

www.thuvienhoclieu.com
DẠNG TOÁN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI
VÀ ỨNG DỤNG CỦA HỆ THỨC VI-ÉT

Câu 1: Cho phương trình: $x^2 - 5x + m = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình trên khi $m = 6$.

b) Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$|x_1 - x_2| = 3.$$

Đáp án:

a) Với $m = 6$, ta có phương trình: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 6 = 1$. Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 3$;
 $x_2 = 2$.

b) Ta có: $\Delta = 25 - 4 \cdot m$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{25}{4}$ (*)

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 5$ (1); $x_1 x_2 = m$ (2).

Mặt khác theo bài ra thì $|x_1 - x_2| = 3$ (3). Từ (1) và (3) suy ra $x_1 = 4$;
 $x_2 = 1$ hoặc $x_1 = 1$; $x_2 = 4$ (4)

Từ (2) và (4) suy ra: $m = 4$. Thử lại thì thỏa mãn.

Câu 2: Cho phương trình ẩn x : $x^2 - 2mx + 4 = 0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho khi $m = 3$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$.

Đáp án:

a) Với $m = 3$ ta có phương trình: $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Giải ra ta được hai nghiệm: $x_1 = 3 + \sqrt{5}$; $x_2 = 3 - \sqrt{5}$.

b) Ta có: $\Delta' = m^2 - 4$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$ (*)

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1 x_2 = 4$.

Suy ra: $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$

$\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow$
 $4m^2 - 8 + 4m = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -2 \end{cases}$.

Đối chiếu với điều kiện (*) ta thấy chỉ có nghiệm $m_2 = -2$ thỏa mãn.
Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 3: Cho phương trình ẩn x : $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 .

b) Tìm các giá trị của m để: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

Đáp án:

a) Ta có $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo định lý Vi-ét thì: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1 \cdot x_2 = -1$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2 = 7$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 3 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 4: Cho phương trình ẩn x : $x^2 - x + 1 + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho với $m = 0$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1x_2 \cdot (x_1x_2 - 2) = 3(x_1 + x_2)$.

Đáp án:

a) Với $m = 0$ ta có phương trình $x^2 - x + 1 = 0$

Vì $\Delta = -3 < 0$ nên phương trình trên vô nghiệm.

b) Ta có: $\Delta = 1 - 4(1 + m) = -3 - 4m$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow 4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{4}$

(1).

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1 \cdot x_2 = 1 + m$

Thay vào đẳng thức: $x_1x_2 \cdot (x_1x_2 - 2) = 3(x_1 + x_2)$, ta được:

$(1 + m)(1 + m - 2) = 3 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Đối chiếu với điều kiện (1) suy ra chỉ có $m = -2$ thỏa mãn.

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - 6x + m = 0$.

a) Với giá trị nào của m thì phương trình có 2 nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$

Đáp án:

a) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi: $m < 0$

b) Phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 9 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 9$

Theo hệ thức Viét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = m & (2) \end{cases}$$

Theo yêu cầu của bài ra $x_1 - x_2 = 4$ (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow x_1 = 5$, thay vào (1) $\Rightarrow x_2 = 1$

Suy ra $m = x_1 \cdot x_2 = 5$ (thỏa mãn)

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 6: Cho phương trình: $x^2 + 2(m + 1)x + m^2 = 0$. (1)

a) Giải phương trình với $m = 5$

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng -2 .

Đáp án:

a) Với $m = 5$ ta có phương trình: $x^2 + 12x + 25 = 0$.

$$\Delta' = 6^2 - 25 = 36 - 25 = 11$$

$$x_1 = -6 - \sqrt{11}; \quad x_2 = -6 + \sqrt{11}$$

b) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2} \quad (*)$$

$$\text{Phương trình có nghiệm } x = -2 \Leftrightarrow 4 - 4(m + 1) + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện } (*))$$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = 4$ là các giá trị cần tìm.

Câu 7: Cho phương trình bậc 2: $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$.

a) Tìm m , biết phương trình có nghiệm $x = 0$.

b) Xác định giá trị của m để phương trình có tích 2 nghiệm bằng 5, từ đó hãy tính tổng 2 nghiệm của phương trình.

Đáp án:

a) Phương trình có nghiệm $x = 0$ nên: $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

b) Phương trình có 2 nghiệm khi:

$$\Delta' = m^2 - (m - 1)(m + 1) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - m^2 + 1 \geq 0, \text{ đúng } \forall m.$$

$$\text{Ta có } x_1 \cdot x_2 = 5 \Leftrightarrow \frac{m + 1}{m - 1} = 5 \Leftrightarrow m + 1 = 5m - 5$$

$$\Leftrightarrow 4m = 6 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Với } m = \frac{3}{2} \text{ ta có phương trình: } \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

Khi đó $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 6$

Câu 8: Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x - m - 3 = 0$ (1)

a) Giải phương trình với $m = -3$

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc giá trị của m .

