# CHUYÊN ĐỀ ỨNG DỤNG HỆ THỨC VI-ÉT

## A. Lý thuyết:

+ Nếu $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ thì

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

+ Nếu hai số $x_1$ , $x_2$ có tổng $x_1 + x_2 = S$ và tích $x_1x_2 = P$ thì hai số đó là các nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$ (Định lý Viét đảo)

## B. Nội dung:

Vận dụng Định lý Viét và Viét đảo ta chia làm các dạng bài tập sau:

### *Dạng 1:* Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai

+ Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (a khác 0) có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = \frac{c}{a}$

+ Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (a khác 0) có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$

***Ví dụ 1:*** Không giải phương trình hãy nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
b) $-7x^2 - x + 6 = 0$

**Giải**:

a) Ta có $a + b + c = 3 - 5 + 2 = 0$

nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

b) Ta có $a - b + c = -7 + 1 + 6 = 0$

nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{6}{7}$

**Trong trường hợp phương trình có nghiệm nguyên đơn giản ta có thể nhẩm nghiệm theo hệ thức Viét, xét ví dụ sau:**

***Ví dụ 2***: Nhẩm nghiệm của phương trình sau

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x^2 + 6x + 8 = 0$

**Giải:**

a) Nếu phương trình có nghiệm $x_1, x_2$ thì theo hệ thức Viét ta có:
$x_1 + x_2 = 7$ và $x_1x_2 = 10$ ta nhẩm được hai nghiệm là $x_1 = 2$, $x_2 = 5$
b) Tương tự như câu a) ta có $x_1 + x_2 = -6$ và $x_1x_2 = 8$ nên $x_1 = -2$, $x_2 = -4$

### *Dạng 2:* Tìm điều kiện của tham số khi biết một nghiệm của phương trình đã cho

***Ví dụ1:*** Cho phương trình $2x^2 - px + 5 = 0$.

Biết phương trình có một nghiệm là 2. Tìm p và tìm nghiệm còn lại

**Giải:**

***Cách 1***: Thay x = 2 vào phương trình ta được $p = \frac{13}{2}$ . Theo hệ thức Viét ta có

$x_1x_2 = \frac{5}{2}$ mà $x_1 = 2$ nên $x_2 = \frac{5}{4}$

***Cách 2***: Vì phương trình có nghiệm nên theo hệ thức Viét ta có $x_1\,x_2 = \frac{5}{2}$ mà $x_1 = 2$ nên $x_2 = \frac{5}{4}$.

Mặt khác $x_1 + x_2 = \frac{p}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} = 2 + \frac{5}{4} \Rightarrow p = \frac{13}{2}$

***Ví dụ 2:*** Cho phương trình $x^2 + mx - 3 = 0$.

Biết phương trình có một nghiệm là 3. Tìm m và tìm nghiệm còn lại

**Giải:**

Tương tự như ví dụ trên ta tìm được m = -2 và nghiệm còn lại là x = -1

## *Dạng 3*: Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ nếu có nghiệm thoả mãn:

a) $P < 0$ thì hai nghiệm đó trái dấu

b) $P > 0$ và $S > 0$ thì hai nghiệm đều dương

c) $P > 0$ và $S < 0$ thì hai nghiệm đều âm

***Ví dụ1*** : Không giải phương trình xét dấu các nghiệm của các phương trình sau:

a) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$ b) $x^2 + 5x - 1 = 0$

c) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ d) $x^2 + 9x + 6 = 0$

**Giải:**

a) Ta có $\Delta' = -1 < 0$ nên phương trình vô nghiệm

b) Ta có $P < 0$ nên phương trình có hai nghiệm trái dấu

c) Ta có $\Delta' = 2$; $S = 2\sqrt{3} > 0$; $P = 1 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

d) Ta có $\Delta = 57$; $S = -9 < 0$; $P = 6 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm âm phân biệt

***Ví dụ 2:*** Tìm điều kiện của m để phương trình sau: $2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$

a) Có hai nghiệm khác dấu

b) Có hai nghiệm phân biệt đều âm

c) Có hai nghiệm phân biệt đều dương

d) Có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau

**Giải**:

a) Phương trình có hai nghiệm khác dấu khi $P < 0$ hay $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-3)^2 > 0 \\ 1 - 2m < 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương khi

$$\begin{cases}\Delta > 0\\ S > 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2m-3)^2 > 0\\ 1-2m > 0\\ m-1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \text{ không có giá trị nào của m thoả mãn}$$

d) Phương trình có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau hay phương trình có hai nghiệm đối nhau .

