PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN, HÀM HỢP
LUYỆN THI TỐT NGHIỆP THPT QUỐC GIA

I: KIẾN THỨC VỀ SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN, CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ, NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH.

1.1. Các kiến thức về sự đồng biến nghịch biến của hàm số:

Kí hiệu K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng.

1.1.1. Định nghĩa:

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến (tăng) trên K $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \text{ thì } f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \text{ thì } f(x_1) > f(x_2)$.

Hàm số đồng biến (hay nghịch biến) trên tập K gọi chung là đơn điệu trên tập K.

1.1.2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu: Cho hàm số f có đạo hàm trên K.

- Nếu f đồng biến trên K thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$.

- Nếu f đồng biến trên K thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$.

1.1.3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu: cho hàm số f có đạo hàm trên K.

- Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc K thì f đồng biến trên K.

- Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc K thì f nghịch biến trên K.

- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì f là hàm hằng trên K.

1.1.4. Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số

a) Tìm tập xác định

b) Tính đạo hàm $f'(x)$ Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

c) Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

d) Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

1.2. Các kiến thức về cực trị của hàm số:

1.2.1. **Định nghĩa**

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a\,;\,b)$ và điểm $x_0 \in (a\,;\,b)$.

- Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x) < f(x_0), \forall x \in (x_0 - h\,;\,x_0 + h),\ x \neq x_0$ thì ta nói hàm số f đạt cực đại tại x_0.

- Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x) > f(x_0), \forall x \in (x_0 - h\,;\,x_0 + h),\ x \neq x_0$ thì ta nói hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

1.2.2. Định lí 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h\,;\,x_0 + h)$ $(h > 0)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

Nếu $f'(x)<0, \forall x \in (x_0-h;x_0)$ và $f'(x)>0, \forall (x_0;x_0+h)$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

1.2.3. Định lí 2. Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm cấp hai trên khoảng K = (x_0 - h ; x_0 + h) (h > 0).

- Nếu $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số f .
- Nếu $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số f .

***1.2.4*. Quy tắc tìm cực trị**

Quy tắc 1

- Tìm tập xác định.
- Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó f '(x) bằng 0 hoặc f '(x) không xác định.
- Lập bảng biến thiên.
- Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Quy tắc 2

- Tìm tập xác định.
- Tính $f'(x)$. Tìm các nghiệm x_i của phương trình $f'(x)=0$.
- Tính $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của các điểm x_i .

(Chú ý: nếu $f''(x_i)=0$ thì ta phải dùng quy tắc 1 để xét cực trị tại x_i).

1.3. Các kiến thức biện luận số nghiệm của phương trình:

Tính chất 1: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục $[a;b]$ và đơn điệu trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm trong đoạn $[a;b]$.

Mở rộng: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm đổi dấu n lần trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất $n+1$ một nghiệm trong đoạn $[a;b]$.

Tính chất 2: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và đơn điệu trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v$ với $\forall u,v \in [a;b]$.

Tính chất 3: Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và đơn điệu tăng trên $(a;b)$ thì $f(x)>f(y) \Leftrightarrow x>y$ (Nếu f đơn điệu giảm thì $f(x)>f(y) \Leftrightarrow x<y$) với $\forall x,y \in (a;b)$.

Tính chất 4:

+ Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Bất phương trình $f(x) \le m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [a;b]$ khi và chỉ khi $\max\limits_{[a;b]} f(x) \le m$.

+ Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Bất phương trình $f(x) \le m$ có nghiệm $x \in [a;b]$ khi và chỉ khi $\min\limits_{[a;b]} f(x) \le m$.

II: CÁC DẠNG TOÁN

I. XÉT SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM HỢP, HÀM ẨN

1. Dạng 1.

Cho hàm $y = f(x)$ hoặc hàm $y = f'(x)$ xét sự biến thiên của hàm $g(x) = f(u(x))$.

Phương pháp:

- Tính đạo hàm $g'(x) = f'(u(x)).u'(x)$
- Xét dấu $g'(x)$ dựa vào dấu của $f'(u(x))$ và $u'(x)$ theo quy tắc nhân dấu. Lưu ý khi xét dấu $f'(u(x))$ dựa vào dấu của $f'(x)$ như sau: Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên D thì $f'(u(x))$ không đổi dấu khi $u(x) \in D$.

Ví dụ 1. (Câu 35 Mã đề 102- THPTQG năm 2019). Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $f(5-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $y = f(5-2x) \to y' = -2f'(5-2x)$

Hàm số nghịch biến khi $y' = -2f'(5-2x) \le 0 \Leftrightarrow f'(5-2x) \ge 0$.

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy khi $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ -3 \le x \le -1 \end{array}\right.$

Nên $f'(5-2x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5-2x \ge 1 \\ -3 \le 5-2x \le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 \le x \le 4 \\ x \le 2 \end{array}\right.$

Vậy hàm số $y = f(5-2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(3;4)$ và $(-\infty;2)$. **Chọn B**

Ví dụ 2. (Câu 33 Mã đề 103- THPTQG năm 2019). Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;4)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Ta có: $y=f(3-2x)\Rightarrow y'=(3-2x)'\ f'(3-2x)\ =-2f'(3-2x)$.

Hàm số $y=f(3-2x)$ đồng biến khi $y'=-2f'(3-2x)\ge 0\Leftrightarrow f'(3-2x)\le 0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-2x\le -3\\ -1\le 3-2x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ 1\le x\le 2\end{array}\right.$.

Hàm số $y=f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

Đáp án A

<u>Ví dụ 3.</u> *(KSCL lần 1 năm 2019-2020 THPT Trần Phú).* Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Các khoảng đồng biến của hàm số $y=f(2x-1)$?

A. $(-\infty;2)$ **B.** $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$ **C.** $(-\infty;-1)$ và $(0;+\infty)$ **D.** $(0;2)$

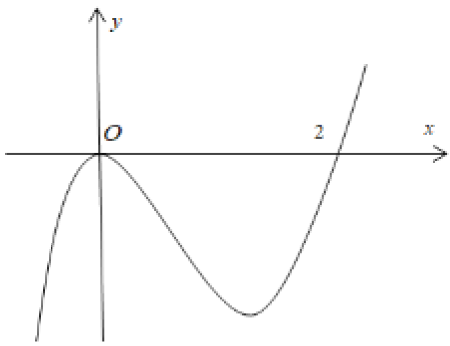
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Lời giải.

Ta có $y=f(2x-1)\Rightarrow y'=2f'(2x-1)$.

Khi đó $y'=2f'(2x-1)>0\Leftrightarrow -1<2x-1<3\Leftrightarrow 0<x<2$. **Đáp án D.**

<u>Ví dụ 3.</u> Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $g(x)=f(x^2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

<u>Lời giải</u>

Ta có: $g\left(x\right)=f\left(x^2-x\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=\left(2x-1\right)f'\left(x^2-x\right)$.

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ f'\left(x^2-x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x^2-x=0\\ x^2-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=0\\ x=1\\ x=-1\\ x=2\end{array}\right.$$ ***(Ta tìm các điểm tới hạn)***

Từ đồ thị $f'\left(x\right)$ ta suy ra $f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow x>2$

Do đó : $f'\left(x^2-x\right)>0\Leftrightarrow x^2-x>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\ x<-1\end{array}\right.$ ***(Ta cần xác định một loại dấu của $f'\left(x^2-x\right)$)***

Bảng xét dấu $g'\left(x\right)$:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'\left(x^2-x\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có hàm số $g\left(x\right)$đồng biến trên khoảng $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. Chọn **đáp án C**.

<u>**Lưu ý:**</u> Dấu của $g'\left(x\right)$ ở bảng trên có được nhờ nhân dấu của hai biểu thức $\left(2x-1\right)$ và $f'\left(x^2-x\right)$.

<u>**Ví dụ 4.**</u> ***(****KSCL lần 1 năm 2019-2020 THPT Đồng Đậu, THPT Yên Lạc*) Cho hàm số $y=f\quad x$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\quad x^2+4x+m$ nghịch biến trên $-1;1$ là

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Lời giải

Ta có: $y=f\left(x^2+4x+m\right)\Rightarrow y'=2(x+2)f'\left(x^2+4x+m\right)\le 0,\forall x\in\left(-1;1\right)$

$\Leftrightarrow f'(x^2+4x+m)\le 0,\forall x\in\left(-1;1\right)$ (vì $2(x+2)>0,\forall x\in\left(-1;1\right)$)

$\Leftrightarrow -2 \le h(x) = x^2 + 4x + m \le 8, \forall x \in (-1;1)$ (*)

Trong khoảng $-1;1$ hàm số $h(x)$ đồng biến nên $m-3 = h(-1) < h(x) < h(1) = m+5$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le m-3 \\ m+5 \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 1 \\ m \le 3 \end{cases}$ suy ra có 3 giá trị nguyên của m. **Đáp án B**

<u>Ví dụ 5.</u> Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(|x|+1)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(0;2)$ **B.** $(-3;0)$ **C.** $(1;4)$ **D.** $(-1;1)$

Lời giải

Ta có: $g(x) = f(|x|+1) = \begin{cases} f(x+1), x \ge 0 \\ f(-x+1), x < 0 \end{cases}$

Nhận xét: Hàm $g(x) = f(|x|+1)$ là hàm chẵn, có đồ thị đối xứng nhau qua trục tung.

+) Ta có BBT của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

+) B1: Chuyển từ hàm số $y = f(x)$ sang hàm số $y = f(x+1)$ **(tịnh tiến đồ thị sang trái 1 đv)**

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x+1)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

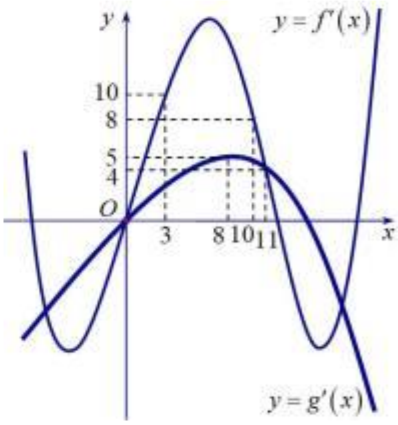
+) B2: Chuyển từ hàm số $y = f(x+1)$ sang hàm số $y = f(|x|+1)$ bằng cách giữ nguyên phần $x \ge 0$, phần $x < 0$ được lấy đối xứng với phần $x \ge 0$ qua Oy. **(lấy đối xứng qua Oy)**

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x+1)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Đáp án B

Nhận xét: Dạng chuyển từ hàm $f(x)$ sang hàm $f(|x|+1)$ rất dễ mắc **sai lầm** đó là: Chuyển từ $f(x)$ sang $f(|x|)$ (lấy đối xứng trước), rồi tịnh tiến sang trái 1 đơn vị (tịnh tiến sau).

