MỘT SỐ DẠNG TOÁN ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ VI-ÉT

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. Định lí Vi-ét:

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \quad \left[(a \neq 0 \text{ và } \Delta \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \right]$$

* Hệ quả: PT bậc 2: $ax^2 + bx + c = 0$ (*)

- Nếu $a + b + c = 0$ thì (*) có 1 nghiệm là $x_1 = 1$, nghiệm kia là $x_2 = \dfrac{c}{a}$

- Nếu $a - b + c = 0$ thì (*) có 1 nghiệm là $x_1 = -1$; nghiệm kia là $x_2 = \dfrac{-c}{a}$

2. Định lý đảo:

Nếu có 2 số x_1, x_2 thoả mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1.x_2 = P \end{cases}$ thì chúng là nghiệm số của phương trình:

$t^2 - st + p = 0$

(Điều kiện $\exists$ 2 số x_1, x_2 là $s^2 - 4p \geq 0$)

Chú ý:

* Trước khi áp dụng hệ thức Viet cần tìm điều kiện để phương trình có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 (\Delta' \geq 0) \end{cases}$

* $a + b + c = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $a - b + c = 0 \Leftrightarrow x = -1$

* Nếu có: $x = \alpha$; $y = \beta$ là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ thì α, β là nghiệm của phương trình: $t^2 - St + P = 0$.

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ ỨNG DỤNG ĐỊNH LÍ VI-ÉT

1. Dạng 1: Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai

1.1. Dạng đặc biệt: Phương trình bậc hai có một nghiệm là 1 hoặc – 1

Cách làm: *Xét tổng a + b + c hoặc a – b + c*

Ví dụ 1: Nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $3x^2+8x-11=0$ b) $2x^2+5x+3=0$

Giải: a) Ta có: $a+b+c=3+8+(-11)=0$ nên phương trình có một nghiệm là $x_1=1$, nghiệm còn lại là $x_2=-\frac{c}{a}=\frac{11}{3}$

b) Ta có: $a-b+c=2-5+3=0$ nên phương trình có một nghiệm là $x_1=-1$, nghiệm còn lại là $x_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$.

1.2. Cho phương trình bậc hai, có một hệ số chưa biết, cho trước một nghiệm, tìm nghiệm còn lại và chỉ ra hệ số chưa biết của phương trình:

Ví dụ 2: a) Phương trình $x^2-2px+5=0$ có một nghiệm bằng 2, tìm p và nghiệm còn lại của phương trình.

b)Phương trình $x^2+5x+q=0$ có một nghiệm bằng 5, tìm q và nghiệm còn lại của phương trình

c) Phương trình $x^2-7x+q=0$ biết hiệu hai nghiệm bằng 11. Tìm q và hai nghiệm của phương trình

d) Phương trình $x^2-qx+50=0$ có hai nghiệm trong đó một nghiệm gấp đôi nghiệm kia, tìm q và hai nghiệm đó.

Giải:

a) Thay $x_1=2$ vào phương trình ta được $4-4p+5=0$

$\Rightarrow 9-4p=0 \Rightarrow p=\frac{9}{4}$

Phương trình đã cho trở thành $x^2-\frac{9}{2}x+5=0$

Từ $x_1x_2=5 \Rightarrow x_2=\frac{5}{x_1}=\frac{5}{2}$ (hoặc $x_1+x_2=\frac{9}{2} \Rightarrow x_2=\frac{9}{2}-x_1=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$)

Câu b tương tự

Giả sử hai nghiệm của phương trình là x_1,x_2 có vai trò như nhau

c) Theo đề bài ta có $x_1-x_2=11$

Theo định lí Vi-et ta có $x_1+x_2=7$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1-x_2=11 \\ x_1+x_2=7 \end{cases}$ ta được $x_1=9, x_2=-2$

q = $x_1x_2 = 9(-2) = -18$

d) Ta có $x_1 = 2x_2$. Theo định lí Vi-et ta có $x_1x_2 = 50 \Rightarrow 2x_2{}^2 = 50 \Leftrightarrow x_2{}^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = 5 \\ x_2 = -5 \end{array}\right.$

Với $x_2 = 5$ thì $x_1 = 10$, $q = x_1 + x_2$ = 10 + 5 = 15

Với $x_2 = -5$ thì $x_1 = -10$, $q = x_1 + x_2$ = (- 10) + (- 5) = - 15.