Đáp án:

a) Với $m = -3$ ta có phương trình: $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x + 8) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$$

b) Phương trình (1) có 2 nghiệm khi:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + (m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m + 4 > 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \text{ đúng } \forall m$$

Chúng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\forall m$

Theo hệ thức Vi ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) & (1) \\ x_1 - x_2 = -m - 3 & (2) \end{cases}$$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$

$$\Leftrightarrow 4(m - 1)^2 + 2(m + 3) = 10$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 6m + 10 = 10 \Leftrightarrow 2m(2m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

c) Từ (2) ta có $m = -x_1x_2 - 3$ thế vào (1) ta có:

$$x_1 + x_2 = 2(-x_1x_2 - 3 - 1) = -2x_1x_2 - 8$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + 8 = 0$$

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc m .

Câu 9: Cho phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên.

Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$

Đáp án:

a) Ta thấy: $a = 1; b = -2m; c = -1$, rõ ràng: $a \cdot c = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$

\Rightarrow phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b) Vì phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt. Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 7$$

$$\Leftrightarrow (2m)^2 - 3 \cdot (-1) = 7 \Leftrightarrow 4m^2 = 4 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Câu 10: Cho phương trình ẩn x: $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 5m = 0$

a) Giải phương trình với $m = -2$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm sao cho tích các nghiệm bằng 6.

Đáp án:

a) $m = -2$, phương trình là: $x^2 + 3x - 6 = 0$; $\Delta = 33 > 0$, phương trình

$$\text{có hai nghiệm phân biệt } x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } \Delta &= [-(2m+1)]^2 - 4(m^2 + 5m) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 20m \\ &= 1 - 16m. \end{aligned}$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm} \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 16m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{16}$$

Khi đó hệ thức Vi-ét ta có tích các nghiệm là $m^2 + 5m$.

Mà tích các nghiệm bằng 6, do đó $m^2 + 5m = 6$

$$\Leftrightarrow m^2 + 5m - 6 = 0$$

Ta thấy $a + b + c = 1 + 5 + (-6) = 0$ nên $m_1 = 1$; $m_2 = -6$.

Đối chiếu với điều kiện $m \leq \frac{1}{16}$ thì $m = -6$ là giá trị cần tìm.

Câu 11: Cho phương trình: $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn đẳng thức $x_1^2 + x_2^2 = 5(x_1 + x_2)$

Đáp án:

$$\text{a) Khi } m = 2, \text{ PT đã cho trở thành: } x^2 - 4x + 3 = 0$$

Ta thấy: $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = 3$

b) Điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm là:

$$\Delta = b^2 - ac \geq 0 \Leftrightarrow 2^2 - (m+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3 \quad (1)$$

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m + 1 \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 5(x_1 + x_2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 5(x_1 + x_2)$$

$$\Leftrightarrow 4^2 - 2(m + 1) = 5 \cdot 4 \Leftrightarrow 2(m + 1) = -4 \Leftrightarrow m = -3$$

Kết hợp với điều kiện (1), ta có $m = -3$

Câu 12: Cho phương trình $x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0 \quad (1)$

a) Giải phương trình với $m = 1$

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có một nghiệm $x = -2$

c) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 24$

Đáp án:

$$x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0 \quad (1)$$

a) Khi $m = 1$, ta có phương trình $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$a + b + c = 1 - 6 + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 5$$

b) Phương trình (1) có nghiệm $x = -2$ khi:

$$(-2)^2 - (m + 5) \cdot (-2) - m + 6 = 0 \Leftrightarrow 4 + 2m + 10 - m + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -20$$

$$\begin{aligned} c) \Delta &= (m + 5)^2 - 4(-m + 6) = m^2 + 10m + 25 + 4m - 24 \\ &= m^2 + 14m + 1 \end{aligned}$$

Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta = m^2 + 14m + 1 \geq 0 \quad (*)$

Với điều kiện trên, áp dụng định lí Vi-ét, ta có:

$S = x_1 + x_2 = m + 5; P = x_1 \cdot x_2 = -m + 6$. Khi đó:

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 24 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 24$$

$$\Leftrightarrow (-m + 6)(m + 5) = 24 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3; m = -2.$$

Giá trị $m = 3$ thoả mãn, $m = -2$ không thoả mãn điều kiện. (*)

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 13: Tìm m để phương trình ẩn x sau đây có ba nghiệm phân biệt:

$$x^3 - 2mx^2 + (m^2 + 1)x - m = 0 \quad (1).$$

Đáp án: (1) $\Leftrightarrow x^3 - 2mx^2 + m^2x + x - m = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 2mx + m^2) + x - m = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - m)^2 + (x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - m)(x^2 - mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - mx + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt khác m .