<u>Ví dụ 5.</u> *(Đề Chính Thức 2018 - Mã 101)* Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong **đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y=g'(x)$.



Hàm số $h(x)=f(x+4)-g\left(2x-\frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(5;\frac{31}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{4};3\right)$. **C.** $\left(\frac{31}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(6;\frac{25}{4}\right)$.

Lời giải

Ta có: $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)\ge 0$ khi $f'(x+4)\ge 2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)$.

Từ đồ thị ta thấy $g'(x)\le 5,\forall x \Leftrightarrow 2g'(x)\le 10, \forall x$. Do đó để $f'(x+4)\ge 2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)$

ta cần tìm x sao cho: $\begin{cases} f'(x+4)\ge 10 \\ g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)\le 5 \end{cases}$

Nên ta kẻ đường thẳng $y=10$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại $A(a;10)$, $a\in(8;10)$.

Khi đó ta có $\begin{cases} f(x+4)\ge 10,\ \text{khi}\ 3\le x+4\le a \\ g\left(2x-\frac{3}{2}\right)\le 5,\ \text{khi}\ 0\le 2x-\frac{3}{2}<11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+4)\ge 10,\ \text{khi}\ -1\le x<4 \\ g\left(2x-\frac{3}{2}\right)\le 5,\ \text{khi}\ \frac{3}{4}\le x\le\frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4}\le x<4$.

Đáp án B.

Nhận xét: Bài này có thể dùng phương pháp loại trừ để tìm đáp án như sau

- Ta có: $h'=f'-2g'$ dẫn đến so sánh f' với 2 lần giá trị g'. Lại thấy các số trên đồ thị có các giá trị $10=5.2, 8=4.2$, như vậy để h nghịch biến thì miền giá trị của f' nhỏ hơn 8, miền giá trị của g' lớn hơn 4. Từ suy luận đó, dựa vào các điểm trên trục hoành ta thấy $h'(6)=f'(10)-2g'(10,5)<8-2.4=0$

Do đó h sẽ nghịch biến trong những khoảng xung quanh giá trị 6, đó là các phương án A,C, D. Lại thấy đáp án B cho ta $f'>10, g'<5$. Do đó phương án B được chọn.

<u>2. Dạng 2.</u>

Cho hàm $y=f(x)$ hoặc $y=f'(x)$ xét sự biến thiên của hàm $g(x)=f(u(x))+h(x)$.

Phương pháp:

- Tính $g'(x)=u'(x).f'(u(x))+h'(x)$

- Lập bảng xét dấu $g'(x)$ bằng cách cộng dấu của hai biểu thức $u'(x).f'(u(x))$ và $h'(x)$.

<u>Ví dụ 1.</u> (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Ta có $y'=3f'(x+2)-3x^2+3=3\left[f'(x+2)+(1-x^2)\right]$

Xét $f'(x+2)=0\Leftrightarrow x+2\in\{1,2,3,4\}\Leftrightarrow x\in\{-1,0,1,2\}$

Xét $1-x^2=0\Leftrightarrow x=1, x=-1$

Lại có: $f'(x+2)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1<x+2<3\\ x+2>4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<1\\ x>2\end{array}\right.$ và $1-x^2>0\Leftrightarrow -1<x<1$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
y'		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	Chưa xđ	

Từ bảng xét dấu suy ra trên khoảng $(-1;0)$ hàm số đồng biến. **Chọn đáp án C.**

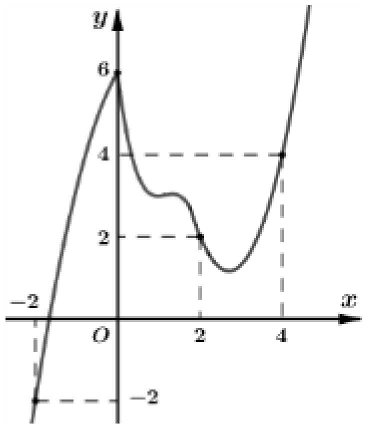
Lưu ý:

- Để xác định dấu của y' trong bảng trên ta phải cộng dấu của $f'(x+2)$ và $(1-x^2)$ với nguyên tắc cùng dấu thì cộng được. Nếu khác dấu nhau thì không xác định được dấu của y'.

- Dó đó ta có thể giải $f'(x+2)>0$ và $1-x^2>0$ rồi lấy giao hai tập nghiệm ta được kết quả hàm số chắc chắn đồng biến trên $(-1;1)$. Nên chọn đáp án là tập $(-1;0)\subset(-1;1)$.

- Nếu đề bài cho đồ thị hàm $y=f'(x)$, xét sự biến thiên của hàm $g(x)=f(x)-h(x)$ dẫn đến xét dấu của $g'(x)=f'(x)-h'(x)$ dựa vào sự tương giao đồ thị.

__**Ví dụ 2.**__ Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



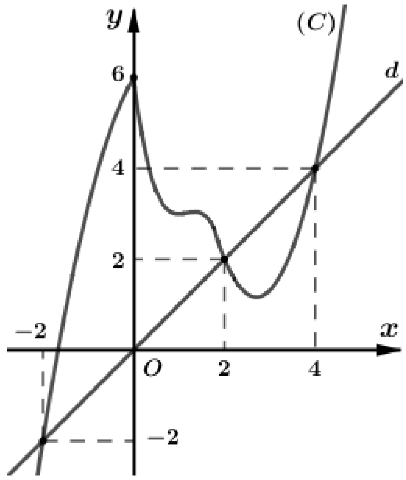
Hàm số $g(x)=2f(x)-x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2x \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x.$

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d: y=x$ (như hình vẽ bên dưới).



Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2;2)$ và $(4;+\infty)$. So sánh 4 đáp án **Chọn B**

Lưu ý: Ta xác định được dấu của $g'(x)=2\left(f'(x)-x\right)$ theo nguyên tắc: trong khoảng $(a;b)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y=x$ thì $g'(x)>0$.

Ví dụ 3. (*Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An năm 2018-2019)* Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau :

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=2f(1-x)+\sqrt{x^2+1}-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-3;-2)$.

Lời giải

Ta có : $y'=-2f'(1-x)+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=-2f'(1-x)+\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

Vì $\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}<0, \forall x\in R.$

Nên ta tìm khoảng để : $-2f'(1-x)\le 0 \Leftrightarrow f'(1-x)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1\le 1-x\le 3\\ 1-x\ge 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le x\le 0\\ x\le -3\end{array}\right.$.

So sánh các đáp án, **chọn C.**

3. Dạng 3.

Cho hàm $y=f(u(x))$ hoặc hàm $y=f'(u(x))$ xét sự biến thiên của hàm $y=f(x)$.

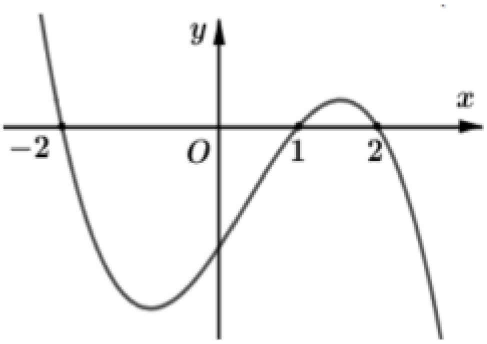
Phương pháp: Giả sử ta có: $f'(u(x))>0 \Leftrightarrow x\in D$. Ta cần giải BPT $f'(x)>0$.

- Đặt $t=u(x)\Rightarrow x=v(t)$

- Giải BPT: $f'(t)>0 \Leftrightarrow f'(u(x))>0 \Leftrightarrow x\in D \Leftrightarrow x=v(t)\in D \Leftrightarrow t\in D'$.

- Vậy $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in D'$

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(3x-1)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;6)$. **B.** $(-\infty;-7)$. **C.** $(-\infty;-6)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Ta cần giải BPT dạng $f'(x)>0$.

Ta có $f'(3x-1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-2\\ 1<x<2\end{array}\right.$

Đặt $t=3x-1\Rightarrow x=\dfrac{t+1}{3}$

Do đó: $f'(t)>0 \Leftrightarrow f'(3x-1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-2\\ 1<x<2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{t+1}{3}<-2\\ 1<\dfrac{t+1}{3}<2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t<-7\\ 2<t<5\end{array}\right.$

Vậy $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-7\\ 2<x<5\end{array}\right.$. **Chọn đáp án B.**

Nhận xét: Dạng 1 cho hàm $y = f(x)$ tìm sự đơn điệu của hàm $y = f(u(x))$ có bước tính đạo hàm của hàm $y = f(u(x))$ **nhưng** Dạng 3 cho hàm $y = f(u(x))$ không có bước tính đạo hàm của hàm $y = f(x)$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(2-x)$ bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

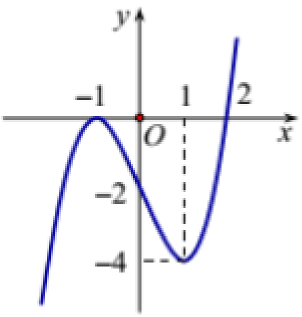
Lời giải

Ta có $f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right.$. Đặt $t = 2 - x \Leftrightarrow x = 2 - t$

Khi đó $f'(t) < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-t < -1 \\ 2-t > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 3 \\ t < 0 \end{array}\right.$

Vậy $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 0 \end{array}\right.$. **Chọn đáp án A**

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f(3-4x)$ đồ thị như sau :



Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-7;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(7;+\infty)$. **D.** $(-1;6)$.

Lời giải

Từ đồ thị ta suy ra $f'(3-4x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Đặt $t = 3 - 4x \Leftrightarrow x = \dfrac{3-t}{4}$.

Khi đó $f'(t) < 0 \Leftrightarrow f'(3-4x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow -1 < 3 - 4t < 1 \Leftrightarrow -1 < t < 7$

Vậy $f'(t)<0 \Leftrightarrow -1<t<7$ hay: $f'(x)<0 \Leftrightarrow -1<x<7$. **Chọn đáp án D.**

<u>Ví dụ 4.</u> Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'\left(-2x+\dfrac{7}{2}\right)=3x^2-12x+9$. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây.

A. $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{9}{4}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{9}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Ta cần giải bất phương trình $f'(x)<0$.

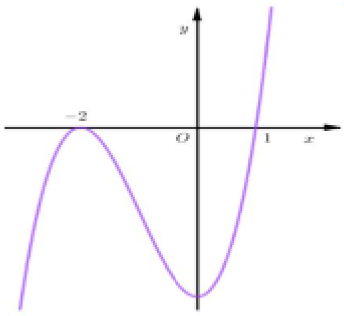
Từ $f'\left(-2x+\dfrac{7}{2}\right)=3x^2-12x+9 \Rightarrow f'\left(-2x+\dfrac{7}{2}\right)<0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9 \Leftrightarrow 1<x<3$.

