SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2013-2014
ĐỀ THI MÔN:TOÁN
(Dành cho học sinh THPT không chuyên)
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. *(3,0 điểm)*

a) Cho phương trình bậc hai: $x^2-2mx+3m-2=0$, trong đó x là ẩn, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$. Chứng minh rằng nếu $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, thì $4a+c\geq 2b$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt{x-2}-\sqrt{3x}=1-\sqrt{2x+3}\ (x\in\mathbb{R})$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2\\ \sqrt{x+6}+\sqrt{y+3}=-x^2+2x+8\end{cases}\ (x,\ y\in\mathbb{R})$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

a) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3(a^2+b^2+c^2).$$

b) Giải bất phương trình: $\sqrt[3]{3-x}\geq 1-\sqrt{x-2}\ (x\in\mathbb{R})$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

a) Cho tam giác ABC, dựng về phía ngoài tam giác ABC hai tam giác vuông ABE và ACF với $BAE=CAF=90^0$, sao cho tam giác ABE đồng dạng với tam giác ACF. Gọi M là trung điểm BC, chứng minh rằng AM vuông góc với EF.

b) Cho tam giác ABC không vuông với $a=BC,\ b=CA,\ c=AB$. Chứng minh rằng nếu $a^2+b^2=2c^2$ và $\tan A+\tan B=2\tan C$ thì ABC là một tam giác cân.

c) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm lần lượt có tọa độ là $I(4;0)$, $G\left(\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC biết rằng đỉnh B nằm trên đường thẳng $(d): 2x+y-1=0$ và điểm $M(4;2)$ nằm trên đường cao kẻ từ đỉnh B của tam giác ABC.

-------------Hết-------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:………………………..……….……….; Số báo danh……………

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

(Đáp án có 04 trang)

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2013-2014
ĐÁP ÁN MÔN: TOÁN
(Dành cho học sinh THPT không chuyên)

I. LƯU Ý CHUNG:

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.

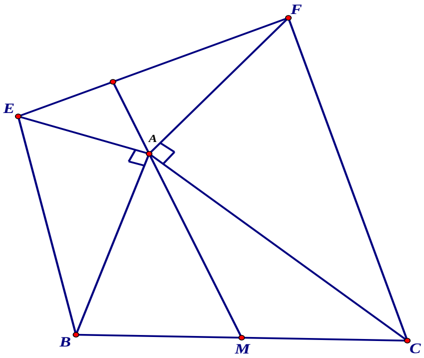
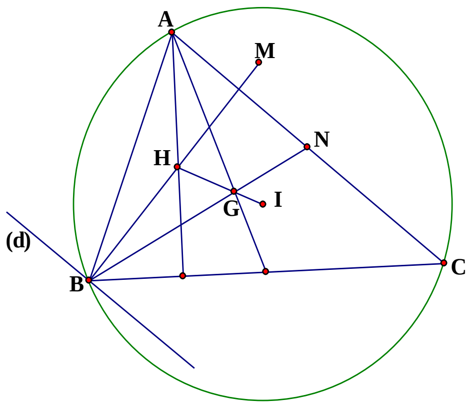
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.

- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	**(3,0 điểm)**	
	1a (2,0 điểm)	
	Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 3m + 2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le 1 \end{array}\right.$.	0,5
	Với điều kiện trên, theo định lí Viét ta có: $x_1 + x_2 = 2m,\ x_1x_2 = 3m - 2.$	0,25
	Do đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 - 2(3m - 2) = 4m^2 - 6m + 4$	0,5
	$x_1^2 + x_2^2 = 4m^2 - 6m + 4 = \left(2m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \ge \frac{7}{4}, \forall m \in D = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty).$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $$2m - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4} \in D.$$ Vậy biểu thức $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{7}{4}$ khi và chỉ khi $m = \frac{3}{4}$.	0,75
	1b (1,0 điểm)	
	Do $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $f(0) \ge 0 \Leftrightarrow c \ge 0$. Mặt khác $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 \le 4ac \end{cases}$.	0,5
	Theo bất đẳng thức Cosi ta có: $4a + c \ge 2\sqrt{4ac} \ge 2\sqrt{b^2} = 2\lvert b\rvert \ge 2b$ (ĐPCM).	0,5
2	**(2,0 điểm)**	
	2a (1,0 điểm)	
	ĐKXĐ $\begin{cases} 3x \ge 0 \\ x - 2 \ge 0 \\ 2x + 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ge 2 \\ x \ge -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2.$ Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x} + 1$ $\Leftrightarrow x - 2 + 2x + 3 + 2\sqrt{(x-2)(2x+3)} = 3x + 1 + 2\sqrt{3x}$	0,5
	$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)(2x+3)} = \sqrt{3x}$	0,25

