**SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2014-2015**
**ĐỀ THI MÔN: TOÁN**
**(Dành cho học sinh THPT không chuyên)**
*Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề*

**Câu 1 (2,0 điểm).**

Tìm tập xác định của hàm số: $f(x)=\dfrac{2014}{\sqrt{-x^2+2x+3}}+\dfrac{2015}{\sqrt{x^2-2x}}$.

**Câu 2 (1,0 điểm).**

a) Chứng minh rằng hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

b) Chứng minh rằng hàm số $f(x)=\sqrt{2015-x}-\sqrt{2015+x}$ là một hàm số lẻ.

**Câu 3 (1,0 điểm).**

Giải phương trình: $19+3x+4\sqrt{-x^2-x+6}=6\sqrt{2-x}+12\sqrt{3+x}$.

**Câu 4 (1,0 điểm).**

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2y^2-3xy-y-1=0 \\ x^2+y^2-y-3=0 \end{cases}$

**Câu 5 (1,0 điểm).**

Tìm tất cả các giá trị của $m$ sao cho bất phương trình $(m-1)x^2+2(m+2)x+2m+2\ge 0$ vô nghiệm ($x$ là ẩn, $m$ là tham số).

**Câu 6 (1,0 điểm).**

Cho tam giác *ABC* không cân nội tiếp đường tròn tâm *O* và *G* là trọng tâm của tam giác *ABC*. Gọi *M, N, P* lần lượt là trọng tâm tam giác *OBC, OCA, OAB* và *G'* là trọng tâm tam giác *MNP*. Chứng minh rằng *O, G, G'* thẳng hàng.

**Câu 7 (1,0 điểm).**

Cho tam giác *ABC* không vuông và có các cạnh $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$. Chứng minh rằng nếu tam giác *ABC* thỏa mãn $a^2+b^2=2c^2$ và $\tan A+\tan C=2\tan B$ thì tam giác *ABC* đều.

**Câu 8 (1,0 điểm).**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác *ABC* không là tam giác vuông và nội tiếp đường tròn (*I*) ( đường tròn (*I*) có tâm là $I$ ); điểm $H(2;2)$ là trực tâm tam giác *ABC*. Kẻ các đường kính *AM, BN* của đường tròn (*I*). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC* biết $M(5;3)$, $N(1;3)$ và đường thẳng *BC* đi qua điểm $P(4;2)$.

**Câu 9 (1,0 điểm).**

Cho $a, b, c$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2015$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2015a-a^2}{bc}+\frac{2015b-b^2}{ca}+\frac{2015c-c^2}{ab}+6\ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{2015-a}{a}}+\sqrt{\frac{2015-b}{b}}+\sqrt{\frac{2015-c}{c}}\right).$$

----------**Hết**----------

***Thí sinh không được sử dụng tài liệu.***
***Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.***

Họ và tên thí sinh:……..……..……..……..…..; Số báo danh……

**SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC**

*(Đáp án có 05 trang)*

**KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2014-2015**

**ĐÁP ÁN MÔN: TOÁN**

**(Dành cho học sinh THPT không chuyên)**

**I. LƯU Ý CHUNG:**

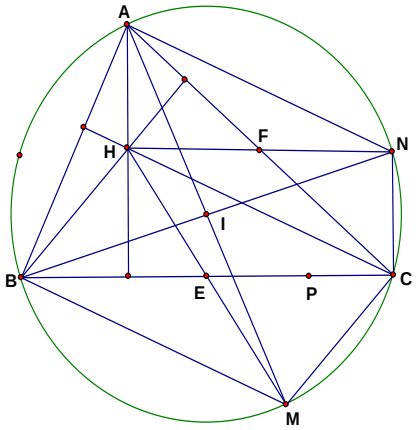
- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

**II. ĐÁP ÁN:**

| Câu | Nội dung trình bày | Điểm |
|---|---|---|
| **1** | **(2,0 điểm)** | |
| | Hàm số $f(x)$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} -x^2+2x+3>0 \\ x^2-2x>0 \end{cases}$ | **1,0** |
| | $\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<3 \\ \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<0 \end{array}\right. \end{cases}$ | **0,5** |
| | $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<3 \\ -1<x<0 \end{array}\right.$. Vậy tập xác định của hàm số $f(x)$ là $S=(-1;0)\cup(2;3)$ | **0,5** |
| **2** | **(1,0 điểm)** | |
| | Với mọi $x_1,x_2\in(-1;+\infty)$, $x_1\neq x_2$ ta có: $K=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{\dfrac{x_1}{x_1+1}-\dfrac{x_2}{x_2+1}}{x_1-x_2}$ | **0,25** |
| | $=\dfrac{x_1(x_2+1)-x_2(x_1+1)}{(x_1-x_2)(x_1+1)(x_2+1)}=\dfrac{x_1-x_2}{(x_1-x_2)(x_1+1)(x_2+1)}=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}>0$ (Do $x_1,x_2\in(-1;+\infty)$). Do đó $K>0\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$. | **0,25** |
| | Tập xác định của hàm số là $D=[-2015;2015]$. Với mọi $x\in D$, ta có $-x\in D$, | **0,25** |
| | $f(-x)=\sqrt{2015+x}-\sqrt{2015-x}=-\left(\sqrt{2015-x}-\sqrt{2015+x}\right)=-f(x)$ suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ. | **0,25** |
| **3** | **(1,0 điểm)** | |
| | Điều kiện xác định: $\begin{cases} -x^2-x+6\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \\ 3+x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3\leq x\leq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với: $19+3x+4\sqrt{(2-x)(3+x)}=6\left(\sqrt{2-x}+2\sqrt{3+x}\right)$ | **0,25** |