Đặt $t=-2x+\dfrac{7}{2} \Rightarrow x=\dfrac{7-2t}{4}$. Khi đó ta có $f'(t)<0 \Leftrightarrow 1<\dfrac{7-2t}{4}<3 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2}<t<\dfrac{3}{2}$.

Vậy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. **Chọn C.**

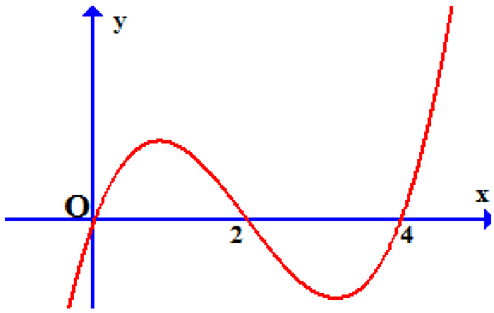
BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(3x+5)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ nghịch trên khoảng nào?



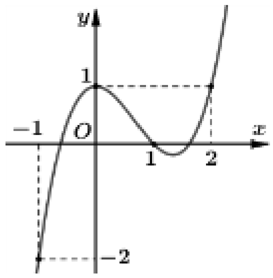
A. $(-\infty;8)$. **B.** $\left(-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;10)$.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(2-x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-2;4)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;1)$.

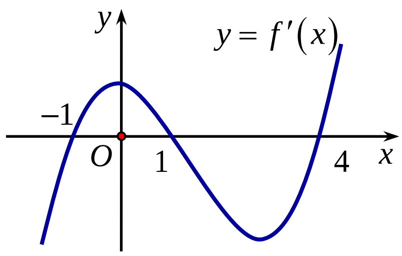
Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

Bài 4. *(Đề tham khảo BGD năm 2017-2018)* Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng:



A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Bài 5. *(Sở GD&ĐT Nam Định năm 2018-2019)* Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2018$ với $g(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Bài 6. *(Chuyên Lê Quý Đôn- Điện Biên năm 2018-2019)* Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

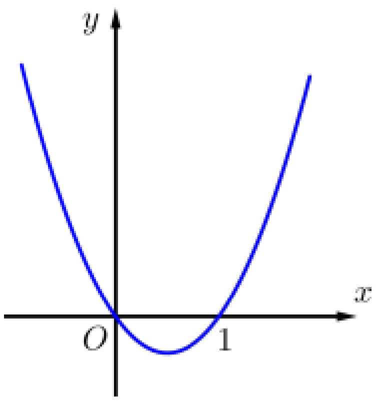
Bài 7. Cho hàm số $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-4;-3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

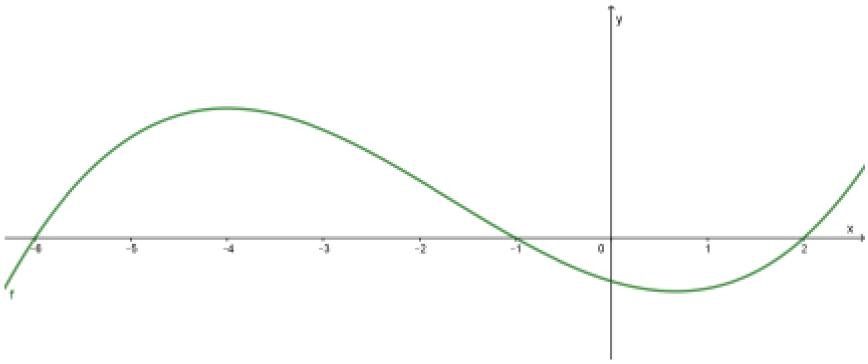
Bài 8. *(Sở Hà Nội năm 2018-2019)* Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f\left(-x-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

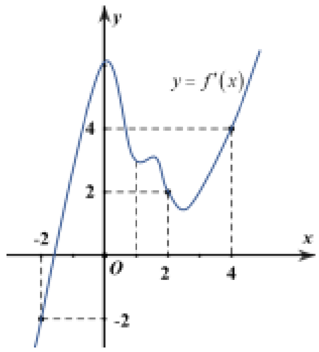
A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$

Bài 9. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(3-x^2)+2018$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(2;3)$ **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(0;1)$.

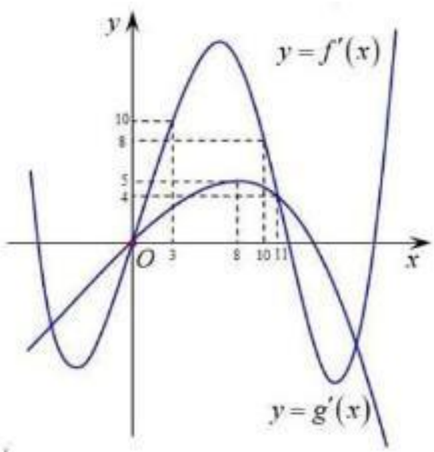
Bài 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $h(x)=2f(3x+1)-9x^2-6x+4$. Hãy chọn khẳng định đúng:



A. Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$.

C. Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$. **D.** Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 11. *(Đề Chính Thức 2018 - Mã 102)* Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong **đậm hơn** là đồ thị hàm số $y=g'(x)$. Hàm số $h(x)=f(x+7)-g\left(2x+\frac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(2;\frac{16}{5}\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{4};0\right)$. **C.** $\left(\frac{16}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(3;\frac{13}{4}\right)$.

Bài 12. *(Chuyên Hùng Vương Phú Thọ năm 2018-2019)* Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	

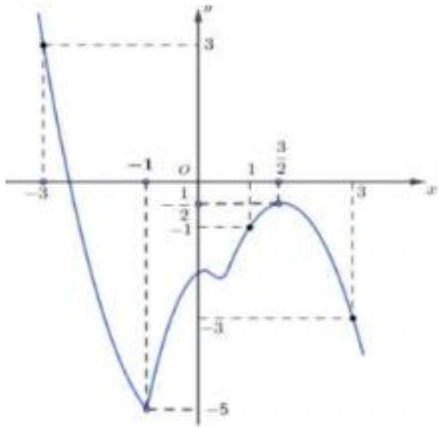
Hàm số $y=f(3x+1)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{3}{4};1\right)$. **B.** $\left(\frac{2}{3};1\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$.

Bài 13. Hàm số $y=f\left(2x+1\right)+\frac{2}{3}x^3-8x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;+\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty;-2\right)$ **C.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(-1;7\right)$

Bài 14. *(Chuyên VP lần 02 năm 2018-2019)* Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $f'\left(x\right)$ như hình vẽ



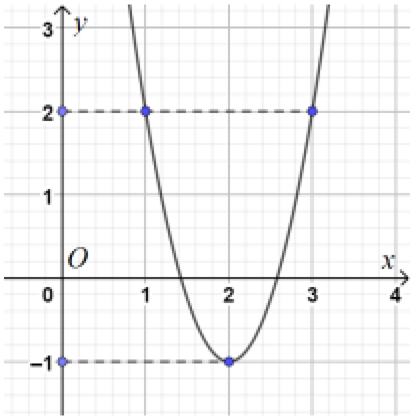
Hàm số $y=f\left(1-x\right)+\frac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(-2;\,0\right)$. **B.** $\left(-3;\,1\right)$. **C.** $\left(3;+\infty\right)$. **D.** $\left(1;\,3\right)$.

Bài 15. *(Chuyên Quốc Học Huế năm 2018-2019)* Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên R là $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x+3\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-10;20\right]$ để hàm số $y=f\left(x^2+3x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$?

A. 18 **B.** 17 **C.** 16 **D.** 20

Bài 16. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm số $y=f'\left(x-2\right)+2$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $y = f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-1;1\right)$. **B.** $\left(-\infty;2\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $\left(2;+\infty\right)$.

Đáp án

1A	**2C**	**3D**	**4C**	**5D**	**6C**	**7D**	**8**
9A	**10C**	**11B**	**12C**	**13**	**14A**	**15A**	**16A**

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Dạng 1.

Cho hàm $y = f(x)$ hoặc hàm $y = f'(x)$ tìm cực trị của hàm $g(x) = f(u(x))$.

Phương pháp:

- Tính đạo hàm $g'(x) = f'(u(x)).u'(x)$
- Tìm số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(u(x)).u'(x) = 0$.
- Nếu cần có thể xét dấu $g'(x)$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f\left(x^2 - 8x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$ và

$$y' = (2x-8).f'\left(x^2-8x\right) = 2(x-4)\left(x^2-8x\right)\left(x^2-8x-2\right)$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x^2-8x=0 \\ x^2-8x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=0 \\ x=8 \\ x=4+3\sqrt{2} \\ x=4-3\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		$4-3\sqrt{2}$		0		4		8		$4+3\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y = f\left(x^2 - 8x\right)$ có 5 điểm cực trị. **Chọn C.**

Lưu ý: Ví dụ trên đề bài yêu cầu tìm số điểm cực trị nên ta có thể không cần lập bảng xét dấu y'. Nhưng nếu yêu cầu tìm số cực đại hay cực tiểu thì ta phải lập bảng xét dấu (hay BBT).

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ có bao nhiêu điểm **cực tiểu**?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Đặt $g(x) = f\left(x^2 - 2x\right)$. Ta có $g'(x) = (2x-2)f'\left(x^2-2x\right)$.

Ta có: $f'(x^2-2x)\ge 0 \Leftrightarrow -2\le x^2-2x\le 3 \Leftrightarrow -1\le x\le 3$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$2x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'\left(x^2-2x\right)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số có đúng điểm cực tiểu là $x=1$. **Chọn D.**

<u>Ví dụ 3.</u> (Đề THPTQG năm 2019- mã 120). Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $f(4x^2+4x)$ là

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Ta có $y=f(4x^2+4x)\Rightarrow y'=(8x+4).f'(4x^2+4x)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8x+4=0\\ f'(4x^2+4x)=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2}\\ 4x^2+4x=a_1\in(-\infty;-1)\ (1)\\ 4x^2+4x=a_2\in(-1;0)\quad(2)\\ 4x^2+4x=a_3\in(0;1)\qquad(3)\\ 4x^2+4x=a_4\in(1;+\infty)\ (4)\end{array}\right.$$

Ta có: $4x^2+4x=(2x+1)^2-1\ge -1$

Do đó (1) vô nghiệm, các phương trình $(2),(3),(4)$ mỗi phương trình cho hai nghiệm . Các nghiệm này khác nhau và khác $-\dfrac{1}{2}$. Tóm lại $y'=0$ có 7 nghiệm phân biệt. Nên hàm số có 7 cực trị. **Đáp án A.**

<u>Ví dụ 4.</u> Cho hàm số $y=f\ x$ có đạo hàm $f'\ x\ =\ x^2-x\ \ x^2-4x+3\ ,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\ x\ =f\ \ x^2+m$ có 3 điểm cực trị.

