TRẮC NGHIỆM MŨ VÀ LÔGARIT TRONG CÁC ĐỀ THI TỐT NGHIỆP

NĂM 2020-2019-2018

I. MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT VÀ THÔNG HIỂU

Câu 1. (TN LẦN 2-2020) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 2a$ bằng

A. $1+\log_2 a$. **B.** $1-\log_2 a$. **C.** $2-\log_2 a$. **D.** $2+\log_2 a$.

Lời giải

Chọn A

$\log_2 2a = \log_2 2 + \log_2 a = 1 + \log_2 a$

Câu 2. (TN LẦN 2-2020) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+6)=5$ là

A. $x=4$. **B.** $x=19$. **C.** $x=38$. **D.** $x=26$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x+6>0 \Leftrightarrow x>-6$

Ta có: $\log_2(x+6)=5 \Leftrightarrow \log_2(x+6)=\log_2 2^5 \Leftrightarrow (x+6)=32 \Leftrightarrow x=32-6 \Leftrightarrow x=26(TM)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=26$

Câu 3. (TN LẦN 2-2020) Với a,b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a - 2\log_9 b = 3$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=27b$. **B.** $a=9b$. **C.** $a=27b^4$. **D.** $a=27b^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_3 a - 2\log_9 b = 3 \Leftrightarrow \log_3 a - \log_3 b = 3 \Leftrightarrow \log_3 \frac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 27 \Leftrightarrow a = 27b$.

Câu 4. (TN LẦN 2-2020) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36-x^2)\ge 3$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3]$. **C.** $[-3;3]$. **D.** $(0;3]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3(36-x^2)\ge 3 \Leftrightarrow 36-x^2 \ge 27 \Leftrightarrow 9-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 3$.

Câu 5. (TN LẦN 2-2020) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(3a)$ bằng

A. $3-\log_3 a$. **B.** $1-\log_3 a$. **C.** $3+\log_3 a$. **D.** $1+\log_3 a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(3a)=\log_3 3+\log_3 a = 1+\log_3 a$.

Câu 6. (TN LẦN 2-2020) Nghiệm của phương trình $2^{2x-2}=2^x$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-4$. **D.** $x=4$.

Lời giải

Chọn B

$2^{2x-2}=2^x \Leftrightarrow 2x-2=x \Leftrightarrow x=2$.

Câu 7. (TN LẦN 2-2020) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+7)=5$ là

A. $x=18$. **B.** $x=25$. **C.** $x=39$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn B

$\log_2(x+7)=5 \Leftrightarrow x+7=2^5 \Leftrightarrow x=25$.

Câu 8. (TN LẦN 2-2020) Với a,b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_2 a-2\log_4 b=4$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=16b^2$. **B.** $a=8b$. **C.** $a=16b$. **D.** $a=16b^4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2 a-2\log_4 b=4$

$\Leftrightarrow \log_2 a-2\log_{2^2} b=4 \Leftrightarrow \log_2 a-2.\frac{1}{2}\log_2 b=4 \Leftrightarrow \log_2 a-\log_2 b=4$

$\Leftrightarrow \log_2\frac{a}{b}=4 \Leftrightarrow \frac{a}{b}=2^4 \Leftrightarrow a=16b$

Câu 9. (TN LẦN 2-2020) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(31-x^2)\ge 3$ là

A. $(-\infty;2]$. **B.** $[-2;2]$. **C.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(0;2]$.

Lời giải

Chọn B

$\log_3(31-x^2)\ge 3 \Leftrightarrow 31-x^2\ge 27 \Leftrightarrow x^2-4\le 0 \Leftrightarrow x\in[-2;2]$.

Câu 10. (TN LẦN 1-2020) Nghiệm của phương trình $\log_2(x-2)=3$ là:

A. $x=6$. **B.** $x=8$. **C.** $x=11$. **D.** $x=10$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.

$\log_2(x-2)=3 \Leftrightarrow x-2=8 \Leftrightarrow x=10$ (thỏa).

Vậy phương trình có nghiệm $x=10$.

Câu 11. (TN LẦN 1-2020) Nghiệm của phương trình $3^{x+1}=9$ là

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{x+1}=9 \Leftrightarrow 3^{x+1}=3^2 \Leftrightarrow x+1=2 \Leftrightarrow x=1$.