Để thấy $x = m$ không là nghiệm của (2). Vậy (2) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta = m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}.$$

Vậy các giá trị m cần tìm là: $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$

Câu 14: Cho phương trình $2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$ với m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn

$$4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 1.$$

Đáp án:

a) Với $m = 2$, ta có phương trình: $2x^2 + 3x + 1 = 0$. Các hệ số của phương trình thoả mãn $a - b + c = 2 - 3 + 1 = 0$ nên phương trình có các nghiệm: $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}$.

b) Phương trình có biệt thức $\Delta = (2m - 1)^2 - 4.2.(m - 1) = (2m - 3)^2 \geq 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m .

Theo định lý Viet, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2m - 1}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m - 1}{2} \end{cases}.$$

Điều kiện đề bài $4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 1 \Leftrightarrow 4(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 = 1$. Từ đó ta có: $(1 - 2m)^2 - 3(m - 1) = 1 \Leftrightarrow 4m^2 - 7m + 3 = 0$.

Phương trình này có tổng các hệ số $a + b + c = 4 + (-7) + 3 = 0$ nên phương trình này có các nghiệm $m_1 = 1, m_2 = \frac{3}{4}$.

Vậy các giá trị cần tìm của m là $m = 1, m = \frac{3}{4}$.

Câu 15: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + px + q = 0$ biết $p + q = 198$.

Đáp án:

Phương trình có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow p^2 + 4q \geq 0$; gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm.

- Khi đó theo hệ thức Viét có $x_1 + x_2 = -p$ và $x_1 x_2 = q$

mà $p + q = 198 \Rightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 198$

$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 199 = 1 \cdot 199 = (-1)(-199)$ (Vì $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$)

Nên ta có :

$x_1 - 1$	1	-1	199	-199
$x_2 - 1$	199	-199	1	-1
x_1	2	0	200	-198
x_2	200	-198	2	0

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên:

(2; 200); (0; -198); (200; 2); (-198; 0)

Câu 16: Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ với m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m = 3$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 - 2x_2 + x_1 x_2 = -12$.

Đáp:

a) Khi $m = 3$ phương trình trở thành $x^2 - 2x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2.$$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 1 - (m - 3) > 0$

$$\Leftrightarrow m < 4.$$

Khi đó theo định lí Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = 2$ (1) và $x_1 x_2 = m - 3$ (2).

Điều kiện bài toán $x_1^2 - 2x_2 + x_1 x_2 = -12 \Leftrightarrow x_1(x_1 + x_2) - 2x_2 = -12$

$$\Leftrightarrow 2x_1 - 2x_2 = -12 \text{ (do (1))} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = -6 \text{ (3)}.$$

Từ (1) và (3) ta có: $x_1 = -2, x_2 = 4$. Thay vào (2) ta được:

$$(-2) \cdot 4 = m - 3 \Leftrightarrow m = -5, \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy $m = -5$.

Câu 17: Cho phương trình $x^2 + ax + b + 1 = 0$ với a, b là tham số.

- a) Giải phương trình khi $a = 3$ và $b = -5$.
b) Tìm giá trị của a, b để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^3 - x_2^3 = 9 \end{cases}$$

Đáp án:

a) Khi $a = 3$ và $b = -5$ ta có phương trình: $x^2 + 3x - 4 = 0$.
Do $a + b + c = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = -4$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow$

$$\Delta = a^2 - 4(b+1) > 0 \quad (*)$$

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = b + 1 \end{cases} \quad (1).$$

Bài toán yêu cầu
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^3 - x_2^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ (x_1 - x_2)^3 + 3x_1 x_2 (x_1 - x_2) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases} \quad (2).$$

Từ hệ (2) ta có: $(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1 x_2 = 3^2 + 4(-2) = 1$, kết hợp

với (1) được
$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, b = -3 \\ a = -1, b = -3 \end{cases}$$

Các giá trị này đều thỏa mãn điều kiện (*) nên chúng là các giá trị cần tìm.

