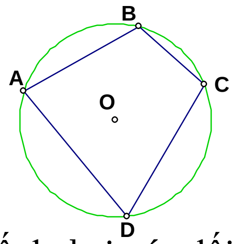
BÀI TẬP TỨ GIÁC NỘI TIẾP LỚP 9
CÓ LỜI GIẢI

I) Các kiến thức cần nhớ

1) Khái niệm:

Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (Gọi tắt là tứ giác nột tiếp)



2) Định lí

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0

-Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.

3) Dấu hiệu nhận biết (các cách chứng minh) tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có tổng số do hai góc đối diện bằng 180^0.
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.
- Tứ giác có bón đỉnh cách đều một điểm(mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α.

II) Bài tập

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M,N,P.

Chứng minh rằng:

1. Tứ giác CEHD, nội tiếp .
2. Bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.
3. AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC.
4. H và M đối xứng nhau qua BC.
5. Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

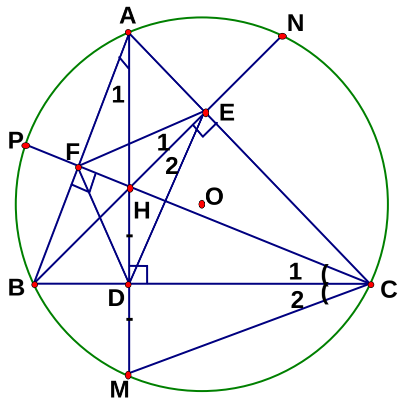
Lời giải:

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$\angle$ CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)

$\angle$ CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

=> $\angle$ CEH + $\angle$ CDH = 180^0



Mà $\angle$ CEH và $\angle$ CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD , Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao => BE $\perp$ AC => $\angle$BEC = 90^0.

CF là đường cao => CF $\perp$ AB => $\angle$BFC = 90^0.

Như vậy E và F cùng nhìn BC dưới một góc 90^0 => E và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

3. Vậy bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.

Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: $\angle$ AEH = $\angle$ ADC = 90^0 ; Â là góc chung

=> Δ AEH ~ ΔADC => $\frac{AE}{AD}=\frac{AH}{AC}$ => AE.AC = AH.AD.

* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: $\angle$ BEC = $\angle$ ADC = 90^0 ; $\angle$C là góc chung

=> Δ BEC ~ ΔADC => $\frac{BE}{AD}=\frac{BC}{AC}$ => AD.BC = BE.AC.

4. Ta có $\angle C_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ABC)

$\angle C_2 = \angle A_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

=> $\angle C_1 = \angle C_2$ => CB là tia phân giác của góc HCM; lại có CB $\perp$ HM => Δ CHM cân tại C

=> CB cũng là đương trung trực của HM vậy H và M đối xứng nhau qua BC.

5. Theo chứng minh trên bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn

=> $\angle C_1 = \angle E_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

Cũng theo chứng minh trên CEHD là tứ giác nội tiếp

$\angle C_1 = \angle E_2$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

$\angle E_1 = \angle E_2$ => EB là tia phân giác của góc FED.

Chứng minh tương tự ta cũng có FC là tia phân giác của góc DFE mà BE và CF cắt nhau tại H do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

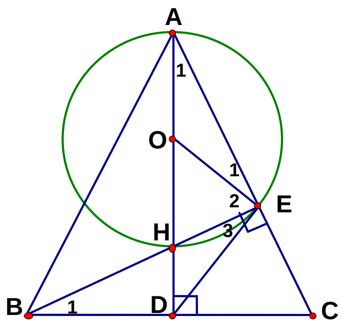
Bài 2. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

1. Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp .
2. Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh ED = $\frac{1}{2}$BC.
4. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).
5. Tính độ dài DE biết DH = 2 Cm, AH = 6 Cm.

Lời giải:

Xét tứ giác CEHD ta có:

$\angle$ CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)



$\angle$ CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

=> $\angle$ CEH + $\angle$ CDH = 180^0

Mà $\angle$ CEH và $\angle$ CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD , Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao => BE $\perp$ AC => $\angle$BEA = 90^0.

AD là đường cao => AD $\perp$ BC => $\angle$BDA = 90^0.

Như vậy E và D cùng nhìn AB dưới một góc 90^0 => E và D cùng nằm trên đường tròn đường kính AB.

Vậy bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

=> D là trung điểm của BC. Theo trên ta có $\angle$BEC = 90^0 .

Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến => DE = $\frac{1}{2}$BC.

Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH => OA = OE => tam giác AOE cân tại O => $\angle E_1 = \angle A_1$ (1).

Theo trên DE = $\frac{1}{2}$BC => tam giác DBE cân tại D => $\angle E_3 = \angle B_1$ (2)

Mà $\angle B_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ACB) => $\angle E_1 = \angle E_3$ => $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle E_2 + \angle E_3$

Mà $\angle E_1 + \angle E_2$ = $\angle$BEA = 90^0 => $\angle E_2 + \angle E_3 = 90^0$ = $\angle$OED => DE $\perp$ OE tại E.

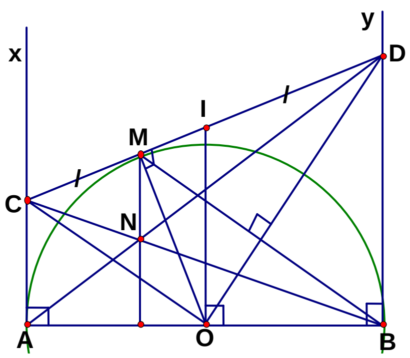
Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

5. Theo giả thiết AH = 6 Cm => OH = OE = 3 cm.; DH = 2 Cm => OD = 5 cm. áp dụng định lí Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có $ED^2 = OD^2 - OE^2 \Leftrightarrow ED^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow$ ED = 4cm

<u>**Bài 3**</u> Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1. Chứng minh AC + BD = CD.
2. Chứng minh $\angle$COD = 90^0.
3. Chứng minh AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.
4. Chứng minh OC // BM
5. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
6. Chứng minh MN $\perp$ AB.
7. Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

<u>**Lời giải:**</u>



Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: CA = CM; DB = DM => AC + BD = CM + DM.

Mà CM + DM = CD => AC + BD = CD

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà $\angle AOM$ và $\angle BOM$ là hai góc kề bù => $\angle COD = 90^0$.

Theo trên $\angle COD = 90^0$ nên tam giác COD vuông tại O có OM $\perp$ CD (OM là tiếp tuyến).

áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có $OM^2 = CM. DM$,

Mà OM = R; CA = CM; DB = DM => AC. BD =R^2 => AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.

Theo trên $\angle COD = 90^0$ nên OC $\perp$ OD .(1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R => OD là trung trực của BM => BM $\perp$ OD .(2). Từ (1) Và (2) => OC // BM (Vì cùng vuông góc với OD).

Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có AC $\perp$ AB; BD $\perp$ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB => IO là đường trung bình của hình thang ACDB

=> IO // AC , mà AC $\perp$ AB => IO $\perp$ AB tại O => AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

6. Theo trên AC // BD => $\frac{CN}{BN}=\frac{AC}{BD}$, mà CA = CM; DB = DM nên suy ra $\frac{CN}{BN}=\frac{CM}{DM}$

=> MN // BD mà BD $\perp$ AB => MN $\perp$ AB.

7. (HD): Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD nên suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất , mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB => M phải là trung điểm của cung AB.

<u>Bài 4</u> Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , O là trung điểm của IK.

1. Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
3. Tính bán kính đường tròn (O) Biết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm.

<u>Lời giải:</u> (HD)

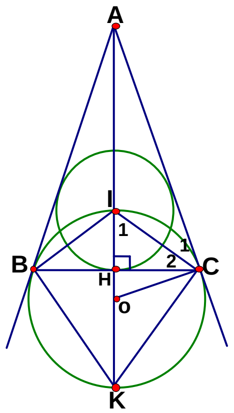
1. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B

Do đó BI $\perp$ BK hay$\angle IBK = 90^0$.

Tương tự ta cũng có $\angle ICK = 90^0$ như vậy B và C cùng nằm trên đường tròn đường kính IK do đó B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có $\angle C_1 = \angle C_2$ (1) (vì CI là phân giác của góc ACH.

$\angle C_2 + \angle I_1 = 90^0$ (2) (vì $\angle IHC = 90^0$).



$\angle I_1 = \angle$ ICO (3) (vì tam giác OIC cân tại O)

Từ (1), (2) , (3) => $\angle C_1 + \angle ICO = 90^0$ hay AC $\perp$ OC. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Từ giả thiết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm => CH = 12 cm.

$AH^2 = AC^2 - HC^2$ => AH = $\sqrt{20^2 - 12^2}$ = 16 (cm)

$CH^2 = AH.OH$ => OH = $\frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16}$ = 9 (cm)

OC = $\sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225}$ = 15 (cm)

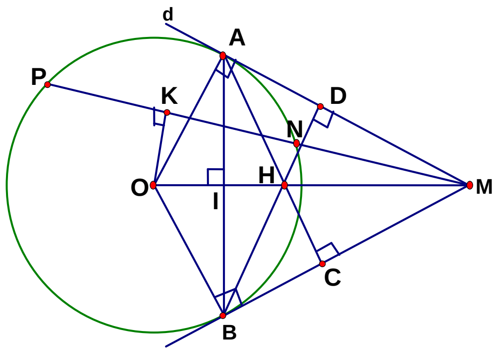
<u>Bài 5</u> Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ AC $\perp$ MB, BD $\perp$ MA, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

1. Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
2. Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .
3. Chứng minh OI.OM = R^2; OI. IM = IA^2.
4. Chứng minh OAHB là hình thoi.
5. Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
6. Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

<u>Lời giải:</u>

(HS tự làm).

