung điểm của BC

Đường thẳng IM đi qua $I(-2;4)$ và nhận $\overrightarrow{HK} = (0;2)$ làm VTCP

$$\Rightarrow IM: x = -2$$

Đường thẳng BC qua $K(0;2)$ và nhận $\overrightarrow{HK} = (0;-2)$ làm VTPT

$$\Rightarrow BC: y = 2$$

$$M = IM \cap BC \Rightarrow M(-2;2)$$

Ta có $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ (bài toán 1)

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_A = 2(-2+2) \\ 4 - y_A = 2(2-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 8 \end{cases}$$

$\Rightarrow A(0;8)$

Đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có tâm $I(-2;4)$ và bán kính $R = IA = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow (C): (x+2)^2 + (y-4)^2 = 20$

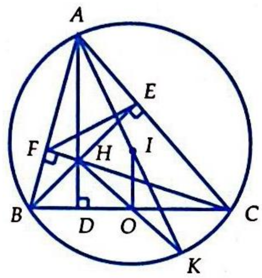
Tọa độ điểm B, C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-4)^2 = 20 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -6 \end{array}\right. \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(2;2); C(-6;2) \\ B(-6;2); C(2;2) \end{array}\right.$$

Vậy điểm A có tung độ lớn nhất trong 3 điểm A, B, C là 8

Câu 2: Đáp án A



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, kẻ đường kính AK.

Xét tứ giác CHBK có CH // BK (cùng vuông góc AB) và $CK \perp BH$ (cùng vuông góc AC). Suy ra tứ giác CHBK là hình bình hành.

Mà O là trung điểm của BC.

$\Rightarrow$ O là trung điểm của HK

$\Rightarrow K(1;-2)$

Phương trình đường thẳng AD qua $H(-1;2)$ và vuông góc BC: $x + 2y = 0$

$\Rightarrow AD: -2x + y - 4 = 0$

Chứng minh được $IA \perp EF$ (xem bài toán 2)

Ta có phương trình AI đi qua $K(1;-2)$ và vuông góc EF: $2x - 3y + 14 = 0$

$\Rightarrow AI: 3x + 2y + 1 = 0$

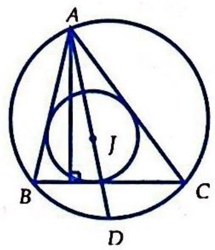
$A = AD \cap AI \Rightarrow$ tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ -2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-9}{7} \\ y = \dfrac{10}{7} \end{cases}$$

$\Rightarrow A\left(-\dfrac{9}{7}; \dfrac{10}{7}\right)$

Do đó $P = 7.\left(-\dfrac{9}{7}\right) + \dfrac{10}{7} = -\dfrac{53}{7}$

Câu 3: Đáp án C



Phương trình đường thẳng DJ qua $D(2;-4)$, $J(2;1)$ suy ra $DJ: x = 2$

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow A(2;6)$$

$B \in \Delta: x + y + 7 = 0 \Rightarrow B(b; -b-7)$

Chứng minh được D là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔJBC (xem bài toán 3)

$\Rightarrow BD = DJ = 5 \Leftrightarrow BD^2 = 25$

$\Leftrightarrow (b-2)^2 + (-b-7+4)^2 = 25$

$\Leftrightarrow 2b^2 + 2b - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2\ (ktm) \text{ do } x_B < 0 \\ b = -3\ (tm) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow B(-3;-4)$

BC đi qua $B(-3;-4)$ và vuông góc với $d: 2x + y - 10 = 0$

$BC: -x + 2y + 5 = 0$

$C \in BC \Rightarrow C(2c+5; c)$

Có $DC = DJ = 5 \Leftrightarrow DC^2 = 25$

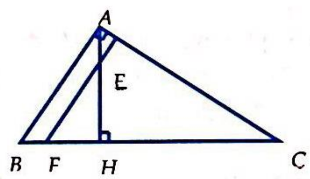
$\Leftrightarrow (2c+5-2)^2 + (c+4)^2 = 25$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = -4\ (L) \text{ do } C \equiv B \\ c = 0\ (tm) \end{array}\right. \Rightarrow C(5;0)$$

Khi đó đường thẳng AC có VTCP $\overrightarrow{AC} = (3;-6)$

Suy ra hệ số góc $k = -2$

Câu 4: Đáp án D



$EH = \dfrac{2}{3} AH \Rightarrow \overrightarrow{HE} = \dfrac{2}{3} \overrightarrow{HA}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4-(-2)=\dfrac{2}{3}(x_A+2) \\ 1-3=\dfrac{2}{3}(y_A-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A=-5 \\ y_A=0 \end{cases} \Rightarrow A(-5;0)$$

$$BF=\frac{1}{3}BH \Rightarrow \overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x_B=\dfrac{1}{3}(-2-x_B) \\ -3-y_B=\dfrac{1}{3}(3-y_B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B=\dfrac{5}{2} \\ y_B=-6 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{5}{2};-6\right)$$

Áp dụng tính chất 1 của bài toán 4 ta có $EF\perp AC$

Suy ra, đường thẳng AC đi qua $A(-5;0)$ và nhận $\overrightarrow{EF}=(5;-4)$ làm VTPT $\Rightarrow AC:5x-4y+25=0$

Khi đó $a=5,\ b=-4,\ c=25$

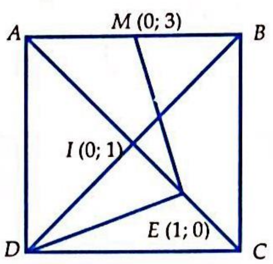
$\Rightarrow a+b+c=26$

Lưu ý: Chứng minh $EF\perp AC$

Ta có $\dfrac{EH}{AH}=\dfrac{FH}{BH}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow EF//AB$ (định lí Ta-let đảo) mà $AB\perp AC \Rightarrow EF\perp AC$

Câu 5: Đáp án A



Phương trình đường thẳng AC đi qua $I(0;1)$ và qua $E(1;0)$

$\Rightarrow AC: x+y-1=0$

Phương trình đường thẳng BD đi qua $I(0;1)$ và vuông góc với đường thẳng $AC: x+y-1=0$

$\Rightarrow BD: -x+y-1=0$

$D\in BD: -x+y-1=0 \Rightarrow D(d;d+1)$

Theo tính chất 2 bài toán 4 ta có $ME\perp ED \Rightarrow \overrightarrow{EM}.\overrightarrow{ED}=0$

$\Leftrightarrow (-1)(d-1)+3(d+1)=0$

$\Leftrightarrow d=-2 \Rightarrow D(-2;-1)$

I là trung điểm của BD $\Rightarrow B(2;3)$

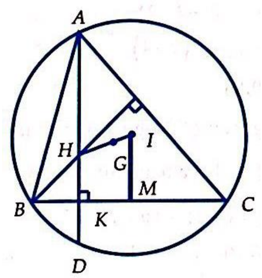
E là trung điểm của IC $\Rightarrow C(2;-1)$

I là trung điểm của AC $\Rightarrow A(-2;3)$

$AB=BC=CD=AD=4$

Vậy chu vi hình vuông ABCD là 16

Câu 6: Đáp án D



Ta có $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$ (xem bài toán 1)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H+2=2(-1+4) \\ y_H-3=2(-4+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H=4 \\ y_H=-3 \end{cases}$$

$\Rightarrow H(4;-3)$

Vậy A sai

Đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có tâm $I(-4;-1)$ và bán kính $R=IA=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow (C):(x+4)^2+(y+1)^2=20$

Gọi D là giao điểm thứ hai của AH với (C). Phương trình AH: $x+y-1=0$

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+4)^2+(y+1)^2=20 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow D(0;1)$ do $A(-2;3)$

Mà K là trung điểm của HD

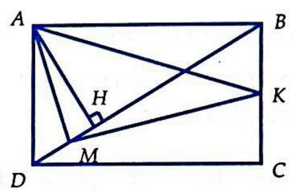
$\Rightarrow K(2;-1)$. Vậy B sai

G là trọng tâm ΔABC có:

$$\overrightarrow{HG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HI} \Rightarrow \begin{cases} x_G-4=\dfrac{2}{3}(-4-4) \\ y_G+3=\dfrac{2}{3}(-1+3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{-4}{3} \\ y_G=\dfrac{-5}{3} \end{cases}$$

