**ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

**A. CHUẨN KIẾN THỨC**

**A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.**

**1. Các tính chất thừa nhận.**

* Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
* Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
* Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
* Có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
* Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Vậy thì: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng .

* Trên mỗi mặt phẳng các, kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

**2. Cách xác định mặt phẳng.**

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết:

* Nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
* Nó đi qua một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó.
* Nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Các kí hiệu:

*  là kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng  ( h1)
*  là kí hiệu mặt phẳng đi qua  và điểm  (h2)
*  là kí hiệu mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau  (h3)



**3. Hình chóp và hình tứ diện.**

**3.1. Hình chóp.**

Trong mặt phẳng  cho đa giác lồi . Lấy điểm  nằm ngoài .

Lần lượt nối  với các đỉnh  ta được  tam giác . Hình gồm đa giác  và  tam giác được gọi là hình chóp , kí hiệu là .

Ta gọi  là đỉnh, đa giác  là đáy , các đoạn  là các cạnh bên,  là các cạnh đáy, các tam giác  là các mặt bên…

**3.2. Hình Tứ diện**

Cho bốn điểm  không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác 

 và  được gọi là tứ diện .

**B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.**

**Bài toán 01: XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG.**

**Phương pháp:**

Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến.

**Lưu ý:** Điểm chung của hai mặt phẳng và thường được tìm như sau :

Tìm hai đường thẳng  lần lượt thuộc và , đồng thời chúng cùng nằm trong mặt phẳng  nào đó; giao điểm  chính là điểm chung của và .

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp , đáy  là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm  thuộc cạnh . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a)  và  b)  và 

c)  và  d)  và 

**Lời giải.**

a) Gọi 

Lại có 

.

b) 



.

Và .

c) Trong  gọi 

Và 

d) Trong  gọi , ta có .

**Ví dụ 2.** Cho tứ diện ,  là một điểm thuộc miền trong tam giác ,  là điểm trên đoạn 

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng  với các mặt phẳng .

b) Gọi  là các điểm tương ứng trên các cạnh  và  sao cho  không song song với . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  và .

**Lời giải.**

a) Trong  gọi , trong  gọi 



Lại có .

Tương tự, trong  gọi , trong gọi 



 là điểm chung thứ hai của  và  nên .

b) Trong  gọi , ; trong  gọi .

Có , 

. Vậy .

**Bài toán 02: CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG – BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUI**

**Phương pháp:**

* Để chứng minh ba điểm ( hay nhiều điểm) thẳng hàng ta chứng minh chúng là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt, khi đó chúng nằm trên đường thẳng giao tuyên của hai mặt phẳng nên thẳng hàng.
* Để chứng minh ba đường thẳng đồng qui ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng thuộc đường đường thẳng còn lại.

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho tứ diện . Trên  và  lấy các điểm  và  sao cho  cắt  tại , cắt  tại ,  cắt  tại .

Chứng minh ba điểm  thẳng hàng.

**Lời giải.**

Ta có 

.

Tương tự 



Từ (1),(2) và (3) ta có  **** là điểm chung của hai mặt phẳng  và  nên chúng thẳng hàng.

**Ví dụ 2.** Cho tứ diện  có  lần lượt là trung điểm của  và là trọng tâm của tam giác . Mặt phẳng  đi qua  cắt  lần lượt tại . Một mặt phẳng  đi qua  cắt  tương ứng tại  và .

a) Gọi . Chứng minh  thẳng hàng.

b) Giả sử . Chứng minh  thẳng hàng.

**Lời giải.**

1. Ta có , (1)











Từ (1),(2),(3) và (4) ta có  là điểm chung của hai mặt phẳng  và  nên chúng thẳng hàng.

**Ví dụ 3.** Cho hình chóp tứ giác , gọi  là giao điểm của hai đường chéo  và . Một mặt phẳng  cắt các cạnh bên  tưng ứng tại các điểm . Chứng minh các đường thẳng  đồng qui.