	$\Leftrightarrow (x-2)(2x+3)=3x$ $\Leftrightarrow 2x^2-x-6=3x \Leftrightarrow 2x^2-4x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$	
	Kết hợp với ĐKXĐ ta được $x=3$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3\}$.	**0,25**
	2b (1,0 điểm)	
	Đkxđ: $x\ge -6, y\ge -3$. Từ phương trình đầu của hệ ta có: $(x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2$ $\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)+3(x-y)=3x^2+3y^2+2$ $\Leftrightarrow x^3-y^3+3x-3y=3x^2+3y^2+2$ $\Leftrightarrow (x-1)^3=(y+1)^3 \Leftrightarrow x-1=y+1 \Leftrightarrow y=x-2 \Rightarrow x\ge -1$.	**0,5**
	Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=-x^2+2x+8, \quad (x\ge -1)$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+6}-3+\sqrt{x+1}-2+x^2-2x-3=0$ $\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3}+\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}+(x-3)(x+1)=0$ $\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}+x+1\right)=0$ $\Leftrightarrow x=3 \quad \left(\text{do } \frac{1}{\sqrt{x+6}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}+x+1>0\right)$ Khi $x=3 \Rightarrow y=1$. So sánh với Đkxđ ta được nghiệm của hệ phương trình $(x,y)=(3,1)$.	**0,5**
3	**(2,0 điểm)**	
	3a (1,0 điểm)	
	$Ycbt \Leftrightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-(a+b+c)\ge 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$	**0,25**
	$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b}-2a+b+\frac{b^2}{c}-2b+c+\frac{c^2}{a}-2c+a\ge (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$	**0,25**
	$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\ge (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \quad (*)$	**0,25**
	Bất đẳng thức (*) luôn đúng do $0<a,b,c<1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. Vậy BĐT được chứng minh.	**0,25**
	3b (1,0 điểm)	
	Đkxđ $x\ge 2$. Đặt $t=\sqrt{x-2}, t\ge 0$ suy ra $x=t^2+2$, thay vào bất phương trình ta được:	**0,25**
	$\sqrt[3]{1-t^2}\ge 1-t \Leftrightarrow 1-t^2\ge (1-t)^3 \Leftrightarrow t^3-4t^2+3t\ge 0 \Leftrightarrow t(t-1)(t-3)\ge 0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge 3 \\ 0\le t\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}\ge 3 \\ 0\le \sqrt{x-2}\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 11 \\ 2\le x\le 3 \end{array}\right.$	**0,25**
	Kết hợp với đkxđ ta được tập nghiệm là $S=[2;3]\cup[11;+\infty)$.	**0,25**
4	**(3,0 điểm)**	

4a (1,0 điểm)	
 Ta có $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC};\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}$	**0,25**
Ta có $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$ (do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF}=0$).	**0,25**
$=AB.AF\cos BAF-AC.AE\cos CAE=0$. Do $\Delta ABE\sim\Delta ACF\Rightarrow AB.AF=AC.AE$ và $BAF=CAE=90^0+BAC$.	**0,25**
Vậy $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{EF}\Leftrightarrow AM\perp EF$.	**0,25**
4b (1,0 điểm)	
Ta có $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\dfrac{2S}{bc}}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\dfrac{4S}{b^2+c^2-a^2}$. Tương tự ta tính được $\tan B=\dfrac{4S}{c^2+a^2-b^2}$, $\tan C=\dfrac{4S}{a^2+b^2-c^2}$.	**0,5**
Theo giả thiết $\tan A+\tan B=2\tan C\Leftrightarrow\dfrac{4S}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{4S}{c^2+a^2-b^2}=2\dfrac{4S}{a^2+b^2-c^2}$ $\Leftrightarrow a^4-\left(b^2-c^2\right)^2+b^4-\left(c^2-a^2\right)^2=2\left(c^4-\left(a^2-b^2\right)^2\right)$ $\Leftrightarrow a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+b^4-c^4-a^4+2c^2a^2=2c^4-2a^4-2b^4+4a^2b^2$	**0,25**
$\Leftrightarrow 2c^4-\left(a^2-b^2\right)^2=c^2\left(a^2+b^2\right)$ $\Leftrightarrow 2c^4-\left(a^2-b^2\right)^2=2c^4\Leftrightarrow a=b$ Hay tam giác ABC cân 	**0,25**
4c (1,0 điểm)	
Gọi $B\left(a;1-2a\right)\in d$.	**0,25**

	Gọi N là trung điểm AC suy ra $\overrightarrow{BN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$ (1) . Mà $\overrightarrow{BN}=\left(x_N-a;y_N+2a-1\right),\overrightarrow{BG}=\left(\frac{11}{3}-a;2a-\frac{2}{3}\right)$.. Theo (1) suy ra $\begin{cases}x_N-a=\frac{3}{2}\left(\frac{11}{3}-a\right)\\ y_N+2a-1=\frac{3}{2}\left(2a-\frac{2}{3}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_N=\frac{11-a}{2}\\ y_N=a\end{cases}$ suy ra $N\left(\frac{11-a}{2};a\right)$.	
	Ta có $\overrightarrow{IN}=\left(\frac{3-a}{2};a\right),\overrightarrow{BM}=\left(4-a;2a+1\right)$ mà $\overrightarrow{IN}//\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}:\overrightarrow{IN}=k\overrightarrow{BM}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3-a}{2}=k\left(4-a\right)\\ a=k\left(2a+1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ k=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow B\left(1;-1\right),N\left(5;1\right).$	**0,25**
	AC đi qua $N\left(5;1\right)$ và có VTPT $\vec{n}=\overrightarrow{IN}=\left(1;1\right)$ suy ra AC có phương trình $x+y-6=0$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I\left(4;0\right)$, bán kính $R=IB=\sqrt{10}$ nên có phương trình: $\left(x-4\right)^2+y^2=10$. Suy ra tọa độ *A*, *C* là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x+y-6=0\\ \left(x-4\right)^2+y^2=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6-x\\ \left(x-4\right)^2+y^2=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6-x\\ \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=7\end{array}\right.\end{cases}.$	**0,25**
	Vậy $A\left(3;3\right),B\left(1;-1\right),C\left(7;-1\right)$ hoặc $A\left(7;-1\right),B\left(1;-1\right),C\left(3;3\right)$	**0,25**
