SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10,11 THPT NĂM HỌC 2015-2016

ĐỀ THI MÔN: TOÁN 10 - THPT

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1 (1,5 điểm). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$.

$$y=\frac{2015x+2016}{\sqrt{(m-1)x^2+2(m-1)x+4}}$$

Câu 2 (2,5 điểm).

a) Giải bất phương trình $\sqrt{x-2}-2\ge\sqrt{2x-5}-\sqrt{x+1}$.

b) Giải phương trình $x^4-2x^3=\sqrt{2\left(x^2-x\right)}-x$.

Câu 3 (1,0 điểm). Cho phương trình $x^3-(2m+1)x^2+(m+2)x+m-2=0$, trong đó m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=17$.

Câu 4 (3,0 điểm).

a) Cho hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của CD. Tìm điểm K trên đường thẳng BD sao cho K không trùng với D và đường thẳng AK vuông góc với đường thẳng KM.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(-5;1)$, điểm C nằm trên đường thẳng $d: x-2y-3=0$. Gọi giao điểm của đường tròn tâm B bán kính BD với đường thẳng CD là E $(E\neq D)$. Hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng BE là điểm $N(4;-2)$. Tìm tọa độ các điểm B,C,D.

c) Cho tam giác ABC không vuông với độ dài các đường cao kẻ từ đỉnh B,C lần lượt là h_b, h_c, độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A là m_a. Tính $\cos A$, biết $h_b=8$, $h_c=6$, $m_a=5$.

Câu 5 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-y^3+2x^2+4y^2+5=0\\x^2+2y^2+4x-13y+7=0\end{cases}$

Câu 6 (1,0 điểm). Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $a<b$ và $\frac{1+ab}{b-a}\le\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}{a(a+b)}$.

------Hết------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………….……….……………..……..; Số báo danh…………………

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

(Đáp án có 04 trang)

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10,11 THPT NĂM HỌC 2015-2016

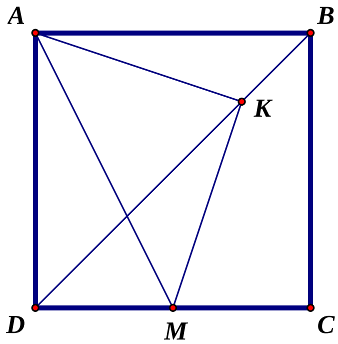
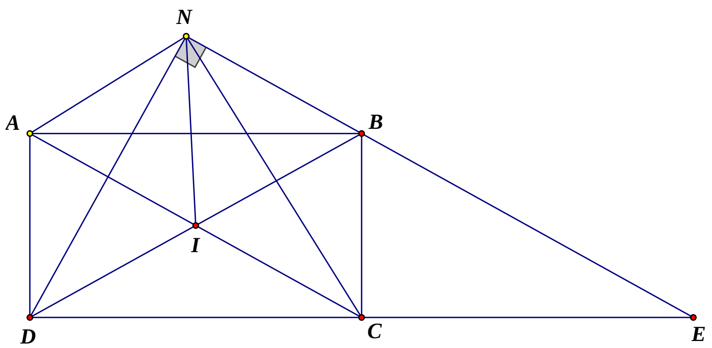
ĐÁP ÁN MÔN: TOÁN 10 - THPT

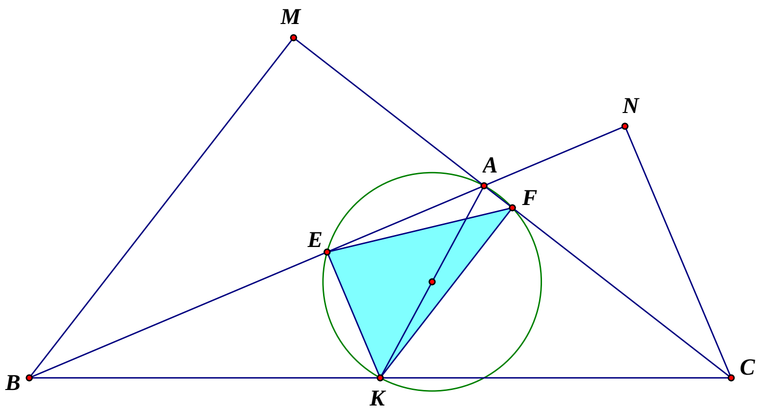
I. LƯU Ý CHUNG:

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	**(1,5 điểm)**	
	Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $$f(x)=(m-1)x^2+2(m-1)x+4>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$	0,25
	Với $m=1$, ta có $f(x)=4>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó $m=1$ thỏa mãn.	0,25
	Với $m\neq 1$, $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\(m-1)^2-4(m-1)<0\end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\(m-1)(m-5)<0\end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow 1<m<5$. Vậy $1\le m<5$.	0,25
2	**a (1,5 điểm)**	
	Điều kiện xác định: $x\ge\frac{5}{2}$.	0,25
	Bất phương trình tương đương: $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}\ge\sqrt{2x-5}+2$.	0,25
	$\Leftrightarrow 2x-1+2\sqrt{(x-2)(x+1)}\ge 2x-1+4\sqrt{2x-5}$.	0,25
	$\Leftrightarrow x^2-9x+18\ge 0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 6\\x\le 3\end{array}\right.$.	0,5
	Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 6$ hoặc $\frac{5}{2}\le x\le 3$.	0,25
	b (1,0 điểm)	
	Điều kiện xác định: $x\ge 1$ hoặc $x\le 0$. PT đã cho tương đương $\left(x^2-x\right)^2=\sqrt{2\left(x^2-x\right)}+\left(x^2-x\right)$.	0,25
	Đặt $t=\sqrt{x^2-x},t\ge 0$, ta được PT: $t^4-t^2-\sqrt{2}.t=0$. $\Leftrightarrow t\left(t^3-t-\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow t\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t^2+\sqrt{2}.t+1\right)=0\Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=\sqrt{2}$.	0,25
	Với $t=0$ thì $x^2-x=0\Leftrightarrow x=0;x=1$.	0,25
	Với $t=\sqrt{2}$ thì $x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=-1;x=2$. Vậy các nghiệm của PT là $x\in\{-1;0;1;2\}$.	0,25
3	**(1,0 điểm)**	
	PT $\Leftrightarrow(x-1)[x^2-2mx+2-m]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2mx+2-m=0\quad(1)\end{array}\right.$	0,25

	Yêu cầu bài toán tương đương: Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ khác 1 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=16.$ Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ phân biệt khác 1 khi $\begin{cases}\Delta'>0\\1-2m+2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m-2>0\\m\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-2\end{array}\right.\quad(*)$	0,25
	Theo định lí Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1x_2=2-m\end{cases}$. Khi đó $x_1^2+x_2^2=16\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=16.$ Do đó $4m^2-2(2-m)=16.$	0,25
	$\Leftrightarrow m=2$ hoặc $m=-\dfrac{5}{2}$. Kết hợp với điều kiện (*) ta được $m=2$, $m=-\dfrac{5}{2}$.	0,25
4	**(3,0 điểm)**	
	a (1,0 điểm)  	
	Gọi a là độ dài cạnh hình vuông $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{DA}=\vec{u};\overrightarrow{DC}=\vec{v}$ thì $\lvert\vec{u}\rvert=\lvert\vec{v}\rvert=a$ và $\vec{u}.\vec{v}=0.$ Giả sử $\overrightarrow{DK}=x\overrightarrow{DB}$ $(x\neq 0)$ thì $\overrightarrow{DK}=x\left(\vec{u}+\vec{v}\right).$	0,25
	Suy ra $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{DK}-\overrightarrow{DA}=(x-1)\vec{u}+x\vec{v}$ và $\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{DK}-\overrightarrow{DM}=x\vec{u}+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\vec{v}.$	0,25
	Ta có $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MK}=0\Leftrightarrow\left((x-1)\vec{u}+x\vec{v}\right)\left(x\vec{u}+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\vec{v}\right)=0\Leftrightarrow x(x-1)a^2+x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)a^2=0$	0,25
	$\Leftrightarrow 2x^2-\dfrac{3}{2}x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}$. Vậy, điểm K nằm trên BD thỏa mãn $\overrightarrow{DK}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{DB}.$	0,25
	b (1,0 điểm)  	
	Gọi $I=AC\cap BD$, do $BND=90^0$ nên $IA=IB=IC=ID=IN$, suy ra $ANC=90^0.$	0,25