Câu 12. (TN LẦN 1-2020) Tập xác định của hàm số $y=\log_3 x$ là

A. $(-\infty;0)$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;+\infty)$ **D.** $[0;+\infty)$

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện xác định: $x>0$.

Câu 13. (TN LẦN 1-2020) Với a,b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{a^3} b$ bằng

A. $3+\log_a b$ **B.** $3\log_a b$ **C.** $\dfrac{1}{3}+\log_a b$ **D.** $\dfrac{1}{3}\log_a b$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_{a^3} b=\dfrac{1}{3}\log_a b$.

Câu 14. (TN LẦN 1-2020) Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-7}<4$ là

A. $(-3;3)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $2^{x^2-7}<4 \Leftrightarrow 2^{x^2-7}<2^2 \Rightarrow x^2-7<2 \Leftrightarrow x^2<9 \Rightarrow x\in \ -3;3$.

Câu 15. (TN LẦN 1-2020) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3(ab)}=4a$. Giá trị của ab^2 bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

Ta có : $9^{\log_3\ ab}=4a \Leftrightarrow 2\log_3\ ab\ =\log_3\ 4a\ \Leftrightarrow \log_3\ a^2b^2\ =\log_3\ 4a\ \Rightarrow a^2b^2=4a$

$\Leftrightarrow ab^2=4$.

Câu 16: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$ là

A. $x=4$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn A

$3^{x-1}=27\Leftrightarrow 3^{x-1}=3^3\Leftrightarrow x=4$.

Câu 17: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Tập xác định của hàm số $y=\log_2 x$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi $x>0$. Vậy tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Câu 18: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2\left(a^3\right)$ bằng

A. $\left(\frac{3}{2}\log_2 a\right)$. **B.** $\frac{1}{3}\log_2 a$. **C.** $3+\log_2 a$. **D.** $3\log_2 a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_2\left(a^3\right)=3\log_2 a$.

Câu 19: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Tập nghiệm của bất phương trình $\log x\ge 1$ là

A. $(10;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[10;+\infty)$. **D.** $(-\infty;10)$.

Lời giải

Chọn C

$\log x\ge 1\Leftrightarrow x\ge 10$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[10;+\infty)$.

Câu 20: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Xét các số thực $a;b$ thỏa mãn $\log_3\left(3^a.9^b\right)=\log_9 3$. Mệnh đề nào là đúng?

A. $a+2b=2$. **B.** $4a+2b=1$. **C.** $4ab=1$. **D.** $2a+4b=1$.

Lời giải

Chọn D

$$\log_3\left(3^a.9^b\right)=\log_9 3\Rightarrow \log_3\left(3^a\right)+\log_3\left(9^b\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a+2b=\frac{1}{2}\Rightarrow 2a+4b=1.$$

Câu 21: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Tập nghiệm của bất phương trình $9^x+2.3^x-3>0$ là

A. $\left[0;+\infty\right)$. **B.** $\left(0;+\infty\right)$. **C.** $\left(1;+\infty\right)$. **D.** $\left[1;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=3^x\left(t>0\right)$ bất phương trình đã cho trở thành $t^2+2t-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t>1\\t<-3\left(loai\right)\end{array}\right.$

Với $t>1$ thì $3^x>1\Leftrightarrow x>0$.

Câu 22. (THAM KHẢO LẦN 1-2020) Nghiệm của phương trình $\log_3\left(2x-1\right)=2$ là

A. $x=3$. **B.** $x=5$. **C.** $x=\dfrac{9}{2}$. **D.** $x=\dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Đáp án B

$\log_3\left(2x-1\right)=2\Leftrightarrow 2x-1=3^2\Leftrightarrow x=5$

Câu 23. (THAM KHẢO LẦN 1-2020) Xét tất cả các số dương *a* và *b* thỏa mãn $\log_2 a=\log_8\left(ab\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=b^2$. **B.** $a^3=b$. **C.** $a=b$. **D.** $a^2=b$.

Lời giải

Đáp án D

$\log_2 a=\log_8\left(ab\right)\Leftrightarrow\log_2 a=\dfrac{1}{3}\log_2\left(ab\right)$

$\Leftrightarrow 3\log_2 a=\log_2\left(ab\right)\Leftrightarrow\log_2 a^3=\log_2\left(ab\right)\Leftrightarrow a^3=ab\Leftrightarrow a^2=b$.