**Lời giải.**

Trong mặt phẳng  gọi .

Ta sẽ chứng minh  .

Dễ thấy .





Vậy  đồng qui tại .

**Ví dụ 4.** Cho hai mặt phẳng  và  cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng . Trong  lấy hai điểm  nhưng không thuộc  và  là một điểm không thuộc . Các đường thẳng  cắt  tương ứng tại các điểm . Gọi  là giao điểm của  và .Chứng minh  và  đồng qui.

**Lời giải.**

Trước tiên ta có  vì ngược lại thì 

(mâu thuẫn giả thiết) do đó  không thẳng hàng, vì vậy ta có mặt phẳng .

Do 



Tương tự 

Từ (1) và (2) suy ra .

Mà 

.

Vậy  và  đồng qui đồng qui tại .

**Bài toán 03: TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG.**

**Phương pháp:**

Sử dụng định nghĩa và các tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Để tìm giao điểm của đường thẳng  và mặt phẳng  ta cần lưu ý một số trường hợp sau:

***Trường hợp 1.*** Nếu trong  có sẵn một đường thẳng  cắt  tại , khi đó 

***Trường hợp 2.*** Nếu trong  chưa có sẵn  cắt  thì ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn một mặt phẳng chứa 

Bước 2: Tìm giao tuyến 

Bước 3: Trong  gọi  thì  chính là giao điểm của .

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp tứ giác  với đáy  có các cạnh đối diện không song song với nhau và  là một điểm trên cạnh .

a) Tìm giao điểm của đường thẳng  với mặt phẳng .

b) Tìm giao điểm của đường thẳng  và mặt phẳng .

**Lời giải.**

a) Trong mặt phẳng , gọi .

Trong  gọi .

Ta có  và  nên .

b) Trong  gọi .

Trong  gọi .

Ta có  và  nên .

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp tứ giác ,  là một điểm trên cạnh ,  là trên cạnh . Tìm giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng.

**Lời giải.**

Trong mặt phẳng  gọi .

Trong  gọi  và .

Ta có 

.

Do đó .

Vậy 

**Bài toán 04: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CỦA MỘT MẶT PHẲNG VỚI HÌNH CHÓP.**

**Phương pháp:**

Để xác định thiết diện của hình chóp  cắt bởi mặt phẳng , ta tìm giao điểm của mặt phẳng  với các đường thẳng chứa các cạnh của hình chóp. Thiết diện là đa giác có đỉnh là các giao điểm của  với hình chóp ( và mỗi cạnh của thiết diện phải là một đoạn giao tuyến với một mặt của hình chóp)

Trong phần này chúng ta chỉ xét thiết diện của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp tứ giác , có đáy là hình thang với  là đáy lớn và  là một điểm trên cạnh .

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng .

b) Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi .

**Lời giải.**

a) Trong mặt phẳng , gọi .

Trong mặt phẳng  gọi .

Ta có  nên , do đó .

Thiết diện là tứ giác .

b)Trong mặt phẳng  gọi  lần lượt là các giao điểm của  với  và 

Trong mặt phẳng  gọi 

Trong mặt phẳng  gọi .

Ta có , 

VậyTương tự .

Thiết diện là ngũ giác .

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp  có đáy  là một hình bình hành tâm . Gọi  là ba điểm trên các cạnh . Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng .

**Lời giải.**

Trong mặt phẳng  gọi  lần lượt là giao điểm của  với .

Trong mặt phẳng  gọi 

Trong mặt phẳng  gọi 

Trong mặt phẳng  gọi  .

Ta có , .

Lí luận tương tự ta có .

Thiết diện là ngũ giác .

**Bài toán 05: DỰNG ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM VÀ CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.**

**Phương pháp:**

Để dựng đường thẳng  đi qua  và cắt  ta dựng giao tuyến của hai mặt phẳng  và , khi đó .

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho tứ diện , là điểm huộc miền trong tam giác ,  là một điểm trên cạnh .

a) Dựng đường thẳng đi qua  cắt cả  và .

b) Gọi  là mộtđiểm trên cạnh  sao cho  không song song với . Dựng đường thẳng đi qua  cắt  và .