| | | |
|---|---|---|
| | Đặt $t=\sqrt{2-x}+2\sqrt{3+x},\ t>0$ ta có:<br>$t^2=2-x+4(3+x)+4\sqrt{(2-x)(3+x)}=14+3x+4\sqrt{(2-x)(3+x)}$<br>Thay vào phương trình trên ta được: $5+t^2=6t\Leftrightarrow t^2-6t+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=5\end{array}\right.$ | **0,25** |
| | +) $t=1\Leftrightarrow\sqrt{2-x}+2\sqrt{3+x}=1\Leftrightarrow 2-x+4(3+x)+4\sqrt{(2-x)(3+x)}=1$<br>$\Leftrightarrow 3x+13+4\sqrt{-x^2-x+6}=0$ vô nghiệm do $-3\le x\le 2$ | **0,25** |
| | +) $t=5\Leftrightarrow\sqrt{2-x}+2\sqrt{3+x}=5\Leftrightarrow 2-x+4(3+x)+4\sqrt{(2-x)(3+x)}=25$<br>$\Leftrightarrow 4\sqrt{-x^2-x+6}=11-3x\Leftrightarrow\begin{cases}16(-x^2-x+6)=(11-3x)^2\\11-3x\ge 0\end{cases}$<br>$\Leftrightarrow\begin{cases}25x^2-50x+25=0\\x\le\dfrac{11}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ thỏa mãn điều kiện.<br>Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{1\}$. | **0,25** |
| **4** | **(1,0 điểm)** | |
| | $\begin{cases}x^2+2y^2-3xy-y-1=0 & (1)\\x^2+y^2-y-3=0 & (2)\end{cases}\ (I)$<br>Ta có $(1)\Leftrightarrow(x-y+1)(x-2y-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y-1\\x=2y+1\end{array}\right.$ | **0,25** |
| | Với $x=y-1$ thay vào (2) ta được $2y^2-3y-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\\y=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$<br>+) $y=2\Rightarrow x=1$.<br>+) $y=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$. | **0,25** |
| | Với $x=2y+1$ thay vào (2) ta được $5y^2+3y-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=\dfrac{2}{5}\end{array}\right.$<br>+) $y=-1\Rightarrow x=-1$.<br>+) $y=\dfrac{2}{5}\Rightarrow x=\dfrac{9}{5}$. | **0,25** |
| | Vậy, hệ (*I*) có nghiệm $(x;y)$ là: $(1;2),(-1;-1),\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{2}{5}\right)$. | **0,25** |
| **5** | **(1,0 điểm)** | |
| | Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi<br>$(m-1)x^2+2(m+2)x+2m+2<0\ \forall x\in\mathbb{R}$ | **0,25** |
| | TH1. Nếu $m=1$ thì $6x+4<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x<-\dfrac{2}{3},\ \forall x\in\mathbb{R}$ vô lí. | **0,25** |
| | TH2. Nếu $m\ne 1$ thì $(m-1)x^2+2(m+2)x+2m+2<0\ \forall x\in\mathbb{R}$ | **0,25** |