A. 0. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $f'(x)=x(x-1)^2(x-3)$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$ ($x=0, x=3$ là nghiệm đơn; $x=1$ là nghiệm bội chẵn).

Lại có

$$g'(x)=2x.f'(x^2+m) \to g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2+m)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+m=0 \\ x^2+m=1 \\ x^2+m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ x^2=-m & (1) \\ x^2=1-m & (2) \\ x^2=3-m & (3) \end{array}\right.$$

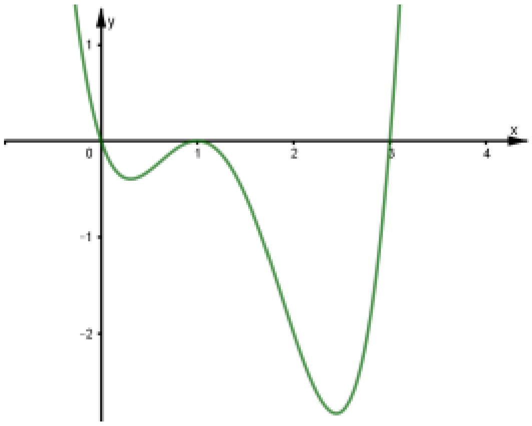
Do (2) có nghiệm luôn là nghiệm bội chẵn; các phương trình (1), (3) không có nghiệm chung và $-m<3-m$.

Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có ba nghiệm bội lẻ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \le 0 \\ 3-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 3.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1;2\}$.Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m bằng 3. **Chọn C.**

<u>Ví dụ 4.</u> Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ



Đồ thị của hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?

A. 2 cực đại, 3 cực tiểu.
B. 3 cực đại, 2 cực tiểu.
C. 1 cực đại, 2 cực tiểu.
D. 1 cực đại, 1 cực tiểu.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số đạt cực đạt tại $x=1$, đạt cực tiểu tại $x_1;x_2$ từ đó có BBT

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	y_1	$\nearrow$	0	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có: $y=\left(f(x)\right)^2 \Rightarrow y'=2f(x).f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$.

Quan sát đồ thị và BBT ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$ với $x_1\in(0;1)$ và $x_2\in(1;3)$.

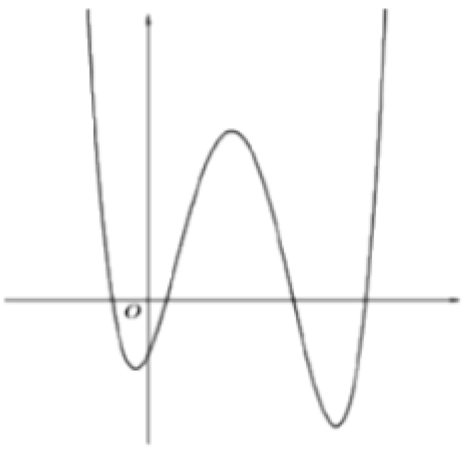
Ta có: $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$ và $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(x_1;1)\cup(x_2;+\infty)$

Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$:

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	|	$+$	0	$-$	|	$+$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu. **Chọn đáp án A.**

<u>Ví dụ 5.</u> *(Ngô Sỹ Liên- Bắc Giang năm 2018-2019)* Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f\left(|x|-2\right)+2019$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 9

Lời giải

B1. Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ dịch sang phải 2 đơn vị được đồ thị hàm số $y=f(x-2)$. Suy ra hàm số $y=f(x-2)$ có 3 cực trị dương.

B2. Hàm số $y=f\left(|x|-2\right)+2019$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

Từ đồ thị hàm $y=f(x-2)$, giữ phần bên phải trục tung, phần bên trái trục tung có được bằng cách lấy đối xứng phần bên phải qua trục tung.

Do hàm số $f\left(x-2\right)$ có 3 điểm cực trị nằm bên phải trục tung nên hàm số $y=f\left(|x|-2\right)+2019$ có $2.3+1=7$ điểm cực trị. **Chọn C.**

<u>Nhận xét:</u>

Hàm số $f\left(|x|\right)$ có số cực trị bằng hai lần số điểm cực trị dương của hàm số $f(x)$ cộng 1.

Hàm số $|f(x)|$ có số cực trị bằng số cực trị của hàm $f(x)$ và số giao điểm của đồ thị hàm $y=f(x)$ với Ox (không tính giao điểm là các điểm cực trị).

<u>Ví dụ 6.</u> Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Hàm số $y=f\left(|x-3|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Nhận xét: hàm số $y=f\left(|x-3|\right)=\begin{cases} f(x-3),\ x\geq 3 \\ f(3-x),\ x<3 \end{cases}$ có trục đối xứng là đường thẳng $x=3$.

B1. Chuyển từ BBT hàm số $y=f(x)$ sang $y=f(x-3)$ bằng cách dịch sang phải 3 đơn vị.

x	$-\infty$ $+\infty$		1		7	
$f'(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x-3)$		↗		↘		↗

B2. Lấy đối xứng qua đường thẳng $x=3$

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
$f'(\lvert x-3\rvert)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(\lvert x-3\rvert)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

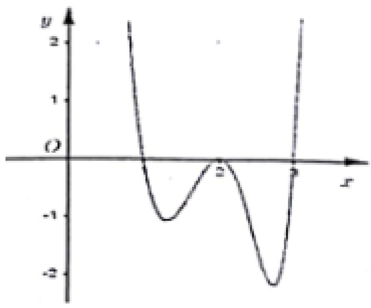
Lưu ý:

- Dạng bài này dễ mắc sai lầm ở bước thứ 2, đó là lấy đối xứng qua *Oy* dẫn đến 5 cực trị.

- Số điểm cực trị hàm $y=f\left(|x-a|\right)$ bằng hai lần số điểm cực trị lớn hơn a của hàm số $y=f(x-a)$ và cộng thêm 1.

- Đồ thị hàm $y=f\left(|x-a|\right)$ có trục đối xứng là đường thẳng $x=a$.

<u>Ví dụ 7.</u> Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A.6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nhận thấy

+) $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\\x=2\\x=b\end{cases}$ với $0<x_0<a<2<b<3$.

+) $f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow a<x<2$ hoặc $x>b$.

+) $f'\left(x\right)<0\Leftrightarrow x<a$ hoặc $2<x<b$.

* Ta có : $y=f\left(f\left(x\right)\right)\Rightarrow y'=f'\left(f\left(x\right)\right).f'\left(x\right)$.

Khi đó : $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(f\left(x\right)\right)=0\\f'\left(x\right)=0\end{array}\right.$

* Phương trình $f'\left(f\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=a\\f\left(x\right)=2\\f\left(x\right)=b\end{array}\right.$ với $0<x_0<a<2<b<3$.

Mỗi đường thẳng $y=b$, $y=2$, $y=a$ đều cắt đồ thị hàm số đã cho tại 2 điểm phân biệt lần lượt tính từ trái qua phải có hoành độ là x_1 và x_6; x_2 và x_5; x_3 và x_4 nên:

$$\begin{cases} x_1<x_2<x_3<x_0<3<x_4<x_5<x_6 \\ f\left(x_1\right)=f\left(x_6\right)=b \\ f\left(x_2\right)=f\left(x_5\right)=2 \\ f\left(x_3\right)=f\left(x_4\right)=a \end{cases}$$

* Cũng từ đồ thị hàm số đã cho suy ra:

Do đó: $f'\left(f\left(x\right)\right)>0 \Leftrightarrow a<f\left(x\right)<2$ hoặc $f\left(x\right)>b$.

Ta có BBT:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		a		2		b		x_4		x_5		x_6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'(f(x))$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$(f(f(x)))'$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số có 9 điểm cực trị. **Chọn D.**

2. Dạng 2.

Cho hàm $y=f(x)$ hoặc hàm $y=f'(x)$ tìm cực trị của hàm $g(x)=f(u(x))+h(x)$.

Phương pháp: - Tính $g'(x)=u'(x).f'(u(x))+h'(x)$

-Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$

- Có thể lập bảng xét dấu $g'(x)$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+4x$ có mấy điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+4x$.

Ta có: $g'\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+4=$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{2}\right)^2-2\left(1-\frac{x}{2}\right)\right]+4=-\frac{x^2}{8}+\frac{9}{2}=0\Leftrightarrow x=\pm 6.$$

Bảng xét dấu $g'\left(x\right)$

x	$-\infty$		-6		6		$+\infty$
$g'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị. **Chọn C.**

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(2-x\right)\left(x^2-8\right)^{2019}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)+\frac{1}{2}x^4-4x^2+2020$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 4. **B.** 2019. **C.** 5. **D.** 2020.

Lời giải

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2\right)+\frac{1}{2}x^4-4x^2+2020$.

Ta có: $g'\left(x\right)=2x.f'\left(x^2-2\right)+2x^3-8x$.

Khi đó $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2-2\right)+2x^3-8x=0\Leftrightarrow 2x\left[f'\left(x^2-2\right)+x^2-4\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2-2\right)+x^2-4=0\ \left(*\right)\end{array}\right..$$

Giải phương trình $\left(*\right)$: Đặt $t=x^2-2$.

$\left(*\right)\Leftrightarrow f'\left(t\right)+t-2=0\Leftrightarrow\left(2-t\right)\left(t^2-8\right)^{2019}+\left(t-2\right)=0\Leftrightarrow\left(2-t\right)\left[\left(t^2-8\right)^{2019}-1\right]=0$

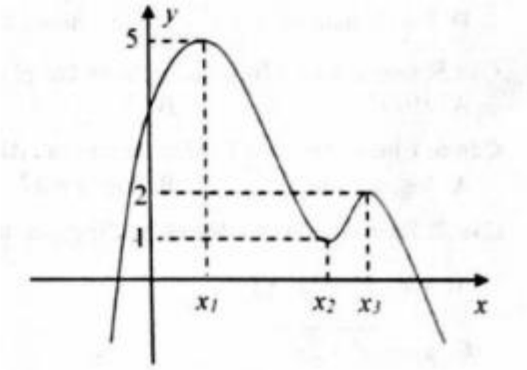
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-t=0\\ \left(t^2-8\right)^{2019}-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t^2-8=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\pm3\end{array}\right..$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}x^2-2=2\\ x^2-2=3\\ x^2-2=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=4\\ x^2=5\\ x^2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm2\\ x=\pm\sqrt{5}\end{array}\right..$

$\Rightarrow g'\left(x\right)=0$ có 5 nghiệm (không có nghiệm bội chẵn).

Vậy hàm số có 5 cực trị. **Chọn C.**

Ví dụ 3. *(Sở Thái Bình 2017-2018)* Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(x\right)+\frac{2017-2018x}{2017}$ có số điểm cực trị là:



A. 4 . **B.** 3 . **C.** 2 . **D.** 1

.