Phương trình có hai nghiệm đối nhau khi

$$\begin{cases}\Delta \ge 0\\ S = 0\end{cases} \Leftrightarrow 1 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

***Điều cần chú ý ở đây*** là khi $\Delta < 0$ thì không cần xét dấu các nghiệm của phương trình vì phương trình vô nghiệm.

Khi $P < 0$ thì kết luận ngay phương trình có hai nghiệm trái dấu vì $\Delta > 0$

Khi $P > 0$ ta phải xét đến hai yếu tố còn lại là $\Delta$ và S

## *Dạng 4:* Tính giá trị của biểu thức chứa các nghiệm của phương trình đã cho

***Ví dụ 1***: Cho phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ ( m là tham số)

Nếu phương trình có nghiệm $x_1, x_2$ . Hãy tính giá trị biểu thức sau theo m:

a) $x_1^2 + x_2^2$

b) $x_1^3 + x_2^3$

c) $|x_1 - x_2|$

**Giải**:

Vì phương trình có nghiệm $x_1, x_2$ nên theo hệ thức Viét ta có:

$x_1 + x_2 = -m$ và $x_1.x_2 = 1$

a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2$

b) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -m^3 + 3m$

c) $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = m^2 - 4$ nên $|x_1 - x_2| = \sqrt{m^2 - 4}$

***Ví dụ 2***: Cho phương trình

$x^2 - 4x + 1 = 0$ . Tính giá trị của biểu thức

$A = \sqrt{2x_1^4 + 8x_1 + 9} - 5x_1$ ( với $x_1$ là một nghiệm của phương trình đã cho)

**Giải:**

Ta phải biến đổi biểu thức dưới căn bậc hai thành dạng $(5x_1+a)^2$ để đưa A về dạng $A = |5x_1 + a| - 5x_1$

Bằng cách xét dấu nghiệm của phương trình đã cho chứng tỏ $5x_1 + a > 0$ từ đó tính được giá trị của A. Sau đây là cách biến đổi cụ thể:

Vì $x_1$ là nghiệm của phương trình đã cho nên : $x_1^2 = 4x_1 - 1 \Rightarrow x_1^4 = 16x_1^2 - 8x_1 + 1$

$$A = \sqrt{32x_1^2 - 8x_1 + 11} - 5x_1 = \sqrt{25x_1^2 + 7x_1^2 - 8x_1 + 11} - 5x_1$$

$$= \sqrt{25x_1^2 + 7(4x_1 - 1) - 8x_1 + 11} - 5x_1$$

$$= \sqrt{(5x_1 + 2)^2} - 5x_1 = |5x_1 + 2| - 5x_1$$

Phương trình đã cho có $\Delta' > 0$ nên theo hệ thức Viét ta có: $\begin{cases}x_1 + x_2 = 4 > 0\\ x_1x_2 = 1 > 0\end{cases}$

$\Rightarrow x_1 > 0 \Rightarrow 5x_1 + 2 > 0 \Rightarrow A = 2$

***Ví dụ 3***: Cho phương trình $x^2 + x - 1 = 0$ và $x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình $(x_1 < x_2)$ .

