SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2010-2011
ĐỀ THI MÔN: TOÁN
(Dành cho học sinh THPT không chuyên)
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu I (4 điểm)

1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y=m-2 \\ x^2+y^2+2x+2y=-m^2+4 \end{cases}$ (trong đó m là tham số; x và y là ẩn)

a) Tìm m để hệ phương trình trên có nghiệm.

b) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $A=xy+2(x+y)+2011$.

2. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt đều lớn hơn -3

$$x^4-(3m+1)x^2+6m-2=0$$

Câu II (1,5 điểm)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=1 \\ \sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}=4 \end{cases}$

Câu III (1 điểm)

Chứng minh rằng nếu x, y là các số thực dương thì $\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2}\geq\dfrac{1}{1+xy}$

Câu IV (3,5 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ *Oxy*, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(4;3)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho góc *AMB* bằng 45^0.

2. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* nhọn với trực tâm *H*. Các đường thẳng *AH*, *BH*, *CH* lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* tại *D*, *E*, *F* (*D* khác *A*, *E* khác *B*, *F* khác *C*). Hãy viết phương trình cạnh *AC* của tam giác *ABC*; biết rằng $D(2;1), E(3;4), F\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{17}{5}\right)$.

3. Cho tam giác *ABC*, có $a=BC, b=CA, c=AB$. Gọi *I*, *p* lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, nửa chu vi của tam giác *ABC*. Chứng minh rằng

$$\frac{IA^2}{c(p-a)}+\frac{IB^2}{a(p-b)}+\frac{IC^2}{b(p-c)}=2$$

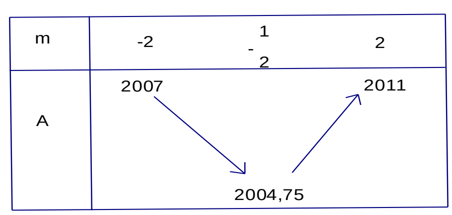
-------------Hết-------------

Chú ý: Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

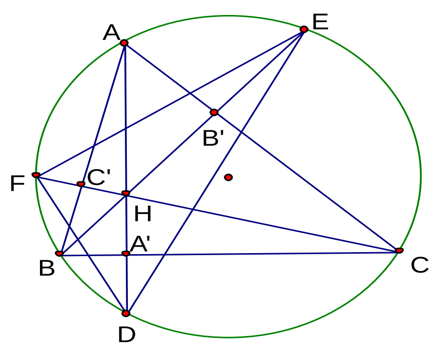
Họ và tên thí sinh: ……………………………………………**SBD**: …………………

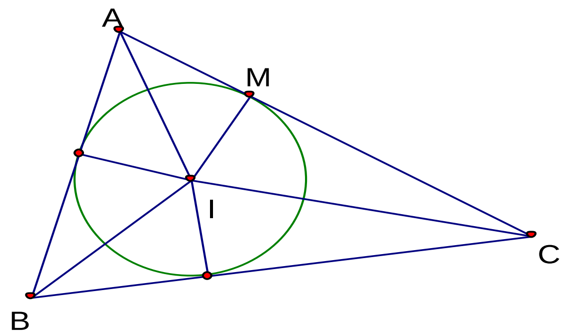
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH VĨNH PHÚC

KÌ THI CHỌN HSG LỚP 10 VÒNG TỈNH
NĂM HỌC 2010 – 2011
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN
(Dành cho học sinh các trường THPT không chuyên)
Đáp án gồm 4 trang

Câu	Nội dung	Điểm
I **4 điểm**	**1.a (2 điểm)**	
	Đặt $S=x+y;P=xy$. Khi đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases} S=m-2 \\ S^2-2P+2S=-m^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=m-2 \\ P=m^2-m-2 \end{cases}$	1,0
	Để hệ có nghiệm thì $S^2\ge 4P \Leftrightarrow (m-2)^2 \ge 4(m^2-m-2) \Leftrightarrow m^2\le 4 \Leftrightarrow -2\le m\le 2$	1,0
	1.b (1 điểm)	
	Ta có $A=P+2S+2011=m^2+m+2005$	0,5
	Lập bảng biến thiên ta được $\max A=2011$ khi $m=2$; $\min A=2004,75$ khi $m=-0,5$ 	0,5
	2. (1 điểm)	
	Đặt $t=x^2\ge 0$, thay vào phương trình ta được $t^2-(3m+1)t+6m-2=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=3m-1 \end{array}\right.$ phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi	0,25
	$\begin{cases} 3m-1>0 \\ 3m-1\ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\frac{1}{3} \\ m\ne 1 \end{cases}$. Khi đó phương trình đã cho có bốn nghiệm là $\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{3m-1}$	0,5
	Để các nghiệm đều lớn hơn -3 thì $-\sqrt{3m-1}>-3 \Leftrightarrow \sqrt{3m-1}<3 \Leftrightarrow m<\frac{10}{3}$. Vậy các giá trị của m là $m\in\left(\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)\setminus\{1\}$	0,25
II		

