SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2009-2010
ĐỀ THI MÔN: TOÁN
Dành cho học sinh THPT không chuyên
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1 (2,5 điểm). Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y(xy-2)=3x^2 \\ y^2+x^2y+2x=0 \end{cases}$

Câu 2 (2,5 điểm)**.** Giải bất phương trình: $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\geq 0$.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a là một số thực. Xét hai tập hợp:

$$A=\left\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R},x+y=a\right\} \text{ và } B=\left\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R},\, x^3+y^3<a\right\}.$$

Tìm tất cả các giá trị của a để A và B không có phần tử chung.

Câu 4 (2,5 điểm). Cho tam giác ABC không đều với ba cạnh $BC=a; AC=b; AB=c$. Gọi O và G theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác ABC; S và R theo thứ tự là diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2=9(R^2-OG^2)$.

b) Giả sử $a^2=4S.\cot A$. Chứng minh rằng AG vuông góc với OG.

Câu 5 (1 điểm). Cho ba số thực dương a,b,c thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\geq 1$$

Chứng minh rằng $a+b+c\geq ab+bc+ca$.

---------------------Hết----------------------

Chú ý: Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: ……………………………………………**SBD**: …………………

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2009-2010
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
Dành cho học sinh THPT không chuyên

Đáp án gồm 03 trang

Câu 1 (2,5 điểm):

Nội dung trình bày	Điểm
+ Nếu x=0 thì y=0, ngược lại nếu y=0 thì x=0, do đó hệ có nghiệm (x,y)=(0,0)	**0,5**
+ Nếu $xy \neq 0$: Nhân phương trình thứ hai với x rồi cộng với PT thứ nhất ta được: $(xy^2+x^3y+2x^2)+(xy^2-2y-3x^2)=0 \Leftrightarrow (xy-1)(2y+x^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ y=-\frac{x^2}{2} \end{array}\right.$	**0,75**
- Với $xy=1$ thì $y=\frac{1}{x}$, thay vào PT thứ nhất, ta được: $\frac{1}{x}(1-2)=3x^2 \Leftrightarrow x^3=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, từ đó $y=-\sqrt[3]{3}$	**0,5**
- Với $y=-\frac{x^2}{2}$, thay vào PT thứ nhất, ta được: $-\frac{x^2}{2}\left(-\frac{x^3}{2}-2\right)=3x^2 \Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x=2$, từ đó $y=-2$.	**0,5**
Vậy hệ có ba nghiệm $(x,y)=(0;0),(2;-2),\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}};-\sqrt[3]{3}\right)$	**0,25**

Câu 2 (2,5 điểm):

Xét 2 trường hợp sau:	
TH1: $2x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$	**0,5**
TH2: $\begin{cases} x^2-3x \geq 0 & (1) \\ 2x^2-3x-2>0 & (2) \end{cases}$	**0,5**
Giải (1) ta được $\left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 0 \end{array}\right.$	**0,5**
Giải (2) ta được $\left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-\frac{1}{2} \end{array}\right.$	**0,5**
Kết hợp nghiệm ta được nghiệm của BPT là: $x \geq 3;\ x \leq -\frac{1}{2}$ hoặc $x=2$.	**0,5**

Câu 3 (1,5 điểm):

Nội dung trình bày	Điểm
$A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow$ với mỗi $x,y\in\mathbb{R}$ thoả mãn $x+y=a$ thì $x^3+y^3\ge a$ Điều này tương đương với $x^3+(a-x)^3\ge a\quad \forall x\in\mathbb{R}$	0,25
Hay $3ax^2-3a^2x+a^3-a\ge 0$ (1) $\forall x\in\mathbb{R}$	0,25
Nếu a=0 thì (1) đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$	0,25
Nếu $a\ne 0$: (1) đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi: $\begin{cases}3a>0\\ \Delta=9a^4-12a(a^3-a)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ 4a^2-a^4\le 0\end{cases}\Leftrightarrow a\ge 2$	0,5
Vậy các giá trị cần tìm của a là: a =0 hoặc $a\ge 2$.	0,25

Câu 4 (2,5 điểm).

Nội dung trình bày	Điểm
a) (1 điểm).	
Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$	*0,25*
Suy ra $9\overrightarrow{OG}^2=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2=3R^2+2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC})$	*0.25*
Mà $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2}=\dfrac{2R^2-c^2}{2}$, tương tự với hai hệ thức còn lại	*0.25*
Từ đó suy ra $a^2+b^2+c^2=9(R^2-OG^2)$	*0,25*
b) (1,5 điểm).	
Ta có $2S=bc\sin A$, từ $a^2=4S.\cot A$ suy ra $a^2=2bc.\cos A$ Sử dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta được $b^2+c^2=2a^2$ (1).	*0.5*
Gọi M là trung điểm của BC thì $AG^2=\dfrac{4}{9}AM^2=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{9}$.	*0,25*
Theo phần a) thì $OG^2=R^2-\dfrac{b^2+c^2-2a^2}{9}$.	*0,25*
Do đó $AG^2+OG^2=R^2+\dfrac{b^2+c^2-2a^2}{9}$ (2)	*0,25*
Từ (1) và (2) suy ra $AG^2+OG^2=R^2=OA^2$. Từ đó $AG\perp OG$ (đpcm).	*0,25*

Câu 5 (1 điểm):

Nội dung trình bày	Điểm

Từ giả thiết, ta có: $(1-\frac{1}{a+b+1})+(1-\frac{1}{b+c+1})+(1-\frac{1}{c+a+1})\le 2$ hay $\frac{a+b}{a+b+1}+\frac{b+c}{b+c+1}+\frac{c+a}{c+a+1}\le 2$	**0,25**
$\frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+(a+b)}+\frac{(b+c)^2}{(b+c)^2+b+c}+\frac{(c+a)^2}{(c+a)^2+c+a}\le 2 \qquad (1)$	**0,25**
Áp dụng BĐT Svacxơ, ta có $\frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+(a+b)}+\frac{(b+c)^2}{(b+c)^2+b+c}+\frac{(c+a)^2}{(c+a)^2+c+a}$ $\ge \frac{4(a+b+c)^2}{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2+2(a+b+c)} \qquad (2)$	**0,25**
Từ (1) và (2) ta có $\frac{4(a+b+c)^2}{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2+2(a+b+c)}\le 2$ $\Leftrightarrow 2(a+b+c)^2\le (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2+2(a+b+c)$ $\Leftrightarrow ab+bc+ca\le a+b+c$ (đpcm). Dấu bằng khi và chỉ khi $a=b=c=1$.	**0,25**

---------------------- Hết -----------------------