Câu 7: Đáp án G



$AM\perp MK$ (xem tính chất 3 bài toán 4)

Đường thẳng AM có VTCP $\vec{u}=(9;-7)$

Đường thẳng MK đi qua $K(0;-2)$ và nhận $\vec{u}=(9;-7)$ làm VTPT

$\Rightarrow MK: 9x-7y-14=0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}9x-7y-14=0\\7x+9y-47=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\y=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$$

M là trung điểm DH $\Rightarrow D(4;5)$

Phương trình đường thẳng AH đi qua $H(3;0)$ và nhận $\overrightarrow{HD}=(1;5)$ làm VTPT $\Rightarrow AH: x+5y-3=0$

$A=AH\cap AM$. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+5y-3=0\\7x+9y-47=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\y=-1\end{cases}$$

$\Rightarrow A(8;-1)$

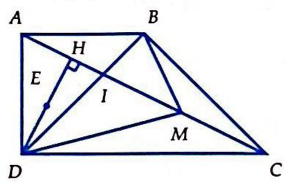
Có $AM=\dfrac{\sqrt{130}}{2}$; $MK=\dfrac{\sqrt{130}}{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta AMK}=\dfrac{1}{2}AM.MK$

(vì $AM\perp MK$)

$=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{130}}{2}.\dfrac{\sqrt{130}}{2}=\dfrac{65}{4}$

Câu 8: Đáp án D



Đường thẳng DM qua $D(2;2)$ và qua $M\left(\dfrac{22}{5};\dfrac{14}{5}\right)\Rightarrow DM: x-3y+4=0$

Theo tính chất 4 bài toán 4 ta chứng minh được $BM\perp DM$

$\Rightarrow$ BM qua $M\left(\dfrac{22}{5};\dfrac{14}{5}\right)$ và vuông góc với $DM: x-3y+4=0$

$\Rightarrow BM: 3x+y-16=0$

$B=BM\cap\Delta$. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}3x+y-16=0\\x-2y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=4\end{cases}\Rightarrow B(4;4)$$

Gọi I là giao điểm của AC và BD.

AB // CD theo định lí Ta let ta có:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{IB}{ID}=\frac{1}{2}\Rightarrow\overrightarrow{DI}=2\overrightarrow{IB}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1-2=2(4-x_1)\\y_1-2=2(4-y_1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{10}{3}\\y_1=\dfrac{10}{3}\end{cases}$$

$\Rightarrow I\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{10}{3}\right)$

Đường thẳng AC đi qua $I\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{10}{3}\right)$ và qua $M\left(\dfrac{22}{5};\dfrac{14}{5}\right)$

$\Rightarrow AC: x+2y-10=0$

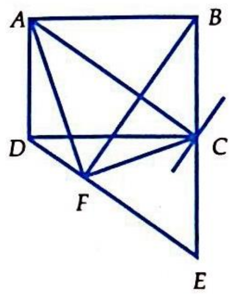
$\Rightarrow DH: 2x-y-2=0$

$H=DH\cap AC$. Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x-y-2=0\\x+2y-10=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{14}{5}\\y=\dfrac{18}{5}\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{14}{5};\frac{18}{5}\right)$$

Trung điểm E của HD là $E\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{14}{5}\right)$

Câu 9: Đáp án B



Có $C\in d: 3x+y-6=0$

$\Rightarrow C(t;-3t-6)$

5 điểm A, B, C, D, F cùng nằm trên đường tròn đường kính BD

Mà tứ giác ABCD là hình chữ nhật nên AC cũng là đường kính của đường tròn trên.

$\Rightarrow AFC=90^0\Leftrightarrow AC^2=AF^2+CF^2$

$\Leftrightarrow(t+3)^2+(-3t-6-9)^2$

$=81+144+(t-6)^2+(-3t-6+3)^2$

$\Leftrightarrow 90t=36\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow C\left(\dfrac{2}{5};-\dfrac{36}{5}\right)$

AD // CE và $AD=CE=BC$

$\Rightarrow$ tứ giác ADEC là hình bình hành

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}AC//EF\\BF\perp ED\end{matrix}\right\}\Rightarrow BF\perp AC$$

Mà C là trung điểm của BE nên BF cắt và vuông góc với AC tại trung điểm BF $\Rightarrow$ F đối xứng với B qua BC $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta AFC$

$AF = 15;\ CF = 7$

$\Rightarrow S_{\Delta AFC} = \dfrac{1}{2}AF.CF = \dfrac{105}{2}$

(vì $AF \perp CF$)

$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta AFC} = 105$

Lưu ý:

Chứng minh $\Delta ABC = \Delta AFC$

+ BF cắt và vuông góc với AC tại trung điểm BF $\Rightarrow \Delta BFC$ cân tại C

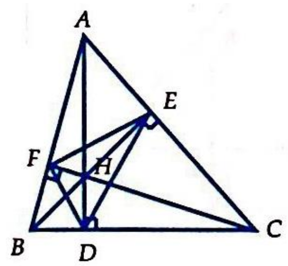
$\Rightarrow CF = BC$ và $ACF = ACB$

ΔAFC và ΔABC có:

$AFC = ABC = 90^0$; chung AC; $ACF = ACB$

$\Rightarrow \Delta AFC = \Delta ABC(ch - gn)$

Câu 10: Đáp án B



Phương trình đường thẳng ED qua $E(2;1)$ và qua $D(2;-2)$

$\Rightarrow ED: x - 2 = 0$

Phương trình đường thẳng FD qua $F(1;-2)$ và qua $D(2;-2)$

$\Rightarrow FD: y + 2 = 0$

Ta có AD là tia phân giác EDF (xem bài toán 2)

$\left.\begin{array}{l} ED: x - 2 = 0 \\ FD: y + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ đường phân giác tạo bởi ED và FD là

$|x - 2| = |y + 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y - 4 = 0\,(d_1) \\ x + y = 0\,(d_2) \end{array}\right.$

Xét vị trí tương đối của E và F với d_1. Ta có

$(2 - 1 - 4)(1 - (-2) - 4) = 3 > 0$

Suy ra E và F nằm cùng một phía so với $d_1 \Rightarrow d_2$ là đường phân giác AD.

Phương trình EF: $3x - y - 5 = 0$

BE là phân giác DEF

$\left.\begin{array}{l} ED: x - 2 = 0 \\ EF: 3x - y - 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ đường phân giác tạo bởi ED và EF là:

$|x - 2| = \dfrac{|3x - y - 5|}{\sqrt{10}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\sqrt{10} - 3)x + y - 2\sqrt{10} + 5 = 0\,(\Delta_1) \\ (\sqrt{10} + 3)x - y - 2\sqrt{10} - 5 = 0\,(\Delta_2) \end{array}\right.$

Vị trí tương đối của D và F so với Δ_1

$\left((\sqrt{10} - 3)2 - 2 - 2\sqrt{10} + 5\right) \times$

$\left((\sqrt{10} - 3)1 - 2 - 2\sqrt{10} + 5\right) > 0$

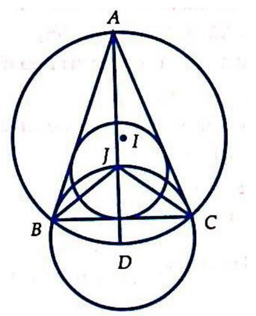
$\Rightarrow$ D và F nằm cùng phía so với Δ_1

Suy ra BE là đường Δ_2

Trực tâm H của ΔABC chính là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF

$\Rightarrow H = AD \cap BE \Rightarrow H\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}; -\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

Câu 11: Đáp án A



(C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I(2;1)$ và $R = 2$

$\Rightarrow (C): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$

Gọi D là giao điểm thứ hai của $d: x + 2y - 6 = 0$ với (C)

Tọa độ điểm A, D thỏa mãn hệ

$\begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 2y \\ [(6 - 2y) - 2]^2 + (y - 1)^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 2y \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{13}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{13}{5} \\ x = \dfrac{4}{5} \end{cases} \end{array}\right.$

$\Rightarrow D(4;1);\ A\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{13}{5}\right)$ vì $x_A < 1$