Câu 24. (THAM KHẢO LẦN 1-2020) Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1}\geq 5^{x^2-x-9}$ là

A. $\left[-2;4\right]$. **B.** $\left[-4;2\right]$. **C.** $\left(-\infty;-2\right]\cup\left[4;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-4\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

Lời giải

Đáp án A

$5^{x-1}\geq 5^{x^2-x-9}\Leftrightarrow x-1\geq x^2-x-9\Leftrightarrow x^2-2x-8\leq 0\Leftrightarrow -2\leq x\leq 4$

Câu 25. (THAM KHẢO LẦN 1-2020) Cho *x*, *y* là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (2x+y)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

A. 2. **B**. $\frac{1}{2}$. **C**. $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$. **D**. $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Lời giải

Đáp án B

Giả sử $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (2x+y) = t$. Suy ra: $\begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ 2x + y = 4^t \end{cases} \Rightarrow 2.9^t + 6^t = 4^t$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{9}{4}\right)^t + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^t = -1 \; (loai) \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Ta có : $\frac{x}{y} = \frac{9^t}{6^t} = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2}$.

Câu 26. (THPT QG-2019) Với a là số thực dương tùy, $\log_5 a^2$ bằng

A. $2\log_5 a$. **B.** $2 + \log_5 a$. **C.** $\frac{1}{2} + \log_5 a$. **D.** $\frac{1}{2}\log_5 a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_5 a^2 = 2\log_5 a$.

Câu 27. (THPT QG-2019) Nghiệm phương trình $3^{2x-1} = 27$ là

A. $x = 5$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3^{2x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 28. (THPT QG-2019) Cho hàm số $y = 2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-3).2^{x^2-3x}.\ln 2$. **B.** $2^{x^2-3x}.\ln 2$. **C.** $(2x-3).2^{x^2-3x}$. **D.** $(x^2-3x).2^{x^2-3x-1}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 29. (THPT QG-2019) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4b=16$. Giá trị của $4\log_2 a+\log_2 b$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4\log_2 a+\log_2 b=\log_2 a^4+\log_2 b=\log_2 a^4b=\log_2 16=4$.

Câu 30 (THPT QG-2019) Nghiệm của phương trình $\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)$ là

A. $x=3$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=4$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn D

- $\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)$ (1)
- (1) $\Leftrightarrow \log_3[3.(x+1)]=\log_3(4x+1)\Leftrightarrow 3x+3=4x+1>0\Leftrightarrow x=2$.
- Vậy (1) có một nghiệm $x=2$.

Câu 31. (THPT QG-2018)Với a là số thực dương tùy ý, $\ln 5a-\ln 3a$ bằng

A. $\dfrac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. **B.** $\ln(2a)$. **C.** $\ln\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{\ln 5}{\ln 3}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\ln 5a-\ln 3a=\ln\dfrac{5a}{3a}=\ln\dfrac{5}{3}$.

Câu 32. (THPT QG-2018) Phương trình $2^{2x+1}=32$ có nghiệm là

A. $x=\dfrac{5}{2}$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\dfrac{3}{2}$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $2^{2x+1}=32 \Leftrightarrow 2x+1=5 \Leftrightarrow x=2$.

II. MỨC ĐỘ VẬN DỤNG VÀ VẬN DỤNG CAO

Câu 1. (TN LẦN 2-2020) Xét các số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le(x^2+y^2-2x+2).4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét $x^2+y^2-2x+2>0\forall x;y$

Bất phương trình $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x\Leftrightarrow\dfrac{2^{x^2+y^2+1}}{2^{2x}}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)$.

Đặt $t=x^2+y^2-2x+1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^t\le t+1\Leftrightarrow 2^t-t-1\le 0$

Đặt $f(t)=2^t-t-1$. Ta thấy $f(0)=f(1)=0$.