	CN có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AN} = \ 9;-3\ $ nên phương trình $CN: 3x - y - 14 = 0$. Tọa độ C thỏa mãn hệ $\begin{cases} 3x - y - 14 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$, suy ra $C(5;1)$.	0,25
	Do $BD = BE$ và $BC \perp DE$ nên C là trung điểm DE, suy ra $CI \parallel BE$. Do đó D đối xứng với N qua AC.	0,25
	Phương trình $AC: y - 1 = 0$, từ đó suy ra $D(4;4)$. Do $I(0;1)$ nên $B(-4;-2)$. Vậy $B(-4;-2), C(5;1), D(4;4)$.	0,25
	c (1,0 điểm)  	
	Vẽ đường cao BM và CN của tam giác ABC ($M \in AC, N \in AB$). Gọi K là trung điểm của BC, qua K kẻ đường thẳng song song với CN và BM cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Khi đó E là trung điểm BN và F là trung điểm CM.	0,25
	Bốn điểm A, E, K, F nằm trên đường tròn đường kính $AK = 5$, theo định lý sin trong tam giác EKF ta được $EF = AK.\sin EKF = 5\sin A$.	0,25
	Áp dụng định lý cosin trong tam giác EKF ta được : $EF^2 = KE^2 + KF^2 - 2KE.KF.\cos EKF = 3^2 + 4^2 + 2.3.4.\cos A$	0,25
	$\Leftrightarrow 25\sin^2 A = 25 + 24.\cos A \Leftrightarrow 25\left(1 - \cos^2 A\right) = 25 + 24.\cos A$ $\Leftrightarrow \cos A = -\dfrac{24}{25}$ (vì $\cos A \neq 0$).	0,25
5	**(1,0 điểm).** Giải hệ $\begin{cases} x^3 - y^3 + 2x^2 + 4y^2 + 5 = 0 \ \ (1) \\ x^2 + 2y^2 + 4x - 13y + 7 = 0 \ (2) \end{cases}$	
	Cộng tương ứng hai vế của (1) và (2) ta được $x^3 + 3x^2 + 4x = y^3 - 6y^2 + 13y - 12 \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = (y-2)^3 + (y-2)$.	0,25
	$\Leftrightarrow (x+1-y+2)\left[(x+1)^2 + (x+1)(y-2) + (y-2)^2 + 1\right] = 0 \Leftrightarrow y = x + 3$.	0,25
	Thế $y = x + 3$ vào (2) ta được: $3x^2 + 3x - 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3+\sqrt{177}}{6} \\ x = \dfrac{-3-\sqrt{177}}{6} \end{array}\right.$	0,25

	Vậy hệ có nghiệm $x;y$ là: $\left(\dfrac{-3+\sqrt{177}}{6};\dfrac{15+\sqrt{177}}{6}\right);\left(\dfrac{-3-\sqrt{177}}{6};\dfrac{15-\sqrt{177}}{6}\right)$.	0,25
6	**(1,0 điểm).**	
	Ta có $\sqrt{3}(b-a)\ge 1+ab$ (1), mà $1+ab\ge 2\sqrt{ab}$, suy ra $$\sqrt{3}(b-a)\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\ge\frac{2}{\sqrt{3}}$$ Đặt $t=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ta được $t-\dfrac{1}{t}\ge\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow t\ge\sqrt{3}\Leftrightarrow b\ge 3a\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}\le\dfrac{1}{3}$.	0,25
	Ta có $P=\dfrac{(1+a^2)(1+b^2)}{a(a+b)}=\dfrac{(b-a)^2+(ab+1)^2}{a(a+b)}\ge\dfrac{4(ab+1)^2}{3a(a+b)}$ (theo (1))	0,25
	Mặt khác $\dfrac{4(ab+1)^2}{3a(a+b)}\ge\dfrac{4.4ab}{3a(a+b)}=\dfrac{16b}{3(a+b)}=\dfrac{16}{3\left(\dfrac{a}{b}+1\right)}\ge\dfrac{16}{3\left(\dfrac{1}{3}+1\right)}=4.$	0,25
	Do đó $P\ge 4$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}};b=\sqrt{3}$. Vậy $\min P=4$.	0,25

-------**Hết**-------