Vì K là trung điểm NP nên OK $\perp$ NP (quan hệ đường kính



Và dây cung) => $\angle OKM = 90^0$. Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^0$; $\angle OBM = 90^0$. như vậy K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Ta có MA = MB (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); OA = OB = R

=> OM là trung trực của AB => OM $\perp$ AB tại I .

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^0$ nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao.

áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => $OI.OM = OA^2$ hay $OI.OM = R^2$; và $OI.IM = IA^2$.

4. Ta có OB ⊥ MB (tính chất tiếp tuyến) ; AC ⊥ MB (gt) => OB // AC hay OB // AH.

OA ⊥ MA (tính chất tiếp tuyến) ; BD ⊥ MA (gt) => OA // BD hay OA // BH.

=> Tứ giác OAHB là hình bình hành; lại có OA = OB (=R) => OAHB là hình thoi.

5. Theo trên OAHB là hình thoi. => OH ⊥ AB; cũng theo trên OM ⊥ AB => O, H, M thẳng hàng(Vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

6. (HD) Theo trên OAHB là hình thoi. => AH = AO = R. Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính AH = R

<u>Bài 6</u> Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

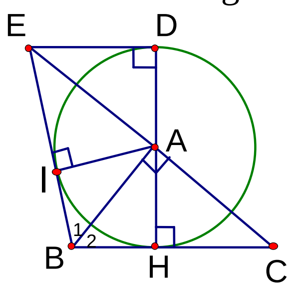
1. Chứng minh tam giác BEC cân.
2. Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng AI = AH.
3. Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH).
4. Chứng minh BE = BH + DE.

<u>Lời giải:</u> (HD)

Δ AHC = ΔADE (g.c.g) => ED = HC (1) và AE = AC (2).

Vì AB ⊥CE (gt), do đó AB vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của ΔBEC

=> BEC là tam giác cân. => $\angle B_1 = \angle B_2$



2. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung, $\angle B_1 = \angle B_2$ => Δ AHB = ΔAIB

=> AI = AH.

3. AI = AH và BE ⊥ AI tại I => BE là tiếp tuyến của (A; AH) tại I.

4. DE = IE và BI = BH => BE = BI+IE = BH + ED

<u>Bài 7</u> Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho AP > R, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

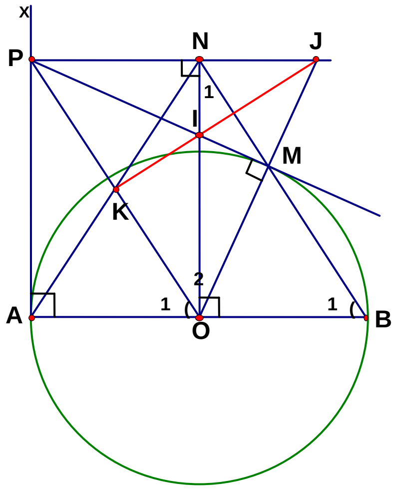
1. Chứng minh rằng tứ giác APMO nội tiếp được một đường tròn.
2. Chứng minh BM // OP.
3. Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.
4. Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Lời giải:

(HS tự làm).

Ta có é ABM nội tiếp chắn cung AM; é AOM là góc ở tâm chắn cung AM => é ABM = $\frac{\angle AOM}{2}$ (1) OP là tia phân giác é AOM (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) => é AOP = $\frac{\angle AOM}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) => é ABM = é AOP (3)



Mà góc ABM và góc AOP là hai góc đồng vị nên suy ra BM // OP. (4)

Xét hai tam giác AOP và OBN ta có : góc PAO=90^0 (vì PA là tiếp tuyến); góc NOB = 90^0 (gt NO⊥AB).

=> $PAO = NOB = 90^0$; OA = OB = R; $AOP = OBN$ (theo (3)) => ΔAOP = ΔOBN => OP = BN (5)

Từ (4) và (5) => OBNP là hình bình hành (vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau).

Tứ giác OBNP là hình bình hành => PN // OB hay PJ // AB, mà ON ⊥ AB => ON ⊥ PJ

Ta cũng có PM ⊥ OJ (PM là tiếp tuyến), mà ON và PM cắt nhau tại I nên I là trực tâm tam giác POJ. (6)

Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật vì có $PAO = AON = ONP = 90^0$ => K là trung điểm của PO (t/c đường chéo hình chữ nhật). (6)

AONP là hình chữ nhật => éAPO = é NOP (so le) (7)

Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau Ta có PO là tia phân giác éAPM => éAPO = éMPO (8).

Từ (7) và (8) => ΔIPO cân tại I có IK là trung tuyến đông thời là đường cao => IK ⊥ PO. (9)

Từ (6) và (9) => I, J, K thẳng hàng.

Bài 8 Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

1) Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.
2) Chứng minh rằng: AI^2 = IM . IB.
3) Chứng minh BAF là tam giác cân.

4) Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi.

5) Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Lời giải:

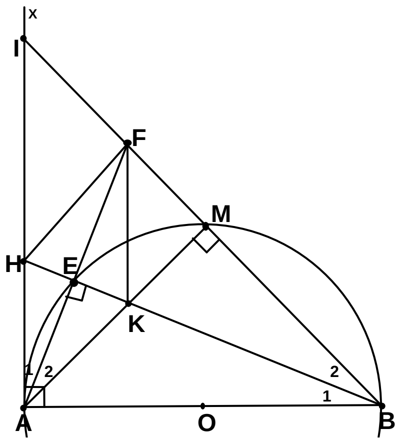
1. Ta có : éAMB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> éKMF = 90^0 (vì là hai góc kề bù).

éAEB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> éKEF = 90^0 (vì là hai góc kề bù).

=> éKMF + éKEF = 180^0 . Mà éKMF và éKEF là hai góc đối của tứ giác EFMK do đó EFMK là tứ giác nội tiếp.



Ta có éIAB = 90^0 (vì AI là tiếp tuyến) => ΔAIB vuông tại A có AM ⊥ IB (theo trên).

áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => AI^2 = IM **.** IB.

Theo giả thiết AE là tia phân giác góc IAM => éIAE = éMAE => $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ME}$ (*lí do ……)*

=> éABE =éMBE (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) => BE là tia phân giác góc ABF. (1)

Theo trên ta có éAEB = 90^0 => BE ⊥ AF hay BE là đường cao của tam giác ABF (2).

Từ (1) và (2) => BAF là tam giác cân. tại B .

BAF là tam giác cân. tại B có BE là đường cao nên đồng thời là đương trung tuyến => E là trung điểm của AF. (3)

Từ BE ⊥ AF => AF ⊥ HK (4), theo trên AE là tia phân giác góc IAM hay AE là tia phân giác éHAK (5)

Từ (4) và (5) => HAK là tam giác cân. tại A có AE là đường cao nên đồng thời là đương trung tuyến => E là trung điểm của HK. (6).

Từ (3) , (4) và (6) => AKFH là hình thoi (vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường).

(HD). Theo trên AKFH là hình thoi => HA // FH hay IA // FK => tứ giác AKFI là hình thang.

Để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn thì AKFI phải là hình thang cân.

AKFI là hình thang cân khi M là trung điểm của cung AB.

Thật vậy: M là trung điểm của cung AB => éABM = éMAI = 45^0 (t/c góc nội tiếp). (7)

Tam giác ABI vuông tại A có éABI = 45^0 => éAIB = 45^0 .(8)

Từ (7) và (8) => éIAK = éAIF = 45^0 => AKFI là hình thang cân (hình thang có hai góc đáy bằng nhau).

Vậy khi M là trung điểm của cung AB thì tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Bài 9 Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

1. Chứng minh AC. AE không đổi.
2. Chứng minh $\angle$ ABD = $\angle$ DFB.
3. Chứng minh rằng CEFD là tứ giác nội tiếp.

Lời giải:

C thuộc nửa đường tròn nên $\angle ACB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => BC $\perp$ AE.

$\angle ABE = 90^0$ (Bx là tiếp tuyến) => tam giác ABE vuông tại B có BC là đường cao => AC. AE = AB^2 (hệ thức giữa cạnh và đường cao), mà AB là đường kính nên AB = 2R không đổi do đó AC. AE không đổi.

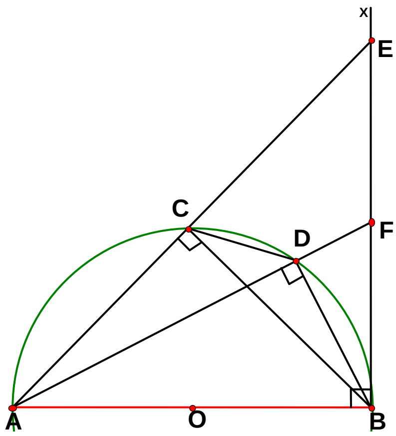
Δ ADB có $\angle ADB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn).

=> $\angle ABD + \angle BAD = 90^0$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0)(1)

Δ ABF có $\angle ABF = 90^0$ (BF là tiếp tuyến).