**Lời giải.**

a) Trong  gọi 

Trong  gọi 

Đường thẳng  chính là đường thẳng đi qua  cắt cả  và .

b) Trong mặt phẳng  gọi 

****Trong gọi , trong  gọi , thì  chính là đường thẳng đi qua

 cắt cả  và .

**Bài toán 06: TÌM TẬP HỢP GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG VÀ BÀI TOÁN CHỨNG MINH GIAO TUYẾN ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH.**

**Phương pháp:**

Để tìm tập hợp giao điểm  của hai đường thẳng thay đổi  ta chọn hai mặt phẳng cố định  và  cắt nhau lần lượt chứa , khi đó 



Vậy điểm  thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng  và .

Để chứng minh đường thẳng  đi qua một điểm cố định ta thực hiện theo các bước sau

* Chọn một điểm cố định  thuộc hai mặt phẳng  và 
* Chứng minh  là giao tuyến của hai mặt phẳng  và , khi đó  đi qua điểm cố định .

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  có đáy  là hình thang với đáy lớn là . Một mặt phẳng quay quanh  cắt các cạnh  tại các điểm tương ứng .

a) Tìm tập hợp giao điểm của  và .

b) Tìm tập hợp giao điểm của  và .

**Lời giải.**

a) ***Phần thuận:***

Ta có , 

.

Trong  gọi 

.

.

***Giới hạn:***

Khi  chạy đến  thì  chạy đến và  chạy đến .

Khi  chạy đến  thì  chạy đến và  chạy đến .

***Phần đảo:***

Lấy điểm  bất kì thuộc đoạn , trong gọi , trong  gọi  khi đó  là mặt phẳng quay quanh  cắt các cạnh  tại  và  là giao điểm của  và .

Vậy tập hợp điểm  là đoạn .

b) Ta có Nhưng  nên .

Khi  chạy đến chạy đến  thì  chạy đến và  chạy đến .

Khi chạy đến  thì  chạy đến và  chạy đến .

Lập luận tương tự trên ta có tập hợp điểm  là đoạn .

**Ví dụ 2.** Cho tứ diện . Hai điểm  lần lượt nằm trên hai cạnh  và  sao cho . Một mặt phẳng  thay đổi luôn chứa , cắt các cạnh  và  lần lượt tại  và .

a) Chứng minh  luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm tập hợp giao điểm của  và .

c) Tìm tập hợp giao điểm  của  và .

**Lời giải.**

a) Trong  gọi  thì  cố định và 

Lại có Vậy  luôn đi qua điểm  cố định



b)***Phần thuận:***

Trong  gọi 

.

Gọi 

***Giới hạn:***

Khi  chạy đến  thì  chạy đến và  chạy đến 

Khi Khi  chạy đến  thì  chạy đến và  chạy đến 

***Phần đảo:***

Gọi  là điểm bất kì trên đoạn , trong  gọi , trong  gọi  suy ra  là mặt phẳng quay quanh  căt các cạnh tại các điểm  và .

Vậy tập hợp điểm  là đoạn .

c) Gọi  .

Mà .

Khi  chạy đến  thì  chạy đến và  chạy đến 

Khi Khi  chạy đến  thì  chạy đến và  chạy đến 

Từ đó ta có tập hợp điểm  là đường thẳng  trừ các điểm trong của đoạn .

**CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP**

**1.** Cho tứ diện . Gọi  lần lượt là trung điểm các cạnh  và .

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  và 

b) Gọi  là các điểm lần lượt trên các cạnh  và . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  và .

**2**. Cho hình chóp  đáy là tứ giác ,  cắt  tại , hai đường chéo  và  cắt nhau tại . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a)  và ;  và .

b)  với các mặt phẳng  và .

**3**. Cho tứ diện ,  là một điểm thuộc miền trong tam giác ,  một điểm thuộc miền trong tam giác . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a)  và .

b)  và .

