

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ SỐ PHỨC ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT QG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Một số phức là một biểu thức có dạng $a + bi$, trong đó a, b là các số thực và số i thỏa mãn $i^2 = -1$. Ký hiệu số phức đó là z và viết $z = a + bi$.

i được gọi là đơn vị ảo

a được gọi là phần thực. Ký hiệu $\text{Re}(z) = a$

b được gọi là phần ảo của số phức $z = a + bi$, ký hiệu $\text{Im}(z) = b$

Tập hợp các số phức ký hiệu là \mathbb{C} .

*) Một số lưu ý:

- Mỗi số thực a dương đều được xem như là số phức với phần ảo $b = 0$.

- Số phức $z = a + bi$ có $a = 0$ được gọi là số thuần ảo hay là số ảo.

- Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

2. Hai số phức bằng nhau.

Cho $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$.

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

3. Biểu diễn hình học của số phức.

Mỗi số phức được biểu diễn bởi một điểm $M(a;b)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Ngược lại, mỗi điểm $M(a;b)$ biểu diễn một số phức là $z = a + bi$.

4. Phép cộng và phép trừ các số phức.

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Ta định nghĩa:

$$\begin{cases} z + z' = (a + a') + (b + b')i \\ z - z' = (a - a') + (b - b')i \end{cases}$$

5. Phép nhân số phức.

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Ta định nghĩa:

$$zz' = aa' - bb' + (ab' - a'b)i$$

6. Số phức liên hợp.

Cho số phức $z = a + bi$. Số phức $\bar{z} = a - bi$ gọi là số phức liên hợp với số phức trên.

$$\text{Vậy } \bar{\bar{z}} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Chú ý: 1⁰) $\bar{\bar{z}} = z \Rightarrow z$ và \bar{z} gọi là hai số phức liên hợp với nhau.

$$2^0) z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

*) Tính chất của số phức liên hợp:

$$(1): \bar{\bar{z}} = z$$

$$(2): \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$(3): \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

$$(4): z \cdot \bar{z} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (z = a + bi)$$

7. Môđun của số phức.

Cho số phức $z = a + bi$. Ta ký hiệu $|z|$ là môđun của số phức z , đó là số thực không âm được xác định như sau:

- Nếu $M(a;b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$, thì $|z| = |OM| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Nếu $z = a + bi$, thì $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

8. Phép chia số phức khác 0.

Cho số phức $z = a + bi \neq 0$ (tức là $a^2 + b^2 > 0$)

Ta định nghĩa số nghịch đảo z^{-1} của số phức $z \neq 0$ là số

$$z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$$

Thương $\frac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức $z \neq 0$ được xác định như sau:

$$\frac{z'}{z} = z \cdot z^{-1} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{|z|^2}$$

Với các phép tính cộng, trừ, nhân chia số phức nói trên nó cũng có đầy đủ tính chất giao hoán, phân phối, kết hợp như các phép cộng, trừ, nhân, chia số thực thông thường.

9. Phương trình bậc hai với hệ số thực.

* Cho phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$, có $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta > 0$, PT có 2 nghiệm thực phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

+ Nếu $\Delta = 0$, PT có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

+ Nếu $\Delta < 0$, PT có 2 nghiệm phức $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

* Cho phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$.

Khi b chẵn có $b' = b/2$; $\Delta' = b'^2 - ac$.

+ Nếu $\Delta' > 0$, PT có 2 nghiệm thực phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$

+ Nếu $\Delta' = 0$, PT có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$

+ Nếu $\Delta' < 0$, PT có 2 nghiệm phức $x_{1,2} = \frac{-b' \pm i\sqrt{|\Delta'|}}{a}$

10. Một số kết quả cần nhớ

1) $i^0 = 1 \Rightarrow i^{4n} = 1$

2) $i^1 = i \Rightarrow i^{4n+1} = i$

3) $i^2 = -1 \Rightarrow i^{4n+2} = -1$

4) $i^3 = -i \Rightarrow i^{4n+3} = -i$

5) $(1 - i)^2 = -2i$

6) $(1 + i)^2 = 2i$

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP**DẠNG I. TÍNH TOÁN CÁC YẾU TỐ CỦA SỐ PHỨC**

I. PHƯƠNG PHÁP: Sử dụng định nghĩa, các phép toán để tính toán các yếu tố có liên quan.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. (Mã đề 101 - QG – 2017) Cho hai số phức $z_1 = 5 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

- A. $z = 7 - 4i$ B. $z = 2 + 5i$ C. $z = -2 + 5i$ D. $z = 3 - 10i$

Hướng dẫn giải

Ta có $z = z_1 + z_2 = (5 - 7i) + (2 + 3i) = 7 - 4i$

Đáp án: A

Ví dụ 2. (Mã đề 102 - QG – 2017) Cho số phức $z = 1 - i + i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z .

- A. $a = 0, b = 1$ B. $a = -2, b = 1$ C. $a = 1, b = 0$ D. $a = 1, b = -2$

Hướng dẫn giải

Ta có $z = 1 - i + i^3 = 1 - i - i = 1 - 2i \Rightarrow a = 1, b = -2$.

Đáp án: D

Ví dụ 3. (Mã đề 104 - QG – 2017) Tìm số phức z thỏa mãn $z + 2 - 3i = 3 - 2i$

- A. $z = 1 - 5i$ B. $z = 1 + i$ C. $z = 5 - 5i$ D. $z = 1 - i$

Hướng dẫn giải

Ta có $z + 2 - 3i = 3 - 2i \Leftrightarrow z = 3 - 2i - 2 + 3i = 1 + i$

Đáp án: B

Ví dụ 4. (Mã đề 104 - QG – 2017) Cho số phức $z = 2 + i$. Tính $|z|$.

- A. $|z| = 3$ B. $|z| = 5$ C. $|z| = 2$ D. $|z| = \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Ta có $|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Đáp án: D

Ví dụ 5. (QG-2019) Số phức liên hợp của số phức $3 - 4i$ là

- A. $-3 - 4i$. B. $-3 + 4i$. C. $3 + 4i$. D. $-4 + 3i$.

Hướng dẫn giải

Đáp án: C

III. BÀI TẬP

Câu 1. (Mã đề 101 - QG – 2017) Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

- A. $z = -2 + 3i$. B. $z = 3i$. C. $z = -2$. D. $z = \sqrt{3} + i$.

Câu 2. (Mã đề 102 - QG – 2017) Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i$ và $z_2 = 7 + 3i$. Tìm số phức

$z = z_1 - z_2$

- A. $z = 11$. B. $z = 3 + 6i$ C. $z = -1 - 10i$ D. $z = -3 - 6i$

Câu 3. (Mã đề 103 - QG – 2017) Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = -2 - 5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z = z_1 - z_2$.