Ta có $f'(t)=2^t\ln 2-1$

$f'(t)=0\Leftrightarrow 2^t\ln 2=1\Leftrightarrow t=\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)\approx 0,52$

t	$-\infty$	0	$\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)$	1	$+\infty$
$f'(t)$	$-$		0	$+$	
$f(t)$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$

Quan sats BBT ta thấy $f(t)\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 1$

$0\le x^2+y^2-2x+1\le 1\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2\le 1\ (1)$

Xét $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}\Leftrightarrow 2Px-Py+P=8x+4$

$\Leftrightarrow P-4=(8-2P)x+Py$

$\Leftrightarrow P-4+2P-8=(8-2P)x+2P-8+Py$

$\Leftrightarrow 3P-12=(8-2P)(x-1)+Py$

$\Leftrightarrow(3P-12)^2=\left[(8-2P)(x-1)+Py\right]^2\le\left[(8-2P)^2+P^2\right]\left[(x-1)^2+y^2\right]$

Thế (1) vào ta có $(3P-12)^2\le\left[(8-2P)^2+P^2\right]\Leftrightarrow 4P^2-40P+80\le 0$

$\Leftrightarrow 5-\sqrt{5}\le P\le 5+\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{8-2P}{P}=\dfrac{x-1}{y}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\\(x-1)^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y\\\left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y\right)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y\\y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\y=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}\\\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\y=\dfrac{-\sqrt{5}}{3}\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $5-\sqrt{5}\approx 2,76$ gần giá trị 3 nhất.

Câu 2. (TN LẦN 2-2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m;n)$ sao cho $m+n\le 10$ và ứng với mỗi cặp $(m;n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\Leftrightarrow \dfrac{2a^m}{n}=\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.

Xét hai hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ và $g(x)=\dfrac{2}{n}x^m$ trên $(-1;1)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$ nên $f(x)$ luôn đồng biến và $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ.

+ Nếu m chẵn thì $g(x)$ là hàm số chẵn và có bảng biến thiên dạng

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$g(1)$

Suy ra phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm, do đó m lẻ.

+ Nếu m lẻ thì hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ và luôn đồng biến.

Ta thấy phương trình luôn có nghiệm $x=0$. Dựa vào tính chất đối xứng của đồ thị hàm số lẻ, suy ra phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm trên $(-1;1)$ khi có 1 nghiệm trên $(0;1)$, hay $f(1)>g(1)\Leftrightarrow \ln\left(1+\sqrt{2}\right)<\dfrac{2}{n}\Leftrightarrow n<\dfrac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\approx 2,26\Rightarrow n\in\{1;2\}$.

Đối chiếu điều kiện, với $n=1$ suy ra $m\in\{1;3;5;7;9\}$, có 5 cặp số thỏa mãn

Với $n=2$ thì $m\in\{1;3;5;7\}$ có 4 cặp số thỏa mãn.

Vậy có 9 cặp số thỏa mãn bài toán.

Câu 3. (TN LẦN 2-2020) Xét các số thực x và y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1+y^2}\le\left(x^2-2x+1\right)+y^2+1$.

Đặt $t=x^2-2x+1+y^2\Rightarrow t\ge 0$. Khi đó ta có $2^t\le t+1,\ \forall t\ge 0$.

Đặt $f(t)=2^t-t-1,\ \forall t\ge 0$, ta có: $f'(t)=2^t\ln 2-1$, cho $f'(t)=0$.

Ta nhận thấy phương trình $f'(t)=0$ có một nghiệm nên phương trình $f(t)=0$ có tối đa hai nghiệm.

Mặt khác ta có $f(0)=f(1)=0$. Suy ra phương trình $f(t)=0$ có hai nghiệm $t=1$ và $t=0$.

Khi đó ta có bảng xét dấu của hàm số $f(t)$ như sau:

t	0		1		$+\infty$
f(t)	0	−	0	+	

Khi đó $f(t)\le 0 \Leftrightarrow t\in[0;1]$. Suy ra $x^2-2x+1+y^2\le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$.

Khi đó tập hợp các điểm $M(x;y)$ là một hình tròn (S) tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$.

Ta có: $P=\dfrac{4y}{2x+y+1} \Leftrightarrow 2Px+(P-4)y+P=0$.

Khi đó ta cũng có tập hợp các điểm $M(x;y)$ là một đường thẳng $\Delta: 2Px+(P-4)y+P=0$.

Để Δ và (S) có điểm chung, ta suy ra $d(I,\Delta)\le 1$.

$\Leftrightarrow \dfrac{|2P+P|}{\sqrt{(2P)^2+(P-4)^2}}\le 1 \Leftrightarrow 3|P|\le\sqrt{5P^2-8P+16}$

$\Leftrightarrow 4P^2+8P-16\le 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\le P\le -1+\sqrt{5}$.