=> $\angle AFB + \angle BAF = 90^0$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0) (2)

Từ (1) và (2) => $\angle ABD = \angle DFB$ (cùng phụ với $\angle BAD$)



Tứ giác ACDB nội tiếp (O) => $\angle ABD + \angle ACD = 180^0$.

$\angle ECD + \angle ACD = 180^0$ (Vì là hai góc kề bù) => $\angle ECD = \angle ABD$ (cùng bù với $\angle ACD$).

Theo trên $\angle ABD = \angle DFB$ => $\angle ECD = \angle DFB$. Mà $\angle EFD + \angle DFB = 180^0$ (Vì là hai góc kề bù) nên suy ra $\angle ECD + \angle EFD = 180^0$, mặt khác $\angle ECD$ và $\angle EFD$ là hai góc đối của tứ giác CDFE do đó tứ giác CEFD là tứ giác nội tiếp.

Bài 10 Cho đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn sao cho AM < MB. Gọi M’ là điểm đối xứng của M qua AB và S là giao điểm của hai tia BM, M’A. Gọi P là chân đương vuông góc từ S đến AB.

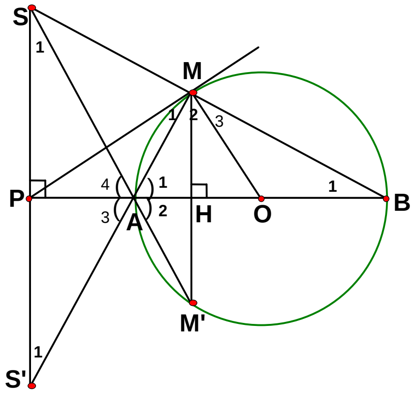
1. Chứng minh bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn
2. Gọi S’ là giao điểm của MA và SP. Chứng minh rằng tam giác PS’M cân.
3. Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn .

Lời giải:

1. Ta có SP $\perp$ AB (gt) => $\angle SPA = 90^0$; $\angle AMB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle AMS = 90^0$. Như vậy P và M cùng nhìn AS dưới một góc bằng 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính AS.

Vậy bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn.

2. Vì M' đối xứng M qua AB mà M nằm trên đường tròn nên M' cũng nằm trên đường tròn => hai cung AM và AM' có số đo bằng nhau



=> ∠AMM' = ∠AM'M (Hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) (1)

Cũng vì M' đối xứng M qua AB nên MM' ⊥ AB tại H => MM'// SS' (cùng vuông góc với AB)

=> ∠AMM' = ∠AS'S; ∠AM'M = ∠ASS' (vì so le trong) (2).

=> Từ (1) và (2) => ∠AS'S = ∠ASS'.

Theo trên bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn => ∠ASP=∠AMP (nội tiếp cùng chắn AP)

=> ∠AS'P = ∠AMP => tam giác PMS' cân tại P.

3. Tam giác SPB vuông tại P; tam giác SMS' vuông tại M => $\angle B_1 = \angle S'_1$ (cùng phụ với ∠S). (3)

Tam giác PMS' cân tại P => $\angle S'_1 = \angle M_1$ (4)

Tam giác OBM cân tại O (vì có OM = OB =R) => $\angle B_1 = \angle M_3$ (5).

Từ (3), (4) và (5) => $\angle M_1 = \angle M_3$ => $\angle M_1 + \angle M_2 = \angle M_3 + \angle M_2$ mà $\angle M_3 + \angle M_2 = \angle AMB = 90^0$ nên suy ra $\angle M_1 + \angle M_2 = \angle PMO = 90^0$ => PM ⊥ OM tại M => PM là tiếp tuyến của đường tròn tại M

<u>Bài 11.</u> Cho tam giác ABC (AB = AC). Cạnh AB, BC, CA tiếp xúc với đường tròn (O) tại các điểm D, E, F . BF cắt (O) tại I , DI cắt BC tại M. Chứng minh :

1. Tam giác DEF có ba góc nhọn.

2. DF // BC. **3.** Tứ giác BDFC nội tiếp. **4.** $\frac{BD}{CB} = \frac{BM}{CF}$

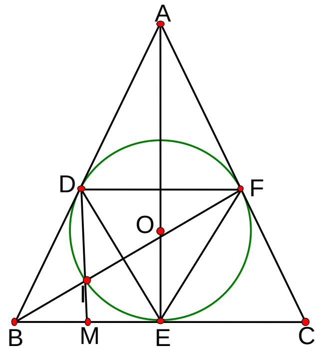
<u>Lời giải:</u>

1. (HD) Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có AD = AF => tam giác ADF cân tại A => ∠ADF = ∠AFD < 90^0 => sđ cung DF < 180^0 => ∠DEF < 90^0 (vì góc DEF nội tiếp chắn cung DE).

Chứng minh tương tự ta có ∠DFE < 90^0; ∠EDF < 90^0. Như vậy tam giác DEF có ba góc nhọn.

2. Ta có AB = AC (gt); AD = AF (theo trên) => $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$ => DF // BC.

3. DF // BC => BDFC là hình thang lại có ∠ B = ∠C (vì tam giác ABC cân)
=> BDFC là hình thang cân do đó BDFC nội tiếp được một đường tròn .



4. Xét hai tam giác BDM và CBF Ta có ∠ DBM = ∠BCF (hai góc đáy của tam giác cân).

∠BDM = ∠BFD (nội tiếp cùng chắn cung DI); ∠ CBF = ∠BFD (vì so le) => ∠BDM = ∠CBF .

=> ΔBDM ~ΔCBF => $\frac{BD}{CB}=\frac{BM}{CF}$

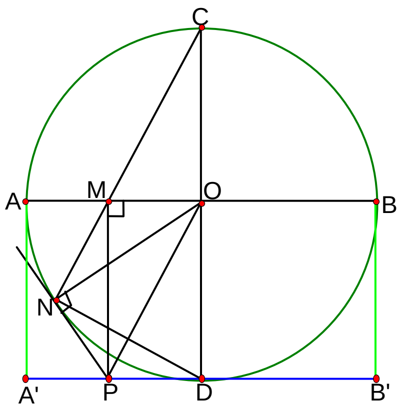
<u>Bài 12</u> Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P. Chứng minh :

1. Tứ giác OMNP nội tiếp.
2. Tứ giác CMPO là hình bình hành.
3. CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
4. Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.

<u>Lời giải:</u>

1. Ta có ∠OMP = 90^0 (vì PM ⊥ AB); ∠ONP = 90^0 (vì NP là tiếp tuyến).
Như vậy M và N cùng nhìn OP dưới một góc bằng 90^0 => M và N cùng nằm trên đường tròn đường kính OP => Tứ giác OMNP nội tiếp.

2. Tứ giác OMNP nội tiếp => ∠OPM = ∠ ONM (nội tiếp chắn cung OM)
Tam giác ONC cân tại O vì có ON = OC = R => ∠ONC = ∠OCN



=> ∠OPM = ∠OCM.

Xét hai tam giác OMC và MOP ta có ∠MOC = ∠OMP = 90^0; ∠OPM = ∠OCM => ∠CMO = ∠POM lại có MO là cạnh chung => ΔOMC = ΔMOP => OC = MP. (1)
Theo giả thiết Ta có CD ⊥ AB; PM ⊥ AB => CO//PM (2).
Từ (1) và (2) => Tứ giác CMPO là hình bình hành.

3. Xét hai tam giác OMC và NDC ta có ∠MOC = 90^0 (gt CD ⊥ AB); ∠DNC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => ∠MOC =∠DNC = 90^0 lại có ∠C là góc chung => ΔOMC ~ΔNDC

=> $\frac{CM}{CD} = \frac{CO}{CN}$ => CM. CN = CO.CD mà CO = R; CD = 2R nên CO.CD = $2R^2$ không đổi => CM.CN =$2R^2$ không đổi hay tích CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

4. (HD) Dễ thấy ΔOMC = ΔDPO (c.g.c) => ∠ODP = 90^0 => P chạy trên đường thẳng cố định vuông góc với CD tại D.

Vì M chỉ chạy trên đoạn thẳng AB nên P chỉ chạy trên doạn thẳng A' B' song song và bằng AB.

<u>Bài 13</u> Cho tam giác ABC vuông ở A (AB > AC), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điển A , Vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, Nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

1. Chứng minh AFHE là hình chữ nhật.
2. BEFC là tứ giác nội tiếp.
3. AE. AB = AF. AC.
4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

<u>Lời giải:</u>

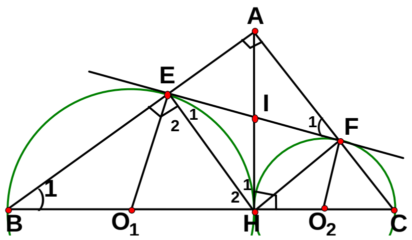
1. Ta có : éBEH = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn)

=> éAEH = 90^0 (vì là hai góc kề bù). (1)

éCFH = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn)

=> éAFH = 90^0 (vì là hai góc kề bù).(2)

éEAF = 90^0 (Vì tam giác ABC vuông tại A) (3)



Từ (1), (2), (3) => tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).

2. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật nên nội tiếp được một đường tròn =>éF_1=éH_1 (nội tiếp chắn cung AE) . Theo giả thiết AH ⊥BC nên AH là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) => éB_1 = éH_1 (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE) => éB_1= éF_1 => éEBC+éEFC = éAFE + éEFC mà éAFE + éEFC = 180^0 (vì là hai góc kề bù) => éEBC+éEFC = 180^0 mặt khác éEBC và éEFC là hai góc đối của tứ giác BEFC do đó BEFC là tứ giác nội tiếp.