- A. $b = -2$ B. $b = 2$ C. $b = 3$ D. $b = -3$

Câu 4. (Mã đề 103 - QG – 2017) Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần thực a của z .

- A.** $a=2$ **B.** $a=3$ **C.** $a=-3$ **D.** $a=-2$
- Câu 5. (QG – 2018)** Số phức $-3+7i$ có phần ảo bằng
A. 3. **B.** -7 . **C.** -3 . **D.** 7.
- Câu 6. (QG – 2018)** Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là
A. $3+4i$. **B.** $4-3i$. **C.** $3-4i$. **D.** $4+3i$.
- Câu 7. (QG – 2018)** Số phức $5+6i$ có phần thực bằng
A. -5 . **B.** 5. **C.** -6 . **D.** 6.
- Câu 8. (QG – 2018)** Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là
A. $-1-3i$. **B.** $1-3i$. **C.** $-1+3i$. **D.** $1+3i$.
- Câu 9. (QG-2019)** Số phức liên hợp của số phức $5-3i$ là
A. $-5+3i$. **B.** $-3+5i$. **C.** $-5-3i$. **D.** $5+3i$.
- Câu 10. (QG-2019)** Số phức liên hợp của số phức $3-2i$ là
A. $-3+2i$. **B.** $3+2i$. **C.** $-3-2i$. **D.** $-2+3i$.
- Câu 11. (QG-2019)** Số phức liên hợp của số phức $1-2i$ là
A. $-1-2i$. **B.** $1+2i$. **C.** $-2+i$. **D.** $-1+2i$
- .
- Câu 12.** Cho số phức $z = -6-3i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức \bar{z} .
A. Phần thực bằng -6 và phần ảo bằng $-3i$
B. Phần thực bằng -6 và phần ảo bằng 3
C. Phần thực bằng 6 và phần ảo bằng 3
D. Phần thực bằng 6 và phần ảo bằng $3i$
- Câu 13.** Cho 2 số phức z và z' . Các phát biểu nào sau đây **sai** ?
A. $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ **B.** $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ **C.** $\bar{\bar{z}} = z$ **D.** $\frac{z}{z'} = \frac{z \cdot \bar{z}'}{z' \cdot \bar{z}}$
- Câu 14.** Cho số phức $z = 3-4i$. Phần thực và phần ảo số phức z là
A. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-4i$;
B. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4;
C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $4i$;
D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -4 .
- Câu 15.** Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = i^{2020}$.
A. 0 và 2020 **B.** 0 và 1 **C.** 1 và 0 **D.** 2020 và 0
- Câu 16.** Tìm phần thực, phần ảo của $z = (4-i) + (2+3i) - (5+i)$
A. phần thực là 1, phần ảo là 1 **B.** phần thực là 11, phần ảo là 1
C. phần thực là 1, phần ảo là 3 **D.** phần thực là 11, phần ảo là 3
- Câu 17.** Cho số phức $z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$. Trong các kết luận sau kết luận nào đúng?
A. z có phần thực và phần ảo $\neq 0$.
B. z là số thuần ảo.
C. Mô đun của z bằng 1
D. z có phần thực và phần ảo đều bằng 0.
- Câu 18.** Tính $z + \bar{z}$ và $z \cdot \bar{z}$ biết $z = 2+3i$
A. 4 và 13 **B.** 4 và 5 **C.** 4 và 0 **D.** 13 và 5
- Câu 19.** Cho số phức $z = 2+3i$. Tìm số phức $w = 2iz - \bar{z}$.
A. $w = -8+7i$ **B.** $w = -8+i$ **C.** $w = 4+7i$ **D.** $w = -8-7i$
- Câu 20.** Cho số phức $z_1 = 1+3i$ và $z_2 = 3-4i$. Môđun số phức $z_1 + z_2$ là

- A. $\sqrt{17}$; B. $\sqrt{15}$; C. 4; D. 8.

Câu 21. Số phức nghịch đảo của số phức $z = 1 - \sqrt{3}i$ là:

- A. $z^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ B. $z^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ C. $z^{-1} = 1 + \sqrt{3}i$ D. $z^{-1} = -1 +$

$\sqrt{3}i$

Câu 22. Mô đun của số phức $z = 5 + 2i - (i+1)^3$ là

- A. 7 B. 3 C. 5 D. 2

Câu 23. Cho số phức $z = a + bi$ (với a, b là các số thực). Xét các phát biểu sau

- (1) $z^2 - \bar{z}^2$ là số thực (2) $z^2 + \bar{z}^2$ là số ảo
(3) $z\bar{z}$ là số thực (4) $|z| - z$ là bằng 0

Số câu phát biểu đúng là

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 24. Giá trị của $A = (1 + i)^{20}$ bằng

- A. 1024 B. 2^{20} C. -1024 D. $1024 -$

1024i

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn: $\bar{z}(1+2i) = 7+4i$. Tìm mô đun số phức $\omega = z + 2i$.

- A. 5 B. $\sqrt{17}$ C. $\sqrt{24}$ D. 4

Câu 26. Cho số phức z biết $\bar{z} = 2 - i + \frac{i}{1+i}$. Phần ảo của số phức z^2 là

- A. $\frac{5}{2}i$. B. $-\frac{5}{2}i$. C. $\frac{5}{2}$. D. $-\frac{5}{2}$.

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn: $\bar{z} = \frac{(1-i\sqrt{3})^3}{1-i}$. Tìm mô đun của $\bar{z} + iz$.

- A. $8\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 8 D. 4

Câu 28. Phần thực của số phức z thỏa mãn $(1+i)^2(2-i)z = 8+i+(1+2i)z$ là

- A. -6 B. -3 C. 2 D. -1

DẠNG II. PHƯƠNG TRÌNH TRÊN TẬP SỐ PHỨC

I. PHƯƠNG PHÁP : Sử dụng các phương pháp giải phương trình mẫu mực như phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai... với ẩn là số phức z .

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. (Mã đề 101 - QG – 2017) Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1 + \sqrt{2}i$ và $1 - \sqrt{2}i$ là nghiệm ?

- A. $z^2 + 2z + 3 = 0$ B. $z^2 - 2z - 3 = 0$ C. $z^2 - 2z + 3 = 0$ D. $z^2 + 2z - 3 = 0$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có $(1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{2}i) = 2$; $(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = 2$. Suy ra $1 + \sqrt{2}i$ và $1 - \sqrt{2}i$ là nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 3 = 0$.

Đáp án: C

Cách 2: Thử đáp án bằng MTBT

Ví dụ 2. (Mã đề 102 - QG – 2017) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình

$3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$

- A. $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $P = \frac{2}{3}$. D. $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$ có hai nghiệm $z_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{6}$.