Tính giá trị của biểu thức $B = \sqrt{x_1^8 + 10x_1 + 13} + x_1$

**Giải:**

Từ giả thiết ta có: $x_1^2 = 1 - x_1 \Rightarrow x_1^4 = x_1^2 - 2x_1 + 1 = (1 - x_1) - 2x_1 + 1 = -3x_1 + 2 \Rightarrow x_1^8 = 9x_1^2 - 12x_1 + 4$

$$\Rightarrow B = \sqrt{x_1^8 + 10x_1 + 13} + x_1 = \sqrt{9x_1^2 - 2x_1 + 17} + x_1 = \sqrt{(x_1 - 5)^2} + x_1$$

Vì $P < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu mà $x_1 < x_2$ nên $x_1 < 0$

Vậy $B = |x_1 - 5| + x_1 = 5 - x_1 + x_1 = 5$

## *Dạng 5*: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức nào đó

***Ví dụ 1***: Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm $x_1, x_2$ thoả mãn

a) $3x_1 + 2x_2 = 1$
b) $x_1^2 - x_2^2 = 6$
c) $x_1^2 + x_2^2 = 8$

**Giải:**

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

a) Kết hợp hệ thức Viét ta có hệ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 & (2) \\ x_1x_2 = m & (3) \end{cases}$$ Giải hệ (1), (2) ta được $x_1 = 5$; $x_2 = -7$

Thay vào (3) ta được m = -35 (thoả mãn điều kiện)

b) Kết hợp hệ thức Viét ta có hệ:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 6 & (1) \\ x_1 + x_2 = -2 & (2) \\ x_1x_2 = m & (3) \end{cases}$$ Giải hệ (1), (2) ta được $x_1 = -\frac{5}{2}$ ; $x_2 = \frac{1}{2}$

Thay vào (3) ta được $m = -\frac{5}{4}$ (thoả mãn điều kiện)

c) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \Rightarrow 4 - 2m = 8 \Rightarrow m = -2$ (thoả mãn)

***Ví dụ 2***: Tìm m để phương trình $x^2 - mx + 3 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm thoả mãn $3x_1 + x_2 = 6$

**Giải:**

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0$ hay $m^2 - 12 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2\sqrt{3}$ hoặc $m \leq -2\sqrt{3}$

Kết hợp với hệ thức Viét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m & (1) \\ 3x_1 + x_2 = 6 & (2) \\ x_1x_2 = 3 & (3) \end{cases}$$ giải hệ (1), (2) ta được $x_1 = \frac{6 - m}{2}$ ; $x_2 = \frac{3m - 6}{2}$

Thay vào (3) ta được $(6 - m)(3m - 6) = 12$ giải ra ta được m = 4 (thoả mãn)

***Ví dụ 3***: Giả sử $x_1$, $x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 + 2mx + 4 = 0$.

Xác định m để $x_1^4 + x_2^4 \le 32$

**Giải**:

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' \ge 0$ hay $m^2 - 4 \ge 0 \Leftrightarrow |m| \ge 2$

Ta có: $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2(x_1x_2)^2$

Theo hệ thức Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1x_2 = 4 \end{cases}$ nên $x_1^4 + x_2^4 \le 32 \Leftrightarrow (4m^2 - 8)^2 - 32 \le 32$

$\Leftrightarrow |m^2 - 2| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le m^2 - 2 \le 2 \Leftrightarrow |m| \le 2$

Kết hợp với điều kiện $\Delta' \ge 0$ ta được m = 2 hoặc m = -2

## ***Dạng 6***: **Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số**

***Ví dụ1*** : Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 = 0$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

**Giải**:

a) Ta có $\Delta' = (m + 1)^2 - m^2 = 2m + 1$ Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -\frac{1}{2}$

b ) Theo hệ thức Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) & (1) \\ x_1x_2 = m^2 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có $m = \frac{x_1+x_2}{2} - 1$ thay vào (2) ta được $x_1x_2 = \left(\frac{x_1+x_2}{2} - 1\right)^2$

hay $4x_1x_2 = (x_1 + x_2 - 2)^2$ là hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

**Cách giải chung của dạng này là theo hệ thức Viét ta có hai biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình. Từ một trong hai biểu thức ta rút m theo hai nghiệm, sau đó thế vào biểu thức còn lại ta được biểu thức cần tìm.**

