

**Câu 1 (2,0 điểm)**

a. Tìm tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{x-2017} + \frac{2016}{\sqrt{x^2-3x}}$ .

b. Chứng minh rằng hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$  nghịch biến trên tập xác định.

**Câu 2 (1,5 điểm).** Giải phương trình  $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+7} - 2$ .

**Câu 3 (1,0 điểm).** Tìm tham số  $m$  để hàm số  $y = \sqrt{-x^2 + 2mx + m - 3} + \frac{1}{x^2 + 1}$  có tập xác định là một đoạn có độ dài bằng 4.

**Câu 4 (1,5 điểm).** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} y^3 - x^3 + 3x^2 = 6y^2 - 16y + 7x + 11 \\ (y+2)\sqrt{x+4} + (x+9)\sqrt{2y-x+9} = x^2 + 9y + 1 \end{cases}$

**Câu 5 (3,0 điểm)**

a. Cho tam giác ABC với các cạnh tương ứng là  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Chứng minh rằng nếu  $\sin A = \frac{\sin B + 2 \sin C}{2 \cos B + \cos C}$  thì tam giác ABC vuông.

b. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi I là trung điểm của AC và M là điểm thỏa mãn  $\vec{OM} = 2\vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC}$ . Biết rằng OM vuông góc với BI và  $AC^2 = 3BC \cdot BA$ . Tính góc ABC

c. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có góc ACB tù. Hai điểm  $D(4;1)$ ,

$E(2;-1)$  lần lượt là chân đường cao kẻ từ đỉnh A và B của tam giác ABC. Trung điểm của cạnh

AB là điểm  $N(1;2)$ , trung điểm của cạnh AC là điểm M nằm trên đường thẳng có phương trình

$2x - 6y + 5 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết điểm M có hoành độ lớn hơn 3.

**Câu 6 (1,0 điểm).** Cho ba số thực không âm  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b > 0, a + c > 0, b + c > 0$ .

Chứng minh rằng  $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c} \geq 6$ .

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GD&ĐT VINH PHÚC – KỶ THI CHỌN HSG LỚP 10, 11 THPT NĂM HỌC 2016 - 2017

(Đáp án có 04 trang)

**ĐÁP ÁN MÔN: TOÁN 10 - THPT**

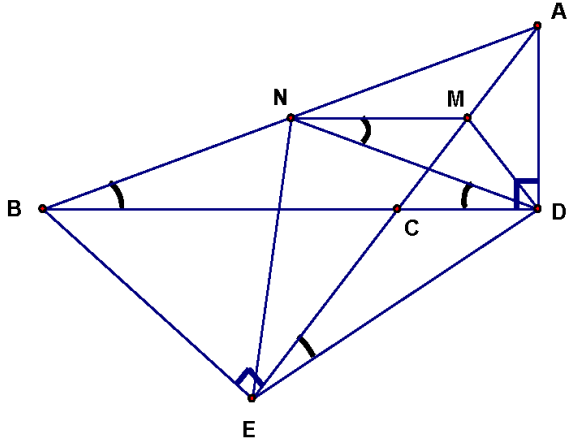
**I. LƯU Ý CHUNG:**

- Hướng dẫn chấm chi trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Câu 5c nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì không cho điểm.