Khi đó $P = |z_1| + |z_2| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Đáp án: **B**

Ví dụ 3. Tìm số phức sau:

a) $(1 + z)(2 + 3i) = 1 + i$

b) $\frac{2+i}{1-i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$

Giải

a) Ta có $(1 + z)(2 + 3i) = 1 + i$

$$\Leftrightarrow 1 + z = \frac{1+i}{2+3i}$$

$$\Leftrightarrow 1 + z = \frac{5-i}{13}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{8}{13} - \frac{1}{13}i$$

b) Ta có

$$\frac{2+i}{1-i}z = \frac{-1+3i}{2+i} \Leftrightarrow z = \frac{(-1+3i)(1-i)}{(2+i)^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2+4i}{3+4i} \Leftrightarrow z = \frac{(2+4i)(3-4i)}{25}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{22}{25} + \frac{4}{25}i$$

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau trên trường số phức:

a) $z^4 + 2z^2 - 3 = 0$

b) $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$ (1)

Giải

a) Ta có $z^4 + 2z^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 1 \\ z^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm 1 \\ z = \pm i\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm $\begin{cases} z = \pm 1 \\ z = \pm i\sqrt{3} \end{cases}$

b) Do tổng tất cả các hệ số của phương trình (1) bằng 0 nên (1) có nghiệm $z = 1$.

$$(1) \Leftrightarrow (z - 1)(z^3 - 3z^2 + 4z - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 1)(z - 3)(z^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = 3 \\ z^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = 3 \\ z = 2i \\ z = -2i \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$z = 2i; z = -2i; z = 1; z = 3$$

III. BÀI TẬP

Câu 1. (Mã đề 103 - QG – 2017) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình

$$z^2 - z + 6 = 0. \text{ Tính } P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$$

- A.** $P = \frac{1}{6}$. **B.** $P = \frac{1}{12}$ **C.** $P = -\frac{1}{6}$. **D.** $P = 6$.

Câu 2. (QG-2019) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$. Giá trị $z_1^2 + z_2^2$ bằng

- A.** 16. **B.** 56. **C.** 20. **D.** 26.

Câu 3. (QG-2019) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 14 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

- A.** 36. **B.** 8. **C.** 28. **D.** 18.

Câu 4. (QG-2019) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

- A.** 6. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 26.

Câu 5. (QG-2019) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 7 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

- A.** 10. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 2.

Câu 6. Tìm mô đun của số phức z thỏa $3iz + (3-i)(1+i) = 2$.

- A.** $|z| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $|z| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $|z| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ **D.** $|z| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z - 5 - 5i = 0$. Tìm số phức $w = \bar{z} + \frac{10}{z}$

- A.** $6 + 2i$ **B.** $2 + 6i$ **C.** $-2 + 6i$ **D.** $-6 + 2i$

Câu 8. Giải phương trình $(2 + 3i)z = z - 1$.

- A.** $z = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$. **B.** $z = -\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$. **C.** $z = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$. **D.** $z = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$.

Câu 9. Giải phương trình $(2 - i)\bar{z} - 4 = 0$.

- A.** $z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$. **B.** $z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i$. **C.** $z = \frac{5}{10} + \frac{3}{10}i$. **D.** $z = \frac{1}{13} - \frac{3}{13}i$.

Câu 10. Giải phương trình $\frac{2+i}{1-i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$.

- A.** $z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$. **B.** $z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i$. **C.** $z = \frac{22}{25} + \frac{4}{25}i$. **D.** $z = \frac{1}{13} - \frac{3}{13}i$.

Câu 11. Tìm nghiệm của phương trình $\frac{2z-1}{z+i} = 1+i$

A. $z = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$. B. $z = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}i$. C. $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. D. $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Câu 12. Tìm nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$.

A. $z_1 = -1 + 2i; z_2 = -1 - 2i$. B. $z_1 = -1 - 2i; z_2 = -1 - 2i$.
 C. $z_1 = 1 + 2i; z_2 = -1 + 2i$. D. $z_1 = -1 - 2i; z_2 = -1 + 2i$.

Câu 13. Tìm các số thực b,c để phương trình (với ẩn z): $z^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ làm một nghiệm.

A. $b = -2, c = -2$. B. $b = -2, c = 3$. C. $b = -1, c = 2$. D. $b = -2, c = 2$.

Câu 14. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$

A. 15 B. 17 C. 20 D. 10

Câu 15. Gọi A, B là hai điểm biểu diễn cho các số phức là nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 3 = 0$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

Câu 16. Cho số phức z có phần thực dương thỏa mãn $z^2 - 6z + 13 = 0$. Tính $\left| z + \frac{6}{z+i} \right|$.

A. $\sqrt{13}$ B. $\sqrt{17}$ C. 7 D. $7\sqrt{3}$

DẠNG III. TÌM SỐ PHỨC THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

I. PHƯƠNG PHÁP: Để giải bài toán tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước, ta thực hiện theo các bước sau:

B1: Đặt $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$

B2: Thay vào đk được hệ phương trình hai ẩn a,b.

B3: Giải tìm a,b

Chú ý:

- Tìm số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ thật ra là tìm phần thực a và phần ảo b của nó.
- $z = a + bi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$,
- $z_1 = a_1 + b_1i; z_2 = a_2 + b_2i$. Khi đó: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$
- $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó z là số ảo (thuần ảo) khi $a = 0$, z là số thực khi $b = 0$.

Ví dụ 1. (Mã đề 101 - QG – 2017) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 3i| = 5$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo ?

A. 0 B. Vô số C. 1 D. 2

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$. Điều kiện $z \neq 4$.

Ta có $|z - 3i| = 5 \Leftrightarrow |a + (b-3)i| = 5$

$$\Leftrightarrow a^2 + (b-3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 6b - 16 = 0(1)$$

Lại có $\frac{z}{z-4} = \frac{a+bi}{(a-4)+bi} = \frac{a(a-4)+b^2}{(a-4)^2+b^2} - \frac{4b}{(a-4)^2+b^2}i$.

Vì $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo nên $\frac{a(a-4)+b^2}{(a-4)^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-4a=0(2)$.

Từ (1) + (2) suy ra $4a-6b=16 \Rightarrow a=4+\frac{3}{2}b$. Thay vào (1), ta được:

$$\left(a+\frac{3}{2}b\right)^2 + b^2 - 6b - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=-\frac{24}{13} \end{cases}$$

Với $b=0 \Rightarrow a=4 \Rightarrow z=4$ (loại).

Với $b=-\frac{24}{13} \Rightarrow a=\frac{16}{13} \Rightarrow z=\frac{16}{13}-\frac{24}{13}i$ (thỏa mãn).