Lời giải

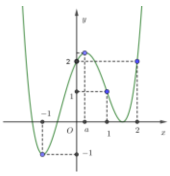
Ta có: $y = f\left(x\right) + \dfrac{2017 - 2018x}{2017} \Rightarrow y' = f'\left(x\right) + \dfrac{-2018}{2017}$, khi đó:

$y' = 0 \Leftrightarrow f'\left(x\right) = \dfrac{2018}{2017}$

Dựa vào hình vẽ ta nhận thấy phương trình $f'\left(x\right) = \dfrac{2018}{2017}$ có 4 nghiệm phân biệt

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị. **Chọn A.**

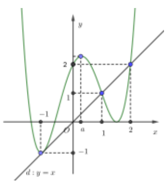
Ví dụ 4. *(Chuyên Lào Cai năm 2017-2018)* Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ cho bởi hình vẽ bên. Đặt $g\left(x\right) = f\left(x\right) - \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi đồ thị hàm số $y = g\left(x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $g'\left(x\right) = f'\left(x\right) - x$



Từ đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ và đồ thị hàm số $y = x$ ta thấy:

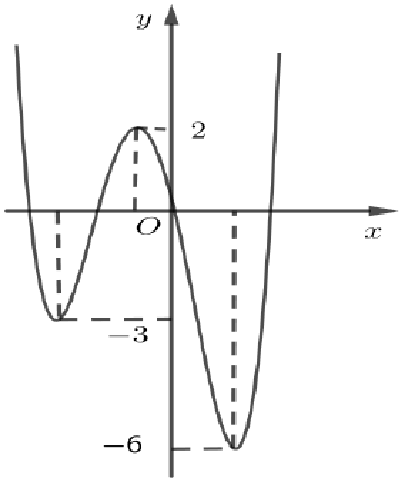
$f'\left(x\right)-x>0$ với $\forall x\in\left(-\infty;1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$ và $f'\left(x\right)-x<0$ với $\forall x\in\left(1;2\right)$

Ta có bảng biến thiên của $g\left(x\right)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g\left(x\right)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có hai điểm cực trị. **Chọn B.**

<u>Ví dụ 6.</u> Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f \; x$.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f \; x+1 \; +m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Nhận xét:

- Hàm số $y=\left|f(x)-\alpha\right|$ có số điểm cực trị bằng số cực trị của hàm $y=f(x)$ và số giao điểm của đồ thị hàm $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\alpha$ (không tính giao điểm là các điểm cực trị).

- Số điểm cực trị của hàm $y=f(x)$ bằng số điểm cực trị của hàm $y=f(x+a)$

Từ nhận xét trên ta có: Hàm số $y=f(x+1)$ có 3 cực trị.

Vậy ta cần đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x+1)$ tại 2 điểm khác cực trị.

Từ đồ thị ta suy ra: $\left[\begin{array}{l}-6<-m\le -3\\ -m\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\le m<6\\ m\le -2\end{array}\right.$

Do $m\in\mathbb{N}^*$ nên $m\in\{3,4,5\}$. **Chọn B.**

<u>Ví dụ 7.</u> *(Ngô Gia Tự lần 1 năm 2019-2020)* Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = \left|f\left(x-2\right)+3\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Theo nhận xét bài trên ta có:

- Số điểm cực trị hàm $f\left(x-2\right)$ bằng số cực trị của hàm $f\left(x\right)$, nên hàm $f\left(x-2\right)$có 2 điểm cực trị.

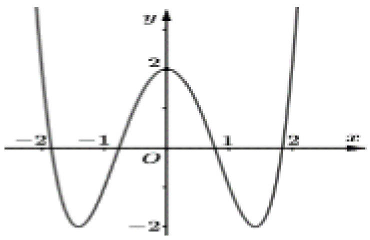
- Đồ thị hàm số $y = f\left(x-2\right)$ cắt đường thẳng $y=-3$ tại 3 điểm phân biệt (đều không phải là cực trị)

Vậy hàm số $y = \left|f\left(x-2\right)+3\right|$ có 5 cực trị. **Chọn D.**

Lưu ý: Nếu là hàm số $y = \left|f\left(x-2\right)+4\right|$ thì có 3 điểm cực trị vì có một giao điểm trùng với điểm cực trị của hàm số.

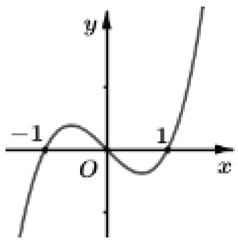
BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1. *(Ngô Gia Tự lần 1 năm 2018-2019)* Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$có dạng hình vẽ bên. Tính tổng tất cả giá trị nguyên của m để hàm số $y = \left|f(x)-2m+5\right|$có 7 điểm cực trị.



A. 6. **B.** 3. **<u>C.</u>** 5. **D.** 2.

Bài 2. *(Lê Xoay lần 1 năm 2019-2020)* Cho hàm số $y = f\left(x\right)$có đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$như hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x) = f\left(x^2-1\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Bài 3. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau.

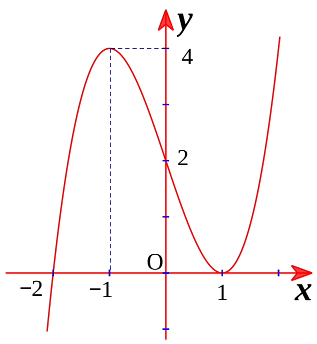
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2018	$\searrow$	-2018	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \left|f\left(x-2017\right)+2018\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **<u>B</u>.** 3. **C.** 2. **D.** 5

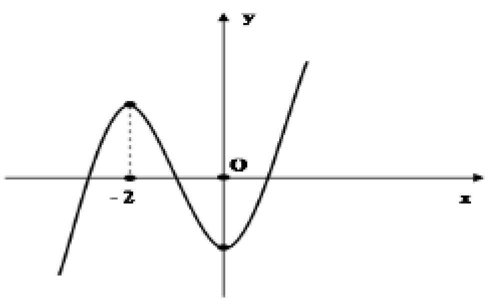
.

Bài 4. *(Ngô Gia Tự Lần 1 năm 2019-2020)* Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ là hàm bậc ba và có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f\left(x^2-3x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

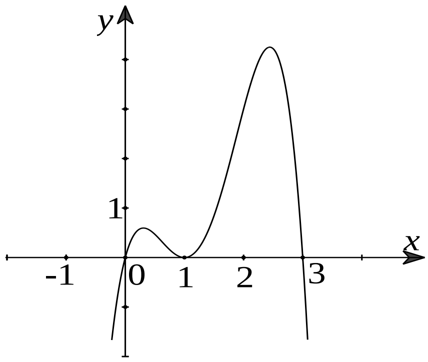
Bài 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = g(x) = f\left(x^2-2x-4\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 1. **<u>B</u>.** 3. **C.** 2. **D.** 4

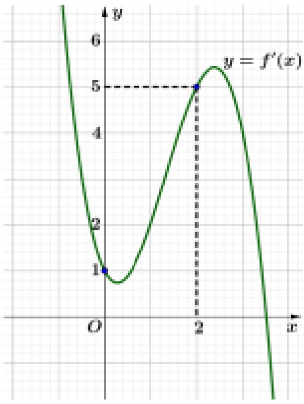
.

Bài 6. *(Ngô Gia Tự lần 1 năm 2018-2019)* Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Bài 7. *(Chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2018-2019)* Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y=f\left(x\right)-x^2-x$ đạt cực đại tại $x=0$.

B. Hàm số $y=f\left(x\right)-x^2-x$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số $y=f\left(x\right)-x^2-x$ không đạt cực trị tại $x=0$.

D. Hàm số $y=f\left(x\right)-x^2-x$ không có cực trị.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Đặt $g\left(x\right)=f\left(x+2\right)+\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2019$. Khẳng định nào sau đây đúng?

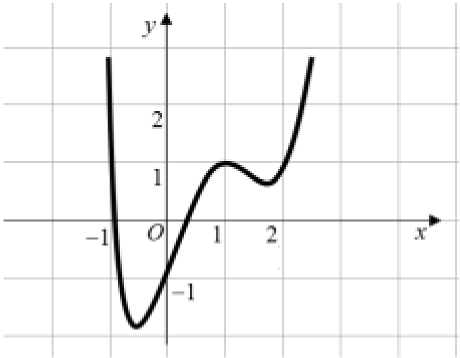
A. Hàm số $y=g\left(x\right)$ đạt cực đại tại $x=1$.

B. Hàm số $y=g\left(x\right)$ có 1 điểm cực trị.

C. Hàm số $y=g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;4\right)$.

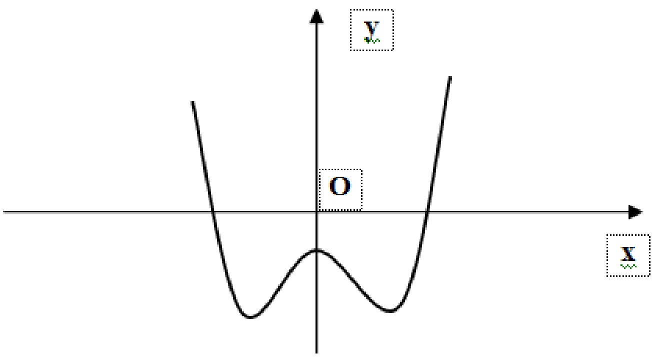
D. $g(5)>g(6)$ và $g(0)>g(1)$.

Bài 9. *(TH&TT năm 2018-2019)* Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm thuộc khoảng nào dưới đây?



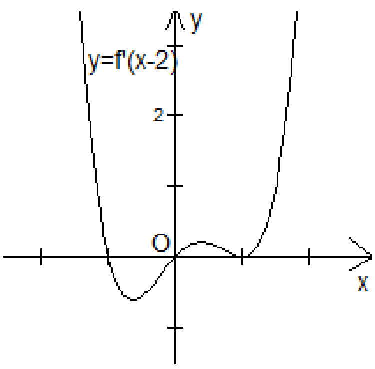
A. $\left(\frac{3}{2};3\right)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Bài 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=\left|f(x+2018)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

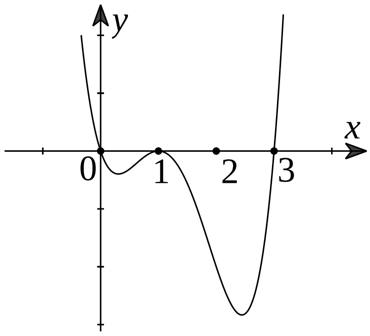
Bài 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x-2)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **<u>D</u>.** 2.

Bài 12. *(Chuyên Vĩnh Phúc lần 1 năm 2018-2019)* Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để hàm số $y=f(x^2+m)$ có 3 điểm cực trị.