3. Xét hai tam giác AEF và ACB ta có éA = 90^0 là góc chung; éAFE = éABC (theo Chứng minh trên) => ΔAEF ~ΔACB => $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$ => AE. AB = AF. AC.

* ***HD cách 2***: *Tam giác AHB vuông tại H có HE ⊥ AB => AH^2 = AE.AB (*)*

Tam giác AHC vuông tại H có HF ⊥ AC => AH^2 = AF.AC (**)

Từ (*) và (**) => AE. AB = AF. AC

4. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật => IE = EH => ΔIEH cân tại I => éE_1 = éH_1 .

ΔO_1EH cân tại O_1 (vì có O_1E vàO_1H cùng là bán kính) => éE_2 = éH_2.

=> éE_1 + éE_2 = éH_1 + éH_2 mà éH_1 + éH_2 = éAHB = 90^0 => éE_1 + éE_2 = éO_1EF = 90^0

=> O_1E ⊥EF .

Chứng minh tương tự ta cũng có O_2F ⊥ EF. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

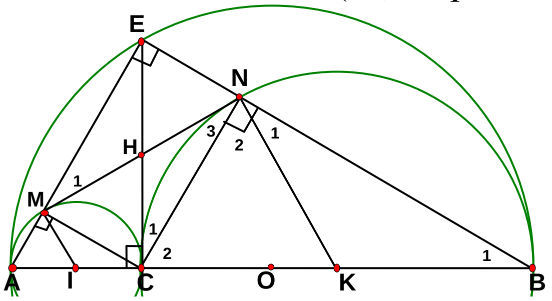
Bài 14 Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho AC = 10 Cm, CB = 40 Cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K.

Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) tại E. Gọi M. N theo thứ tự là giao điểm của EA, EB với các nửa đường tròn (I), (K).

1. Chứng minh EC = MN.
2. Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).
3. Tính MN.
4. Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn

Lời giải:

1. Ta có: éBNC= 90^0(nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm K)



=> éENC = 90^0 (vì là hai góc kề bù). (1)

éAMC = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn tâm I) => éEMC = 90^0 (vì là hai góc kề bù).(2)

éAEB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) hay éMEN = 90^0 (3)

Từ (1), (2), (3) => tứ giác CMEN là hình chữ nhật => EC = MN (tính chất đường chéo hình chữ nhật)

2. Theo giả thiết EC ⊥AB tại C nên EC là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (I) và (K)

=> éB_1 = éC_1 (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CN). Tứ giác CMEN là hình chữ nhật nên => éC_1= éN_3 => éB_1 = éN_3.(4) Lại có KB = KN (cùng là bán kính) => tam giác KBN cân tại K => éB_1 = éN_1 (5)

Từ (4) và (5) => éN_1 = éN_3 mà éN_1 + éN_2 = ∠CNB = 90^0 => éN_3 + éN_2 = ∠MNK = 90^0 hay MN ⊥ KN tại N => MN là tiếp tuyến của (K) tại N.

Chứng minh tương tự ta cũng có MN là tiếp tuyến của (I) tại M,

Vậy MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).

3. Ta có éAEB = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn tâm O) => ΔAEB vuông tại A có EC ⊥ AB (gt)

=> EC^2 = AC. BC ⇔ EC^2 = 10.40 = 400 => EC = 20 cm. Theo trên EC = MN => MN = 20 cm.

4. Theo giả thiết AC = 10 Cm, CB = 40 Cm => AB = 50cm => OA = 25 cm

Ta có $S_{(o)} = \pi.OA^2 = \pi 25^2 = 625\pi$; $S_{(I)} = \pi . IA^2 = \pi.5^2 = 25\pi$; $S_{(k)} = \pi.KB^2 = \pi . 20^2 = 400\pi$.

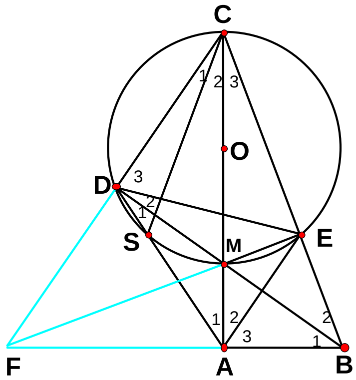
Ta có diện tích phần hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn là $S = \frac{1}{2}(S_{(o)} - S_{(I)} - S_{(k)})$

$$S = \frac{1}{2}(625\pi - 25\pi - 400\pi) = \frac{1}{2}.200\,\pi = 100\pi \approx 314\ (cm^2)$$

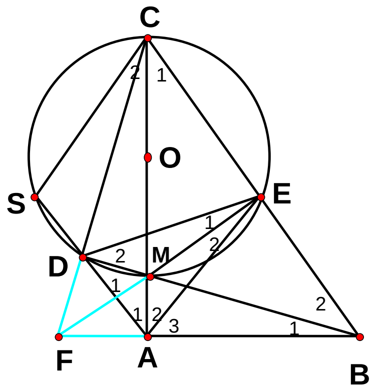
Bài 15 Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại D. đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.
3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.
5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Lời giải:



Hình a



Hình b

a. Ta có éCAB = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A); éMDC = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle CDB = 90^0$ như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => ABCD là tứ giác nội tiếp.

b. ABCD là tứ giác nội tiếp => $\angle D_1 = \angle C_3$(nội tiếp cùng chắn cung AB).

$\angle D_1 = \angle C_3$ => $SM = EM$ => $\angle C_2 = \angle C_3$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau)

=> CA là tia phân giác của góc SCB.

3. Xét ΔCMB Ta có BA⊥CM; CD ⊥ BM; ME ⊥ BC như vậy BA, EM, CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BA, EM, CD đồng quy.

4. Theo trên Ta có $SM = EM$ => $\angle D_1 = \angle D_2$ => DM là tia phân giác của góc ADE.(1)

5. Ta có $\angle MEC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) => $\angle MEB = 90^0$.

Tứ giác AMEB có $\angle MAB = 90^0$; $\angle MEB = 90^0$ => $\angle MAB + \angle MEB = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác AMEB nội tiếp một đường tròn => $\angle A_2 = \angle B_2$.

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp => $\angle A_1 = \angle B_2$(nội tiếp cùng chắn cung CD)

=> $\angle A_1 = \angle A_2$ => AM là tia phân giác của góc DAE (2)

Từ (1) và (2) Ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE

TH2 ***(Hình b)***

Bài 2 : ∠ABC = ∠CME (cùng phụ ∠ACB); ∠ABC = ∠CDS (cùng **bù** ∠ADC) => ∠CME = ∠CDS

=> $CE = CS \Rightarrow SM = EM$ => ∠SCM = ∠ECM => CA là tia phân giác của góc SCB.

Bài 16 Cho tam giác ABC vuông ở A.và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G.

Chứng minh :

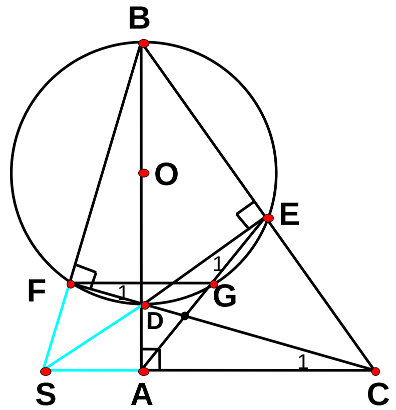
1. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.
2. Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp .
3. AC // FG.
4. Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.

Lời giải:

1. Xét hai tam giác ABC và EDB Ta có ∠BAC = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A); ∠DEB = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> ∠DEB = ∠BAC = 90^0 ; lại có ∠ABC là góc chung => ΔDEB ~ Δ CAB .

2. Theo trên ∠DEB = 90^0 => ∠DEC = 90^0 (vì hai góc kề bù); ∠BAC = 90^0 (vì ΔABC vuông tại A) hay ∠DAC = 90^0 => ∠DEC + ∠DAC = 180^0 mà đây là hai góc đối nên ADEC là tứ giác nội tiếp .



* ∠BAC = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A); ∠DFB = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay ∠BFC = 90^0 như vậy F và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => AFBC là tứ giác nội tiếp.

3. Theo trên ADEC là tứ giác nội tiếp => $\angle E_1 = \angle C_1$ lại có $\angle E_1 = \angle F_1$ => $\angle F_1 = \angle C_1$ mà đây là hai góc so le trong nên suy ra AC // FG.

4. (HD) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của tam giác DBC nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC có đường cao là AH. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M không trùng B. C, H) ; từ M kẻ MP, MQ vuông góc với các cạnh AB. AC.

1. Chứng minh APMQ là tứ giác nội tiếp và hãy xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
2. Chứng minh rằng MP + MQ = AH.
3. Chứng minh OH ⊥ PQ.