* **Bài tập áp dụng:**

Bài 1: Tìm nghiệm của phương trình:

a) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ b) $x^2 - (m+5)x + m + 4 = 0$

Bài 2: Xác định m và tìm nghiệm còn lại của phương trình

a) $x^2 + mx - 35 = 0$ biết một nghiệm bằng – 5

b) $2x^2 - (m+4)x + m = 0$ biết một nghiệm bằng – 3

c) $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ biết một nghiệm bằng 3

2. Dạng 2: Lập Phương trình bậc hai

2.1.Lập phương trình bậc hai biết hai nghiệm

Ví dụ 1: Lập một phương trình bậc hai chứa hai nghiệm là 3 và 2

Giải:

Theo Định lí Vi-et ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 3 + 2 = 5 \\ P = x_1x_2 = 3.2 = 6 \end{cases}$

Vậy 3 và 2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$ *hay* $x^2 - 5x + 6$ *=0.*

Ví dụ 2: Cho $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$; $x_2 = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$

Hãy lập phương trình bậc hai có ngiệm: x_1; x_2

Giải: Ta có $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$; $x_2 = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

Nên $x_1.x_2 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} . \dfrac{1}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$

$x_1 + x_2 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \dfrac{1}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Vậy phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 là $x^2 - \sqrt{3}x + \dfrac{1}{2} = 0$

Hay $2x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

2.2.Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm thoả mãn biểu thức chứa hai nghiệm của một phương trình cho trước

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$.

Hãy lập phương trình bậc hai có các nghiệm $y_1 = x_2 + \dfrac{1}{x_1}; y_2 = x_1 + \dfrac{1}{x_2}$

- Nhận xét: bài toán dạng này có hai các giải:

<u>Cách 1:</u>

+ Tính trực tiếp $y_1; y_2$ bằng cách: Tìm nghiệm $x_1; x_2$ của phương trình đã cho rồi thay vào biểu thức tính $y_1; y_2$

Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có $a + b + c = 1 + (-3) + 2 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = 2$

Ta có $y_1 = x_2 + \dfrac{1}{x_1} = 2 + \dfrac{1}{1} = 3; y_2 = x_1 + \dfrac{1}{x_2} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

+ Lập phương trình bậc hai biết hai nghiệm $y_1; y_2$ (dạng 2.1)

$S = y_1 + y_2 = 3 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$

$P = y_1 y_2 = 3.\dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$

Phương trình cần lập có dạng: $y^2 - Sy + P = 0$ hay $y^2 - \dfrac{9}{2}y + \dfrac{9}{2} = 0$

(hoặc $2y^2 - 9y + 9 = 0$)

<u>Cách 2:</u>

Không tính $y_1; y_2$ mà áp dụng Định lí Vi-et tính $S = y_1 + y_2; P = y_1 y_2$ sau đó lập phương trình bậc hai có các nghiệm là $y_1; y_2$

Theo Định lí Vi-et ta có:

$$S = y_1 + y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1} + x_1 + \frac{1}{x_2} = (x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$(x_2 + \frac{1}{x_1}).(x_1 + \frac{1}{x_2}) = x_1x_2 + 1 + 1 + \frac{1}{x_1x_2} = 2 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Phương trình cần lập có dạng: $y^2 - Sy + P = 0$ hay $y^2 - \frac{9}{2}y + \frac{9}{2} = 0$ (hoặc $2y^2 - 9y + 9 = 0$)

Ví dụ 2: Cho phương trình $3x^2 + 5x - 6 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ Hãy lập phương trình bậc hai có các nghiệm $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}; y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$

Nhận xét:

- Nếu làm theo Cách 1: Phương trình $3x^2 + 5x - 6 = 0$ có $\Delta = 5^2 - 4.3.(-6) = 97$ nên có hai nghiệm vô tỉ là:

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{97}}{6}; x_2 = \frac{-5 - \sqrt{97}}{6}$$

Việc tính $y_1; y_2$, S, P cũng phức tạp và mất nhiều thời gian

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2} = \frac{6}{5 + \sqrt{97}}; y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1} = \frac{6}{5 - \sqrt{97}}$$

$$S = y_1 + y_2 = -\frac{5}{6}; P = y_1y_2 = -\frac{1}{2}$$

Phương trình cần lập: $y^2 - Sy + P = 0$ hay $y^2 + \frac{5}{6}y - \frac{1}{2} = 0$

(hay $6y^2 + 5y - 3 = 0$)

- Cách 1 chỉ thích hợp khi phương trình ban đầu có nghiệm $x_1; x_2$ là hữu tỉ do đó nên chọn Cách 2 để việc tính toán đơn giản và nhanh hơn, cụ thể:

Theo Định lí Vi-et, ta có:

$$S = y_1 + y_2 = x_1 + \frac{1}{x_2} + x_2 + \frac{1}{x_1} = (x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{5}{3} + \frac{-\frac{5}{3}}{-2} = -\frac{5}{6}$$

$$P = y_1y_2 = (x_1 + \frac{1}{x_2}).(x_2 + \frac{1}{x_1}) = x_1x_2 + 1 + 1 + \frac{1}{x_1x_2} = -2 + 1 + 1 + \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Phương trình cần lập: $y^2 - Sy + P = 0$ hay $y^2 + \frac{5}{6}y - \frac{1}{2} = 0$ (hay $6y^2 + 5y - 3 = 0$)

Ví dụ 3: Tìm các hệ số p và q của phương trình: $x^2 + px + q = 0$ sao cho hai nghiệm x_1; x_2 của phương trình thoả mãn hệ: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases}$

Giải: Điều kiện $\Delta = p^2 - 4q \geq 0$ (*) ta có:

$x_1 + x_2 = -p$; $x_1.x_2 = q$. Từ điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)^2 = 25 \\ (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 25 \\ 5((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_1x_2) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^{'} - 4^{q} = 25 \\ p^2 - q = 7 \end{cases}$$

Giải hệ này tìm được: p = 1; q = - 6 và p = - 1; q = - 6

Cả hai cặp giá trị này đều thoả mãn (*)

*** Bài tập áp dụng:**

Bài 1: Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là:

a) 8 và -3

b) 36 và – 104

c) $1+\sqrt{2}$ và $1-\sqrt{2}$

d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ và $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - 5x - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Hãy lập phương trình bậc hai có các nghiệm $y_1 = x_1{}^4; y_2 = x_2{}^4$

Bài 3: Cho phương trình $x^2 - 2x - 8 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Hãy lập phương trình bậc hai có các nghiệm $y_1 = x_1 - 3; y_2 = x_2 - 3$

Bài 4: Lập phương trình bậc hai có các nghiệm bằng nghịch đảo các nghiệm của phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$

Bài 5: Cho phương trình $x^2 - 2x - m^2 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Hãy lập phương trình bậc hai có các nghiệm $y_1 = 2x_1 - 1; y_2 = 2x_2 - 1$

Bài 6: Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1{}^3 - x_2{}^3 = 26 \end{cases}$$

Hướng dẫn: - Giải hệ phương trình tìm $x_1; x_2$

- Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm $x_1; x_2$ tìm được.

3. Dạng 3: Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

Ví dụ 1: Tìm hai số a và b biết S = a + b = - 3, P = ab = - 4

Giải: Hai số a và b là nghiệm của phương trình $x^2+3x-4=0$

Giải phương trình trên ta được $x_1=1; x_2=-4$

Vậy nếu a = 1 thì b = - 4; nếu a = - 4 thì b = 1

* **Lưu ý:** không phải lúc nào ta cũng tìm được hai số thỏa mãn yêu cầu đề bài

Ví dụ 2: Tìm hai số a và b biết S = a + b = 3, P = ab = 6

Giải: Hai số a và b là nghiệm của phương trình $x^2-3x+6=0$

$\Delta = 3^2-4.1.6=9-24=-15<0$

Phương trình vô nghiệm nên không tồn tại hai số a và b thỏa mãn đề bài

* **Lưu ý:** Với trường hợp này ta cũng có thể nhận xét ngay

$S^2-4P=3^2-4.6=9-24=-15<0$ nên không tồn tại hai số a và b thỏa mãn yêu cầu đề bài mà chưa cần lập phương trình

*** Bài tập áp dụng:**

Bài 1: Tìm hai số biết tổng S = 9 và tích P = 20

Bài 2: Tìm hai số x, y biết:

a) x + y = 11; xy = 28 b) x – y = 5; xy = 66

Bài 3: Tìm hai số x, y biết: $x^2+y^2=25; xy=12$

4. Dạng 4: Dạng toán về biểu thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình bậc hai

*** Cách biến đổi một số biểu thức thường gặp:**

$$x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1{}^2+2x_1x_2+x_2{}^2)-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$
$$x_1{}^3+x_2{}^3=(x_1+x_2)(x_1{}^2-x_1x_2+x_2{}^2)=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]$$
$$x_1{}^4+x_2{}^4=(x_1{}^2)^2+(x_2{}^2)^2=(x_1{}^2+x_2{}^2)^2-2x_1{}^2x_2{}^2=[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-2x_1{}^2x_2{}^2$$
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

………..