Theo bài toán 3: D là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔJBC có tâm $D(4;1)$ và bán kính $R = 3\sqrt{5}$

$\Rightarrow (C_1):(x-4)^2+(y-1)^2=45$

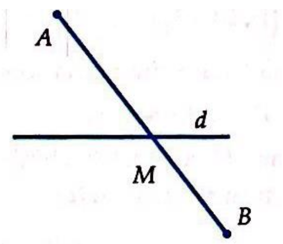
$(C)\cap(C_1)=\{B;C\}$

Xét hệ $\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=4 \quad (1)\\ (x-4)^2+(y-1)^2=45(2)\end{cases}$

Lấy $(1)-(2)\Rightarrow 4x+29=0$

$\Rightarrow BC:4x+29=0$

Câu 12: Đáp án C



Ta có:

$(1-2(-4)+4).(-2-2.7+4)$
$=-169<0$

$\Rightarrow$ A, B nằm khác phía so với d

$MA+MB\ge AB$ (không đổi)

$\Rightarrow (MA+MB)$ đạt giá trị nhỏ nhất là AB $\Leftrightarrow M=AB\cap d$

Phương trình đường thẳng AB đi qua $A(1;-4)$ và qua $B(-3;7)$

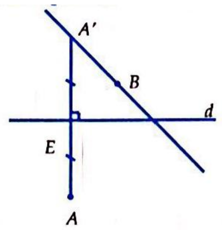
$\Rightarrow AB:11x+4y+5=0$

$M=AB\cap d$. Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2y+4=0\\ 11x+4y+5=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow M\left(-1;\frac{3}{2}\right)$

Khi đó $x_M+y_M=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

Câu 13: Đáp án D



Ta có:

$(2.1-3+7).(2.(-5)-(-1)+7)$
$=-12<0$

$\Rightarrow$ A, B nằm khác phía so với d

Đường thẳng đi qua $A(1;3)$ và vuông góc với $d:2x-y+7=0$ là $d':x+2y-7=0$

Khi đó $E=d\cap d'$

Tọa độ điểm E là nghiệm của hệ

$\begin{cases}2x-y+7=0\\ x+2y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{-7}{5}\\ y=\frac{21}{5}\end{cases}$

$\Rightarrow E\left(\frac{-7}{5};\frac{21}{5}\right)$

Gọi A' đối xứng với A qua d $\Rightarrow$ E là trung điểm của AA'

$\Rightarrow A'\left(\frac{-19}{5};\frac{27}{5}\right)$

Phương trình đường thẳng A'B:

$16x-3y+77=0$

$|MA-MB|=|MA'-MB|\le A'B$

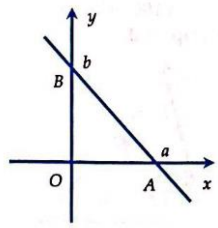
(không đổi) $\Rightarrow |MA-MB|_{max}=A'B$

$\Rightarrow M=A'B\cap d$. Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases}16x-3y+77=0\\ 2x-y+7=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-28}{5}\\ y=\frac{-21}{5}\end{cases}\Rightarrow M\left(-\frac{28}{5};-\frac{21}{5}\right)$

Khi đó bán kính $R=IM\sqrt{\frac{379}{5}}$

Câu 14: Đáp án B



Giả sử $A(a;0)$; $B(0;b)$

Điều kiện: $ab\ne 0$

$\Rightarrow AB:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

AB đi qua $M(5;-2)\Rightarrow \frac{5}{a}-\frac{2}{b}=1(1)$

Có $\frac{25}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}=\frac{25}{a^2}+\frac{4}{b^2}$

Từ

$(1)\Rightarrow 1^2=\left(\frac{5}{a}-\frac{2}{b}\right)^2=\left(1.\frac{5}{a}+(-1).\frac{2}{b}\right)^2$

$\le\left(1^2+(-1)^2\right)\left(\frac{25}{a^2}+\frac{4}{b^2}\right)$

$\Rightarrow \frac{25}{a^2}+\frac{4}{b^2}\ge\frac{1}{2}$

Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5}{a}-\frac{2}{b}=1\\ \frac{1}{\frac{5}{a}}=\frac{-1}{\frac{2}{b}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=10\\ b=-4\end{cases}$

Khi đó AB: $\frac{x}{10}-\frac{y}{4}=1$

$\Leftrightarrow 2x-5y-20=0$

Câu 15: Đáp án A

$M\in d: x+y-1=0 \Rightarrow M(m;1-m)$

MA^2-3MB^2

$=(1+m)^2+(1+m)^2-3\left[(1-m)^2+m^2\right]$

$=2m^2+4m+2-3(2m^2-2m+1)$

$=-4m^2+10m-1$

Xét $f(m)=-4m^2+10m-1$. Ta có:

m	$\frac{5}{4}$
$f(m)$	$\nearrow \; \frac{21}{4} \; \searrow$

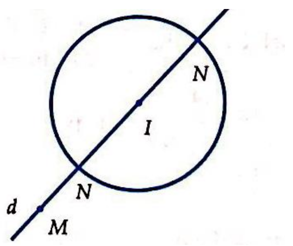
$\Rightarrow MA^2-3MB^2\le \frac{21}{4} \Rightarrow MA^2-3MB^2$

đạt giá trị lớn nhất là $\frac{21}{4}$

$\Leftrightarrow m=\frac{5}{4} \Rightarrow M\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{4}\right)$

Khi đó $\frac{a}{b}=-5$

Câu 16: Đáp án B



Đường tròn (C) có tâm $I(-2;3)$, bán kính $R=\sqrt{5}$

$IM=2\sqrt{5}>R \Rightarrow$ M nằm ngoài (C)

Đường thẳng d đi qua $M(-4;7)$ và $I(-2;3)$ có phương trình là d:

$\begin{cases} x=-2-t \\ y=3+2t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x=-2-t \\ y=3+2t \\ (x+2)^2+(y-3)^2=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2-t \\ y=3+2t \\ (-2-t+2)^2+(3+2t-3)^2=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2-t \\ y=3+2t \\ t^2+4t^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Rightarrow d\cap(C)$ tại 2 điểm $N_1(-1;1)$ và $N_2(-3;5)$

Có $MN_1=3\sqrt{5};\ MN_2=\sqrt{5}$

Do $MN_2\le MN\le MN_1$

$\Rightarrow$ MN đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow N\equiv N_2(-3;5) \Rightarrow N\in x+y-2=0$

Câu 17: Đáp án D

Giả sử $A(a;0);\ B(0;b)$

Vì d cắt các tia Ox, Oy $\Rightarrow a>0$

$\Rightarrow d: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Đường thẳng d đi qua $M(3;1)$

$\Rightarrow \frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1$

$3OA+4OB=3a+4b$

Ta có: $(3a+4b)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=\left[\left(\sqrt{3a}\right)^2+\left(2\sqrt{b}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2\right]$

$\ge (3+2)^2=25$

$\Rightarrow 3a+4b\ge 25$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1 \\ \frac{\sqrt{3a}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}}=\frac{2\sqrt{b}}{\frac{1}{\sqrt{b}}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=\frac{5}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow AB: \frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{5}{2}}=1 \Leftrightarrow x+2y-5=0$

Khi đó $b-c=7$

Chú ý: Bất đẳng thức Bunhiacopxki

$(ax+by)^2\le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Câu 18: Đáp án D

Giả sử $A(a;0);\ B(0;b)$, $(a>0;b>0)$

Phương trình đường thẳng AB:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$M\in AB \Rightarrow \frac{6}{a}+\frac{8}{b}=1$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$1=\frac{6}{a}+\frac{8}{b}\ge 2\sqrt{\frac{6.8}{ab}} \Rightarrow 1\ge \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{ab}}$

$\Rightarrow ab\ge 192$

Dấu đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{a}+\frac{8}{b}=1 \\ \frac{6}{a}=\frac{8}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=16 \end{cases}$

$\Rightarrow AB: \frac{x}{12}+\frac{y}{16}=1$

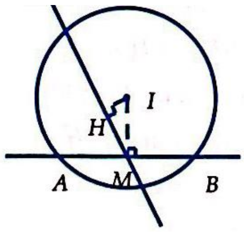
$\Leftrightarrow 4x+3y-48=0$

Suy ra hệ số góc của d là $k=-\frac{4}{3}$

Chú ý: Bất đẳng thức Cô si: a, b là 2 số thực dương ta có: $a+b\ge 2\sqrt{ab}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

Câu 19: Đáp án A



Giả sử AB là dây cung có điểm M là trung điểm.

