SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2012-2013
ĐỀ THI MÔN: TOÁN
(Dành cho học sinh THPT không chuyên)
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1.

a) Giải phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2\ \left(x\in\mathbb{R}\right)$

b) Cho phương trình bậc hai $x^2-2mx+m^2-2m+4=0$ (x là ẩn và m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm không âm $x_1,\ x_2$. Tính theo m giá trị của biểu thức $P=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ và tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Câu 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2-xy+y^2+x-2y=0\\2x-xy+y=2\end{cases}\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Câu 3. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác không nhọn. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 10$$

Câu 4.

a) Cho tam giác nhọn ABC không cân, nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$. Gọi G và M lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và trung điểm cạnh BC. Chứng minh nếu đường thẳng OG vuông góc với đường thẳng OM thì $AC^2+AB^2+2BC^2=12R^2$.

b) Cho tam giác ABC có độ dài các đường cao kẻ từ đỉnh A, B, C lần lượt là $m,\ n,\ p$. Tính độ dài các cạnh $AB,\ BC,\ CA$ theo $m,\ n,\ p$.

c) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt có phương trình là

$$x-2y=0,\ x-2=0,\ x+y-3=0.$$

Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, biết rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng $\sqrt{10}$ và đỉnh A có hoành độ âm.

Câu 5.

Cho tứ giác lồi $ABCD$ và một điểm M nằm bên trong tứ giác đó (M không nằm trên các cạnh của tứ giác $ABCD$). Chứng minh tồn tại ít nhất một trong các góc $MAB,\ MBC,\ MCD,\ MDA$ có số đo không lớn hơn 45^0.

-------------Hết-----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………….……..………….…….; Số báo danh……………………

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC | **KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2012-2013**

(Đáp án có 03 trang)

ĐÁP ÁN MÔN: TOÁN

(Dành cho học sinh THPT không chuyên)

I. LƯU Ý CHUNG:

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.

- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.

- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1(3đ)	**1.a (1,5 điểm)**	
	Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 0 \\ 2-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right)$ Đặt $y=\sqrt{2-x^2}>0$. Thay vào ta được: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$. Do đó ta có hệ phương trình:	0,25
	$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=2 \\ x+y=2xy \end{cases}$	0,5
	$\begin{cases} (x+y)^2-(x+y)-2=0 \\ x+y=2xy \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-0,5 \end{cases} \end{array}\right.$	0,25
	+) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$	0,25
	+) $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-y \\ 2y^2+2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$ (do $y>0$) Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{3}}{2};1\right\}$	0,25
	1.b (1,5 điểm)	
	Phương trình $x^2-2mx+m^2-2m+4=0$ (1) có hai nghiệm không âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-m^2+2m-4\geq 0 \\ S=2m\geq 0 \\ P=m^2-2m+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 2.$	0,75
	Theo định lý Vi-ét ta có $x_1+x_2=2m; x_1x_2=m^2-2m+4$. Do đó $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2}=\sqrt{x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{2m+2\sqrt{(m-1)^2+3}}$	0,5

	Do $m\ge 2\Rightarrow \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\ge \sqrt{8}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m=2$.	0,25
2(2đ)	Đặt $z=y-1$, thay vào hệ ta được: $\begin{cases}x^2-xz+z^2=1\\x-xz+z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+z)^2-3xz=1\\x+z-1=xz\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+z)^2-3(x+z)+2=0\\x+z-1=xz\end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+z=2\\x+z=1\end{array}\right.\\xz=x+z-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+z=2\\xz=1\end{cases}\\\begin{cases}x+z=1\\xz=0\end{cases}\end{array}\right.$	0,5
	+) $\begin{cases}x+z=2\\xz=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=2-x\\x^2-2x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$	0,25
	+) $\begin{cases}x+z=1\\xz=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=1-x\\x^2-x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,z=0\\x=0,z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,y=1\\x=0,y=2\end{cases}$	0,5
	Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $S=\{(1;2),(1;1),(0;2)\}$	0,25
3(1đ)	Do a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác không nhọn nên có một trong các bất đẳng thức sau xảy ra: $a^2\ge b^2+c^2$, $b^2\ge c^2+a^2, c^2\ge a^2+b^2$. Giả sử $a^2\ge b^2+c^2$, khi đó ta có:	0,25
	$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=1+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{b^2+c^2}{a^2}+(b^2+c^2)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$ $\ge 1+a^2.\frac{4}{b^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{a^2}+4$	0,25
	$=1+\frac{3a^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{a^2}+4\ge 1+3+2\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2}.\frac{b^2+c^2}{a^2}}+4=10$. Do đó $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge 10$.	0,5
4(3đ)	**4.a (1,0 điểm)**	
	Áp dụng quy tắc trọng tâm và quy tắc trung điểm ta có: $\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$, $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$. Khi đó	0,25
	$OG\perp OM\Rightarrow \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OM}=0\Leftrightarrow(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=0$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+2R^2=0$	0,25
	$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(2R^2-AB^2)+\frac{1}{2}(2R^2-AC^2)+2R^2-BC^2+2R^2=0$ (chú ý $\vec{a}.\vec{b}=\frac{\vec{a}^2+\vec{b}^2-(\vec{a}-\vec{b})^2}{2}$)	0,25
	$\Leftrightarrow AB^2+AC^2+2BC^2=12R^2$	0,25
	4.b(1,0 điểm)	
	Kí hiệu $a=BC,b=CA,c=AB,p=\frac{a+b=c}{2}$. Khi đó ta có $a=\frac{2S}{m},b=\frac{2S}{n},c=\frac{2S}{p}$	0,25
	Theo công thức Hê – rông ta có: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\Leftrightarrow 4S=\sqrt{2S\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)2S\left(-\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)2S\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)2S\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right)}$	0,25
	$\Leftrightarrow 4S=4S^2.k\Leftrightarrow S=\frac{1}{k}$, trong đó	0,25