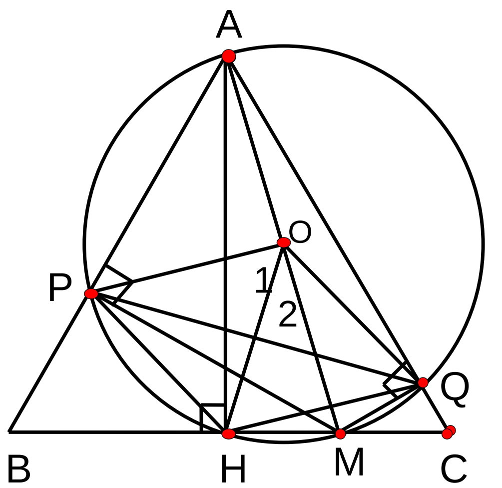
Lời giải:

1. Ta có MP ⊥ AB (gt) => ∠APM = 90^0; MQ ⊥ AC (gt)
=> ∠AQM = 90^0 như vậy P và Q cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên P và Q cùng nằm trên đường tròn đường kính AM => APMQ là tứ giác nội tiếp.
* Vì AM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ là trung điểm của AM.

2. Tam giác ABC có AH là đường cao => $S_{ABC} = \frac{1}{2}$BC.AH.

Tam giác ABM có MP là đường cao => $S_{ABM} = \frac{1}{2}$AB.MP

Tam giác ACM có MQ là đường cao => $S_{ACM} = \frac{1}{2}$AC.MQ



Ta có $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC}$ => $\frac{1}{2}$AB.MP + $\frac{1}{2}$AC.MQ = $\frac{1}{2}$BC.AH => AB.MP + AC.MQ = BC.AH

Mà AB = BC = CA (vì tam giác ABC đều) => MP + MQ = AH.

3. Tam giác ABC có AH là đường cao nên cũng là đường phân giác => ∠HAP = ∠HAQ => $HP = HQ$ (tính chất góc nội tiếp) => ∠HOP = ∠HOQ (t/c góc ở tâm) => OH là tia phân giác góc POQ. Mà tam giác POQ cân tại O (vì OP và OQ cùng là bán kính) nên suy ra OH cũng là đường cao => OH ⊥ PQ

Bài 18 Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B) ; trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn ; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

1. Chứng minh MCID là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I.
3. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCID, Chứng minh KCOH là tứ giác nội tiếp .

Lời giải:

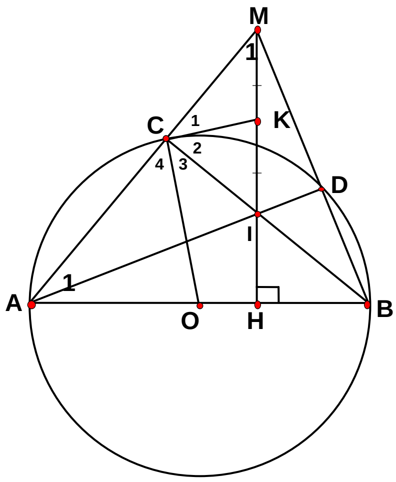
1. Ta có : éACB = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn)
=> éMCI = 90^0 (vì là hai góc kề bù).
éADB = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn)
=> éMDI = 90^0 (vì là hai góc kề bù).

=> éMCI + éMDI = 180^0 mà đây là hai góc đối của tứ giác MCID nên MCID là tứ giác nội tiếp.

2. Theo trên Ta có BC ⊥ MA; AD ⊥ MB nên BC và AD là hai đường cao của tam giác MAB mà BC và AD cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác MAB. Theo giả thiết thì MH ⊥ AB nên MH cũng là đường cao của tam giác MAB => AD, BC, MH đồng quy tại I.

3. ΔOAC cân tại O (vì OA và OC là bán kính) => $\angle A_1 = \angle C_4$

ΔKCM cân tại K (vì KC và KM là bán kính) => $\angle M_1 = \angle C_1$.



Mà $\angle A_1 + \angle M_1 = 90^0$ (do tam giác AHM vuông tại H) => $\angle C_1 + \angle C_4 = 90^0$ => $\angle C_3 + \angle C_2 = 90^0$ (vì góc ACM là góc bẹt) hay $\angle OCK = 90^0$.

Xét tứ giác KCOH Ta có $\angle OHK = 90^0$; $\angle OCK = 90^0$ => $\angle OHK + \angle OCK = 180^0$ mà $\angle OHK$ và $\angle OCK$ là hai góc đối nên KCOH là tứ giác nội tiếp.

Bài 19. Cho đường tròn (O) đường kính AC. Trên bán kính OC lấy điểm B tuỳ ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB. Nối CD, Kẻ BI vuông góc với CD.

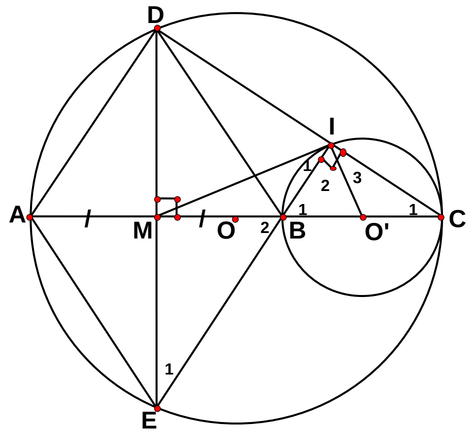
1. Chứng minh tứ giác BMDI nội tiếp .
2. Chứng minh tứ giác ADBE là hình thoi.
3. Chứng minh BI // AD.
4. Chứng minh I, B, E thẳng hàng.
5. Chứng minh MI là tiếp tuyến của (O’).

Lời giải:

1. éBIC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => éBID = 90^0 (vì là hai góc kề bù); DE ⊥ AB tại M => éBMD = 90^0

=> éBID + éBMD = 180^0 mà đây là hai góc đối của tứ giác MBID nên MBID là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; DE ⊥ AB tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)



=> Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

3. éADC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => AD ⊥ DC; theo trên BI ⊥ DC => BI // AD. (1)

4. Theo giả thiết ADBE là hình thoi => EB // AD (2).

Từ (1) và (2) => I, B, E thẳng hàng (vì qua B chỉ có một đường thẳng song song với AD mà thôi.)

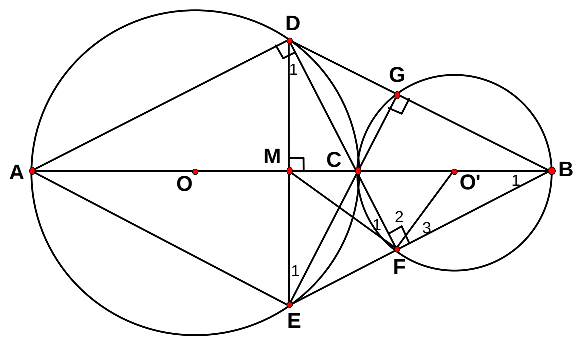
5. I, B, E thẳng hàng nên tam giác IDE vuông tại I => IM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) =>MI = ME => ΔMIE cân tại M => $\angle I_1 = \angle E_1$; ΔO'IC cân tại O' (vì O'C và O'I cùng là bán kính) => $\angle I_3 = \angle C_1$ mà $\angle C_1 = \angle E_1$ (Cùng phụ với góc EDC) => $\angle I_1 = \angle I_3$ => $\angle I_1 + \angle I_2 = \angle I_3 + \angle I_2$. Mà $\angle I_3 + \angle I_2 = \angle BIC = 90^0$ => $\angle I_1 + \angle I_2 = 90^0 = \angle MIO'$ hay MI ⊥ O'I tại I => MI là tiếp tuyến của (O').

<u>Bài 20.</u> Cho đường tròn (O; R) và (O'; R') có R > R' tiếp xúc ngoài nhau tại C. Gọi AC và BC là hai đường kính đi qua điểm C của (O) và (O'). DE là dây cung của (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Gọi giao điểm thứ hai của DC với (O') là F, BD cắt (O') tại G. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác MDGC nội tiếp .
2. Bốn điểm M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn
3. Tứ giác ADBE là hình thoi.
4. B, E, F thẳng hàng
5. DF, EG, AB đồng quy.
6. MF = 1/2 DE.
7. MF là tiếp tuyến của (O').

<u>Lời giải:</u>

1. éBGC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)
=> éCGD = 90^0 (vì là hai góc kề bù)



Theo giả thiết DE ⊥ AB tại M => éCMD = 90^0

=> éCGD + éCMD = 180^0 mà đây là hai góc đối của tứ giác MCGD nên MCGD là tứ giác nội tiếp

2. éBFC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => éBFD = 90^0; éBMD = 90^0 (vì DE ⊥ AB tại M) như vậy F và M cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90^0 nên F và M cùng nằm trên đường tròn đường kính BD => M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn .

3. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; DE ⊥ AB tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)
=> Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

4. éADC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => AD ⊥ DF ; theo trên tứ giác ADBE là hình tho => BE // AD mà AD ⊥ DF nên suy ra BE ⊥ DF .
Theo trên éBFC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => BF ⊥ DF mà qua B chỉ có một đường thẳng vuông góc với DF do đo B, E, F thẳng hàng.

5. Theo trên DF ⊥ BE; BM ⊥ DE mà DF và BM cắt nhau tại C nên C là trực tâm của tam giác BDE => EC cũng là đường cao => EC⊥BD; theo trên CG⊥BD => E,C,G thẳng hàng. Vậy DF, EG, AB đồng quy

6. Theo trên DF ⊥ BE => ΔDEF vuông tại F có FM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) suy ra MF = 1/2 DE (vì trong tam giác vuông trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền).