A. $m\in(3;+\infty)$.

B. $m\in[0;3]$.

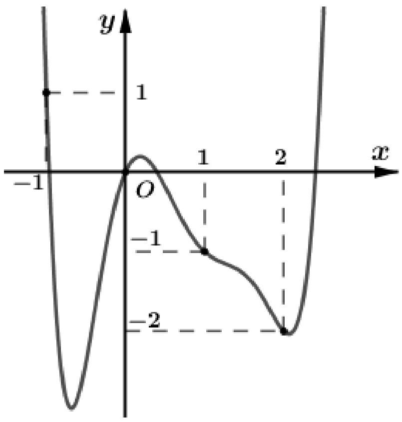
<u>C</u>. $m\in[0;3)$.

D. $m\in(-\infty;0)$.

Bài 13. *(KSCL lần 1 năm 2019-2020 THPT Yên Lạc)* Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-4x^2$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|x|-1\right)$ bằng

<u>A.</u> 5 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 4

Bài 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x+2\right)+\left(x+1\right)\left(x+3\right)$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4

.

ĐÁP ÁN

1C	**2**	**3B**	**4**	**5B**	**6A**	**7A**
8A	**9B**	**10D**	**11D**	**12C**	**13A**	**14A**

III. SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH, SỐ GIAO ĐIỂM CỦA ĐỒ THỊ

Dạng 1: Cho đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm số nghiệm của các phương trình có dạng $f(x) = a$, $f(u(x)) = a$.

Phương pháp: Ta sử dụng tính chất sau:

- ✓ Nếu hàm số f đơn điệu trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và a là giá trị trung gian giữa $f(\alpha)$ và $f(\beta)$ thì phương trình $f(x) = a$ có nghiệm duy nhất.
- ✓ Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm là α thì phương trình $f(u(x)) = 0$ có nghiệm là nghiệm PT $u(x) = \alpha$ **.**

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 1 = 0$ là:

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có phương trình $f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -1$. Từ BBT hàm số $f(x)$ ta thấy phương trình có 2 nghiệm. **Đáp án D.**

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x+1) = 0$ là

A. 0. **B. 4.** **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình $f(x+1) = 0$ là số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Dựa vào BBT ta thấy số nghiệm của phương trình là 4. **Đáp án B**

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f\left(3x-5\right)-7=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

.

Lời giải

Ta có phương trình: $2f\left(3x-5\right)-7=0 \Leftrightarrow f\left(3x-5\right)=\dfrac{7}{2}$.

Đặt $t=3x-5$, phương trình trở thành $f\left(t\right)=\dfrac{7}{2}$.

Với mỗi nghiệm t thì có một nghiệm $x=\dfrac{t+5}{3}$ nên số nghiệm t của phương trình $f\left(t\right)=\dfrac{7}{2}$ bằng số nghiệm của phương trình $2f\left(3x-5\right)-7=0$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ suy ra phương trình $f\left(t\right)=\dfrac{7}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình $2f\left(3x-5\right)-7=0$ có 3 nghiệm phân biệt. **Chọn C.**

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-26	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-4x+5\right)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 2. **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5.

Lời giải

Ta có phương trình $f\left(x^2-4x+5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4x+5=a_1\in(-\infty;1) & (1) \\ x^2-4x+5=a_2\in(1;3) & (2) \\ x^2-4x+5=a_3\in(3;+\infty) & (3) \end{array}\right.$

Ta thấy $x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geq 1$

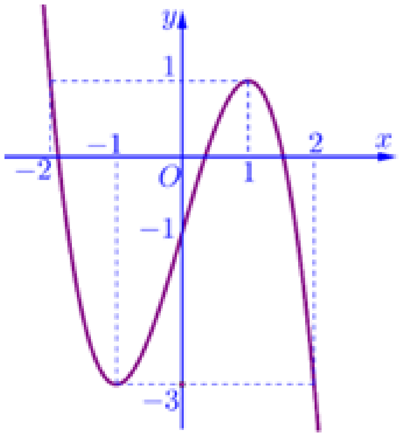
Do đó: Phương trình (1) vô nghiệm, phương trình (2) và (3) mỗi phương trình có 2 nghiệm, các nghiệm này khác nhau. Vậy phương trình $f\left(x^2-4x+5\right)=0$ có 4 nghiệm.

Đáp án C.

Lưu ý: Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm bằng α thì phương trình $f(u(x))=0$ có nghiệm thỏa mãn $u(x)=\alpha$ **.**

Ví dụ 5. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ bên.

Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=-2$ có tất cả bao nhiêu nghiệm **dương** phân biệt.



A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Ta có từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra phương trình $f(x)=-1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét số nghiệm dương của phương trình $f(x)=\alpha$

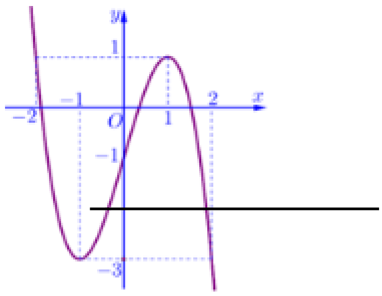
Nhận xét :

Nếu $\alpha\in(1;+\infty)$ thì PT không có nghiệm dương.

Nếu $\alpha=1$ thì PT có 1 nghiệm dương.

Nếu $\alpha\in(-1;1)$ thì PT có 2 nghiệm dương.

Nếu $\alpha\in(-\infty;-1]$ thì PT có 1 nghiệm dương.



Vậy $f\left(f\left(x\right)\right)=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a_1\in(-2;-1)\\ f(x)=a_2\in(-1;0)\\ f(x)=a_3\in(1;2)\end{array}\right.$

Theo nhận xét trên ta có :

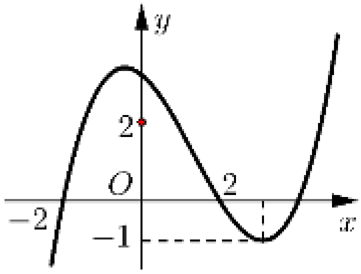
Phương trình $f(x)=a_1\in(-2;-1)$ cho 1 nghiệm dương

Phương trình $f(x)=a_2\in(-1;0)$ cho 2 nghiệm dương

Phương trình $f(x)=a_3\in(1;2)$ không có nghiệm dương

Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=-2$ có 3 nghiệm dương. **Đáp án A.**

Ví dụ 6. (Đề thi THPTQG năm 2019, mã 101). Cho hàm bậc 3 có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f(x^3-3x)\right|=\dfrac{4}{3}$

A. 3. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 4.

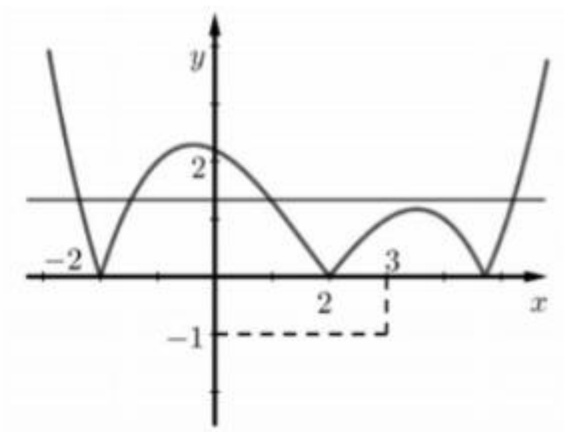
Lời giải

Xét phương trình $\left|f(x^3-3x)\right|=\dfrac{4}{3}$ (1)

Đặt $t=x^3-3x$, $t'=3x^2-3=0\Leftrightarrow x=-1,x=1$, có BBT như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		+	0	−	0	+	
t	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow\left|f(t)\right|=\dfrac{4}{3}$. Xét đồ thị hàm $y=\left|f(t)\right|$ như hình vẽ dưới đây.



Từ đó suy ra phương trình $|f(t)| = \frac{4}{3}$ có các nghiệm $t_1 < -2, t_2 \in (-2;0), t_3 \in (0;2), t_4 > 2$

.

Phương trình $x^3 - 3x = t_1 < -2$ có 1 nghiệm

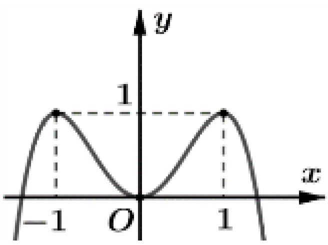
Phương trình $x^3 - 3x = t_2 \in (-2;0)$ có 3 nghiệm

Phương trình $x^3 - 3x = t_3 \in (0;2)$ có 3 nghiệm

Phương trình $x^3 - 3x = t_4 > 2$ có 1 nghiệm

Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm. **Đáp án B.**

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f\left[f(\cos 2x)\right] = 0$?

A. 1 điểm. **B.** 3 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** Vô số.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x \in [-1;1]$ thì $y \in [0;1]$.

Do đó nếu đặt $t = \cos 2x$ thì $t \in [-1;1]$, khi đó $f(\cos 2x) \in [0;1]$.

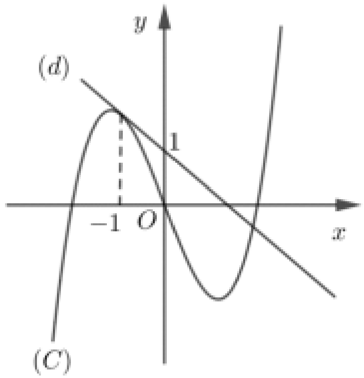
Dựa vào đồ thị, ta có $f\left[f(\cos 2x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos 2x) = 0 \\ f(\cos 2x) = a\ (a < -1)\ (\text{loại}) \\ f(\cos 2x) = b\ (b > 1)\ (\text{loại}) \end{array}\right.$.

Phương trình $f(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = a\ (a < -1)\ (\text{loại}) \\ \cos 2x = b\ (b > 1)\ (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình đã cho có 4 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.
Chọn C.

Ví dụ 8. (Chuyên Hùng Vương Phú Thọ lần 1 năm 2019-2020). Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Đường thẳng $d: y=g(x)$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=-1$. Hỏi phương trình $\frac{f(x)-1}{g(x)-1}-\frac{g(x)}{f(x)}=0$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Xét phương trình $\frac{f(x)-1}{g(x)-1}-\frac{g(x)}{f(x)}=0\ \left(f(x)\neq 0; g(x)\neq 1\right)$

$\Leftrightarrow f^2(x)-f(x)=g^2(x)-g(x)$

$\Leftrightarrow f^2(x)-g^2(x)=f(x)-g(x)$

$\Leftrightarrow [f(x)-g(x)][f(x)+g(x)]=f(x)-g(x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=g(x) & (1) \\ f(x)=1-g(x) & (2) \end{array}\right.$.