Câu 18: Cho phương trình ẩn x : $x^2 - x + m = 0$ (1)

- a) Giải phương trình đã cho với $m = 1$.
b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $(x_1 x_2 - 1)^2 = 9(x_1 + x_2)$.

Đáp án:

a) Với $m = 1$, ta có phương trình: $x^2 - x + 1 = 0$

Vì $\Delta = -3 < 0$ nên phương trình trên vô nghiệm.

b) Ta có: $\Delta = 1 - 4m$. Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4} \quad (1).$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1 \cdot x_2 = m$

Thay vào đẳng thức: $(x_1 x_2 - 1)^2 = 9(x_1 + x_2)$, ta được:

$$(m-1)^2 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 4 \end{cases} \dots$$

Đối chiếu với điều kiện (1) suy ra chỉ có $m = -2$ thỏa mãn.

Câu 19: Cho phương trình ẩn x : $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 .

b) Tìm các giá trị của m để: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

Đáp án:

a) Ta có $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo định lý Vi-ét thì: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1 \cdot x_2 = -1$. Ta có: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2 = 7 \Rightarrow 4m^2 + 3 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Câu 20: Cho phương trình $2x^2 - (m+3)x + m = 0$ (1) với m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Chứng tỏ phương trình (1) có nghiệm với mọi giá trị của m . Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = |x_1 - x_2|$.

Đáp án:

a) Với $m = 2$ phương trình trở thành $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 \text{ nên phương trình có hai nghiệm } x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}.$$

b) Phương trình có biệt thức

$$\Delta = (m+3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot m = m^2 - 2m + 9 = (m-1)^2 + 8 > 0 \text{ với mọi } m.$$

Do đó phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó theo định lý

$$\text{Viết thì } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+3}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Biểu thức } A = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{m+3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{m}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 - 2m + 9} = \frac{1}{2} \sqrt{(m-1)^2 + 8}.$$

Do $(m-1)^2 \geq 0$ nên $\sqrt{(m-1)^2 + 8} \geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, suy ra $A \geq \sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\sqrt{2}$, đạt được khi $m = 1$.

Câu 21: Cho phương trình $x^2 + (2m + 1)x + m^2 + 1 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm âm.

Đáp án:

a) Khi $m = 1$ ta có phương trình: $x^2 + 3x + 2 = 0$

Vì $a = 1$; $b = 3$; $c = 2 \Rightarrow a - b + c = 0$

Vậy phương trình có $x_1 = -1$; $x_2 = -2$

b) Phương trình (1) có 2 nghiệm âm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 4(m^2+1) \geq 0 \\ -(2m+1) < 0 \\ m^2+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m-3 \geq 0 \\ 2m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{4} \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{4}$$

Câu 22: Cho phương trình $x^2 + 2(m - 1)|x| + m + 1 = 0$ với m là tham số.

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Đáp án: Đặt $|x| = t$, được $t^2 + 2(m - 1)t + m + 1 = 0$ (1)

Phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt \Leftrightarrow (1) có 2 nghiệm khác dấu hoặc (1) có nghiệm kép $t > 0$.

+) (1) Có 2 nghiệm khác dấu $\Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$

$$+) \Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$$

Thay vào (1) để xét thì $m = 0$ thỏa mãn, $m = 3$ bị loại.

Vậy $m < -1$ hoặc $m = 0$.

Câu 23: Cho phương trình: $(x^2 - x - m)(x - 1) = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Đáp án:

a) Với $m = 2$, ta có phương trình

$$(x^2 - x - 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1; x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $x = \pm 1; x = 2$

b) Vì phương trình (1) luôn có nghiệm $x_1 = 1$ nên phương trình (1) có 2 đúng nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

- Hoặc phương trình $f(x) = x^2 - x - m = 0$ có nghiệm kép khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4m = 0 \\ 1 - 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$$

- Hoặc phương trình $f(x) = x^2 - x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$m = -\frac{1}{4}; m = 0.$$

Câu 24: Cho phương trình: $x^4 - 5x^2 + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi $m = 4$.

b) Tìm m để phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Đáp án:

a) Với $m = 4$ ta có $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Đặt $x^2 = t$, với $t \geq 0$ ta có pt $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1; t_2 = 4$

Từ đó, ta được:
$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x = \pm 1; x = \pm 2$.

b) $x^4 - 5x^2 + m = 0$ (1) có dạng $f(y) = y^2 - 5y + m = 0$ (2)

(với $y = x^2; y \geq 0$)

Phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt \Leftrightarrow phương trình (2):

1) Hoặc có nghiệm kép khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{25}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{25}{4}$.

2) Hoặc có 2 nghiệm khác dấu $\Leftrightarrow m < 0$.