7. (HD) theo trên MF = 1/2 DE => MD = MF => ΔMDF cân tại M => $\angle D_1 = \angle F_1$
ΔO'BF cân tại O' (vì O'B và O'F cùng là bán kính) => $\angle F_3 = \angle B_1$ mà $\angle B_1 = \angle D_1$ (Cùng phụ với ∠DEB) => $\angle F_1 = \angle F_3$ => $\angle F_1 + \angle F_2 = \angle F_3 + \angle F_2$. Mà $\angle F_3 + \angle F_2 = \angle BFC = 90^0$ => $\angle F_1 + \angle F_2 = 90^0$ = ∠MFO' hay MF ⊥ O'F tại F => MF là tiếp tuyến của (O').

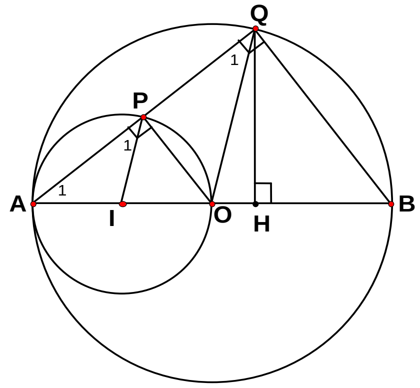
<u>Bài 21.</u> Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OA . Vẽ đường tron tâm I đi qua A, trên (I) lấy P bất kì, AP cắt (O) tại Q.

1. Chứng minh rằng các đường tròn (I) và (O) tiếp xúc nhau tại A.
2. Chứng minh IP // OQ.
3. Chứng minh rằng AP = PQ.
4. Xác định vị trí của P để tam giác AQB có diện tích lớn nhất.

<u>Lời giải:</u>

1. Ta có OI = OA – IA mà OA và IA lần lượt là các bán kính của đường tròn (O) và đường tròn (I) . Vậy đường tròn (O) và đường tròn (I) tiếp xúc nhau tại A .

2. ΔOAQ cân tại O (vì OA và OQ cùng là bán kính) => $\angle A_1 = \angle Q_1$
ΔIAP cân tại I (vì IA và IP cùng là bán kính) => $\angle A_1 = \angle P_1$
=> $\angle P_1 = \angle Q_1$ mà đây là hai góc đồng vị nên suy ra IP // OQ.



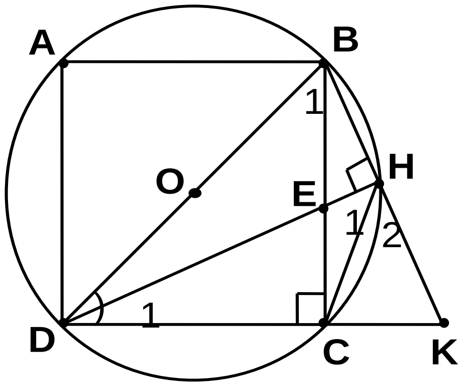
3. $\angle APO = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => OP ⊥ AQ => OP là đường cao của ΔOAQ mà ΔOAQ cân tại O nên OP là đường trung tuyến => AP = PQ.

4. (***HD***) Kẻ QH ⊥ AB ta có $S_{AQB} = \frac{1}{2}AB.QH$. mà AB là đường kính không đổi nên S_{AQB} lớn nhất khi QH lớn nhất. QH lớn nhất khi Q trùng với trung điểm của cung AB. Để Q trùng với trung điểm của cung AB thì P phải là trung điểm của cung AO.
Thật vậy P là trung điểm của cung AO => PI ⊥ AO mà theo trên PI // QO => QO ⊥ AB tại O => Q là trung điểm của cung AB và khi đó H trung với O; OQ lớn nhất nên QH lớn nhất.

<u>Bài 22.</u> Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE, đường thẳng này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K.

1. Chứng minh BHCD là tứ giác nội tiếp .
2. Tính góc CHK.
3. Chứng minh KC. KD = KH.KB
4. Khi E di chuyển trên cạnh BC thì H di chuyển trên đường nào?

<u>Lời giải:</u>
1. Theo giả thiết ABCD là hình vuông nên $\angle BCD = 90^0$; BH ⊥ DE tại H nên $\angle BHD = 90^0$ => như vậy H và C cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90^0 nên H và C cùng nằm trên đường tròn đường kính BD => BHCD là tứ giác nội tiếp.
2. BHCD là tứ giác nội tiếp => $\angle BDC + \angle BHC = 180^0$. (1)
$\angle BHK$ là góc bẹt nên $\angle KHC + \angle BHC = 180^0$ (2).



Từ (1) và (2) => $\angle CHK = \angle BDC$ mà $\angle BDC = 45^0$ (vì ABCD là hình vuông) => $\angle CHK = 45^0$.
3. Xét ΔKHC và ΔKDB ta có $\angle CHK = \angle BDC = 45^0$; $\angle K$ là góc chung
=> ΔKHC ~ ΔKDB => $\frac{KC}{KB} = \frac{KH}{KD}$ => KC. KD = KH.KB.

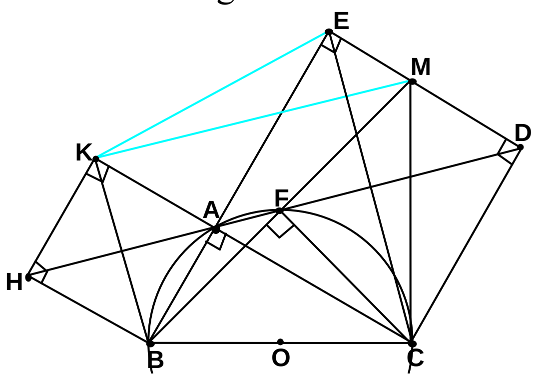
4. (*HD*) Ta luôn có ∠BHD = 90^0 và BD cố định nên khi E chuyển động trên cạnh BC cố định thì H chuyển động trên cung BC (E ≡ B thì H ≡ B; E ≡ C thì H ≡ C).

Bài 23. Cho tam giác ABC vuông ở A. Dựng ở miền ngoài tam giác ABC các hình vuông ABHK, ACDE.

1. Chứng minh ba điểm H, A, D thẳng hàng.
2. Đường thẳng HD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại F, chứng minh FBC là tam giác vuông cân.
3. Cho biết ∠ABC > 45^0 ; gọi M là giao điểm của BF và ED, Chứng minh 5 điểm b, k, e, m, c cùng nằm trên một đường tròn.
4. Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải:

1. Theo giả thiết ABHK là hình vuông => ∠BAH = 45^0



Tứ giác AEDC là hình vuông => ∠CAD = 45^0; tam giác ABC vuông ở A => ∠BAC = 90^0

=> ∠BAH + ∠BAC + ∠CAD = 45^0 + 90^0 + 45^0 = 180^0 => ba điểm H, A, D thẳng hàng.

2. Ta có ∠BFC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên tam giác BFC vuông tại F. (1).

∠FBC = ∠FAC (nội tiếp cùng chắn cung FC) mà theo trên ∠CAD = 45^0 hay ∠FAC = 45^0 (2).

Từ (1) và (2) suy ra ΔFBC là tam giác vuông cân tại F.

3. Theo trên ∠BFC = 90^0 => ∠CFM = 90^0 (vì là hai góc kề bù); ∠CDM = 90^0 (t/c hình vuông).

=> ∠CFM + ∠CDM = 180^0 mà đây là hai góc đối nên tứ giác CDMF nội tiếp một đường tròn suy ra ∠CDF = ∠CMF , mà ∠CDF = 45^0 (vì AEDC là hình vuông) => ∠CMF = 45^0 hay ∠CMB = 45^0.

Ta cũng có ∠CEB = 45^0 (vì AEDC là hình vuông); ∠BKC = 45^0 (vì ABHK là hình vuông).

Như vậy K, E, M cùng nhìn BC dưới một góc bằng 45^0 nên cùng nằm trên cung chứa góc 45^0 dựng trên BC => 5 điểm b, k, e, m, c cùng nằm trên một đường tròn.

4. ΔCBM có ∠B = 45^0 ; ∠M = 45^0 => ∠BCM =45^0 hay MC ⊥ BC tại C => MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

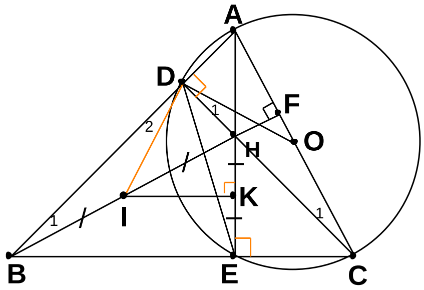
Bài 24. Cho tam giác nhọn ABC có ∠B = 45^0 . Vẽ đường tròn đường kính AC có tâm O, đường tròn này cắt BA và BC tại D và E.

1. Chứng minh AE = EB.
2. Gọi H là giao điểm của CD và AE, Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.

3. Chứng minh OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

Lời giải:

1. $\angle AEC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)
=> $\angle AEB = 90^0$ (vì là hai góc kề bù); Theo giả thiết $\angle ABE = 45^0$
=> ΔAEB là tam giác vuông cân tại E => EA = EB.



2. Gọi K là trung điểm của HE (1) ; I là trung điểm của HB => IK là đường trung bình của tam giác HBE => IK // BE mà $\angle AEC = 90^0$ nên BE $\perp$ HE tại E => IK $\perp$ HE tại K (2).
Từ (1) và (2) => IK là trung trực của HE . Vậy trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.