Ta suy ra $P_{\max}=-1+\sqrt{5}$. Dấu "$=$" xảy ra khi $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}$

Câu 4. (TN LẦN 2-2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n\le 12$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1,1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln(a+\sqrt{a^2+1})$?

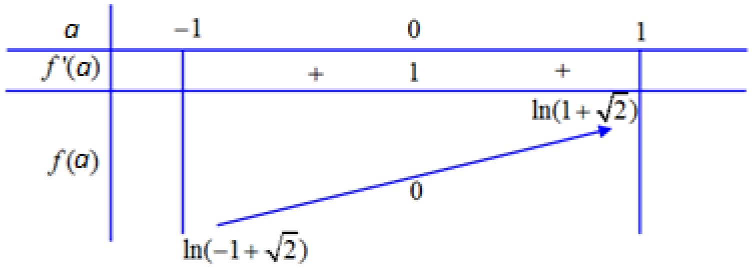
A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2a^m=n\ln(a+\sqrt{a^2+1}) \Leftrightarrow \dfrac{2}{n}a^m=\ln(a+\sqrt{a^2+1})$ (*).

Xét hàm $f(a)=\ln(a+\sqrt{a^2+1})$ trên $(-1,1)$ (dễ thấy hàm f lẻ, đồng biến trên R), có BBT:



Xét hàm $g(a)=\dfrac{2}{n}.a^m$ trên $(-1,1)$.

Với m chẵn, $g(a)$ là hàm chẵn và $g(a)\ge 0,\forall a\in R$, do đó $(*)$ không thể có 3 nghiệm.

Với m lẻ, $g(a)$ là hàm lẻ, đồng biến trên R và tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $a=0$ là đường thẳng $y=0$.

Dễ thấy $(*)$ có nghiệm $a=0\in(-1;1)$. Để $(*)$ có đúng 3 nghiệm tức là còn có 2 nghiệm nữa là $\pm a_0$ với $0<a_0<1$.

Muốn vậy, thì $g(1)=\dfrac{2}{n}.1^m=\dfrac{2}{n}> f(1)=\ln(1+\sqrt{2})\Leftrightarrow n<\dfrac{2}{\ln(1+\sqrt{2})}\approx 2,26\Rightarrow n=1;n=2$

Cụ thể:

+ $m\in\{3;5;7;9\}$ thì $n\in\{1;2\}$: Có 8 cặp (m,n)

+ $m=11$ thì $n\in\{1\}$: Có 1 cặp (m,n)

+ $m=1$: Đồ thị hàm số $g(a)$ là đường thẳng ($g(a)=a;g(a)=2a$) không thể cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại giao điểm $a_0\ne 0$ được vì tiếp tuyến của hàm số $f(a)$ tại điểm có hoành độ $a=0$ là đường thẳng $y=a$.

Vậy có cả thảy 9 cặp (m,n).

Câu 5. (TN LẦN 1-2020) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2\left(x+y\right)$?

A. 89. **B.** 46. **C.** 45. **D.** 90.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2\left(x+y\right)(1)$

Đặt $t=x+y\in\mathbb{N}^*$ (do $x,y\in\mathbb{Z},x+y>0$)

$(1) \Leftrightarrow \log_3\left(x^2-x+t\right) \ge \log_2 t \Leftrightarrow g(t)=\log_2 t-\log_3\left(x^2-x+t\right) \le 0 (2)$

Đạo hàm $g'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}-\dfrac{1}{\left(x^2-x+t\right)\ln 3}>0$ với mọi y. Do đó $g(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

Vì mỗi x nguyên có không quá 127 giá trị $t \in \mathbb{N}^*$ nên ta có

$g(128)>0 \Leftrightarrow \log_2 128-\log_3\left(x^2-x+128\right)>0$

$\Leftrightarrow \quad x^2-x+128<3^7 \Leftrightarrow -44,8 \le x \le 45,8$

Như vậy có 90 giá trị thỏa yêu cầu bài toán

Câu 6: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a>1, b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1; 2)$. **B.** $\left[2; \dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $[3; 4)$. **D.** $\left[\dfrac{5}{2}; 3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a, b>1$ và $x, y>0$ nên $a^x; b^y; \sqrt{ab}>1$

Do đó: $a^x=b^y=\sqrt{ab} \Leftrightarrow \log_a a^x=\log_a b^y=\log_a \sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_a b \\ 2y=1+\log_b a \end{cases}$.