Khi đó $d_{(I;MN)}=IA\ge IH$

I là tâm của (C) và H là trung điểm của 1 dây cung tùy ý đi qua M

$\Rightarrow$ AB là dây cung có độ dài nhỏ nhất $\Rightarrow$ d đi qua $M(-1;4)$ và vuông góc IM, suy ra $\overrightarrow{IM}=(-4;1)$

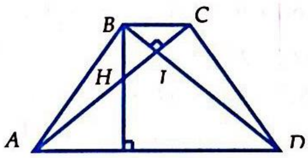
$\Rightarrow d: -4x-y=0 \Leftrightarrow 4x+y=0$

(C) có tâm $I(3;5)$ và bán kính $R=6$, $IM=\sqrt{17}<R \Rightarrow$ M nằm trong (C)

$\Rightarrow d: 4x+y=0$ thỏa mãn cắt (C) theo 1 dây cung

$\Rightarrow$ VTPT của d là $\vec{n}=(4;1)$

Câu 20: Đáp án C



Vì $AC\perp BD$ nên đường thẳng AC nhận VTCP của BD làm VTPT

$\overrightarrow{u_{BD}}=(2;-1)$

Khi đó AC qua $H(-3;2)$ và nhận $\vec{n}=(2;-1)$ làm VTPT

$\Rightarrow AC: 2x-y+8=0$

Gọi $I=AC\cap BD$

Khi đó tọa độ điểm I là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x+2y-6=0 \\ 2x-y+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow I(-2;4)$

Do ABCD là hình thang cân nên $IB=IC$

$\Rightarrow \Delta IBC$ vuông tại I $\Rightarrow BCI=45^0$

$\Rightarrow \Delta BCH$ cân tại B

$\Rightarrow$ I là trung điểm của BC

$\Rightarrow C(-1;6)$

Vì AD // BC nên theo Ta let ta có:

$\frac{ID}{IB}=\frac{AD}{BC}=3$

$\Rightarrow ID=3IB=3IH=3\sqrt{5}$

Gọi $D(6-2t;t)\in BD$

Khi đó $ID=3\sqrt{5}\Leftrightarrow ID^2=45$

$\Leftrightarrow (6-2t+2)^2+(t-4)^2=45$

$\Leftrightarrow t^2-8t+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=7 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D(4;1) \\ D(-8;7) \end{array}\right.$

TH1: CD qua $C(-1;6)$ và $D(4;1)$

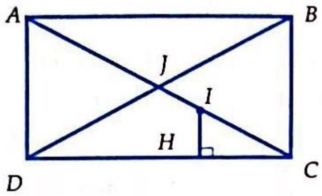
$\Rightarrow CD: -x-y+5=0 \Rightarrow x+y-5=0$

$\Rightarrow c=-5$

TH2: CD qua $C(-1;6)$ và qua $D(-8;7)$

$\Rightarrow CD: x+7y-41=0$

Câu 21: Đáp án B



Gọi H là hình chiếu của I lên DC

$\Rightarrow IH=d_{(I;CD)}=\frac{|-2.3+3.4-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

IH // AD (cùng vuông góc CD)

Theo ta let ta có: $\frac{HC}{HI}=\frac{CD}{DA}=2$

$\Rightarrow HC=2HI$

$\Rightarrow IC^2=HC^2+HI^2=5HI^2=5$

$C\in CD: 3x+4y-1=0 \Rightarrow C\left(t;\frac{1-3t}{4}\right)$

Có $IC^2=5$

$\Rightarrow (t+2)^2+\left(\frac{1-3t}{4}-3\right)^2=5$

$\Leftrightarrow 25t^2+130t+105=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1(tm) \\ t=-\frac{21}{5}(L) \text{ do } x_C\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\Rightarrow C(-1;1)\Rightarrow x_C=-1$

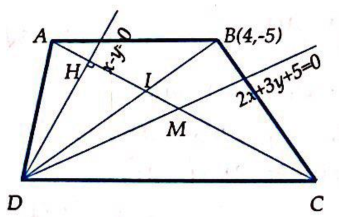
Nhận xét: Khi cho một điểm cố định và một đường thẳng ta sử dụng khoảng cách từ điểm đến đường thẳng để có thêm dữ kiện bài toán.

Câu 22: Đáp án B

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+3y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D(-1;-1)$$



Gọi $AC \cap BD = I$

Khi đó CD // BA nên theo Ta let ta có: $\dfrac{DI}{IB} = \dfrac{CD}{AB} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{IB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I + 1 = 2(4 - x_I) \\ y_I + 1 = 2(5 - y_I) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{7}{3} \\ y_I = 3 \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{7}{3};3\right)$$

Phương trình đường thẳng AC qua $I\left(\dfrac{7}{3};3\right)$ và vuông góc với DH:

$$x-y=0 \Rightarrow AC: x+y-\frac{16}{3}=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+3y-16=0$$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 3x+3y-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8}{3} \\ y=\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x+3y+5=0 \\ 3x+3y-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=21 \\ y=-\dfrac{47}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(21;\frac{-47}{3}\right)$$

M là trung điểm HC

$$\Rightarrow C\left(\frac{118}{3};-34\right)$$

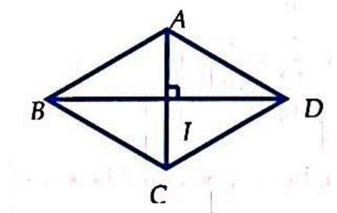
Có CD // AB và $CD = 2AB$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-121}{3} = 2(x_A - 4) \\ 33 = 2(y_A - 5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{-97}{6} \\ y_A = \dfrac{43}{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{97}{6};\frac{43}{2}\right)$$

Khi đó $a+b=\dfrac{16}{3}$

Câu 23: Đáp án D



$B(0;-3) \notin d: 3x+y-7=0$

$\Rightarrow AC: 3x+y-7=0$

BD qua $B(0;-3)$ và vuông góc với d $\Rightarrow BD: x-3y-9=0$

$I = AC \cap BD \Rightarrow I(3;-2)$

$I(3;-2)$ là trung điểm BD

$\Rightarrow D(6;-1) \Rightarrow BD = 2\sqrt{10}$

$A \in d: y=-3x+7$

$\Rightarrow$ gọi $A(a;-3a+7)$

Có $BD = 2\sqrt{10}$

$$AI = d_{(A;DB)} = \frac{|a-3(7-3a)-9|}{\sqrt{1^2+3^2}}$$

Mà $S_{ABCD} = 20 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AC.BD = 20$

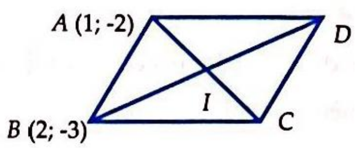
$\Leftrightarrow AI.BD = 20$

$$\Leftrightarrow \frac{|a-3(7-3a)-9|}{\sqrt{10}}.2\sqrt{10} = 20$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=4 \end{array}\right.$$

Với $a=2 \Rightarrow A(2;1) \Rightarrow b=1$

Câu 24: Đáp án B



Ta có $S_{ABCD} = 6 \Rightarrow S_{ABC} = 3$

$$\Rightarrow S_{IAB} = \frac{3}{2} (I = AC \cap BD)$$

$$I \in Ox \Rightarrow I(x_I;0) \Rightarrow d_{(I;AB)} = \frac{|x_I+1|}{\sqrt{2}}$$

Vì $AB: x+y+1=0$

$$S_{\Delta IAB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.d_{(I;AB)} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2}.\frac{|x_I+1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |x_I+1| = 3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_I = 2 \\ x_I = -4 (L) \end{array}\right. \Rightarrow I(2;0)$$

I là trung điểm của BD

$\Rightarrow D=(2;3)\Rightarrow a+b=5$

Câu 25: Đáp án A

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$

Gọi $A(a;0);\ B(0;b)$

với $a>0,b>0$

$\Rightarrow AB:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\Leftrightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$