3. theo trên I thuộc trung trực của HE => IE = IH mà I là trung điểm của BH => IE = IB.
$\angle ADC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle BDH = 90^0$ (kề bù $\angle ADC$) => tam giác BDH vuông tại D có DI là trung tuyến (do I là trung điểm của BH) => ID = 1/2 BH hay ID = IB => IE = IB = ID => I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE bán kính ID.
Ta có ΔODC cân tại O (vì OD và OC là bán kính) => $\angle D_1 = \angle C_1$. (3)
ΔIBD cân tại I (vì ID và IB là bán kính) => $\angle D_2 = \angle B_1$. (4)
Theo trên ta có CD và AE là hai đường cao của tam giác ABC => H là trực tâm của tam giác ABC => BH cũng là đường cao của tam giác ABC => BH $\perp$ AC tại F => ΔAEB có $\angle AFB = 90^0$.
Theo trên ΔADC có $\angle ADC = 90^0$ => $\angle B_1 = \angle C_1$ (cùng phụ $\angle BAC$) (5).
Từ (3), (4), (5) =>$\angle D_1 = \angle D_2$ mà $\angle D_2 + \angle IDH = \angle BDC = 90^0$=> $\angle D_1 + \angle IDH = 90^0 = \angle IDO$ => OD $\perp$ ID tại D => OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

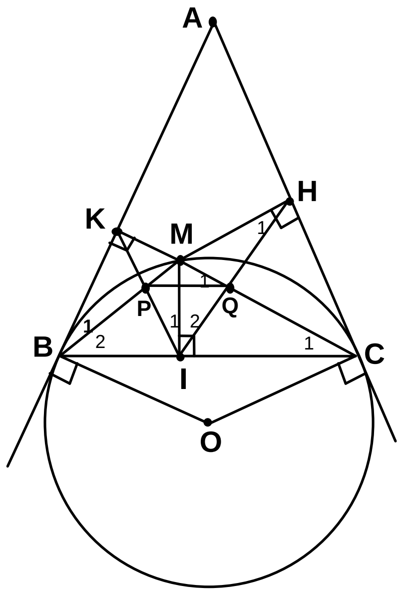
Bài 25. Cho đường tròn (O), BC là dây bất kì (BC< 2R). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C chúng cắt nhau tại A. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, AC, AB. Gọi giao điểm của BM, IK là P; giao điểm của CM, IH là Q.
1. Chứng minh tam giác ABC cân. **2**. Các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp .
3. Chứng minh $MI^2 = MH.MK$. **4**. Chứng minh PQ $\perp$ MI.

Lời giải:

1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có AB = AC => ΔABC cân tại A.
2. Theo giả thiết MI $\perp$ BC => $\angle MIB = 90^0$; MK $\perp$ AB => $\angle MKB = 90^0$.
=> $\angle MIB + \angle MKB = 180^0$ mà đây là hai góc đối => tứ giác BIMK nội tiếp
**** (Chứng minh tứ giác CIMH nội tiếp tương tự tứ giác BIMK)***
3. Theo trên tứ giác BIMK nội tiếp => $\angle KMI + \angle KBI = 180^0$; tứ giác CHMI nội tiếp => $\angle HMI + \angle HCI = 180^0$. mà $\angle KBI = \angle HCI$ (vì tam giác ABC cân tại A) => $\angle KMI = \angle HMI$ (1).

Theo trên tứ giác BIMK nội tiếp => $\angle B_1 = \angle I_1$ (nội tiếp cùng chắn cung KM); tứ giác CHMI nội tiếp => $\angle H_1 = \angle C_1$ (nội tiếp cùng chắn cung IM). Mà $\angle B_1 = \angle C_1$ (= 1/2 sđ BM) => $\angle I_1 = \angle H_1$ (2).

Từ (1) và (2) => ΔMKI ΔMIH => $\frac{MI}{MH} = \frac{MK}{MI}$ => $MI^2 = MH.MK$



4. Theo trên ta có $\angle I_1 = \angle C_1$; cũng chứng minh tương tự ta có $\angle I_2 = \angle B_2$ mà $\angle C_1 + \angle B_2 + \angle BMC = 180^0$ => $\angle I_1 + \angle I_2 + \angle BMC = 180^0$ hay $\angle PIQ + \angle PMQ = 180^0$ mà đây là hai góc đối => tứ giác PMQI nội tiếp => $\angle Q_1 = \angle I_1$ mà $\angle I_1 = \angle C_1$ => $\angle Q_1 = \angle C_1$ => PQ // BC (vì có hai góc đồng vị bằng nhau) . Theo giả thiết MI ⊥BC nên suy ra IM ⊥ PQ.

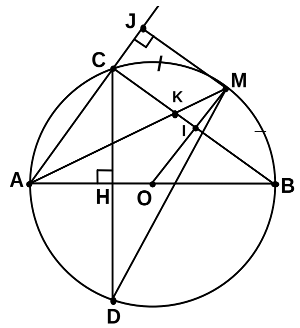
<u>Bài 26.</u> Cho đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Vẽ dây cung CD ⊥ AB ở H. Gọi M là điểm chính giữa của cung CB, I là giao điểm của CB và OM. K là giao điểm của AM và CB. Chứng minh :

1. $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$ **2**. AM là tia phân giác của ∠CMD. **3**. Tứ giác OHCI nội tiếp

4. Chứng minh đường vuông góc kẻ từ M đến AC cũng là tiếp tuyến của đường tròn tại M.

<u>Lời giải:</u> **1**. Theo giả thiết M là trung điểm của BC => $MB = MC$

=> ∠CAM = ∠BAM (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) => AK là tia phân giác của góc CAB => $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$ (t/c tia phân giác của tam giác)



2. (***HD***) Theo giả thiết CD ⊥ AB => A là trung điểm của CD => ∠CMA = ∠DMA => MA là tia phân giác của góc CMD.

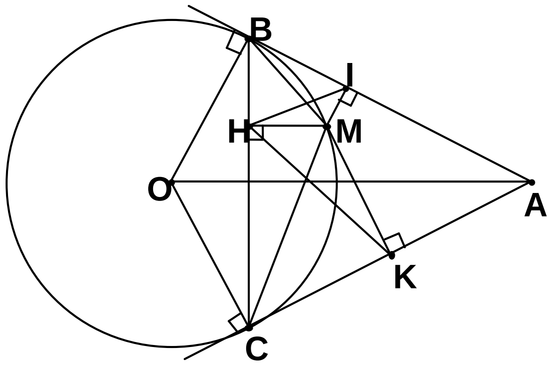
3. ***(HD)*** Theo giả thiết M là trung điểm của $\overset{\frown}{BC}$ => OM ⊥ BC tại I => ∠OIC = 90^0 ; CD ⊥ AB tại H => ∠OHC = 90^0 => ∠OIC + ∠OHC = 180^0 mà đây là hai góc đối => tứ giác OHCI nội tiếp

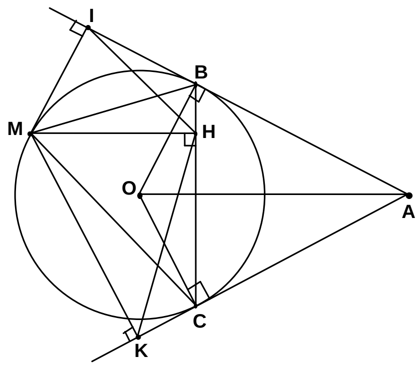
4. Kẻ MJ ⊥ AC ta có MJ // BC (vì cùng vuông góc với AC). Theo trên OM ⊥ BC => OM ⊥ MJ tại J suy ra MJ là tiếp tuyến của đường tròn tại M.

<u>**Bài 27**</u> Cho đường tròn (O) và một điểm A ở ngoài đường tròn . Các tiếp tuyến với đường tròn (O) kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn (O) tại B và C. Gọi M là điểm tuỳ ý trên đường tròn (M khác B, C), từ M kẻ MH ⊥ BC, MK ⊥ CA, MI ⊥ AB. Chứng minh :

Tứ giác ABOC nội tiếp. **2.** ∠BAO = ∠ BCO. **3.** ΔMIH ~ ΔMHK. **4.** MI.MK = MH^2.

<u>**Lời giải:**</u>





(*HS tự giải*)

Tứ giác ABOC nội tiếp => ∠BAO = ∠ BCO (nội tiếp cùng chắn cung BO).

Theo giả thiết MH ⊥ BC => ∠MHC = 90^0; MK ⊥ CA => ∠MKC = 90^0 => ∠MHC + ∠MKC = 180^0 mà đây là hai góc đối => tứ giác MHCK nội tiếp => ∠HCM = ∠HKM (nội tiếp cùng chắn cung HM).

Chứng minh tương tự ta có tứ giác MHBI nội tiếp => ∠MHI = ∠MBI (nội tiếp cùng chắn cung IM).

Mà ∠HCM = ∠MBI (= 1/2 sđ $\overset{\frown}{BM}$) => ∠HKM = ∠MHI (1). Chứng minh tương tự ta cũng có

∠KHM = ∠HIM (2). Từ (1) và (2) => Δ HIM ~ Δ KHM.