- Xét phương trình (1): Từ đồ thị suy ra (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\alpha>0. \end{array}\right.$

- Xét phương trình (2): Xét hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) như hình vẽ và hàm số $y=-g(x)+1$ có đồ thị là đường thẳng d' được xác định như sau:

+ Lấy đối xứng phần đồ thị đường thẳng d qua trục Ox .

+ Sau đó tịnh tiến đường thẳng trên theo phương Oy lên trên 1 đơn vị.

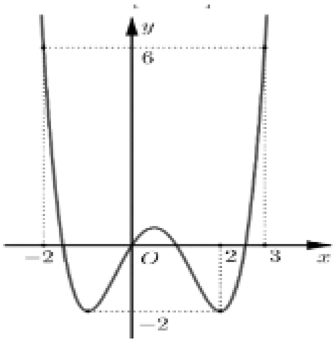
Khi đó số nghiệm của (2) bằng số giao điểm của (C) với d'. Từ đồ thị suy ra có 3 giao điểm, trong đó 1 giao điểm là gốc tọa độ O.

Do đó (2) có 3 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x=0$ (loại).

Kết luận: Phương trình đã cho có 4 nghiệm . **Chọn C.**

Dạng 2: Các bài toán có chứa tham số

Ví dụ 1. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(x^3-3x\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 3 **B.** 2 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Đặt $t=x^3-3x$, với $x\in[-1;2]$ ta có bảng biến thiên

x	-1		1		2
t'		$-$	0	$+$	
t	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Với mỗi $t\in(-2;2]$ thì có 2 nghiệm $x\in[-1;2]$

Để phương trình có 6 nghiệm thì phương trình $f\left(t\right)=m$ có 3 nghiệm $t\in\left(-2;2\right]$

Dựa vao đồ thị ta có $m=0;m=1$. **Đáp án B.**

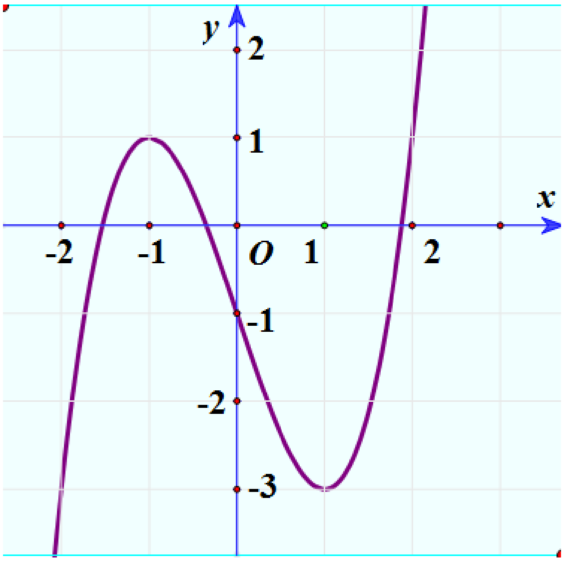
Lưu ý: Bài toán tìm số nghiệm của phương trình $f(u(x))=m$ trên tập D.

- B1: Đặt $t=u(x)$, ta khảo sát hàm $t=u(x)$ trên D

- B2: Chỉ ra sự tương ứng giữa giá trị của t với số giá trị của x. Bước này quan trọng, nếu không chỉ ra được sự tương ứng thì sẽ không

-B3: Xét số nghiệm của phương trình $f(t)=m$, dựa vào B2 đưa ra kết luận.

Ví dụ 2. (CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left(2\sin x\right)=m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$ khi và chỉ khi



A. $m\in\{-3;1\}$. **B.** $m\in(-3;1)$. **C.** $m\in[-3;1)$. **D.** $m\in(-3;1]$.

Lời giải

Đặt $t=2\sin x$, $x\in[-\pi;\pi]$

Ta có bảng biến thiên hàm số $t=g(x)=2\sin x$ trên $[-\pi;\pi]$.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g(x)=2\sin x$	0 ↘	-2 ↗	0 ↗	2 ↘	0

Từ BBT ta thấy:

+ $t\in(-2;0)\cup(0;2)$, mỗi t cho 2 giá trị x

+ $t\in\{-2;2\}$, mỗi t cho 1 giá trị x

+ $t=0$, cho 3 giá trị x

Phương trình $f(2\sin x)=m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có:

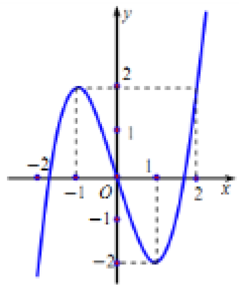
+ Một nghiệm duy nhất $t=0$, các nghiệm còn lại không thuộc $[-2;2]$, khi đó $m\in\varnothing$

+ Hoặc một nghiệm $t=2$ nghiệm còn lại thuộc $(-2;2)\backslash\{0\}$, khi đó $m=1$

+ Hoặc một nghiệm $t=-2$, nghiệm còn lại thuộc $(-2;2)\backslash\{0\}$, khi đó $m=-3$.

Vậy $m\in\{-3;1\}$. **Đáp án A.**

Ví dụ 3.(SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f\left(\cos x\right)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4
.

Lời giải

Từ hình vẽ, đặt $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d,\left(a\neq 0\right)$. Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ O

nên $d=0$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases}-a+b-c=2\\ a+b+c=-2\\ 4a+2b+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\\ c=-3\end{cases}$. Do đó $f\left(x\right)=x^3-3x.$

Đặt $t=\cos x, x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow t\in\left(-1;0\right]\Rightarrow f\left(\cos x\right)=f\left(t\right)=t^3-3t$ với $t\in\left(-1;0\right]$.

$f'\left(t\right)=3t^2-3<0,\forall t\in\left(-1;0\right]\Rightarrow f\left(t\right)$ nghịch biến trên

$\left(-1;0\right]\Rightarrow 2f\left(t\right)\in\left[2f\left(0\right);2f\left(-1\right)\right)$

hay $2f\left(t\right)\in\left[0;4\right)$. Đặt $u=\sqrt{2f\left(t\right)}\Rightarrow u\in\left[0;2\right)\Rightarrow m=f\left(u\right)=u^3-3u$ với $u\in\left[0;2\right)$.

Ta có $f'\left(u\right)=3u^2-3\Rightarrow f'\left(u\right)=0\Leftrightarrow u=1\in\left[0;2\right)$.

Bảng biến thiên của $f\left(u\right)$.

u	0		1		2
$f'(u)$		$-$	0	$+$	
$f(u)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -2\leq m<2$.

$\Rightarrow\begin{cases}m\in\left[-2;2\right)\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left\{-2;-1;0;1\right\}$. **Chọn D.**

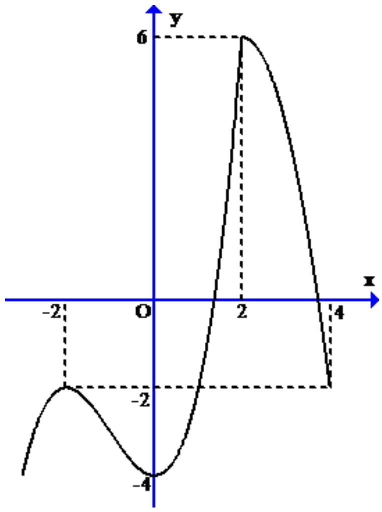
Lưu ý: Dạng bài toán tìm tham số m để phương trình $f(u(x))=m$ có nghiệm trên D

+ B1: Đặt $t=u(x)$ ta chỉ cần tìm miền giá trị của hàm hàm $u(x)$ trên D. giả sử $u(x)\in K,\forall x\in D$

+ B2: Tìm tham số m để PT $f(t) = \mathrm{m}$ có nghiệm trên tập K. Tương đương với m thuộc miền giá trị của f trên K.

Nhận xét: Cho phương trình $f(u(x)) = m$, nếu bài toán về số nghiệm sẽ phức tạp hơn so với bài toán có nghiệm.

Ví dụ 4. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;2\right]$?

A. 11 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 10

Lời giải

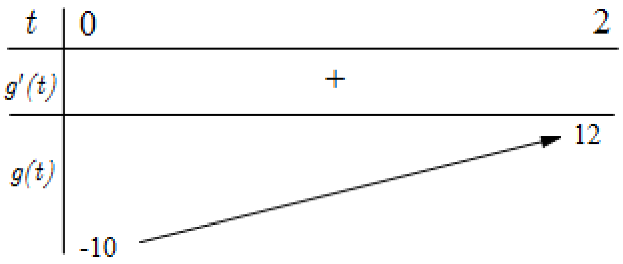
Đặt $t = \frac{x}{2}+1$, khi $-2 \le x \le 2$ thì $0 \le t \le 2$.

Phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{3}f\left(t\right)+2t-2=m \Leftrightarrow f\left(t\right)+6t-6=3m$.

Xét hàm số $g\left(t\right)=f\left(t\right)+6t-6$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Ta có $g'\left(t\right)=f'\left(t\right)+6$. Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$ nên $f'\left(t\right)>0, \forall t\in\left(0;2\right)$ $\Rightarrow g'\left(t\right)>0, \forall t\in\left(0;2\right)$ và $g\left(0\right)=-10$; $g\left(2\right)=12$.

Bảng biến thiên của hàm số $g\left(t\right)$ trên đoạn $\left[0;2\right]$



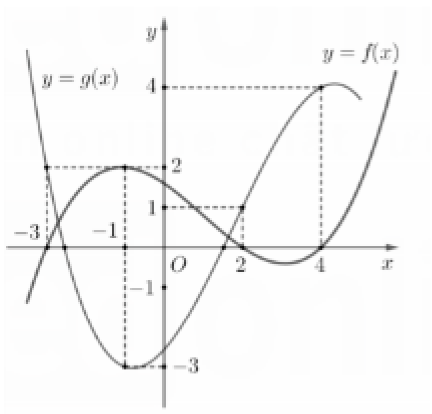
Phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$ khi và chỉ khi phương trình

$g(t)=3m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$ hay $-10\le 3m\le 12 \Leftrightarrow -\dfrac{10}{3}\le m\le 4$.

Mặt khác m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 8 giá trị m thoả mãn bài toán. **Đáp án C.**

Ví dụ 5. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên (trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f(x)$). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(1-g(2x-1))=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;\dfrac{5}{2}\right]$.