Tuy nhiên có thể dùng cách biến đổi tương đương để khử m từ hai phương trình, ta xét tiếp vd sau:

***Ví dụ 2:*** Cho phương trình $mx^2 - 2(m - 3)x + m + 1 = 0$ (m là tham số )

Biết phương trình luôn có hai nghiệm, tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

**Giải** :

Do phương trình luôn có hai nghiệm nên theo hệ thức Viét ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{2(m-3)}{m} = 2 - \frac{6}{m} \quad (1)$$

$$x_1x_2 = \frac{m+1}{m} = 1 + \frac{1}{m} \quad (2)$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow 6x_1x_2 = 6 + \frac{6}{m}$ (3). Cộng vế theo vế của (1) và (3) ta được $x_1 + x_2 + 6x_1x_2 = 8$.

Vậy biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m là: $x_1 + x_2 + 6x_1x_2 = 8$

***Dạng 7:*** **Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất, chứng minh bất đẳng thức của biểu thức nghiệm**

***Ví dụ 1:*** Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m - 5 = 0$ với m là tham số

Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình trên. Với giá trị nào của m thì biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị đó.

**Giải:**

Ta có $\Delta' = (m - 1)^2 - (m - 5) = m^2 - 3m + 6 > 0$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m

Theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = 2(m - 1)$ và $x_1x_2 = m - 5$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m - 1)^2 - 2(m - 5)$$

$$= 4m^2 - 10m + 14 = \left(2m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$$

Dấu bằng xẩy ra khi $m = \frac{5}{4}$. Vậy $A_{min} = \frac{11}{4}$ khi $m = \frac{5}{4}$

***Ví dụ 2***: Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ với m là tham số.

Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức:

$$C = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$$

**Giải**:

Ta có $\Delta = m^2 - 4(m - 1) = (m - 2)^2 \geq 0$ nên phương trình có nghiệm với mọi giá trị của m

Theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = m$ và $x_1x_2 = m - 1$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2m + 2$. Thay vào ta có

$$C = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}$$

Đặt $t = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}$ ta có $tm^2 - 2m + 2t - 1 = 0$ (1)

Nếu $t = 0$ thì $m = -\frac{1}{2}$

Nếu $t \neq 0$ thì phương trình (1) là phương trình bậc hai đối với m. Ta có :

$$\Delta' = 1 - t(2t - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -2t^2 + t + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(-2t - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

$t = -\frac{1}{2}$ khi $m = -2$ ; $t = 1$ khi $m = 1$

Vậy $C_{min} = -\frac{1}{2}$ khi $m = -2$; $C_{max} = 1$ khi $m = 1$ ***Hoặc*** ta chứng minh $C - 1 \leq 0$ và $C + \frac{1}{2} \geq 0$

***Ví dụ 3:*** Giả sử $x_1$, $x_2$ là nghiệm của phương trình $2008x^2 - (2008m - 2009)x - 2008 = 0$

Chứng minh $A = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2\left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2 \geq 24$

**Giải**: Theo hệ thức Viet ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{2008m - 2009}{2008}$ và $x_1x_2 = -1$

nên $A = 6(x_1 - x_2)^2 = 6((x_1 + x_2)^2 + 4) \geq 24$

***Ví dụ 4:*** Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 18x + 1 = 0$.

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ ($n \in N$). Chứng minh:

a) $S_{n+2} = 18S_{n+1} - S_n$

b) $S_n$ nguyên dương và $S_n$ không chia hết 17 với mọi n là số tự nhiên.