AB tiếp xúc với (C) $\Rightarrow d_{(O;AB)}=R$

$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}\ (*)$

$\Rightarrow 2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\le\frac{a^2b^2}{2ab}=\frac{1}{2}ab=S_{\Delta OAB}$

$\Rightarrow S_{OAB}$ nhỏ nhất khi $a=b$

$\begin{cases}a=b\\ \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=2\end{cases}\Rightarrow a=b=2$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$

$\Leftrightarrow x+y-2=0\Rightarrow a+b=2$

BÀI KIỂM TRA CHỦ ĐỀ X

Câu 1: Đáp án B

Vecto chỉ phương:

$\overrightarrow{AB}=(10-4;4-5)=\overrightarrow{AB}=(6;-1)$

Câu 2: Đáp án C

Δ có dạng: $3x+7y+c=0$

Δ đi qua $A(0;3)$

$\Rightarrow 0+7.3+c\Rightarrow c=-21$

$\Rightarrow\Delta:3x+7y-21=0$

Câu 3: Đáp án C

$x_I=\frac{7+8}{2}=\frac{15}{2};\ y_I=\frac{5+9}{2}=7$

$\Rightarrow I\left(\frac{15}{2};7\right)$

Câu 4: Đáp án A

Câu 5: Đáp án C

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3x+2y=8\\5x+6y=9\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{15}{4}\\ y=-\frac{13}{8}\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{15}{4};-\frac{13}{8}\right)$

Câu 6: Đáp án A

d và d' có điểm chung; d và d' cùng phương $\Rightarrow\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}=\frac{m}{m^2}\Rightarrow m=2$

Câu 7: Đáp án A

$A=\Delta_3\cap\Delta_2\Rightarrow A(-2;6)$

Mặt khác $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ đồng quy

$\Rightarrow A\in\Delta_1\Rightarrow 3.(-2)+4.6+m=0$

$\Rightarrow m=-18$

Câu 8: Đáp án D

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$ và bán kính

$IA=\sqrt{(4-2)^2+(6+3)^2}=\sqrt{85}$

$\Rightarrow(C):(x-2)^2+(y+3)^2=85$

Câu 9: Đáp án B

Phương trình đường tròn có dạng:

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

Giải hệ phương trình 3 ẩn:

$\begin{cases}7^2+1^2-14a-2b+c=0\\0+0+0+0+c=0\\1^2+7^2=2a-14b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=4\\c=0\end{cases}$

$R=\sqrt{3^2+4^2-0}=5$

Vậy phương trình đường tròn

$(x-3)^2+(y-4)^2=25$

Câu 10: Đáp án C

Phương trình đường thẳng đi qua $M(0;1)$ có hệ số góc $k=3$

$\Rightarrow y-1=3(x-0)\Rightarrow y=3x+1$

Câu 11: Đáp án A

$d'\perp d:3x+4y-3=0$

$\Rightarrow d':4x-3y+c=0$

$d_{(M;d')}=5\Rightarrow\frac{|4.2-3.3+c|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c=26\\c=-24\end{array}\right.\Rightarrow d':\left[\begin{array}{l}4x-y-24=0\\4x-3y+26=0\end{array}\right.$

Câu 12: Đáp án D

$x_C=3x_G-x_A-x_B=2.3-2-3=1$

$y_C=3y_G-y_A-y_B=1.3-3-4=-4$

Câu 13: Đáp án B

$a=6;b=2$

$\Rightarrow c^2=6^2-2^2=32\Rightarrow c=4\sqrt{2}$

$\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Vậy tâm sai bằng $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Câu 14: Đáp án C

C đối xứng với A qua B

$\Rightarrow$ B là trung điểm của AC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = 2.3-2=4 \\ y_C = 2.8-4=12 \end{cases} \Rightarrow C(4;12)$$

Câu 15: Đáp án C

$$(C):\begin{cases} R=5 \\ I(3;4) \end{cases}$$

$$d(I;d)=\frac{|4.3-4.3+8|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{8}{5}<R$$

$\Rightarrow d$ cắt (C) với 2 giao điểm

Câu 16: Đáp án C

$2a=8 \Rightarrow a=4$

$2b=6 \Rightarrow b=3$

$$\Rightarrow (E):\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

$\Rightarrow 9x^2+16y^2=144$

Câu 17: Đáp án D

Đường cao đi qua $A(2;3)$ và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{BC}=(3;6)$

$\Rightarrow d:3(x-2)+6(y-3)=0$

$\Rightarrow 3x+6y-24=0$

Câu 18: Đáp án A

Gọi vecto pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b)$

$\Rightarrow d:a(x-4)+b(y+1)=0$

$\Rightarrow ax+by-4a+b=0$

Mặt khác:

$$d_{(G;d)}=\frac{|3a-b-4a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

$\Rightarrow |a|=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow a^2+b^2 \Rightarrow b=0$

Chọn $a=1 \Rightarrow x-4=0$

Câu 19: Đáp án A

$B\in d:B(x_B;1+2x_B)$

$C\in d':C(x_C;8-x_C)$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{3+x_B+x_C}{3}=2 \\ \dfrac{1+2x_B+8-x_C-3}{3}=3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B=2 \Rightarrow B(2;5) \\ x_C=1 \Rightarrow C(1;7) \end{cases}$$

Câu 20: Đáp án C

Đường thẳng $d':4x+3y+m=0$

Đường tròn (C) có bán kính $R=5$ và tâm $I(-2;4)$

$$d_{(I;d')}=\frac{|4.(-2)+3.4+m|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

$$=\sqrt{R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=11 \Rightarrow 4x+3y+11=0 \\ m=-19 \Rightarrow 4x+3y-19=0 \end{array}\right.$$

Câu 21: Đáp án A

$M\in\Delta:M(1-2t;t)$

$MA^2=(1+2t)^2+(t-3)^2$

$MB^2=(2t+4)^2+(t-6)^2$

$\Rightarrow 3MA^2+MB^2=20t^2-2t+82$

$=f(t)$

Ta có BBT:

t	$-\infty$		$\frac{1}{20}$		$+\infty$
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra $3MA^2+MB^2$ đạt GTNN khi

$$t=\frac{1}{20}\Rightarrow M\left(\frac{9}{10};\frac{1}{20}\right)$$

Câu 22: Đáp án B

$I\in Ox \Rightarrow I(a;0)$

(C) tiếp xúc 2 đường thẳng d_1,d_2

$$\begin{cases} d_{(I;d_1)}=d_{(I;d_2)} \\ d_{(I;d_1)}=R \end{cases} \Rightarrow \frac{|3.a+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|8.a-5|}{\sqrt{8^2+6^2}}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{7}{2}\Rightarrow I\left(\frac{7}{2};0\right) \\ a=\frac{3}{14}\Rightarrow I\left(\frac{3}{14};0\right) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow (C):\left[\begin{array}{l} \left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{23}{10}\right)^2 \\ \left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\left(\frac{23}{70}\right)^2 \end{array}\right.$$

Câu 23: Đáp án D

$I(t;8-3t)$

(C) tiếp xúc Ox $\Rightarrow d_{(I;Ox)}=4$

$$\Rightarrow |8-3t|=4\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{4}{3}\Rightarrow I\left(\frac{4}{3};4\right) \\ t=4\Rightarrow I(4;-4) \end{array}\right.$$

Vậy $(C_1):\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+(y-4)^2=16$;

$(C_2):(x-4)^2+(y+4)^2=16$

Câu 24: Đáp án B

$A(a;0)$ và $B(0;b)$ là giao điểm của Ox; Oy $\Rightarrow d:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Giả thiết: $\begin{cases} \frac{0}{a}+\frac{5}{b}=1 \\ |a.b|=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5 \\ |a.b|=10 \end{cases}$

- Khi $a.b=10 \Rightarrow a=2$

$$\Rightarrow d:\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$$

- Khi $a.b=-10 \Rightarrow a=-2$

$\Rightarrow d: \frac{x}{-2}+\frac{y}{5}=1$

Câu 25: Đáp án D

Phương trình đường thẳng có dạng:

$a(x-3)+b(y-6)=0$

$\Leftrightarrow ax+by-(3a+6b)=0$

$\cos 45^0=\frac{|2a+3b|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 5a^2-24ab-5b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5b \\ a=\left(-\frac{1}{5}\right)b \end{array}\right.$

- Với $a=5b$

Chọn $a=5,\ b=1$

$\Rightarrow \Delta: 5x+y-21=0$

- Với $a=\left(-\frac{1}{5}\right)b$

Chọn $a=1, b=-5$

$\Rightarrow \Delta: x-5y+27=0$

Câu 26: Đáp án C

Ta thấy $(2.3+5+3)(2.0+6+3)>0$

$\Rightarrow$ A; B nằm cùng phía với d

Gọi A' đối xứng với A qua d

$\Rightarrow A'\left(-\frac{41}{5};-\frac{3}{5}\right)$

$\Rightarrow A'B\begin{cases} \text{vtcp}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{41}{5};\frac{33}{5}\right) \\ \text{qua } B(0;6) \\ \text{vtpt}\,\vec{n}=\left(-\frac{33}{5};\frac{41}{5}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow A'B: -\frac{33}{5}(x-0)+\frac{41}{5}(y-6)=0$

$\Leftrightarrow 33x-41y+246=0$

Lại có

$MA+MB=MA'+MB\geq A'B$

Suy ra $MA+MB$ đạt GTNN là A'B

M, A', B thẳng hàng

$\Rightarrow M=A'B\cap d$

$M\left(-\frac{369}{115};\frac{393}{115}\right)$

Câu 27: Đáp án C

$B=BG\cap BC \Rightarrow B(5;-3)$

$C\in BC \Rightarrow C(-4-3y;y)$

ΔABC cân tại A $\Rightarrow BG=CG$

$\Rightarrow \left(5-\frac{5}{3}\right)^2+\left(-3-\frac{1}{3}\right)^2$

$=\left(-4-3y-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3 \Rightarrow C(5;-3)(L) \\ y=\frac{-1}{3} \Rightarrow C\left(-3;\frac{-1}{3}\right) \end{array}\right.$

Câu 28: Đáp án B

Phương trình có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

d qua $M(2;3) \Rightarrow \frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$

d chắn 2 trục tọa độ đoạn có độ dài bằng nhau $\Rightarrow |a|=|b| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right.$

TH1: $a=b \Rightarrow \frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1 \Rightarrow a=5$

$\Rightarrow \frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$

TH2: $a=-b \Rightarrow \frac{2}{a}-\frac{3}{a}=1$

$a=-b \Rightarrow \frac{2}{a}-\frac{3}{a}=1$

$\Rightarrow a=-1 \Rightarrow -x+y=1$

Câu 29: Đáp án D

$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{4} \Rightarrow c=\frac{\sqrt{5}}{3}a$

và $2(2a+2b)=40$

$\Leftrightarrow a+b=10 \Leftrightarrow a=10-b$

$a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow a^2=(10-a)^2+\left(\frac{\sqrt{5}a}{3}\right)^2$

$a=6 \Rightarrow b=4 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

Câu 30: Đáp án D

Cạnh của hình vuông ngoại tiếp (C) có độ dài bằng đường kính của (C)

Suy ra: Đường thẳng cần tìm d cắt tại 2 điểm sao cho khoảng cách bằng BK. Như vậy ta có: d đi qua $A(4;9)$ và tâm của (C) là $I(6;-2)$

Vậy

$d: \frac{x-4}{6-4}=\frac{y-9}{-2-9} \Leftrightarrow 11x+2y-6=0$

Câu 31: Đáp án A

Tâm $I(6;-2)$, $R=5$

Suy ra hình vuông nội tiếp (C) có đường chéo là 10.

Cạnh hình vuông nội tiếp (C) là $5\sqrt{2}$

Đường thẳng cần tìm cắt (C) tại 2 điểm M, N sao cho $MN = 5\sqrt{2}$

Gọi H là trung điểm MN suy ra:

$$IH = \sqrt{IM^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Giả sử d đi qua $A(9;2)$ có vtcp là $\vec{u} = (a;b) \neq 0$ có dạng:

$a(x-9) + b(y-2) = 0$

$$d_{(I;d)} = IH \Leftrightarrow \frac{|a(6-9) + b(-2-2)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow |-3a-4b| = \frac{5\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 + 24ab + 16b^2 = \frac{25}{2}(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 7a^2 - 48ab - 7b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 7b \\ a = -\frac{1}{7}b \end{array}\right.$$

- Với $a = 7b$. Chọn $b = 1 \Rightarrow a = 7$

$\Rightarrow 7(x-9) + (y-2) = 0$

$\Rightarrow 7x + y - 65 = 0$

Câu 32: Đáp án A

Giả sử $A(x_0;y_0);\ B(x_0;-y_0)$

Vì $A, B \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{64} + y_0^2 = 1$

$\Leftrightarrow y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{64}$

ΔABC đều

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow (x_0-8)^2 + y_0^2 = 4y_0^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 8 \Rightarrow |y| = 0\ (L) \\ x_0 = \frac{488}{67} \Rightarrow |y| = \frac{16\sqrt{3}}{67} \end{array}\right.$$

Câu 33: Đáp án A

$A(x_A;y_A);\ B(x_B;y_B);\ C(x_C;y_C)$

BC qua $M(3;3)$ và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{GM} = (1;1)$

$\Rightarrow (x-3) + (y-3) = 0$

$\Leftrightarrow x + y - 6 = 0$

$\Rightarrow B(x_B;6-x_B);\ C(x_C;6-x_C)$

Ta có: $\frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2$

$\Rightarrow x_A + x_B + x_C = 6$

$\frac{y_A + 6 - x_B + 6 - x_C}{3} = 2$

$\Rightarrow y_A + 12 - (x_B + x_C) = 6$

Lại có: $\frac{x_B + x_C}{2} = 3 \Rightarrow x_B + x_C = 6$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0;0)$$

ΔABC vuông cân $\Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B^2 + (6-x_B)^2 = x_C^2 + (6-x_C)^2 \\ x_B.x_C + (6-x_B).(6-x_C) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_B = 0 \\ x_C = 6 \end{cases} \Rightarrow B(0;6),\ C(6;0) \\ \begin{cases} x_B = 6 \\ x_C = 0 \end{cases} \Rightarrow B(6;0),\ C(0;6) \end{array}\right.$$

Câu 34: Đáp án B

$A(x_A;y_A),\ B(x_B;y_B),\ C(x_C;y_C)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ \frac{x_A + x_C}{2} = 4 \\ \frac{x_B + x_C}{2} = 6 \end{cases}$$

$$\text{và } \begin{cases} \frac{y_A + y_B}{2} = 3 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = 1 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = 0;\ y_A = 2 \\ x_B = 4;\ y_B = 4 \Rightarrow A(0;2) \\ x_C = 8;\ y_C = 0 \end{cases}$$

Câu 35: Đáp án A

Gọi vecto pháp tuyến của d là $\vec{n} = (a;b) \neq 0$

$$\cos 60^0 = \frac{|\vec{n}.\vec{v}|}{|\vec{n}|.|\vec{v}|} = \frac{|3a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 2(3a-4b) = 5\sqrt{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow 36a^2 - 48ab + 64b^2 = 25a^2 + 25b^2$

$\Leftrightarrow 11a^2 - 48ab + 39b^2 = 0$

TH1: $b = 0 \Rightarrow a = 0\ (L)$

TH2: $b \neq 0$

$$\Rightarrow 11\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 48\frac{a}{b} + 39 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{24+7\sqrt{3}}{11} \\ \frac{a}{b} = \frac{24-7\sqrt{3}}{11} \end{array}\right.$$

- Với $\frac{a}{b} = \frac{24+7\sqrt{3}}{11}$

Chọn $b = 11 \Rightarrow a = 24 + 7\sqrt{3}$

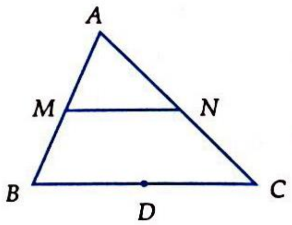
$\Rightarrow \left(24+7\sqrt{3}\right)(x-2) + 11(y-3) = 0$