Vậy $m = \frac{25}{4}$ hoặc $m < 0$ thì phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt

Câu 25: Cho phương trình: $x^2 - 2x + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi $m = -3$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1.$$

Đáp án:

a) Khi $m = -3$, ta có phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$

Vì $a - b + c = 1 - (-2) + (-3) = 0$ nên $x_1 = -1; x_2 = 3$

b) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

Khi đó theo hệ thức Viét, ta có: $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1 x_2 = m$ (1)

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = 1 \quad (2)$$

Từ (1), (2), ta được: $4 - 2m = m^2 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 4 = 0$

$\Delta' = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{5}$ nên $m = -1 + \sqrt{5}$ (loại);

$$m = -1 - \sqrt{5} \quad (T/m \text{ vì } m \leq 1).$$

Vậy giá trị m cần tìm là: $m = -1 - \sqrt{5}$

Câu 26: Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 6m = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$

b) Tìm m để phương trình (1) có 1 nghiệm gấp 2 lần nghiệm kia.

Đáp án:

a) Khi $m = 2$, phương trình (1) trở thành: $x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Delta' = 16$, pt đã cho có 2 nghiệm: $x = -2; x = 6$.

c) Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m$
 $\Leftrightarrow m \leq -6; m \geq 0$ (2)

Khi đó, theo hệ thức Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = -6m \end{cases}$ (3)

Phương trình có 1 nghiệm gấp 2 lần nghiệm kia khi và chỉ khi:

$$x_1 = 2x_2; x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow (x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = 0 \Leftrightarrow 5x_1 x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x_1 x_2 - 2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = 0 \Leftrightarrow 9x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2)^2 = 0 \quad (4)$$

Từ (3), (4), ta có: $-54m - 8m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = -\frac{27}{4}$ (TMĐK (2))

Vậy các giá trị m cần tìm là $m = 0; m = -\frac{27}{4}$.

Câu 27: Cho phương trình: $(1 + \sqrt{3})x^2 - 2x + 1 - \sqrt{3} = 0$ (1)

a) Chứng tỏ phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

b) Gọi 2 nghiệm của phương trình (1) là x_1, x_2 . Lập một phương trình bậc 2 có 2 nghiệm là $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

Đáp án :

a) Do $ac = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2 < 0$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

b) Vì x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1) nên theo hệ thức Vi-et, ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{1 + \sqrt{3}}, \quad x_1 x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}.$$

$$\text{Do đó: } S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2}{1 - \sqrt{3}} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{-2} = -(1 + \sqrt{3}).$$

$$\text{và } P = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{-2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -(2 + \sqrt{3}).$$

Vậy phương trình bậc 2 cần tìm là: $X^2 + (1 + \sqrt{3})X - (2 + \sqrt{3}) = 0$.

Câu 28: Cho phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ (1) (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) với $m = 3$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân

biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}$

Đáp án:

a) Với $m = 3$ ta có PT $(3+1)x^2 - 2(3-1)x + 3 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0$$

Suy ra PT có nghiệm kép $x = 1/2$

b) Để PT có 2 nghiệm phân biệt thì

$$\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 2m + 1 - (m+1)(m-2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 2m + 1 - m^2 + m + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq -1 \end{cases} (*)$$

Mà theo ĐL Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1}$; $x_1 x_2 = \frac{m-2}{m+1}$

Từ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}$ ta có: $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{m+1} : \frac{m-2}{m+1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{m+1} \cdot \frac{m+1}{m-2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{m-2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4m - 4 = 3m - 6 \Leftrightarrow m = -2 \text{ thỏa mãn } (*)$$

Vậy m phải tìm là -2.

Câu 29: Cho phương trình: $mx^2 - (2m + 3)x + m - 4 = 0$

- Tìm m để pt có 2 nghiệm phân biệt?
- Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số m.

Đáp án:

- Phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (2m+3)^2 - 4m(m-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 28m+9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{9}{28} \end{cases}$$

Vậy với $0 \neq m > -\frac{9}{28}$ thì pt trên có 2 nghiệm phân biệt.

$$\text{b) Khi đó pt có 2 nghiệm thỏa mãn: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+3}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m-4}{m} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 + \frac{3}{m} \\ x_1 x_2 = 1 - \frac{4}{m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_1 + x_2) = 8 + \frac{12}{m} \\ 3x_1x_2 = 3 - \frac{12}{m} \end{cases} \text{ Cộng 2 vế pt trên ta được:}$$

$4(x_1+x_2) + 3x_1x_2=11$. Đây chính là hệ thức cần tìm.