**Giải:**

a) Vì $x_1$, $x_2$ là nghiệm phương trình $x^2 - 18x + 1 = 0$ nên theo hệ thức Viét ta có:

$$x_1 + x_2 = 18 \text{ và } x_1x_2 = 1$$

Ta có: $S_{n+2} = x_1^{n+2} + x_2^{n+2}$ và $S_{n+1} = x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$

$x_1^n(x_1^2 - 18x_1 + 1) + x_2^n(x_2^2 - 18x_2 + 1) = 0$

hay $x_1^{n+2} + x_2^{n+2} - 18(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}) - (x_1^n + x_2^n) = 0 \Rightarrow S_{n+2} = 18S_{n+1} - S_n$

b) Ta c ó: $S_1 = 18$, $S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 18^2 - 2 = 322$

mà $S_{n+2} = 18S_{n+1} - S_n$ nên $S_n$ nguyên dương với mọi n là số tự nhiên.

Tương tự câu a) ta có: $S_{n+3} = 18S_{n+2} - S_{n+1} = 17S_{n+2} + S_{n+2} - S_{n+1}$

$= 17S_{n+2} + (18S_{n+1} - S_n) - S_{n+1} = 17(S_{n+2} + S_{n+1}) - S_n$

mà $S_1 = 18$, $S_2 = 322$, $S_3 = 5778$ không chia hết cho 17 nên $S_4$, $S_5$,…. đều không chia hết cho 17 $\Rightarrow$ $S_n$ không chia hết cho 17với mọi n là số tự nhiên.

## *Dạng 8:* Ứng dụng hệ thức Viét đảo vào bài tập

***Ví dụ 1:*** Tìm hai số x và y biết

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$

**Giải:**

a) Đặt S = x + y; P = xy ta có hệ

$$\begin{cases} S = 3 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$$

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 2 = 0$

Giải phương trình ta được $x_1 = 1; x_2 = 2$. Vậy $(x ; y) \in \{(2;1);(1;2)\}$

b) Đặt S = x - y; P = xy ta có hệ

$$\begin{cases} S = 2 \\ S^2 + 2P = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 15 \end{cases}$$

Suy ra x + (-y) = 2 và x(-y) = -15 hay x và -y là nghiệm của phương trình

$X^2 - 2X - 15 = 0$ giải ra ta được $x_1 = 3; x_2 = -5$

Vậy $(x ; y) \in \{(3;5);(5;3)\}$

**Thực chất dạng này được ứng dụng vào giải hệ đối xứng hai ẩn.**

Ta xét tiếp ví dụ sau

***Ví dụ 2:*** Giải hệ

a) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x+xy+y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy(x+1)(y-2)=-2 \\ x^2+x+y^2-2y=1 \end{cases}$

**Giải**:

a) Đặt S = x + y; P = xy ta có hệ

$\begin{cases} S^2-P=4 \\ S+P=2 \end{cases} \Leftrightarrow$ S = 2 , P = 0 hoặc S = -3; P = 5

Suy ra x, y là nghiệm phương trình $X^2 - 2X = 0$ hoặc $X^2 + 3X + 5 = 0$

Vậy (x ; y) $\in \{(0;2);(2;0)\}$

b) Đặt $x^2 + x = S$; $y^2 - 2y = P$ ta đưa về hệ đối xứng hai ẩn sau:

$\begin{cases} SP=-2 \\ S+P=1 \end{cases}$ suy ra S, P là nghiệm phương trình $X^2 - X - 2 = 0$

Giải ra ta được $x_1 = -1$; $x_2 = 2$

Từ đó ta có $\begin{cases} x^2+x=-1 \\ y^2-2y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2+x=2 \\ y^2-2y=-1 \end{cases}$ Vậy (x ; y) $\in \{(1;1);(-2;1)\}$

**Hệ thức Viét đảo còn được ứng dụng vào chứng minh bất đẳng thức, vận dụng vào các bài toán chứng minh khác** . Ta xét các ví dụ sau

***<u>Ví dụ 3</u>***: Cho ba số a, b, c thoả mãn điều kiện sau:

a > 0, $a^2 = bc$, a + b + c = abc. Chứng minh rằng: a $\geq \sqrt{3}$, b > 0, c > 0 và $b^2 + c^2 \geq 2a^2$

**<u>Giải:</u>**

Từ a + b + c = abc $\Rightarrow$ b + c = a(bc - 1) = a( $a^2$ - 1) mà bc = $a^2$ nên b, c là nghiệm của phương trình: $X^2 - (a^3 - a)X + a^2 = 0$

Ta có $\Delta = (a^3 - a)^2 - 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - 1)^2 \geq 4 \Leftrightarrow a^2 \geq 3 \Leftrightarrow a \geq \sqrt{3}$ ( vì a > 0)

Khi đó b+ c = a( $a^2$ - 1) > 0 và bc = $a^2$ > 0 nên b > 0, c > 0.