	$k=\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right)}$	
	Do đó $a=\frac{2}{mk},b=\frac{2}{nk},c=\frac{2}{pk}$.	**0,25**
	4.c (1,0 điểm)	
	Do BC vuông góc với đường cao kẻ từ A nên BC có dạng $2x+y+c=0$. Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x+y+c=0\\x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-c-4\end{cases}\Rightarrow B(2;-c-4)$, tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x+y+c=0\\x+y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-c-3\\y=c+6\end{cases}\Rightarrow C(-c-3;c+6)$.	**0,25**
	AB đi qua $B(2;-c-4)$ và vuông góc với đường cao kẻ từ C nên AB: $1.(x-2)-1.(y+c+4)=0\Leftrightarrow x-y-c-6=0$. Tọa độ đỉnh C là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-y-c-6=0\\x-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2c+12\\y=c+6\end{cases}\Rightarrow A(2c+12;c+6)$.	**0,25**
	Theo giả thiết ta có $\sqrt{10}=\frac{AB.AC.BC}{4S_{ABC}}\Leftrightarrow\sqrt{10}=\frac{AB.AC.BC}{2.d(A,BC).BC}\Leftrightarrow\frac{AB.AC}{d(A,BC)}=2\sqrt{10}$ $\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(2c+10)^2+(2c+10)^2}.\lvert 3c+15\rvert}{\frac{\lvert 4c+24+c+6+c\rvert}{\sqrt{5}}}=2\sqrt{10}\Leftrightarrow\lvert c+5\rvert=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=-7\\c=-3\end{array}\right.$	**0,25**
	+) Nếu $c=-7\Rightarrow A(-2;-1),B(2;3),C(4;-1)$. +) Nếu $c=-3\Rightarrow A(6;3),B(2;-1),C(0;3)$ không thỏa mãn hoành độ của A âm. Vậy $A(-2;-1),B(2;3),C(4;-1)$.	**0,25**
5(1đ)	Giả sử $\min\left\{MAB,\ MBC,\ MCD,\ MDA\right\}>45^0$ (1). Ta có $\cot MAB=\frac{\cos MAB}{\sin MAB}=\frac{MA^2+AB^2-MB^2}{2.MA.AB.\sin MAB}=\frac{MA^2+AB^2-MB^2}{4S_{MAB}}$.	**0,25**
	Kết hợp với (1) ta được $\frac{MA^2+AB^2-MB^2}{4S_{MAB}}<\cot 45^0=1\Rightarrow MA^2+AB^2-MB^2<4S_{MAB}\ (2)$ Tương tự ta được các bất đẳng thức sau đây : $MB^2+BC^2-MC^2<4S_{MBC}\ (3)$ $MC^2+CD^2-MD^2<4S_{MCD}\ (4)$ $MD^2+DA^2-MA^2<4S_{MDA}\ (5)$	**0,25**
	Cộng theo vế các bất đẳng thức (2), (3), (4), (5) ta được: $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2<4(S_{MAB}+S_{MBC}+S_{MCD}+S_{MDA})=4S_{ABCD}$ (6)	**0,25**
	Mặt khác ta lại có: $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\geq 2AB.BC+2CD.DA\geq 4S_{ABC}+4S_{CDA}=4S_{ABCD}$, mâu thuẫn với (6). Do đó giả sử ban đầu là sai suy ra tồn tại ít nhất một trong các góc $MAB,\ MBC,\ MCD,\ MDA$ có số đo không lớn hơn 45^0.	**0,25**

---------------------Hết---------------------