- Với $\frac{a}{b} = \frac{24-7\sqrt{3}}{11}$

Chọn $b = 11 \Rightarrow a = 24 - 7\sqrt{3}$

$\Rightarrow \left(24-7\sqrt{3}\right)(x-2) + 11(y-3) = 0$

Câu 36: Đáp án D



$A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$

Ta có MN là đường trung bình $\Delta ABC \Rightarrow MN // BC$

$$BC\begin{cases} \text{qua } D(3;12) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MN} = (6;-6) \Rightarrow \text{vtpt } \vec{n}(1;1) \end{cases}$$

$\Rightarrow x - 3 + y - 12 = 0 \Rightarrow x + y - 15 = 0$

$$AD\begin{cases} \text{qua } D(3;12) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{MN} = (6;-6) \end{cases}$$

$\Rightarrow x - 3 - (y-12) = 0 \Rightarrow x - y + 9 = 0$

$\Rightarrow A(x_A;y_A+9)$, $B(x_B;15-x_B)$

$C(x_C;15-x_C)$

M trung điểm AB

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A+x_B}{2} = 2 \\ \dfrac{x_A+9+15-x_B}{2} = 0 \end{cases}$$

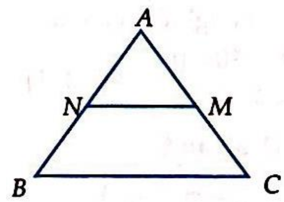
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -10 \Rightarrow A(-10;-1) \\ x_B = 14 \Rightarrow B(14;1) \end{cases}$$

Ntrung điểm AC

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A+x_C}{2} = 8 \\ \dfrac{x_A+9+15-x_C}{2} = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -10 \\ x_C = 26 \Rightarrow C(26;-11) \end{cases}$$

Câu 37: Đáp án B



Gọi N là trung điểm của AB

$\Rightarrow N \in d: x - y - 3 = 0 \Rightarrow N(a;a-3)$

$B \in 3x - y + 1 = 0 \Rightarrow B(b;3b+1)$

- N là trung điểm của AB

$\Rightarrow A(2a-b;2a-3b-7)$

- $M(3;4)$ là trung điểm của AC

$\Rightarrow C(6-2a+b;15-2a+3b)$

- $C \in d: x - y - 3 = 0$

$\Rightarrow 6 - 2a + b - (15 - 2a + 3b) - 3 = 0$

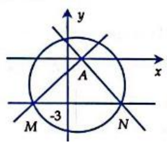
$\Leftrightarrow -12 - 2b = 0 \Leftrightarrow b = -6$

$\Rightarrow B(-6;-17)$

Vậy đáp án cần tìm là

$-6 + (-17) = -23$

Câu 38: Đáp án C



Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, $R = \sqrt{10}$

Có $IM = IN$

và $AM = AN \Rightarrow AI \perp MN$

$\Rightarrow \Delta$ có dạng: $y = m$

Hoành độ M , N là nghiệm của phương trình:

$x^2 - 2x + m^2 + 4m - 5 = 0$ (1)

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2

$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 6 < 0 (*)$

$\Rightarrow M(x_1;m);\ N(x_2;m)$

$AM \perp AN \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0$

$\Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1) + m^2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1x_2 - (x_1+x_2) + m^2 + 1 = 0$

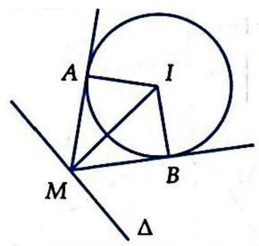
Vi-ét đối với (1)

$\Rightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0$

$\Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -3$ thỏa mãn (*)

$\Rightarrow y = 1$ hoặc $y = -3$

Câu 39: Đáp án D



Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $IA = \sqrt{5}$

Tứ giác AIBM có $MAI = MBI = 90^0$

và $MA = MB$

$\Rightarrow S_{MAIB} = IA.MA$

$\Rightarrow MA = 2\sqrt{5}$

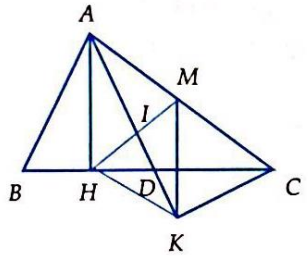
$\Rightarrow IM=\sqrt{IA^2+MA^2}=5$

$M\in\Delta$, có tọa độ $M(t;-t-2)$

$IM=5\Leftrightarrow(t-2)^2+(t+3)^2=25$

$\Leftrightarrow t^2+t-6=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\Rightarrow M(2;-4)\\ t=-3\Rightarrow M(-3;1)\end{array}\right.$

Câu 40: Đáp án B



Gọi M là trung điểm AC. Ta có $MH=MK=\frac{AC}{2}$ nên M thuộc đường trung trực HK.

+ Đường trung trực của đoạn HK có pt: $7x-4y-10=0$

+ Tọa độ M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x-y+10=0\\ 7x-4y-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{50}{3}\\ y=\frac{80}{3}\end{cases}$$

$\Rightarrow M\left(\frac{50}{3};\frac{80}{3}\right)$

Ta có: $HKA=HCA=HAB=HAD$ nên ΔAHK cân tại H $\Rightarrow AH=KH$

$\Rightarrow$ A đối xứng với K qua HM: $x-y+10=0$

+ Có AK $\begin{cases}\text{qua } K(9;-3)\\ \overrightarrow{HM}=\left(\frac{65}{3};\frac{65}{3}\right)\end{cases}$

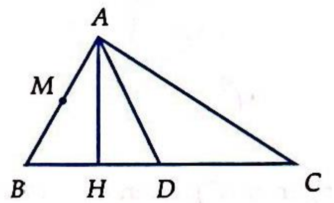
$\Rightarrow AK: x+y-6=0$

+ Gọi $I=AK\perp MH\Rightarrow$ Tọa độ I là:

$\begin{cases}x-y+10=0\\ x+y-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=8\end{cases}\Rightarrow I(-2;8)$

I là trung điểm của AK suy ra $A(-13;19)$

Câu 41: Đáp án D



BC qua $D(5;3)$ và có vecto pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1)$

$\Rightarrow BC: 2x-y-7=0$

AH qua $H\left(\frac{17}{5};-\frac{1}{5}\right)$ và $AH\perp BC$

$\Rightarrow AH: x+2y-3=0$

Ta có: $\begin{cases}A\in AH\\ B\in BC\end{cases}$, M là trung điểm AB $\Rightarrow\begin{cases}A(-3;3)\\ B(3;-1)\end{cases}\Rightarrow AD: y-3=0$

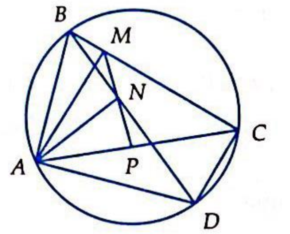
Gọi N là điểm đối xứng với M qua AD $\Rightarrow N(0;5)$

Ta có: AC qua $N(0;5)$ và vecto pháp tuyến $\vec{n}=(2;-3)$

$AC: 2x-3y+15=0$

$C=AC\cap BC\Rightarrow C(9;11)$

Câu 42: Đáp án A



Phương trình MN: $x+y-4=0$

Tọa độ của P là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}x+y-4=0\\ x-y-1=0\end{cases}\Rightarrow P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

Vì AM // DC; A, B, M, N thuộc đường tròn.