***<u>Ví dụ 4</u>***: Cho a, b, c là ba số khác nhau từng đôi một và c $\neq 0$. Chứng minh rằng nếu hai phương trình $x^2 + ax + bc = 0$ (1) và $x^2 + bx + ca = 0$ (2) có đúng một nghiệm chung thì nghiệm khác của các phương trình đó thoả mãn phương trình $x^2 + cx + ab = 0$

**<u>Giải:</u>**

Giả sử (1) có nghiệm $x_0$ , $x_1$ và (2) có nghiệm $x_0$ , $x_2$ ( $x_1 \neq x_2$). Ta có:

$\begin{cases} x_0^2+ax_0+bc=0 \\ x_0^2+bx_0+ca=0 \end{cases} \Rightarrow$ ( a - b)($x_0$ - c) = 0 $\Rightarrow$ $x_0$ = c ( vì a $\neq$ b)

Áp dụng định lý Viét vào phương trình (1) và phương trình (2) ta có:

$$\begin{cases} x_0+x_1=-a \\ x_0x_1=bc \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_0+x_2=-b \\ x_0x_2=ca \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=b \\ x_2=a \\ a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-c \\ x_1x_2=ab \end{cases}$$

Do đó $x_1$, $x_2$ là nghiệm của pt: $x^2 + cx + ab = 0$ ( pt này luôn có nghiệm vì $\Delta = c^2 - 4ab = (a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 > 0$)

## <u>C. Bài tập áp dụng:</u>

Bài tập 1: Không giải phương trình hãy xét dấu các nghiệm của phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 4 = 0$ b) $2x^2 - \sqrt{3}x + 4 = 0$

Bài tập 2: Tìm m để phương trình $x^4 - mx^2 + m - 1 = 0$ có:

a) Bốn nghiệm phân biệt
b) Ba nghiệm phân biệt
c) Hai nghiệm phân biệt

Bài tập 3: Cho phương trình $x^2 + 4x + 1 = 0$ có hai nghiệm là $x_1$ và $x_2$

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^2 - x_2^2$.

Bài tập 4: Cho phương trình $x^2 - mx + 6 = 0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thoả mãn

a) $x_1 - x_2 = 1$ b) $x_1^2 + x_2^2 = 37$

Bài tập 5: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x - m = 0$

a) Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm
b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m
c) Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm âm
d) Tìm m để phương trình có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau.
e) Tìm m để $|x_1 - x_2|$ nhỏ nhất.

Bài tập 6: Giải hệ

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy(x+y) = 84 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - (x+3y) = 12 \\ xy(x-1)(y-3) = 20 \end{cases}$

Bài tập 7: Cho phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$. Tính giá trị biểu thức

$A = \sqrt{x_1^4 + 11x + 29} - 2x_1$ ($x_1$ là một nghiệm của phương trình )

Bài tập 8:

Cho pt: $x^2 - 3x - 1 = 0$ với $|x_1| < |x_2|$. Tính giá trị biểu thức $B = \sqrt{x_1^4 - 25x_1 - 5} + 2x_1$

Bài tập 9:

Tìm p, q để phương trình $x^2 + px + q = 0$ có các nghiệm $x_1$, $x_2$ thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases}$$

Bài tập 10:

Xác định a để PT $x^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm $x_1$, $x_2$ thoả mãn: $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7$

Bài tập 11:

Giả sử PT $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm dương $x_1$, $x_2$. Chứng minh rằng phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ có hai nghiệm dương $x_3$, $x_4$ và $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$