Theo trên Δ HIM ~ Δ KHM => $\frac{MI}{MH} = \frac{MH}{MK}$ => MI.MK = MH^2

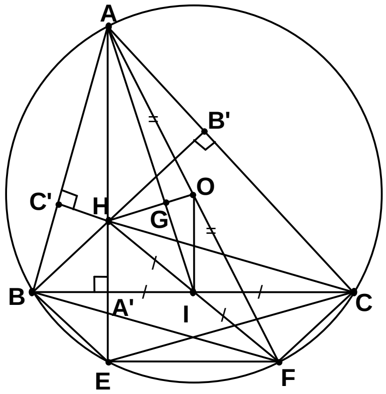
<u>**Bài 28**</u> Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; E là điểm đối xứng của H qua BC; F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC.

1. Chứng minh tứ giác BHCF là hình bình hành.
2. E, F nằm trên đường tròn (O).
3. Chứng minh tứ giác BCFE là hình thang cân.
4. Gọi G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.

<u>**Lời giải:**</u>

1. Theo giả thiết F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC => I là trung điểm BC và HE => BHCF là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường .

2. (***HD***) Tứ giác AB'HC' nội tiếp => ∠BAC + ∠B'HC' = 180^0 mà ∠BHC = ∠B'HC' (đối đỉnh) => ∠BAC + ∠BHC = 180^0. Theo trên BHCF là hình bình hành => ∠BHC = ∠BFC => ∠BFC + ∠BAC = 180^0



=> Tứ giác ABFC nội tiếp => F thuộc (O).

* H và E đối xứng nhau qua BC => ΔBHC = ΔBEC (c.c.c) => ∠BHC = ∠BEC => ∠BEC + ∠BAC = 180^0 => ABEC nội tiếp => E thuộc (O) .

3. Ta có H và E đối xứng nhau qua BC => BC ⊥ HE (1) và IH = IE mà I là trung điểm của của HF => EI = 1/2 HE => tam giác HEF vuông tại E hay FE ⊥ HE (2)

Từ (1) và (2) => EF // BC => BEFC là hình thang. (3)

Theo trên E ∈(O) => ∠CBE = ∠CAE (nội tiếp cùng chắn cung CE) (4).

Theo trên F ∈(O) và ∠FEA =90^0 => AF là đường kính của (O) => ∠ACF = 90^0 => ∠BCF = ∠CAE (vì cùng phụ ∠ACB) (5).

Từ (4) và (5) => ∠BCF = ∠CBE (6).

Từ (3) và (6) => tứ giác BEFC là hình thang cân.

4. Theo trên AF là đường kính của (O) => O là trung điểm của AF; BHCF là hình bình hành => I là trung điểm của HF => OI là đường trung bình của tam giác AHF => OI = 1/ 2 AH.

Theo giả thiết I là trung điểm của BC => OI ⊥ BC (Quan hệ đường kính và dây cung) => ∠OIG = ∠HAG (vì so le trong); lại có ∠OGI = ∠ HGA (đối đỉnh) => ΔOGI ~ ΔHGA => $\frac{GI}{GA}=\frac{OI}{HA}$ mà OI = $\frac{1}{2}$ AH => $\frac{GI}{GA}=\frac{1}{2}$ mà AI là trung tuyến của tam giác ABC (do I là trung điểm của BC) => G là trọng tâm của tam giác ABC.

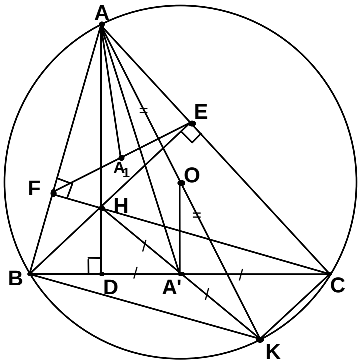
<u>Bài 29</u> BC là một dây cung của đường tròn (O; R) (BC ≠ 2R). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho O luôn nằm trong tam giác ABC. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H.

1. Chứng minh tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC.
2. Gọi A' là trung điểm của BC, Chứng minh AH = 2OA'.
3. Gọi A_1 là trung điểm của EF, Chứng minh R.AA_1 = AA'. OA'.
4. Chứng minh R(EF + FD + DE) = $2S_{ABC}$ suy ra vị trí của A để tổng EF + FD + DE đạt giá trị lớn nhất.

<u>Lời giải:</u> ***(HD)***

1. Tứ giác BFEC nội tiếp => ∠AEF = ∠ACB (cùng bù ∠BFE)
∠AEF = ∠ABC (cùng bù ∠CEF) => Δ AEF ~ Δ ABC.

2. Vẽ đường kính AK => KB // CH (cùng vuông góc AB); KC // BH (cùng vuông góc AC) => BHKC là hình bình hành => A' là trung điểm của HK => OK là đường trung bình của ΔAHK => AH = 2OA'



3. áp dụng tính chất : *nếu hai tam giác đồng dạng thì tỉ số giữa hia trung tuyến, tỉ số giữa hai bán kính các đường tròn ngoại tiếp bằng tỉ số đồng dạng*. ta có :

Δ AEF ~ Δ ABC => $\frac{R}{R'} = \frac{AA'}{AA_1}$ (1) trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC; R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp Δ AEF; AA' là trung tuyến của ΔABC; AA_1 là trung tuyến của ΔAEF.

Tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH nên đây cũng là đường tròn ngoại tiếp ΔAEF

Từ (1) => $R.AA_1 = AA'.R' = AA'\frac{AH}{2} = AA'.\frac{2A'O}{2}$

Vậy R . AA_1 = AA' . A'O (2)

4. Gọi B', C'lần lượt là trung điểm của AC, AB, ta có OB'⊥AC ; OC'⊥AB (bán kính đi qua trung điểm của một dây không qua tâm) => OA', OB', OC' lần lượt là các đường cao của các tam giác OBC, OCA, OAB.

$$S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} = \frac{1}{2}(OA'.BC' + OB'.AC + OC'.AB)$$

$$2S_{ABC} = OA'.BC + OB'.AC' + OC'.AB \quad (3)$$

Theo (2) => OA' = R . $\frac{AA_1}{AA'}$ mà $\frac{AA_1}{AA'}$ là tỉ số giữa 2 trung tuyến của hai tam giác đồng dạng AEF và ABC nên $\frac{AA_1}{AA'} = \frac{EF}{BC}$. Tương tự ta có : OB' = R . $\frac{FD}{AC}$; OC' = R . $\frac{ED}{AB}$

Thay vào (3) ta được

$2S_{ABC} = R\left(\frac{EF}{BC}.BC + \frac{FD}{AC}.AC + \frac{ED}{AB}.AB\right) \Leftrightarrow 2S_{ABC} = R(EF + FD + DE)$

* R(EF + FD + DE) = $2S_{ABC}$ mà R không đổi nên (EF + FD + DE) đạt gí trị lớn nhất khi S_{ABC}.

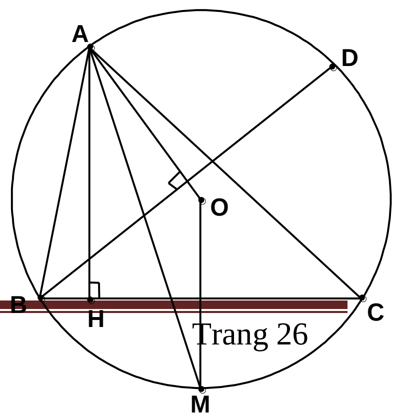
Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AD.BC$ do BC không đổi nên S_{ABC} lớn nhất khi AD lớn nhất, mà AD lớn nhất khi A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

Bài 30 Cho tam giác ABC nội tiếp (O; R), tia phân giác của góc BAC cắt (O) tại M. Vẽ đường cao AH và bán kính OA.

1. Chứng minh AM là phân giác của góc OAH.
2. Giả sử ∠B > ∠C. Chứng minh ∠OAH = ∠B - ∠C.
3. Cho ∠BAC = 60^0 và ∠OAH = 20^0. Tính:

a) ∠B và ∠C của tam giác ABC.

b) Diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC theo R



Lời giải: ***(HD)***

1. AM là phân giác của ∠BAC => ∠BAM = ∠CAM => $BM = CM$ => M là trung điểm của cung BC => OM ⊥ BC; Theo giả thiết AH ⊥ BC => OM // AH => ∠HAM = ∠OMA (so le). Mà ∠OMA = ∠OAM (vì tam giác OAM cân tại O do có OM = OA = R) => ∠HAM = OAM => AM là tia phân giác của góc OAH

2. Vẽ dây BD ⊥ OA => $AB = AD$ => ∠ABD = ∠ACB. Ta có ∠OAH = ∠ DBC (góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn) => ∠OAH = ∠ABC - ∠ABD => ∠OAH = ∠ABC - ∠ACB hay ∠OAH = ∠B - ∠C.

3. a) Theo giả thiết ∠BAC = 60^0 => ∠B + ∠C = 120^0 ; theo trên ∠B ∠C = ∠OAH => ∠B - ∠C = 20^0 .

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle B + \angle C = 120^0 \\ \angle B - \angle C = 20^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \angle B = 70^0 \\ \angle C = 50^0 \end{cases}$$

b) $S_{vp} = S_{qBOC} - S_{\triangle BOC} = \frac{\pi.R^2.120^2}{360^0} - \frac{1}{2}R.\sqrt{3}.\frac{R}{2} = \frac{\pi.R^2}{3} - \frac{R^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2.(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}$