Đáp án: C

Ví dụ 2. (Mã đề 101 - QG - 2017) Cho số phức $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=a+3b$

- A. $S=\frac{7}{3}$ B. $S=-5$ C. $S=5$ D. $S=-\frac{7}{3}$

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{aligned} z+1+3i-|z|i=0 &\Leftrightarrow z=-1+(|z|-3)i \Leftrightarrow |z|=\sqrt{1+(|z|-3)^2} \\ \Leftrightarrow |z|^2 &= 1+(|z|-3)^2 \Leftrightarrow |z|=\frac{5}{3} \\ \Rightarrow z &= -1-\frac{4}{3}i \Rightarrow a=-1; b=-\frac{4}{3} \Rightarrow S=a+3b=-5 \end{aligned}$$

Đáp án: B

Ví dụ 3. (Mã đề 103 - QG - 2017) Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2-1+yi=-1+2i$

- A. $x=-\sqrt{2}, y=2$ B. $x=\sqrt{2}, y=2$ C. $x=0, y=2$ D. $x=\sqrt{2}, y=-2$

Hướng dẫn giải

Ta có $x^2-1+yi=-1+2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=-2 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$

Đáp án: C

Ví dụ 4. (Mã đề 103 - QG - 2017) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i|=\sqrt{13}$ và $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo ?

- A. Vô số B. 2 C. 0 D. 1

Hướng dẫn giải

Đặt $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có:

$$|z+3i|=\sqrt{13} \Leftrightarrow |a+(b+3)i|=\sqrt{13} \Leftrightarrow a^2+(b+3)^2=13 \Leftrightarrow a^2+b^2+6b-4=0(1).$$

Lại có $\frac{z}{z+2} = \frac{a+bi}{(a+2)+bi} = \frac{a(a+2)+b^2}{(a+2)^2+b^2} + \frac{2b}{(a+2)^2+b^2}i$.

Vì $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo nên $\frac{a(a+2)+b^2}{(a+2)^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow a(a+2)+b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+2a=0(2)$.

Từ (1)+(2) suy ra $2a-6b=-4 \Rightarrow a=3b-2$. Thay vào (1), ta được:

$$(3b-2)^2+b^2+6b-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=\frac{3}{5} \end{cases}$$

Với $b=0 \Rightarrow a=-2 \Rightarrow z=-2$ (loại).

Với $b=\frac{3}{5} \Rightarrow a=-\frac{1}{5} \Rightarrow z=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$ (thỏa mãn).

Đáp án: **D**

Ví dụ 5. (Mã đề 104 - QG - 2017) Cho số phức z thỏa mãn $|z|=5$ và $|z+3|=|z+3-10i|$.

Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.

- A.** $w = -3 + 8i$ **B.** $w = 1 + 3i$ **C.** $w = -1 + 7i$ **D.** $z = -4 + 8i$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có:

$$|z+3|=5 \Leftrightarrow |(a+3)+bi|=5 \Leftrightarrow (a+3)^2+b^2=25$$

$$\text{Lại có } |z+3|=|z+3-10i| \Leftrightarrow |(a+3)+bi|=|(a+3)+(b-10)i|$$

$$\Leftrightarrow (a+3)^2+b^2=(a+3)^2+(b-10)^2 \Leftrightarrow b^2=(b-10)^2$$

$$\Leftrightarrow b=5 \Rightarrow a=0 \Rightarrow z=5i \Rightarrow w=-4+8i.$$

Đáp án: **D**

III. BÀI TẬP

Câu 1. (Mã đề 102 - QG - 2017) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i = |z|$.

Tính $S = 4a + b$.

- A.** $S = 4$ **B.** $S = 2$ **C.** $S = -2$ **D.** $S = -4$

Câu 2. (QG - 2018) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-3-i)+2i=(4-i)z$?

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 3. (QG - 2018) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$?

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 4. (QG - 2018) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z$?

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 5. (Mã đề 103 - QG - 2017) Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$.

Tìm số phức $|z|$.

- A.** $|z|=17$. **B.** $|z|=\sqrt{17}$. **C.** $|z|=\sqrt{10}$. **D.** $|z|=10$.

Câu 6. (QG - 2018) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i$ với i là đơn vị ảo.

- A.** $x=-1; y=-3$. **B.** $x=-1; y=-1$. **C.** $x=1; y=-1$. **D.** $x=1; y=-3$.

Câu 7. (QG - 2018) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-4-i)+2i=(5-i)z$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Câu 8. (QG – 2018) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+2yi)+(2+i)=2x-3i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-2; y=-2$. B. $x=-2; y=-1$. C. $x=2; y=-2$. D. $x=2; y=-1$

Câu 9. (QG – 2018) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+yi)+(4-2i)=5x+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-2; y=4$. B. $x=2; y=4$. C. $x=-2; y=0$. D. $x=2; y=0$.

Câu 10. (QG – 2018) Tìm hai số x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1; y=-1$. B. $x=-1; y=1$. C. $x=1; y=-1$. D. $x=1; y=1$

Câu 11. (QG-2019) Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z}+i)-(2-i)z=3+10i$. Mô đun của z bằng

A. 3. B. 5. C. $\sqrt{5}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 12. (QG-2019) Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z}-i)-(2+3i)z=7-16i$. Mô đun của z bằng

A. $\sqrt{5}$. B. 5. C. $\sqrt{3}$. D. 3.

Câu 13. (QG-2019) Cho số phức z thỏa $(2+i)z-4(\bar{z}-i)=-8+19i$. Mô đun của z bằng

A. 13. B. 5. C. $\sqrt{13}$. D. $\sqrt{5}$.

Câu 14. (QG-2019) Cho số phức z thỏa $(2-i)z+3+16i=2(\bar{z}+i)$. Mô đun của z bằng

A. $\sqrt{5}$. B. 13. C. $\sqrt{13}$. D. 5.

Câu 15. Tìm số phức z , biết $|z|+z=3+4i$

A. $z=\frac{7}{6}+4i$ B. $z=3$ C. $z=-\frac{7}{6}+4i$ D. $z=-3+4i$

Câu 16. Số phức z thỏa mãn: $(1+i)z+(2-i)\bar{z}=13+2i$ là

A. $3+2i$; B. $3-2i$; C. $-3+2i$; D. $-3-2i$.

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $2z+3(1-i)\bar{z}=1-9i$. Tìm modun của z .

A. $|z|=\sqrt{3}$ B. $|z|=3$ C. $|z|=\sqrt{13}$ D. $|z|=13$

Câu 18. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn $(1-i)z-(2-i)\bar{z}=2+9i$

A. 4 và -3 B. -4 và 3 C. 4 và 3 D. -4 và -3

Câu 19. Số số phức z thỏa mãn đẳng thức: $|z|^2+\frac{1}{2}(z-\bar{z})=1+\frac{1}{2}(z+\bar{z})i$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 20. Số số phức z thỏa mãn $(z+1)^2+|z-1|^2-10i=\bar{z}+3$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 21. Tìm mô đun số phức z thỏa mãn $\frac{2-iz}{2+i}-\frac{z+2i}{1-2i}=2\bar{z}$.