**II. ĐÁP ÁN:**

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	a. (1,0 điểm) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x - 2017 > 0 \\ x^2 - 3x > 0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2017 \\ x > 3 \\ x < 0 \end{cases}$	0,5
	Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 0) \cup (3; 2017) \cup (2017; +\infty)$ .	0,25
	b. (1,0 điểm) Tập xác định của hàm số $D = (-2; +\infty)$ .	0,25
	Với mọi giá trị $x_1, x_2 \in (-2; +\infty)$ , $x_1 < x_2$ ta có $f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{x_2 - 2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1 - 2}} = \frac{\sqrt{x_1 - 2} - \sqrt{x_2 - 2}}{\sqrt{x_2 - 2}\sqrt{x_1 - 2}}$	0,25
	$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{\sqrt{x_1 - 2} - \sqrt{x_2 - 2}}{\sqrt{x_1 - 2}\sqrt{x_2 - 2}} = \frac{1}{\sqrt{x_1 - 2}\sqrt{x_2 - 2}(\sqrt{x_1 - 2} + \sqrt{x_2 - 2})} < 0$	0,25
Vậy hàm số nghịch biến trên $D = (-2; +\infty)$ . (1,5 điểm)	0,25	
2	ĐKND: $x > 2$ . Khi đó phương trình trở thành $\sqrt{3x - 1} + 2 = \sqrt{x - 2} + \sqrt{2x + 7}$	0,25
	$\Leftrightarrow 3x - 5 + 4\sqrt{3x - 1} = 3x - 5 + 2\sqrt{(x - 2)(2x + 7)}$	0,5
	$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x - 1} = \sqrt{(x - 2)(2x + 7)}$	0,5
	$\Leftrightarrow 4(3x - 1) = 2x^2 + 3x - 14 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 6 \end{cases}$	0,5
	Kết hợp điều kiện, suy ra phương trình có nghiệm là $x = 6$ .	0,25
3	(1,0 điểm) Điều kiện xác định: $x^2 - 2mx + m - 3 > 0$ (*)	0,25
	Hàm số đã cho có tập xác định là một đoạn có độ dài bằng 4 khi và chỉ khi bpt (*) có tập nghiệm là một đoạn có độ dài bằng 4. Vì bpt (*) có hệ số $a = 1 < 0$ nên tập nghiệm của (*) là một đoạn có độ dài bằng 4 khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ và $ x_1 - x_2  = 4$ .	0,25

	$\text{Yêu cầu } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\  x_1 - x_2  = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 3 > 0 \\ \left  2\sqrt{m^2 - m - 3} \right  = 4 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 3 > 0 \\ m^2 - m - 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1 - \sqrt{29}}{2} \\ m = \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \end{cases}$ <p>Vậy các giá trị của <math>m</math> là <math>m = \frac{1 - \sqrt{29}}{2}, m = \frac{1 + \sqrt{29}}{2}</math>.</p>	0,25
	<p><b>(1,5 điểm)</b></p> <p>Điều kiện: <math>\begin{cases} x + 4 &gt; 0 \\ 2y - x - 9 &gt; 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &gt; -4 \\ 2y - x - 9 &gt; 0 \end{cases}</math></p> <p>Phương trình thứ nhất tương đương <math>(y - 2)' - 4(y - 2) = (x - 1)' - 4(x - 1)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow (y - x + 1)(y - 2)' - (y - 2)(x - 1)' - (x - 1)' + 4 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1</math>.</p>	0,5
4	<p>Thế vào phương trình thứ hai ta được</p> $(x - 3)\sqrt{x - 4} = (x - 9)\sqrt{x - 11} \quad x^2 - 9x - 10$ $\Leftrightarrow (x - 3)\sqrt{x - 4} - 3 = (x - 9)\sqrt{x - 11} - 4 \quad x^2 - 2x - 35$ $\Leftrightarrow (x - 5) \left( \frac{x - 3}{\sqrt{x - 4} - 3} - \frac{x - 9}{\sqrt{x - 11} - 4} - (x - 7) \right) = 0 \quad (*)$	0,5
	<p>Từ <math>x &gt; -4</math>, nên <math>\frac{x - 3}{\sqrt{x - 4} - 3} &lt; \frac{x - 4}{2} &lt; \frac{x - 9}{\sqrt{x - 11} - 4} &lt; \frac{x - 10}{2}</math> suy ra</p> $\frac{x - 3}{\sqrt{x - 4} - 3} - \frac{x - 9}{\sqrt{x - 11} - 4} - (x - 7) < \frac{x - 4}{2} - \frac{x - 10}{2} - (x - 7) = 0.$ <p>Do đó <math>(*) \Leftrightarrow x = 5</math>.</p>	0,25
	<p>Với <math>x = 5 \Rightarrow y = 6</math>. Vậy hệ có nghiệm duy nhất <math>(x, y) = (5, 6)</math>.</p>	0,25
	<p><b>a. (1,0 điểm)</b></p> <p>Gọi <math>R</math> là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>ABC</math>.</p> <p>Áp dụng định lý Sin, Cosin trong tam giác <math>ABC</math> ta có <math>\sin A = \frac{a}{2R}; \sin B = \frac{b}{2R};</math></p> $\sin C = \frac{c}{2R}; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$	0,25
5	<p>Khi đó <math>\sin A = \frac{\sin B + 2\sin C}{2\cos B + \cos C} \Leftrightarrow a = \frac{b + 2c}{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}</math></p>	0,25
	$\Leftrightarrow 2a^2b - 2c^2b - 2b^3 - b^2c + ac^2 - c^3 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (2b - c)(a^2 - b^2 - c^2) = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \quad 0 < a^2 = b^2 + c^2.$ <p>Vậy tam giác <math>ABC</math> vuông tại <math>A</math>.</p>	0,25
	<p><b>b. (1,0 điểm)</b></p> <p>Ta có <math>OM \perp BI \Rightarrow 2OM \cdot BI = 0 \Rightarrow (2OA \cdot OB - 2OC)(BA \cdot BC) = 0</math></p>	0,25
	$\Leftrightarrow (5OB \cdot 2BI - 2BC^2)(BA \cdot BC) = 0 \Leftrightarrow 5OB \cdot BA - 5OB \cdot BC - 2(BA \cdot BC)^2 = 0.$	0,25
	<p>Gọi <math>H, K</math> tương ứng là trung điểm của đoạn <math>AB, BC</math>. Khi đó</p>	0,25