(1,5 điểm)	ĐK $xy \ge 0$, ta thấy từ pt thứ nhất $\Rightarrow x+y>0$, do đó $x \ge 0, y \ge 0$. Từ đó ta đặt $u=\sqrt{x} \ge 0, v=\sqrt{y} \ge 0$ thay vào hệ ta được $\begin{cases} u^2+v^2-uv=1 \\ \sqrt{u^4+3}+\sqrt{v^4+3}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2=1+3uv \\ u^4+v^4+6+2\sqrt{3u^4+3v^4+u^4v^4+9}=16 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2=1+3uv \\ \left[(u+v)^2-2uv\right]^2-2u^2v^2+2\sqrt{u^4v^4+3\left[(u+v)^2-2uv\right]^2-6u^2v^2+9}=10 \end{cases}$	0,5
	Đặt $t=uv \Rightarrow 0 \le t \le 1$ (vì $1+3uv=(u+v)^2 \ge 4uv \Rightarrow uv \le 1$). Thế từ phương trình thứ nhất của hệ trên vào phương trình thứ hai ta được $2\sqrt{t^4-3t^2+6t+12}=t^2-2t+9 \Leftrightarrow \begin{cases} 4(t^4-3t^2+6t+12)=(t^2-2t+9)^2 \\ t^2-2t+9 \ge 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 3t^4+4t^3-34t^2+60t-33=0 \Leftrightarrow (t-1)(3t^3+7t^2-27t+33)=0$.	0,5
	+) Nếu $t=1 \Leftrightarrow uv=1$ ta có $\begin{cases} u+v=2 \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ +) Nếu $3t^3+7t^2-27t+33=0 \Leftrightarrow 3t^3+7t^2+6+27(1-t)=0$ vô lí vì $0 \le t \le 1$ Kết luận nghiệm của hệ là $(x;y)=(1;1)$	0,5
III **1 điểm**		
	Do $x,y>0$ nên bất đẳng thức đã cho tương đương với $\left[(1+x)^2+(1+y)^2\right](1+xy) \ge (1+x)^2(1+y)^2$	0,25
	$\Leftrightarrow (2+2x+2y+x^2+y^2)(1+xy) \ge (1+2x+x^2)(1+2y+y^2)$	0,25
	$\Leftrightarrow xy(x-y)^2+(xy-1)^2 \ge 0$, bất đẳng thức này luôn đúng. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$	0,5
IV **3,5 điểm**	**1. (1,5 điểm)**	
	Giả sử tọa độ của $M(x;0)$. Khi đó $\overrightarrow{MA}=(1-x;2); \overrightarrow{MB}=(4-x;3)$. Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MA.MB.\cos 45^0$	0,5
	$\Leftrightarrow (1-x)(4-x)+6=\sqrt{(1-x)^2+4}.\sqrt{(4-x)^2+9}.\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Leftrightarrow x^2-5x+10=\sqrt{x^2-2x+5}.\sqrt{x^2-8x+25}.\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5
	$\Leftrightarrow 2(x^2-5x+10)^2=(x^2-2x+5)(x^2-8x+25)$ (do $x^2-5x+10>0$) $\Leftrightarrow x^4-10x^3+44x^2-110x+75=0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x-5)(x^2-4x+15)=0 \Leftrightarrow x=1; x=5$	0,25
	Vậy ta có hai điểm cần tìm là $M(1;0)$ hoặc $M(5;0)$	0,25
	2. (1 điểm)	
	Gọi *A', B', C'* lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh *A, B, C*. Do tứ giác	

	BCB'C' nội tiếp nên $FDA = FCA = ABE = ADE \Rightarrow$ *H* nằm trên đường phân giác trong hạ từ *D* của tam giác *DEF*, tương tự ta cũng chỉ ra được *H* nằm trên đường phân giác trong hạ từ đỉnh *E* của tam giác *DEF*. Vậy *H* là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác *DEF*.	0,5
	Ta lập được phương trình các đường thẳng *DE*, *DF* lần lượt là $DE: 3x - y - 5 = 0; DF: 3x + y - 7 = 0$. Do đó phương trình phân giác trong và ngoài của đỉnh *D* là $\frac{3x-y-5}{\sqrt{10}} = \pm\frac{3x+y-7}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow x - 2 = 0; y - 1 = 0$. Kiểm tra vị trí tương đối của *E*, *F* với hai đường trên ta được phân giác trong kẻ từ đỉnh *D* là $d: x - 2 = 0$. Tương tự ta lập được phương trình phân giác trong kẻ từ đỉnh *E* là $d': x - y + 1 = 0$. Mặt khác *H* là giao của *d* và *d'* nên $H(2;3)$	0,25
	Ta có *AC* là trung trực của *HE* nên *AC* đi qua trung điểm $B'\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ và có vtpt là $\overrightarrow{HE} = (1;1) \Rightarrow AC: x + y - 6 = 0$ 	0,25
	3. (1 điểm)	
	Gọi *M* là tiếp điểm của *AC* với đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*. Khi đó ta có $AM = p - a; IM = r$. Gọi *S* là diện tích tam giác *ABC*, theo công thức Heron ta có $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Áp dụng định lí Pitago trong tam giác *AIM* ta có $IA^2 = AM^2 + MI^2 = (p-a)^2 + r^2 = (p-a)^2 + \left(\frac{S}{p}\right)^2 = (p-a)^2 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$ $= \frac{(p-a)bc}{p} \Rightarrow \frac{IA^2}{c(p-a)} = \frac{b}{p}$	0,5
	Tương tự ta có $\frac{IB^2}{a(p-b)} = \frac{c}{p}; \frac{IC^2}{b(p-c)} = \frac{a}{p}$	0,25
	Do vậy $\frac{IA^2}{c(p-a)} + \frac{IB^2}{a(p-b)} + \frac{IC^2}{b(p-c)} = \frac{a+b+c}{p} = 2$	0,25

	A M I C B	