$PAM=PCD=ABD=AMP$

$\Rightarrow PA=PM$

Vì $A\in AC: x-y-1=0$

nên $A(a;a-1), a<2$

Ta có:

$$\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\left(a-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=5\end{array}\right.\Rightarrow A(0;-1)$

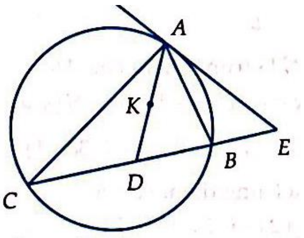
Đường thẳng BD đi qua N và vuông góc với AN nên ta có phương trình: $2x+3y-10=0$

Đường thẳng BC đi qua M và vuông góc với AM nên ta có phương trình: $y-4=0$

Tọa độ B là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}2x+3y-10=0\\ y-4=0\end{cases}\Rightarrow B(-1;4)$

Câu 43: Đáp án C



Gọi tiếp tuyến là At: $x+2y-7=0$

$A = At \cap AB \Rightarrow A(1;3)$

Gọi $E = At \cap BC \Rightarrow EAB = ACB$

AD là phân giác trong

$\Rightarrow BAD = DAC$

$EAB + BAD = ACB + DAC = ADE$

$\Rightarrow EAD = ADE \Rightarrow \Delta AED$ cân tại E

Gọi K là trung điểm AD $\Rightarrow K(1;1)$

Ta có: $EK \begin{cases} \text{qua } K \\ \perp AD \end{cases} \Rightarrow y-1=0$

Suy ra tọa độ E là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y-1=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow E(5;1)$$

BC qua E, D suy ra:

$$BC: \frac{x-1}{5-1} = \frac{y+1}{1+1} \Leftrightarrow x-2y-3=0$$

Câu 44: Đáp án B

AB qua M và vuông góc IM

$\Rightarrow AB: 7x-y+33=0$

$A \in AB \Rightarrow A(m;7m+33)$

M là trung điểm AB

$\Rightarrow B(-m-9;-7m-30)$

$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = 0 \Leftrightarrow m=-4$ hoặc $m=-5$

AC qua A và H, AC:

$$\begin{cases} A \in AC \\ IC = IA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(4;1) \\ C(-1;6) \end{cases}$$

Câu 45: Đáp án A

Giả sử $M(x;y)$ là điểm mà đường thẳng d không đi qua

Khi đó phương trình

$d: x\cos\alpha + y\sin\alpha + 2\cos\alpha + 1 = 0$

vô nghiệm $\forall\alpha$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 (-1)^2$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 < 1$

Từ đó suy ra đường thẳng d luôn tiếp xúc với đường tròn

$(C): (x+2)^2 + y^2 = 1$

Vậy: tâm $I(-2;0)$, $R=1$

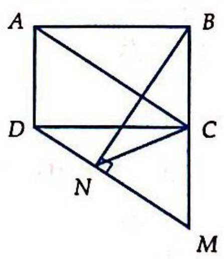
Lưu ý: Ta có thể chứng minh d luôn tiếp xúc với (C) như sau:

$(C): (x+2)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow I(-2;0)$

$$d_{(I;d)} = \frac{|-2\cos\alpha + 0\sin\alpha + 2\cos\alpha + 1|}{\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}} =$$

$\Rightarrow$ đpcm

Câu 46: Đáp án C



AD // CM, AD = CM

$\Rightarrow$ ACMD là hình bình hành

$\Rightarrow AC//MD$

$BN \perp MD \Rightarrow AC \perp BN$

ΔBMN vuông tại N và C là trung điểm BM $\Rightarrow BC = CN$

$AC//DN, AD = CN(=BC)$ và AD không song song CN.

$\Rightarrow$ ACND là hình thang cân

$\Rightarrow ADC = ANC = 90^0$

CN qua $N(5;-4)$ và vecto pháp tuyến $\overrightarrow{AN} = (9;-12)$

$\Rightarrow CN: 3x-4y-31=0$

$C(x;y)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} 2x+y+5=0 \\ 2x-4y-31=0 \end{cases} \Rightarrow C(1;-7)$$

BN qua $N(5;-4)$ và vecto pháp tuyến $\overrightarrow{AC} = (5;-15)$

$\Rightarrow BN: x-3y-17=0$

$BC = CN = 5$ và B không trùng N

$\Rightarrow$ Tọa độ $B(x;y)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x-3y-17=0 \\ (x-1)^2 + (y+7)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow B(-4;-7)$$

Câu 47: Đáp án C

$$(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2\sqrt{2}} = \sin\alpha \\ \dfrac{y}{\sqrt{2}} = \cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\sin\alpha \\ y = \sqrt{2}\cos\alpha \end{cases} (1)$$

với $\alpha[0;2\pi]$

$AB = \sqrt{5}$, AB qua $A(3;4)$ và có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (1;2)$

$\Rightarrow AB: x+2y-11=0$

Vì $M \in (E)$

$\Rightarrow M\left(2\sqrt{2}\sin\alpha; \sqrt{2}\cos\alpha\right)$

Với $\alpha \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

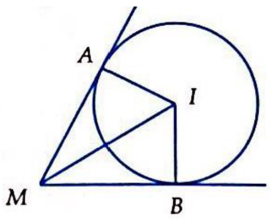
$d_{(M;AB)} = \dfrac{11 - 4\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{5}} \ge \dfrac{7}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow d_{(M;AB)\min} = \dfrac{7}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow M(2;1)$

Lưu ý: Hệ 1 còn gọi là phương trình dạng tham số của đường Elip (E)

Câu 48: Đáp án D



$(C): \begin{cases} I(1;2) \\ R = 2 \end{cases} \Rightarrow$ H là trung điểm AB

Ta có: $AH \perp MI, N(t; t+7)$

$MI^2 = (t-1)^2 + (t+5)^2 = 2t^2 + 8t + 26$

$MA^2 = MI^2 - R^2 = 2t^2 + 8t + 22$

$S^2 = IA^2.MA^2 = 2^2\left(2t^2 + 8t + 11\right)$

$S_{\min} \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow M(-2;5)$

Câu 49: Đáp án C

$A, B \in (E)$, ΔOAB cân tại O

$\Rightarrow AB \perp Ox$

$A(x;y), B(x;-y)$ (với $x > 0$)

$x > 0 \Rightarrow d(O, AB) = x$

Mà $AB^2 = 4y^2$, mặt khác $A \in (E)$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow 4y^2 = 4 - x^2$

Áp dụng Cô-si ta có:

$S_{OAB} = \frac{1}{2}AB.d_{(O;AB)} = \frac{1}{2}\sqrt{4y^2}.x$

$= \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}x \le \frac{1}{2}.\dfrac{4 - x^2 + x^2}{2} = 1$

(do $x > 0$)

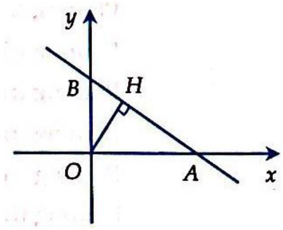
$\max S_{OAB} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{4 - x^2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow A\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ thỏa mãn

Câu 50: Đáp án A

Cách 1:



+ Kẻ $OH \perp AB$ tại H

ΔOAB vuông tại O có đường cao OH: $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{1}{OH^2}$

+ Gọi $A(a;0), B(0;b)$ $(a, b > 0)$

Phương trình d đi qua $M(3;1)$ và vecto pháp tuyến $\vec{n} = (b;a)$

$\Rightarrow b(x-3) + a(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow bx + ay - 3b - a = 0$

Để $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$ min

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{OH^2}$ min $\Leftrightarrow OH$ max

$\Leftrightarrow d_{(O;(d))} = \dfrac{|-3b - a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{3b + a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ max

+ Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$(3b + a)^2 \le \left(3^2 + 1^2\right)\left(b^2 + a^2\right)$

$\Rightarrow \dfrac{3b + a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \le \sqrt{10}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{3}{b} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow b = 3a$

Khi đó, phương trình

$(d): 3ax + ay - 9a - a = 0$

$\Leftrightarrow 3x + y - 10 = 0$

Cách 2:

Gọi $A(a;0), B(0;b)(a, b > 0)$

Suy ra: $AB: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ qua $M(3;1)$

$\Rightarrow \frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1$ (*)

Ta có: $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$

$(*) \Rightarrow 1 = \left(3.\frac{1}{a} + 1.\frac{1}{b}\right)^2 \left(3^2 + 1^2\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \ge \dfrac{1}{10} \Rightarrow \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} \ge \dfrac{1}{10}$

Vậy $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$ đạt GTNN là $\dfrac{1}{10}$

Khi $\begin{cases} \dfrac{3}{\frac{1}{a}} = \dfrac{1}{\frac{1}{b}} \\ \dfrac{3}{a} + \dfrac{1}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ \dfrac{3}{a} + \dfrac{1}{3a} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{10}{3} \\ b = 10 \end{cases}$

Suy ra: $AB: \dfrac{x}{\frac{10}{3}} + \dfrac{y}{10} = 1$

$\Rightarrow 3x + y - 10 = 0$