$5\vec{OB} \cdot \vec{BA} + 5\vec{OB} \cdot \vec{BC} + 2(\vec{BA} + \vec{BC})^2 = 0$ $\Leftrightarrow 5(\vec{OH} + \vec{HB}) \cdot \vec{BA} + 5(\vec{OK} + \vec{KB}) \cdot \vec{BC} + 2(\vec{BA} + \vec{BC})^2 = 0$ $\Leftrightarrow -\frac{5}{2}BA^2 - \frac{5}{2}BC^2 + 2BA^2 + 2BC^2 + 2.2\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{2}BA^2 - \frac{1}{2}BC^2 + 2.(AB^2 + BC^2 - AC^2) = 0 \Leftrightarrow AC^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2).$	
<p>Do đó <math>\cos \widehat{ABC} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2.BA.BC} = \frac{\frac{4}{3}AC^2 - AC^2}{\frac{2}{3}AC^2} = \frac{1}{2}</math>, suy ra <math>\widehat{ABC} = 60^\circ</math>.</p>	<b>0,25</b>
<b>c. (1,0 điểm)</b>	
	
<p>Do <math>ADEB</math> nội tiếp nên <math>\widehat{AED} = \widehat{ABD}</math>. (1)          Tam giác <math>ABD</math> vuông tại <math>D</math>, suy ra <math>\Delta BND</math> cân tại <math>N \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDN}</math>. (2)          Lại có <math>\widehat{BDN} = \widehat{DNM}</math> (so le trong) (3)</p> <p>Từ (1), (2), (3) suy ra <math>\widehat{MND} = \widehat{MED} \Rightarrow MDEN</math> nội tiếp đường tròn.</p> <p>Gọi phương trình đường tròn đi qua bốn điểm <math>M, D, E, N</math> có dạng</p> $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 - c > 0)$ <p>Vi <math>D(4;1), E(2;-1), N(1;2)</math> thuộc đường tròn, ta có:</p>	<b>0,25</b>
$\begin{cases} 16 + 1 - 8a - 2b + c = 0 \\ 4 + 1 - 4a + 2b + c = 0 \\ 1 + 4 - 2a - 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{4} \\ b = \frac{3}{4} \\ c = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$ <p>Vậy phương trình đường tròn qua <math>M, D, E, N</math> là: <math>2x^2 + 2y^2 - 9x - 3y + 5 = 0</math></p> <p>Tọa độ điểm <math>M</math> là nghiệm của hệ <math>\begin{cases} 2x - 6y + 5 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - 9x - 3y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}; y = 1 \\ x = \frac{7}{2}; y = 2 \end{cases}</math>.</p>	<b>0,25</b>