Khi đó, ta có: $P=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\log_a b+\log_b a$.

Lại do $a, b>1$ nên $\log_a b, \log_b a>0$.

Suy ra $P \ge \dfrac{3}{2}+2\sqrt{\dfrac{1}{2}\log_a b.\log_b a}=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$, $P=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2} \Leftrightarrow \log_a b=\sqrt{2}$.

Lưu ý rằng, luôn tồn tại $a, b>1$ thỏa mãn $\log_a b=\sqrt{2}$.

Vậy $\min P=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2} \in \left[\dfrac{5}{2}; 3\right)$.

Câu 7: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2+y^2>0 \end{cases}$.

Điều kiện cần

Đặt $t=\log_3(x+y)=\log_4(x^2+y^2)\Rightarrow \begin{cases} x+y=3^t\,(d) \\ x^2+y^2=4^t\,(C) \end{cases}$.

Suy ra x,y tồn tại nếu đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại ít nhất một điểm.

Hay $\dfrac{\left|-3^t\right|}{\sqrt{2}}\le 2^t \Rightarrow t\le \log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\approx 0,8548.$

Khi đó: $x^2+y^2\le 4^{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}\approx 3,27\Rightarrow \begin{cases} 0\le x^2\le 3 \\ x\in\mathbb{Z} \end{cases}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Điều kiện đủ:

 Với $x=-1\Rightarrow \begin{cases} y=3^t+1 \\ y^2=4^t-1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} 4^t-1>0 \\ 4^t-1=(3^t+1)^2 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} t>0 \\ f(t)=9^t+2.3^t+2-4^t=0 \end{cases}$.

Khi $0<t<0,8548\Rightarrow 9^t\ge 4^t\Rightarrow f(t)>0$. Suy $x=-1(l)$.

 Với $x=0\Rightarrow \begin{cases} y=3^t \\ y^2=4^t \end{cases}\Rightarrow 4^t=3^t\Rightarrow t=0\Rightarrow y=1(t/m)$.

 $x=1\Rightarrow \begin{cases} y=3^t-1 \\ y^2=4^t-1 \end{cases}\Rightarrow y=t=0(t/m)$.

Câu 8. **(THAM KHẢO LẦN 1-2020)** Cho phương trình $\log_2^2(2x)-(m+2)\log_2 x+m-2=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$.

A. $(1;2)$. **B.** $[1;2]$. **C.** $[1;2)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Đáp án C

Điều kiện: $x>0$.

$pt\Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2-(m+2)\log_2 x+m-2=0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x - m\log_2 x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = m-1 \end{array}\right.$

Ta có: $x \in [1;2] \Leftrightarrow \log_2 x \in [0;1]$.

Vậy để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$ khi và chỉ khi $0 \le m-1 < 1 \Leftrightarrow 1 \le m < 2$.

Câu 9. **(THAM KHẢO LẦN 1-2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \le x \le 2000$ và $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$?

A. 2019. **B**. 6. **C**. 2020. **D**. 4.

Lời giải

Đáp án D

+ Ta có: $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y \Leftrightarrow 1 + \log_3(x+1) + x = 2y + 9^y$ (1) .

+ Đặt $t = \log_3(x+1)$. Suy ra: $x+1 = 3^t \Leftrightarrow x = 3^t - 1$.

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow t + 3^t = 2y + 3^{2y}$ (2).

Xét hàm số: $f(h) = h + 3^h$, ta có: $f'(h) = 1 + 3^h.\ln 3 > 0 \, \forall h \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(h)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $(2) \Leftrightarrow f(t) = f(2y) \Leftrightarrow t = 2y \Leftrightarrow \log_3(x+1) = 2y \Leftrightarrow x+1 = 3^{2y} \Leftrightarrow x+1 = 9^y$.

+ Do $0 \le x \le 2020$ nên $1 \le x+1 \le 2021 \Leftrightarrow 1 \le 9^y \le 2021 \Leftrightarrow 0 \le y \le \log_9 2021 \approx 3,46$.

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0;1;2;3\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thoả đề.

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả đề.