A. 8 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 4

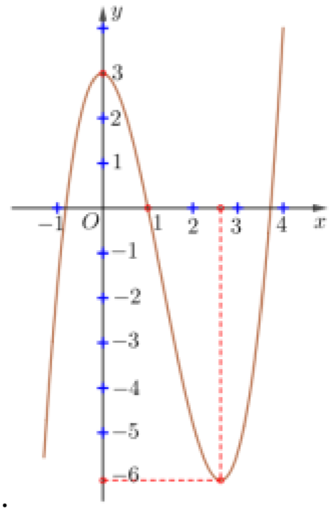
Lời giải

Với $x\in\left[-1;\dfrac{5}{2}\right]\Rightarrow 2x-1\in[-3;4]\Rightarrow g(2x-1)\in[-3;4]\Rightarrow t=1-g(2x-1)\in[-3;4]$

Vậy ta cần tìm m để phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-3;4]$

$\Leftrightarrow \min\limits_{[-3;4]} f(t)\le m\le \max\limits_{[-3;4]} f(t)\Leftrightarrow \min\limits_{[-3;4]} f(t)\le m\le 2$ trong đó $\min\limits_{[-3;4]} f(t)\in(-1;0)$. Vậy các số nguyên cần tìm là $a\in\{0,1,2\}$ **Chọn B**.

Ví dụ 6.(THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g\left(x\right)=f\left[f\left(x\right)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'\left(x\right)=0$.



A. 2 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 6

Lời giải.

Ta có: $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)f'\left[f\left(x\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f'\left[f\left(x\right)\right]=0\end{array}\right.\quad\left(*\right)$.

Theo đồ thị hàm số suy ra.

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a_1\end{array}\right.$, với $2<a_1<3$.

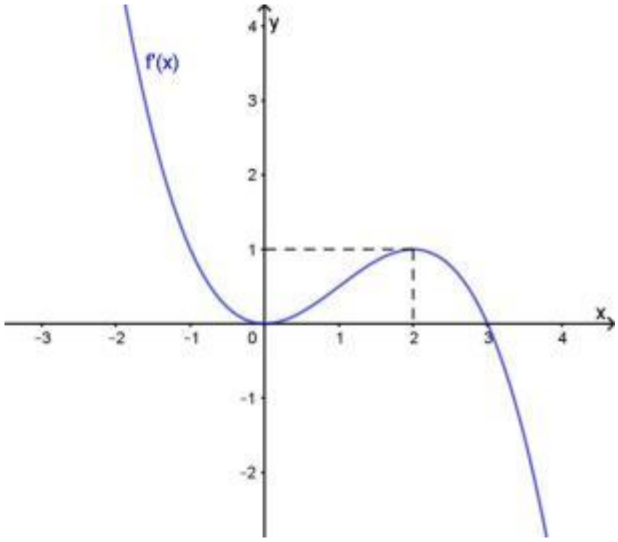
$f'\left[f\left(x\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=0\ ,(1)\\f\left(x\right)=a_1\ ,(2)\end{array}\right.$.

Phương trình $\left(1\right)$: $f\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình $\left(*\right)$.

Phương trình $\left(2\right)$: $f\left(x\right)=a_1$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình $\left(1\right)$ và phương trình $\left(*\right)$. Vậy có tất cả 8 nghiệm của phương trình $g'\left(x\right)=0$. **Chọn B.**

Ví dụ 7. (KSCL trường Nguyễn Bỉnh Khiêm năm 2019-2020)

Cho hàm số $y=f\ \ x\ \ =ax^4+bx^3+cx^2+dx+k$ với hệ số thực. Biết đồ thị hàm số $y=f'\ \ x$ có điểm $O\ \ 0;0$ là điểm cực trị, cắt trục hoành tại điểm $A\ \ 3;0$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $-5;5$ để phương trình $f\ \ -x^2+2x+m\ \ =k$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. 5. **B.** 7. **C.** 0. **D.** 2

.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $y=f'\ x$ ta có $f'\ x\ =px^2\ \ x-3\ \ \ p\in\mathbb{R}$. Mặt khác đồ thị hàm số $y=f'\ x$ đi qua điểm $\ 2;1\ $ suy ra

$$p=-\frac{1}{4}\Rightarrow f'\ x\ =-\frac{1}{4}x^2\ \ x-3\ =-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2\ (1).$$

Theo đề bài ta có $f'\ x\ =4ax^3+3bx^2+2cx+d\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{16} \\ b=\dfrac{1}{4} \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow f\ \ x\ =-\dfrac{1}{16}x^4+\dfrac{1}{4}x^3+k$.

Đặt

$$u=-x^2+2x+m\Rightarrow f\ \ u\ =k\Leftrightarrow -\frac{1}{16}u^4+\frac{1}{4}u^3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=4 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+2x+m=0\ (3) \\ -x^2+2x+m=4\ (4) \end{array}\right.$$

Vì phương trình (3) và (4) không có nghiệm chung nên để phương tình $f\ \ -x^2+2x+m\ =k$ có bốn nghiệm phân biệt thì phương trình (3) và (4) mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt khi đó $\begin{cases} 1+m>0 \\ 1+m-4>0 \end{cases}\Leftrightarrow m>3$ suy ra có hai giá trị nguyên của m là 4, 5. **Chọn D.**

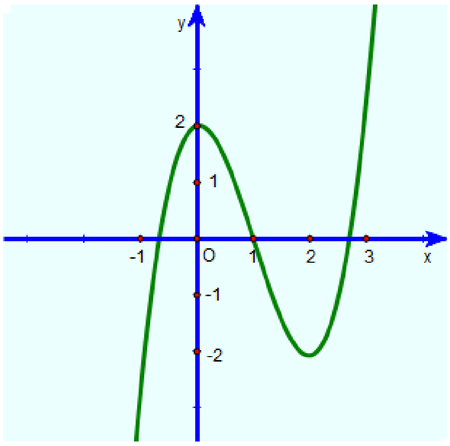
BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1. (Lê Hồng Phong Nam Định lần 1 năm 2019-2020) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

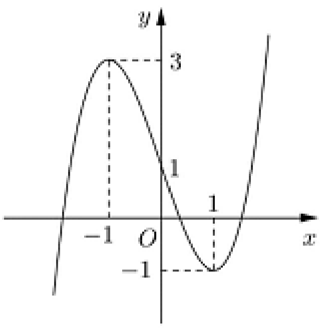
Bài 2. (THPT NGÔ GIA TỰ VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi m là số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

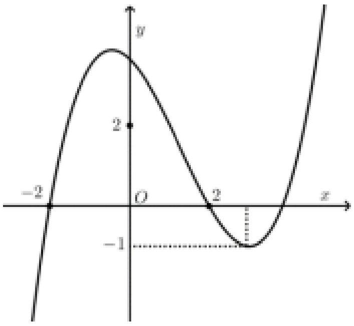
A. $m = 6$. **B.** $m = 7$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = 9$.

Bài 3. (Đề minh họa thi THPTQG của BGD năm 2019) Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sin x\right) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0, \pi\right)$:



A. $\left[-1;3\right)$. **B.** $\left(-1;1\right)$. **C.** $\left(-1;3\right)$. **D.** $\left[-1;1\right)$.

Bài 4. (Đề THPTQG năm 2019, mã đề 102) Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{1}{2}$ là



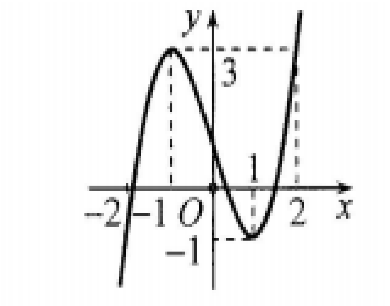
A. 6 .

B. 10 .

C. 12 .

D. 3
.

Bài 5. **(CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}\right) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ là

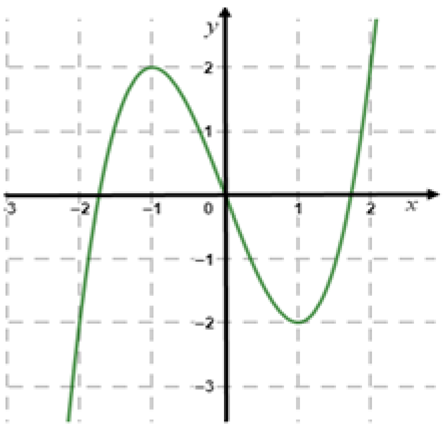
A. $[-1;3]$.

B. $\left[-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$.

C. $\left(-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$.

D. $(-1;3]$.

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) = m$ có nghiệm là



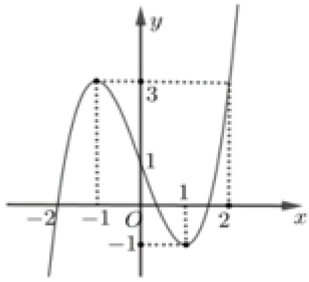
A. $[-1;2]$.

B. $[0;2]$.

C. $[-1;1]$.

D. $[-2;2]$.

Bài 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$. Tìm tập S.



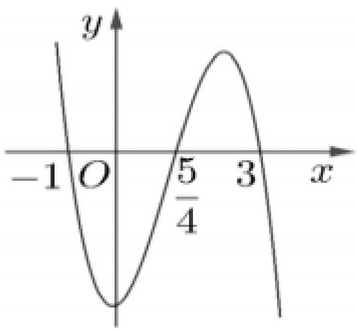
A. $S=\left(-1;f\left(3-\sqrt{2}\right)\right]$.

B. $S=\left(f\left(3-\sqrt{2}\right);3\right]$.

C. $S=\varnothing$.

D. $S=\left[-1;3\right]$.

Bài 8. (Đề minh họa thi THPTQG của BGD năm 2019) Cho hàm số $f\left(x\right)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r\ \ \left(m,n,p,q,r\in\mathbb{R}\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=r$ có số phần tử

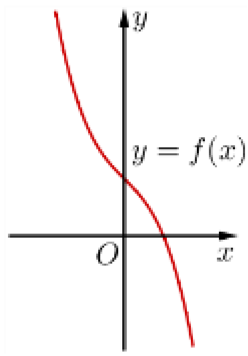
A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

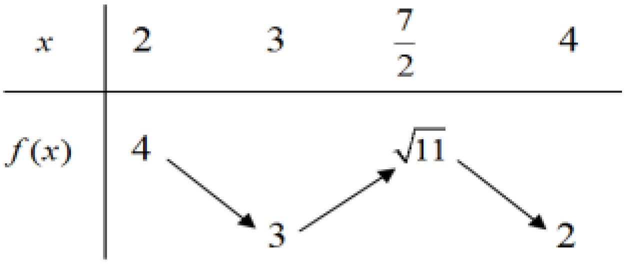
Bài 9. (Chuyên ĐHSP Vinh lần 1 năm 2019-2020) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của m để phương trình:
$f\left(3\sin 2x+8\cos^2 x-4\right)=f\left(m^2+4m\right)$ có nghiệm $x\in\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Bài 10. (Chuyên Quang Trung lần 1 năm 2019-2020). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;4]$?



A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

ĐÁP ÁN

1D	**2B**	**3D**	**4B**	**5D**	**6D**
7A	**8B**	**9A**	**10C**		