	<p>Do <math>M</math> có hoành độ lớn hơn 3, nên <math>M\left(\frac{7}{2}; 2\right)</math>.</p> <p>Phương trình đường thẳng <math>AC</math>: <math>y = 2x - 5</math></p> <p>Đặt <math>A(t; 2t - 5)</math>, ta có <math>MA = MB = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow (t - 1)^2 + (2t - 7)^2 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases}</math></p> <p>Với <math>t = 2 \Rightarrow A(2; -1) \notin</math> (loại)</p> <p>Với <math>t = 4 \Rightarrow A(4; 3)</math>, suy ra <math>B(-2; 1)</math> và <math>C(3; 1)</math>.</p>	
	<p>Thử lại <math>C(A) = (1; 2) \in \overline{BC} \Rightarrow C \notin \overline{BC} \Rightarrow \angle C &lt; 90^\circ</math> (thỏa mãn)</p> <p>Vậy <math>A(4; 3)</math>, <math>B(-2; 1)</math>, <math>C(3; 1)</math>.</p>	0,25
	<p><b>(1,0 điểm)</b></p> <p>Không mất tính tổng quát, giả sử <math>a &gt; b &gt; c</math>, khi đó <math>a &gt; 0</math>.</p> <p>Ta chứng minh: <math>\frac{ab}{a+c} &gt; \frac{b^2}{b+c}</math> và <math>\frac{ac}{a+b} &gt; \frac{c^2}{b+c}</math></p> <p>Thật vậy <math>\frac{ab}{a+c} &gt; \frac{b^2}{b+c} \Leftrightarrow ab(b+c) &gt; b^2(a+c) \Leftrightarrow bc(a-b) &gt; 0</math> (Đúng).</p> <p>Tương tự chứng minh được <math>\frac{ac}{a+b} &gt; \frac{c^2}{b+c}</math>.</p>	0,25
	<p>Khi đó <math>\sqrt{\frac{ab}{a+c}} + \sqrt{\frac{ac}{a+b}} &gt; \sqrt{\frac{b^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2}{b+c}} = \sqrt{b+c} = \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} &gt; \sqrt{\frac{b+c}{a}}</math>.</p>	0,25
6	<p>Vậy <math>\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} = \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c} &gt; \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{9\sqrt{a(b+c)+bc}}{a+(b+c)}</math></p> <p><math>&gt; \frac{a+b+c}{\sqrt{a(b+c)}} + \frac{9\sqrt{a(b+c)}}{a+b+c} &gt; 2\sqrt{\frac{a+b+c}{a(b+c)}} + \frac{9\sqrt{a(b+c)}}{a+b+c} \quad 6 \quad (\text{Do } bc &gt; 0)</math></p>	0,25
	<p>Đầu đẳng thức xảy ra khi <math>\begin{cases} bc = 0 \\ a = (b+c) = 3\sqrt{a(b+c)} \\ a &gt; b &gt; c \end{cases}</math></p> <p>Hệ có vô số nghiệm, chẳng hạn <math>c = 0, b = 1, a = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}</math>.</p> <p>Vậy bất đẳng thức được chứng minh.</p>	0,25

-----HẾT-----