Câu 11. (THPT QG-2019) Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(3x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > \dfrac{1}{3}$

Phương trình tương đương với:

$\log_3 x - \log_3(3x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{3x-1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow m = \dfrac{3x-1}{x} = f(x)$

Xét $f\left(x\right)=\dfrac{3x-1}{x};x\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$; $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}>0;\forall x\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3

Để phương trình có nghiệm thì $m\in\left(0;3\right)$, suy ra có 2 giá trị nguyên thỏa mãn

Câu 12. (THPT QG-2019) Cho phương trình $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt

A. 49. **B.** 47. **C.** Vô số. **D.** 48.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\ge \log_7 m \end{cases}$

Với $m=1$, phương trình trở thành $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-1}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\log_2^2 x+\log_2 x-5=0 \\ 7^x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=-\dfrac{5}{4} \\ x=0 \quad (loai) \end{array}\right..$$

Phương trình này có hai nghiệm (thỏa)

Với $m\ge 2$, điều kiện phương trình là $x\ge \log_7 m$

$$\text{Pt}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\log_2^2 x+\log_2 x-5=0 \\ 7^x-m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=-\dfrac{5}{4} \\ 7^x=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2^{\frac{-5}{4}} \\ 7^x=m \end{array}\right.$$

Do $x=2^{-\frac{5}{4}}\approx 2,26$ không là số nguyên, nên phương trình có đúng 2 nghiệm khi và chỉ khi

$\begin{cases} m \geq 3 \\ m < 7^2 \end{cases}$ (nghiệm $x = 2^{\frac{-5}{4}}$ không thỏa điều kiện và nghiệm $x = 2$ thỏa điều kiện và khác $\log_7 m$)

Vậy $m \in \{3;4;5;...;48\}$. Suy ra có 46 giá trị của m.

Do đó có tất cả 47 giá trị của m

Câu 13. **(THPT QG-2018)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m.4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 13. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = 4^x$, $t > 0$. Phương trình đã cho trở thành

$t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0 \qquad (*)$.

Với mỗi nghiệm $t > 0$ của phương trình $(*)$ sẽ tương ứng với duy nhất một nghiệm x của phương trình ban đầu. Do đó, yêu cầu bài toán tương đương phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt. Khi đó

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 45 > 0 \\ 4m > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 3 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{4;5;6\}$.

Câu 14. **(THPT QG-2018)** Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $a>0$, $b>0$ nên $\begin{cases}3a+2b+1>1\\ 9a^2+b^2+1>1\\ 6ab+1>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)>0\\ \log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)>0\end{cases}$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta được

$$\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)+\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)\ge 2\sqrt{\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)+\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)}$$

$\Leftrightarrow 2\ge 2\sqrt{\log_{6ab+1}\left(9a^2+b^2+1\right)}\Leftrightarrow \log_{6ab+1}\left(9a^2+b^2+1\right)\le 1\Leftrightarrow 9a^2+b^2+1\le 6ab+1$

$\Leftrightarrow (3a-b)^2\le 0\Leftrightarrow 3a=b$.

Vì dấu "$=$" đã xảy ra nên

$\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)=\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)\Leftrightarrow \log_{3b+1}\left(2b^2+1\right)=\log_{2b^2+1}\left(3b+1\right)$

$\Leftrightarrow 2b^2+1=3b+1\Leftrightarrow 2b^2-3b=0\Leftrightarrow b=\dfrac{3}{2}$ (vì $b>0$). Suy ra $a=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a+2b=\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{7}{2}$.

Câu 15. **(THPT QG-2018)** Cho phương trình $5^x+m=\log_5\left(x-m\right)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in\left(-20;20\right)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20. **B.** 19. **C.** 9. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện $x>m$

Ta có $5^x+m=\log_5\left(x-m\right)\Leftrightarrow 5^x+x=x-m+\log_5\left(x-m\right)\Leftrightarrow 5^x+x=5^{\log_5(x-m)}+\log_5\left(x-m\right)$ (1) .

Xét hàm số $f\left(t\right)=5^t+t$, $f'\left(t\right)=5^t\ln 5+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$, do đó từ (1) suy ra $x=\log_5\left(x-m\right)\Leftrightarrow m=x-5^x$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=x-5^x$, $g'\left(x\right)=1-5^x.\ln 5$, $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\log_5\dfrac{1}{\ln 5}=-\log_5\ln 5=x_0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\log_5 \ln 5$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	

Do đó để phương trình có nghiệm thì $m \le g(x_0) \approx -0,92$.

Các giá trị nguyên của $m \in (-20;20)$ là $\{-19;-18;...;-1\}$, có 19 giá trị m thỏa mãn.