**4.** Cho tứ diện . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và . Trên đoạn  lấy điểm  sao cho .

a) Tìm giao điểm của đường thẳng  với mặt phẳng .

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  và .

**5**. Cho hình chóp ,  và  là các điểm lần lượt trên các cạnh .

a) Tìm giao điểm của  với .

b) Tìm giao điểm của  với .

**6**. Trong mặt phẳng  cho hai đường thẳng  và  cắt nhau tại ,  là hai điểm nằm ngoài  sao cho  cắt với . Một mặt phẳng  quay quanh  cắt  và  lần lượt tại .

a) Chứng minh  luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi  , chứng minh  thuộc một đường thẳng cố định.

c) Gọi  , chứng minh  thuộc một đường thẳng cố định.

d) Chứng minh  đi qua một điểm cố định.

**7**. Cho tứ diện . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và . Trên cạnh  lấy điểm  sao cho .

a) Xác định giao điểm  của đường thẳng  với  và chứng minh .

b) Xác định giao điểm  của đương thẳng  với  và chứng minh .

c) Chứng minh .

**8.** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành. Gọi  là trung điểm của .

a) Tìm giao điểm  của  với . Tính .

b) Tìm giao điểm  của  với  và chứng minh  là trung điểm của .

**9.** Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành tâm . Gọi  là trung điểm của  và  là trọng tâm của tam giác .

a) Tìm giao điểm  của  với . Chứng minh  thảng hàng và .

b) Tìm giao điểm  của  với . Tính .

c) Tìm giao điểm  của  với . Tính .

**10.** Cho mặt phẳng  xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau ở  và  là đường thẳng cắt  tại .

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  và 

b) Gọi  là một điểm trên  và không trùng với . Tìm giao tuyến  của hai mặt phẳng  và và chứng minh  luôn nằm trong một mặt phẳng cố định khi  di động trên .

**11.** Cho hình chóp  có đáy  là hình thang với đáy lớn . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và .

a) Tìm giao điểm của đường thẳng  với 

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng .

**12.** Cho hình chóp . Gọi  lần lượt là các điểm cố định trên các cạnh  và (  không song song với ).

Một mặt phẳng  quay quanh  cắt  tại  và cắt  tại .

a) Chứng minh các đường thẳng  đồng qui

b) Giả sử . Chứng minh  thẳng hàng.

c) Gọi . Chứng minh đường thẳng  luôn đi qua một điểm cố định khi  di động.

**13**. Cho hình chóp . Trên các cạnh  lấy các điểm  sao cho  và  không song song với nhau.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng .

b) Gỉa sử , chứng minh  luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi  chạy trên cạnh .

**14**. Cho hình chóp  có đáy  là hình bình hành và  là một điểm trên cạnh  sao cho .

a) Tìm giao điểm của đường thẳng  với .

b)  là một điểm thay đổi trên cạnh . Xác định giao tuyến  của  và . Chứng minh  luôn đi qua một điểm cố định.

c) Gọi  là trọng tâm tam giác . Xác định thiết diện của hình chóp với .

**15.** Cho hình chóp  có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng  căt các cạnh bên  tương ứng tại các điểm . Gọi  là giao điểm của  và .

a) Tìm giao điểm  của  với .

b) Chứng minh .

**16**. Cho hình chóp . Gọi  là hai điểm trên các cạnh  và .

a) Tìm giao các điểm  của các đường thẳng  và  với .

b) Giả sử . Chứng minh  thẳng hàng.

**17**. Cho hình chóp  có đáy  là hình thang với các cạnh đáy là  và , . Gọi  là trung điểm của ,  là một điểm trên cạnh  với . Gọi  là mặt phẳng quay quanh , cắt các cạnh  tại . Tìm tập hợp giao điểm của  và .

**18**. Cho tứ diện  thỏa mãn điều kiện . Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua mỗi đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp của mặt đối diện đồng qui tại một điểm.