A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

Câu 22. Biết z là số phức thỏa điều kiện $z^2+i|z|=0$. Tìm số phức z có phần ảo âm

A. $z=-1-\frac{1}{\sqrt{2}}i$ B. $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$ C. $z=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$ D. $z=1-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

DẠNG IV. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

I. PHƯƠNG PHÁP: Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó số phức z biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi điểm $M(x; y)$.

Sử dụng dữ kiện của đề bài để tìm mối liên hệ giữa x và y từ đó suy ra tập hợp điểm M .

Một số quỹ tích thường gặp:

Với $z = x + yi$ (x, y là các số thực) khi đó nếu:

* $x = a$: Quỹ tích z là đường thẳng $x = a$ (song song với Oy).

* $y = b$: Quỹ tích z là đường thẳng $y = b$ (song song với Ox).

* $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ Quỹ tích z là đường tròn tâm $I(a, b)$ bán kính R .

* $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ Quỹ tích z là hình tròn tâm $I(a, b)$ bán kính R (kể cả biên).

* $(x-a)^2 + (y-b)^2 > R^2$ Quỹ tích z là các điểm nằm ngoài đường tròn tâm $I(a, b)$ bán kính R .

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. (Mã đề 101- QG – 2017) Cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ ?

A. $Q(1; 2)$

B. $N(2; 1)$

C. $M(1; -2)$

D. $P(-2; 1)$

Hướng dẫn giải

Ta có $w = iz = i(1 - 2i) = 2 + i$. Suy ra điểm biểu diễn của số phức w là $N(2; 1)$.

Đáp án: B

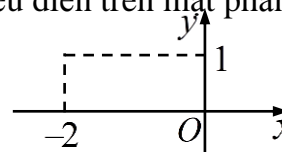
Ví dụ 2. (Mã đề 102 - QG – 2017) Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên ?

A. $z_4 = 2 + i$

B. $z_2 = 1 + 2i$

C. $z_3 = -2 + i$

D. $z_1 = 1 - 2i$



Hướng dẫn giải

Đáp án: C

Ví dụ 3. (Mã đề 102 - QG – 2017) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ và $(z - 1)^2$ là số thuần ảo.

A. 0

B. 4

C. 3

D. 2

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Theo giả thiết, ta có $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |(x + 2) + (y - 1)i| = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$ (C).

Mặt khác, $(z - 1)^2 = ((x - 1) + yi)^2 = (x - 1)^2 - y^2 + 2(x - 1)yi$.

Theo giả thiết $(z - 1)^2$ là số thuần ảo nên

$$(x - 1)^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \text{ (d)} \\ x + y - 1 = 0 \text{ (\Delta)} \end{cases}$$

Đường tròn (C) có tâm $I(-2; 1)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $d(I, d) = 2\sqrt{2} = R$, suy ra d tiếp xúc (C) .

Ta có $d(I, d) = \sqrt{2} < R$, suy ra Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức chính là các giao điểm của (C) với hai đường thẳng d và Δ . Số giao điểm là 3.

Đáp án: C

Ví dụ 4. (Mã đề 104 - QG – 2017) Cho số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $z = z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $N(4; -3)$ B. $M(2; -5)$ C. $P(-2; -1)$ D. $Q(-1; 7)$

Hướng dẫn giải

Ta có $z = z_1 + z_2 = -2 - i$.

Vậy điểm biểu diễn của số phức z là $P(-2; -1)$.

Đáp án: C

Ví dụ 5. (Mã đề 104 - QG – 2017) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4 = 0$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T = OM + ON$ với O là gốc tọa độ.

- A. $T = 2\sqrt{2}$. B. $T = 2$ C. $T = 8$. D. $T = 4$.

Hướng dẫn giải

Ta có $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2i \\ z_2 = -2i \end{cases}$.

Suy ra $M(0; 2), N(0; -2) \Rightarrow OM = ON = 2 \Rightarrow T = OM + ON = 4$.

Đáp án: D

Ví dụ 6. (Mã đề 104 - QG – 2017) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z \cdot \bar{z} = 1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Tìm số phần tử của S .

- A. 2 B. 4 C. 1 D. 3.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $m > 0$.

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$.

Theo giả thiết $z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 (C_1)$.

(C_1) là đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R_1 = 1$.

Mặt khác $|z - \sqrt{3} + i| = m \Leftrightarrow |(x - \sqrt{3}) + (y + 1)i| = m \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2 = m^2 (C_2)$

(C_2) là đường tròn tâm $I(\sqrt{3}; -1)$, bán kính $R_2 = m$.

Để tồn tại duy nhất số phức z thì (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài hoặc trong.

TH1: (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $R_1 + R_2 = OI \Leftrightarrow 1 + m = 2 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn)

.

TH2 (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong khi và chỉ khi $\begin{cases} R_1 + OI = R_2 \Leftrightarrow 1 + 2 = m \Leftrightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ OI + R_2 = R_1 \Leftrightarrow m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$

.

Vậy $S = \{1, 3\}$.

Đáp án: A

Ví dụ 7. (QG – 2018) Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}+i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. 1. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $(\bar{z}+i)(z+2) = (x-yi+i)(x+yi+2) = (x^2+2x+y^2-y) + (x-2y+2)i$

Vì $(\bar{z}+i)(z+2)$ là số thuần ảo nên $x^2+2x+y^2-y=0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Đáp án: C

III. BÀI TẬP

Câu 1. (QG – 2018) Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}+3i)(z-3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. $\frac{9}{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. 3. D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 2. (QG – 2018) Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}+2i)(z-2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. 4. D. $\sqrt{2}$.

Câu 3. (QG – 2018) Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}-2i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. 4.

Câu 4. (QG-2019) Cho hai số phức $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $3z_1 + z_2$ có tọa độ là

- A. $(4; -1)$. B. $(-1; 4)$. C. $(4; 1)$. D. $(1; 4)$.

Câu 5. (QG-2019) Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn của các số phức $w = \frac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

- A. $\sqrt{34}$. B. 26. C. 34. D. $\sqrt{26}$.

Câu 6. (QG-2019) Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{3+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{3}$ B. 12 C. 20 **D. $2\sqrt{5}$**

Câu 7. (QG-2019) Cho hai số phức $z_1 = -2 + i$ và $z_2 = 1 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy điểm biểu diễn số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là

A. $(3; -3)$. B. $(2; -3)$. **C. $(-3; 3)$.** D. $(-3; 2)$.

Câu 8. (QG-2019) Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 + i$. Trên mặt phẳng Oxy , điểm biểu diễn số phức $z_1 + 2z_2$ có tọa độ là

A. $(2; 5)$. B. $(3; 5)$. C. $(5; 2)$. **D. $(5; 3)$.**

Câu 9. (QG-2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w thỏa mãn $w = \frac{2 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 10. B. $\sqrt{2}$. C. 2. **D. $\sqrt{10}$.**

Câu 10. (QG-2019) Cho hai số phức $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là:

A. $(5; -1)$. B. $(-1; 5)$. C. $(5; 0)$. D. $(0; 5)$.

Câu 11. (QG-2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w thỏa mãn $w = \frac{5 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 52. **B. $2\sqrt{13}$.** C. $2\sqrt{11}$. D. 44.