| | | |
|---|---|---|
| | $\begin{cases} m-1<0 \\ \Delta'=(m+2)^2-(m-1)(2m+2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ -m^2+4m+6<0 \end{cases}$ | |
| | $\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ \left[\begin{array}{l} m>2+\sqrt{10} \\ m<2-\sqrt{10} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m<2-\sqrt{10}$.<br>Vậy tập hợp các giá trị của $m$ là $S=\left(-\infty;2-\sqrt{10}\right)$. | **0,25** |
| **6** | **(1,0 điểm) Bài này học sinh không nhất thiết phải vẽ hình.** | |
| | Kết quả cơ bản: cho tam giác *ABC* trọng tâm *G*. Khi đó với mọi điểm *O* ta có<br>$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3.\overrightarrow{OG}$.<br>Do *M*, *N*, *P* lần lượt là trọng tâm các tam giác *OBC*, *OCA*, *OAB* nên:<br>$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3.\overrightarrow{OM}$<br>$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=3.\overrightarrow{ON}$<br>$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=3.\overrightarrow{OP}$ | **0,5** |
| | Cộng từng vế 3 hệ thức trên ta được: $2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=3\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)$<br>$\Leftrightarrow 2.3.\overrightarrow{OG}=3.3.\overrightarrow{OG'} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{OG}=3.\overrightarrow{OG'} \Rightarrow O,G,G'$ thẳng hàng. | **0,5** |
| **7** | **(1,0 điểm)** | |
| | Theo định lí hàm số sin và côsin ta có: $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\dfrac{a}{2R}}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\dfrac{abc}{R\left(b^2+c^2-a^2\right)}$ | **0,25** |
| | Tương tự ta có $\tan B==\dfrac{abc}{R\left(c^2+a^2-b^2\right)}$, $\tan C=\dfrac{abc}{R\left(a^2+b^2-c^2\right)}$.<br>$\Rightarrow \tan A+\tan C=2.\tan B \Leftrightarrow \dfrac{abc}{R\left(b^2+c^2-a^2\right)}+\dfrac{abc}{R\left(a^2+b^2-c^2\right)}=2.\dfrac{abc}{R\left(a^2+c^2-b^2\right)}$ | **0,25** |
| | $\Leftrightarrow \dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}=2.\dfrac{1}{a^2+c^2-b^2}$<br>$\Leftrightarrow \left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)+\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)$<br>$=2\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right) \Leftrightarrow a^4-\left(b^2-c^2\right)^2+c^4-\left(a^2-b^2\right)^2=2\left(b^4-\left(a^2-c^2\right)^2\right)$ | **0,25** |
| | $\Leftrightarrow a^2\left(a^2+b^2-2c^2\right)+\left(c^2-b^2\right)\left(c^2+2b^2\right)=0 \Leftrightarrow b=c$ (do $a^2+b^2=2c^2$),<br>kết hợp với $a^2+b^2=2c^2 \Rightarrow a=b=c$.Vậy tam giác *ABC* đều. | **0,25** |
| **8** | **(1,0 điểm)** | |
| | **Nhận xét.** Các tứ giác *BHCM*, *AHCN* là các hình bình hành suy ra nếu gọi *E*, *F* lần lượt là trung điểm của *BC*, *CA* thì *E*, *F* cũng tương ứng là trung điểm của *HM*, *HN*.<br>Do đó $M\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{5}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$. | |
| | Đường thẳng *BC* đi qua điểm P(4;2), $M\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ nên: | **0,25** |

| | | |
|---|---|---|
| | $BC: \dfrac{x-4}{\frac{7}{2}-4} = \dfrac{y-2}{\frac{5}{2}-2} \Leftrightarrow x+y-6=0$.<br>$AH$ vuông góc với $BC$ suy ra $AH$ có vtpt $\vec{n}_{AH} = (1;-1)$, kết hợp với $AH$ đi qua điểm $H(2;2)$ suy ra: $AH: 1(x-2)-1(y-2)=0 \Leftrightarrow x-y=0$. | |
| | $A \in AH \Rightarrow A(a;a)$, $C \in BC \Rightarrow C(b;6-b)$.<br>Do $F$ là trung điểm $AC$ nên:<br>$\begin{cases} x_F = \dfrac{x_A+x_C}{2} \\ y_F = \dfrac{y_A+y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a+6-b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow A(1;1),\ C(2;4)$.<br>Do $E$ là trung điểm của $BC$ nên:<br>$\begin{cases} x_E = \dfrac{x_B+x_C}{2} \\ y_E = \dfrac{y_B+y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_E - x_C \\ y_B = 2y_E - y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = 1 \end{cases} \Rightarrow B(5;1)$.<br>Vậy $A(1;1)$, $B(5;1)$, $C(2;4)$. | **0,5** |
| |  | **0,25** |
| **9** | **(1,0 điểm)** | |
| | Thay $2015 = a+b+c$ thì bất đẳng thức cần chứng minh có dạng:<br>$\dfrac{a(b+c)}{bc} + \dfrac{b(c+a)}{ca} + \dfrac{c(a+b)}{ab} + 6 \ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\dfrac{b+c}{a}} + \sqrt{\dfrac{c+a}{b}} + \sqrt{\dfrac{a+b}{c}}\right)$ | **0,25** |
| | Ta có<br>$\dfrac{a(b+c)}{bc} + \dfrac{b(c+a)}{ca} + \dfrac{c(a+b)}{ab} + 6 = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b} + 6$<br>$= \dfrac{b+c}{a} + 2 + \dfrac{c+a}{b} + 2 + \dfrac{a+b}{c} + 2 \ge 2\sqrt{\dfrac{b+c}{a}.2} + 2\sqrt{\dfrac{c+a}{b}.2} + 2\sqrt{\dfrac{a+b}{c}.2}$ | **0,5** |
| | $= 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\dfrac{b+c}{a}} + \sqrt{\dfrac{c+a}{b}} + \sqrt{\dfrac{a+b}{c}}\right)$.<br>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{2015}{3}$. | **0,25** |

----------Hết----------