Câu 12. Giả sử $M(z)$ là điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z . Tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn điều $|2 + z| = |i - z|$ là

A. Đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0$ B. Đường thẳng $4x - 2y + 3 = 0$
 A. Đường thẳng $x + 2y - 3 = 0$ D. Đường thẳng $x + 9y - 3 = 0$

Câu 13. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2i| = |\bar{z} + 1 - i|$ là

A. Đường thẳng $x + y + 3 = 0$ B. Đường thẳng $x - 2y + 3 = 0$
 A. Đường thẳng $x + 2y + 3 = 0$ D. Đường thẳng $x - y - 1 = 0$

Câu 15. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + i| = 2$ là

A. Đường thẳng $x - y - 2 = 0$ B. Đường tròn $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
 C. Đường thẳng $x + y - 2 = 0$ D. Đường tròn tâm $I(1; -1)$ và bán kính $R = 2$.

Câu 16. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ là

A. Đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ B. Đường elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

C. Đường elip $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

D. Đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Câu 17. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|2+z| > |z-2|$ là

- A. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung
- B. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên trái trục tung
- C. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía trên trục hoành
- D. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía dưới trục hoành

Câu 18. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $1 \leq |z+1-i| \leq 2$ là

- A. Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm $I(1;-1)$, bán kính 2
- B. Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại $A(-1;1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2; 1
- C. Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm $I(1;-1)$, bán kính 1
- D. Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại $I(1;-1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2; 1

Câu 19. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho $u = \frac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

- A. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$
- B. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.
- C. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R = 5$
- D. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R = 5$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

Câu 20. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện $|x| + |y| = 1$ là

- A. Ba cạnh của tam giác
- B. Bốn cạnh của hình vuông
- C. Bốn cạnh của hình chữ nhật
- D. Bốn cạnh của hình thoi

DẠNG V. CỰC TRỊ CỦA SỐ PHỨC

I. PHƯƠNG PHÁP: Sử dụng các kiến thức cơ bản như: Bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân, bất đẳng thức Bunhia- Cốppxki, bất đẳng thức hình học và một số bài toán công cụ sau:

BÀI TOÁN CÔNG CỤ 1:

Cho đường tròn (T) cố định có tâm I bán kính R và điểm A cố định. Điểm M di động trên đường tròn (T) . Hãy xác định vị trí điểm M sao cho AM lớn nhất, nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:

TH1: A thuộc đường tròn (T)

Ta có: AM đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi M trùng với A

AM đạt giá trị lớn nhất bằng $2R$ khi M là điểm đối xứng với A qua I

TH2: A không thuộc đường tròn (T)

Gọi B, C là giao điểm của đường thẳng qua A, I và đường tròn (T);

Giả sử $AB < AC$.

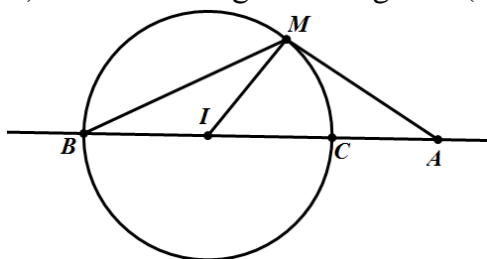
+) Nếu A nằm ngoài đường tròn (T) thì với điểm M bất kì trên (T), ta có:

$$AM \geq AI - IM = AI - IB = AB.$$

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv B$

$$AM \leq AI + IM = AI + IC = AC.$$

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv C$



+) Nếu A nằm trong đường tròn (T) thì với điểm M bất kì trên (T), ta có:

$$AM \geq IM - IA = IB - IA = AB.$$

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv B$

$$AM \leq AI + IM = AI + IC = AC.$$

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv C$

Vậy khi M trùng với B thì AM đạt giá trị nhỏ

Vậy khi M trùng với C thì AM đạt giá trị lớn

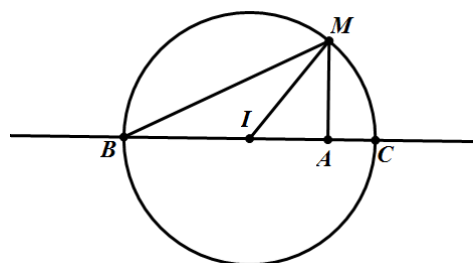
BÀI TOÁN CÔNG CỤ 2:

Cho hai đường tròn (T_1) có tâm I , bán kính R_1 ;

đường tròn (T_2) có tâm J , bán kính R_2 . Tìm vị trí

của điểm M trên (T_1), điểm N trên (T_2) sao cho

MN đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.



nhất.
nhất.

Hướng dẫn giải:

Gọi d là đường thẳng đi qua I, J ;

d cắt đường tròn (T_1) tại hai điểm phân biệt A, B (giả sử $JA > JB$); d cắt (T_2) tại hai điểm phân biệt C, D (giả sử $ID > IC$).

Với điểm M bất kì trên (T_1) và điểm N bất kì trên (T_2).

$$\text{Ta có: } MN \leq IM + IN \leq IM + IJ + JN = R_1 + R_2 + IJ = AD.$$

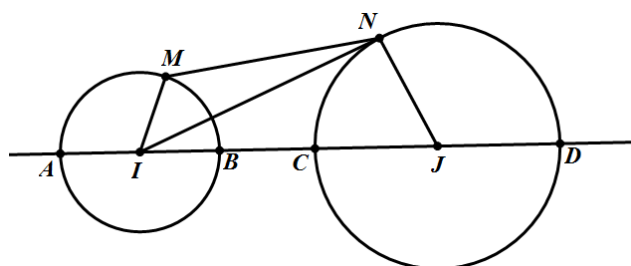
Đẳng thức xảy ra khi M trùng với A và N trùng với D

$$MN \geq |IM - IN| \geq |IJ - IM - JN| = |IJ - R_1 + R_2| = BC.$$

Đẳng thức xảy ra khi M trùng với B và N trùng với C .

Vậy khi M trùng với A và N trùng với D thì MN đạt giá trị lớn nhất.

khi M trùng với B và N trùng với C thì MN đạt giá trị nhỏ nhất.



BÀI TOÁN CÔNG CỤ 3:

Cho hai đường tròn (T) có tâm I , bán kính R ; đường thẳng Δ không có điểm chung với (T). Tìm vị trí của điểm M trên (T), điểm N trên Δ sao cho MN đạt giá trị nhỏ

nhất.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d

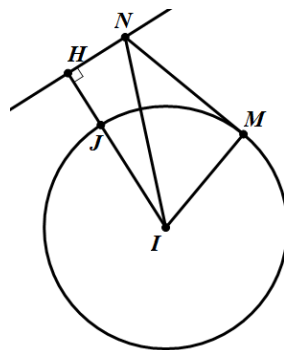
Đoạn IH cắt đường tròn (T) tại J

Với M thuộc đường thẳng Δ, N thuộc đường tròn (T), ta có:

$$MN \geq IN - IM \geq IH - IJ = JH = \text{const.}$$

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H; N \equiv I$

Vậy khi M trùng với H; N trùng với J thì MN đạt giá trị nhỏ nhất.



II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trong các số phức z thoả mãn $|z - 3 + 4i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

Hướng dẫn giải

Cách 1

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(x, y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ toạ độ Oxy

$$|z - 3 + 4i| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$$

Vậy điểm M biểu diễn cho số phức z thuộc đường tròn (T) có tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 4$.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM; OI = 5 > R \text{ nên } O \text{ nằm ngoài đường tròn (T)}$$

$|z|$ lớn nhất khi OM lớn nhất, nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

(Bài toán quy về Bài toán công cụ 1- Trường hợp 2)

Đường thẳng OI cắt đường tròn (T) tại hai điểm phân biệt

$$A\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right); B\left(\frac{27}{5}; -\frac{36}{5}\right) \Rightarrow OA = 1; OB = 9$$

Với M di động trên (T), ta có: $OA \leq OM \leq OB \Leftrightarrow 1 \leq OM \leq 9 \Rightarrow 1 \leq |z| \leq 9$

\Rightarrow OM nhỏ nhất khi M trùng với A; OM lớn nhất khi M trùng với B

Vậy $|z|$ nhỏ nhất bằng 1 khi $z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$; $|z|$ lớn nhất bằng 9 khi $z = \frac{27}{5} - \frac{36}{5}i$

Cách 2

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow M(x, y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ toạ độ Oxy

$\omega = 3 - 4i \Rightarrow A(3; -4)$ biểu diễn cho số phức ω

$$|z| = OM; |\omega| = OA = 5 \Rightarrow |z - \omega| = AM;$$

Theo giả thiết $|z - 3 + 4i| = 4 \Leftrightarrow |z - \omega| = 4 \Leftrightarrow AM = 4$.

Ta có: $|OM - OA| \leq AM \Leftrightarrow -4 \leq OM - 5 \leq 4 \Leftrightarrow -4 + 5 \leq OM \leq 4 + 5 \Leftrightarrow 1 \leq OM \leq 9$

$$\Rightarrow 1 \leq |z| \leq 9; |z| = 1 \text{ khi } z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i; |z| = 9 \text{ khi } z = \frac{27}{5} - \frac{36}{5}i$$

Vậy $|z|$ nhỏ nhất bằng 1 khi $z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$; $|z|$ lớn nhất bằng 9 khi $z = \frac{27}{5} - \frac{36}{5}i$

❖ *Nhận xét:* Ngoài ra bài toán trên có thể Hướng dẫn giải bằng phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunhia-Côpxki hoặc phương pháp lượng giác hoá.

Ví dụ 2. Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $\bar{z}(z+2-4i)$ là một số ảo, tìm số phức z sao cho $\omega = z-1-i$ có môđun lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow M(x, y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ tọa độ Oxy

$\bar{z}(z+2-4i) = (x-yi)[(x+2)+(y-4)i] = x(x+2) + y(y-4) + [x(y+4) - y(x+2)]i$ $\bar{z}(z+2-4i)$ là một số ảo

$$\Leftrightarrow x(x+2) + y(y-4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

$\Rightarrow M$ biểu diễn cho z thuộc đường tròn (T) có tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$

$$|\omega| = |z-1-i| = |(x-1) + (y-1)i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = AM \text{ với } A(1; 1)$$

$IA = \sqrt{5} \Rightarrow A \in (T)$ (Bài toán được qui về Bài toán công cụ 1 - trường hợp 1)

Vì M là điểm di động trên (T) nên AM lớn nhất

$\Leftrightarrow AM$ là đường kính của (T)

$\Leftrightarrow M$ đối xứng với A qua I

$\Leftrightarrow I$ là trung điểm của AM

$$\Rightarrow M(-3; 3) \Rightarrow z = -3 + 3i \Rightarrow \omega = -4 + 2i$$

Vậy $|\omega|$ lớn nhất bằng $2\sqrt{5}$ khi $z = -3 + 3i$.

Ví dụ 3. Trong các số phức z có môđun bằng $2\sqrt{2}$. Tìm số phức z sao cho biểu thức $P = |z+1| + |z+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$|z| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8$$

$$P = |z+1| + |z+i| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-côpxki cho hai bộ số

$1; 1$ và $\sqrt{(x+1)^2 + y^2}; \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$, ta có:

$$P^2 \leq 2[(x+1)^2 + y^2 + x^2 + (y+1)^2] = 4(9 + x + y)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-côpxki cho hai bộ số $1; 1$ và $x; y$, ta có:

$$x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = 4$$

$$\Rightarrow P^2 \leq 52 \Rightarrow P \leq 2\sqrt{13}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } x = y = 2$$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{13}$ khi $z = 2 + 2i$.

Ví dụ 4. Trong các số phức z có môđun bằng 2. Tìm số phức z sao cho biểu thức $P = |z-1| + |z-1+7i|$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$|z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$$P = |z-1| + |z-1+7i| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+7)^2}$$

Xét $\vec{u}(x-1; y), \vec{v}(1-x; -7-y) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (0; -7)$. Khi đó:

$$P = |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = 7. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng hướng}$$

$$\Rightarrow (x-1)(-7-y) = y(1-x) \Leftrightarrow x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

Với $x = 1; y = \sqrt{3}$ thì \vec{u}, \vec{v} ngược hướng (không thoả mãn)

Với $x = 1; y = -\sqrt{3}$ thì \vec{u}, \vec{v} cùng hướng (thoả mãn)

Vậy $z = 1 - i\sqrt{3}$ thì P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 7.

Ví dụ 5. Trong các số phức z_1, z_2 thoả mãn: $|z_1 - 1 - i| = 1; |z_2 - 6 - 6i| = 6$, tìm số phức z_1, z_2 sao cho $|z_1 - z_2|$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $z_1 = a + bi; z_2 = c + di$; (a, b, c, d là những số thực); z_1 được biểu diễn bởi điểm M(a; b); z_2 được biểu diễn bởi điểm N(c; d) trong mặt phẳng tọa độ Oxy

$|z_1 - 1 - i| = 1 \Leftrightarrow |z_1 - 1 - i|^2 = 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 1$ suy ra M thuộc đường tròn tâm I(1; 1), bán kính R = 1.

$|z_2 - 6 - 6i| = 6 \Leftrightarrow |z_2 - 6 - 6i|^2 = 36 \Leftrightarrow (c-6)^2 + (d-6)^2 = 36$ suy ra M thuộc đường tròn tâm J(6; 6), bán kính R' = 6.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} = MN.$$

(Bài toán được quy về Bài toán công cụ 2)

Đường thẳng IJ có phương trình $y = x$. Đường thẳng IJ cắt đường tròn tâm I tại hai điểm

$$M_1\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right); M_2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

Đường thẳng IJ cắt đường tròn tâm J tại hai điểm $N_1(6-3\sqrt{2}; 6-3\sqrt{2}); N_2(6+3\sqrt{2}; 6+3\sqrt{2})$.

$$M_2N_1 \leq MN \leq M_1N_2 \Leftrightarrow 5\sqrt{2} - 7 \leq |z_1 - z_2| \leq 5\sqrt{2} + 7$$

$$\max |z_1 - z_2| = 5\sqrt{2} + 7 \text{ khi } M \equiv M_1, N \equiv N_2.$$

Vậy $z_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}i; z_2 = 6+3\sqrt{2} + (6+3\sqrt{2})i$ thì $|z_1 - z_2|$ đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ 6. Cho các số phức $z_1; z_2$ thoả mãn: $|z_1| = 1; \bar{z}_2[z_2 - (1-i)] - 6 + 2i$ là một số thực.

Tìm số phức $z_1; z_2$ sao cho $P = |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $z_1 = a + bi; z_2 = c + di$; ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow M(a;b), N(c;d)$ lần lượt biểu diễn cho $z_1; z_2$ trong hệ tọa độ Oxy

$$|z_1|=1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1$$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn (T) có tâm O, bán kính $R=1$

$$\bar{z}_2 = c - di;$$

$$\begin{aligned} \omega &= \bar{z}_1 [z_2 - (1-i)] - 6 + 2i = (c-di)[(c-1)+(d+1)i] + 2 - 6i \\ &= c(c-1) + d(d+1) + 2 + [c(d+1) - d(c-1) - 6]i \end{aligned}$$

$$\omega \text{ là số thực} \Leftrightarrow c(d+1) - d(c-1) - 6 = 0 \Leftrightarrow c+d-6=0$$

$\Rightarrow N$ thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-6=0$

Ta có $d(O; \Delta) > 1$ nên Δ và (T) không có điểm chung

$$z_1 \bar{z}_2 = ac + bd + (bc - ad)i;$$

$$\bar{z}_1 z_2 = ac + bd + (-bc + ad)i \Rightarrow z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2(ac + bd)$$

$$P = c^2 + d^2 - 2(ac + bd) = (c-a)^2 + (b-d)^2 - 1 = MN^2 - 1 \quad (\text{vì } a^2 + b^2 = 1)$$

(Bài toán được quy về Bài toán công cụ 3)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên $\Delta: x+y-6=0 \Rightarrow H(3;3)$

Đoạn OH cắt đường tròn (T) tại $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Với N thuộc đường thẳng Δ , M thuộc đường tròn (T) , ta có:

$$MN \geq ON - OM \geq OH - OI = IH = 3\sqrt{2} - 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv I; N \equiv H$

$$\Rightarrow P \geq (3\sqrt{2} - 1)^2 - 1 = 18 - 6\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; z_2 = 3 + 3i$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $18 - 3\sqrt{2}$ khi $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; z_2 = 3 + 3i$.

Ví dụ 7. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3| + |z+3| = 10$. Tìm số phức z có môđun lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow M(x; y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ tọa độ Oxy

$$\begin{aligned} |z-3| + |z+3| = 10 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10; \\ &\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10 \end{aligned}$$

(với $F_1(-3;0); F_2(3;0)$).

$$\Leftrightarrow M \in (E) \text{ có tâm O, trục lớn bằng } 10; \text{ tiêu cự bằng } 6 \Leftrightarrow M \in (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$|z| = OM; OM \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow OM = a = 5 \Leftrightarrow M(5;0) \vee M(-5;0)$$

Vậy $|z|$ lớn nhất bằng 5 khi $z = 5 \vee z = -5$

III. BÀI TẬP

Câu 1. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $z\bar{z}+3(z-\bar{z})=5+12i$. Số phức nào có môđun lớn nhất?

- A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $2+4i$ D. $1/2-i$

Câu 2. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2+i|=2$. Số phức nào có môđun nhỏ nhất?

- A. $2+i$ B. $4-i$ C. $1+(\sqrt{3}-1)i$ D. $(\sqrt{3}+2)+2i$

Câu 3. Xét các số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P=m+M$.

- A. $P=\sqrt{13}+\sqrt{73}$. B. $P=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.
 C. $P=5\sqrt{2}+2\sqrt{73}$. D. $P=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$.

Câu 4. Xét số phức z thỏa mãn $|z+3-2i|+|z-3+i|=3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|+|z-1-3i|$.

- A. $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}, m=3\sqrt{2}$. B. $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}, m=3\sqrt{2}$.
 C. $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}, m=\sqrt{2}$. D. $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}, m=\sqrt{2}$.

Câu 5. Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-3i|+|z-6-i|=2\sqrt{17}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=||z+1-2i|-|z-2+i||$.

- A. $M=3\sqrt{2}, m=0$. B. $M=3\sqrt{2}, m=\sqrt{2}$.
 C. $M=3\sqrt{2}, m=5\sqrt{2}-2\sqrt{5}$. D. $M=\sqrt{2}, m=5\sqrt{2}-2\sqrt{5}$.

Câu 6. Xét số phức z thỏa mãn $|z-2+2i|-|z+1-3i|=\sqrt{34}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1+i|$.

- A. $P_{\min}=\frac{9}{\sqrt{34}}$. B. $P_{\min}=3$. C. $P_{\min}=\sqrt{13}$. D. $P_{\min}=4$.

Câu 7. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1-2i|=2$, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

- A. $z=\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\left(2-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$ B. $z=\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\left(2+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$
 C. $z=\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\left(2-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$ D. $z=-\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\left(2-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)i$

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z+2-i}{z+1-i}\right|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z|$.

- A. $|z|_{\min}=\sqrt{10}-3; |z|_{\max}=\sqrt{10}+3$ B. $|z|_{\min}=-\sqrt{10}-3; |z|_{\max}=\sqrt{10}+3$
 C. $|z|_{\min}=-\sqrt{10}+3; |z|_{\max}=\sqrt{10}-3$ D. $|z|_{\min}=-\sqrt{10}+3; |z|_{\max}=\sqrt{10}+3$