Và tương tự học sinh có thể biến đổi được nhiều biểu thức theo $S=x_1+x_2; P=x_1x_2$

4.1 . Tính giá trị của biểu thức chứa nghiệm

Với dạng toán này ta không giải phương trình để tìm nghiệm mà biến đổi biểu thức cần tính giá trị theo tổng và tích các nghiệm, sau đó áp dụng Định lí Vi-et để tính

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2-8x+15=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ hãy tính

a) ${x_1}^2+{x_2}^2$ b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ c) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$

Giải:

Ta có $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=8; x_1x_2=\frac{c}{a}=15$

a) ${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=8^2-2.15=64-30=34$

b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{8}{15}$

c) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{x_1x_2}=\frac{34}{15}$

Nhận xét: Với dạng bài này ta không cần giải phương trình để tìm các nghiệm

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho phương trình $8x^2-72x+64=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ hãy tính

a) ${x_1}^2+{x_2}^2$ b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

Bài 2: Cho phương trình $x^2-14x+29=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ hãy tính

a) ${x_1}^3+{x_2}^3$ b) $\frac{1-x_1}{x_1}+\frac{1-x_2}{x_2}$

4.2. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình không phụ thuộc tham số

Ta lần lượt làm theo các bước sau:

+ Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm $x_1;x_2$ ($a\neq 0;\Delta\geq 0$)

+ Viết hệ thức $S=x_1+x_2;P=x_1x_2$

Nếu S và P không chứa tham số thì ta có hệ thức cần tìm

Nếu S và P chứa tham số thì khử tham số từ S và P sau đó đồng nhất

các vế ta được hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc tham số.

Ví dụ 1: Cho Phương trình $mx^2-(2m+3)x+m-4=0$ (m là tham số)

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa $x_1;x_2$ không phụ thuộc vào m

Giải:

a) Để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thì

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 28m+9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -\dfrac{9}{28} \end{cases}$$

b) Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2 = \dfrac{2m+3}{m} = 2+\dfrac{3}{m} (1) \\ x_1x_2 = \dfrac{m-4}{m} = 1-\dfrac{4}{m} (2) \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow \frac{3}{m} = x_1+x_2-2 \Rightarrow \frac{12}{m} = 4(x_1+x_2)-8 (3)$$
$$(2) \Rightarrow \frac{4}{m} = 1-x_1x_2 \Rightarrow \frac{12}{m} = 3-3x_1x_2 (4)$$

Từ (3) và (4) ta được: $4(x_1+x_2)-8=3-3x_1x_2$ hay $4(x_1+x_2)+3x_1x_2=11$

Ví dụ 2: Gọi $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $(m-1)x^2-2mx+m-4=0$

Chứng minh biểu thức $A=3(x_1+x_2)+2x_1x_2-8$ không phụ thuộc giá trị của m

Nhận xét:

Bài toán này cho trước biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình nhưng về nội dung không khác Ví dụ 9. Khi làm bài cần lưu ý:

+ Ta vẫn tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm

+ Biểu thức A có giá trị là một số xác định với mọi m thỏa mãn điều kiện

Cụ thể:

Để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thì

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ 5m-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \geq \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m-1} \\ x_1x_2=\dfrac{m-4}{m-1} \end{cases}$

Thay vào A ta được: $A=3(x_1+x_2)+2x_1x_2-8\ =3.\dfrac{2m}{m-1}+2.\dfrac{m-4}{m-1}-8=\dfrac{0}{m-1}=0$

Vậy $A=3(x_1+x_2)+2x_1x_2-8\ =0$ với $\forall m\neq 1$ và $m\geq\dfrac{4}{5}$

hay biểu thức A không phụ thuộc vào m

Bài tập áp dụng:

Bài 1 : Cho phương trình $x^2-(m+2)x+2m-1=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Hãy lập hệ thức liên hệ giữa $x_1;x_2$ sao cho chúng độc lập (không phụ thuộc) với m

Bài 2: (Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT năm học 2008 – 2009)

Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0(1)$

a) Giải phương trình (1) khi m = 7

b) Tìm tất cả các giá trị m để (1) có nghiệm

c) Tìm hệ thức kiên hệ giữa hai nghiệm $x_1;x_2$ của (1) sao cho hệ thức đó không phụ thuộc tham số m

4.3. Tìm giá trị của tham số thỏa mãn biểu thức nghiệm cho trước.

Cách làm:

+ Tìm điều kiện của tham số để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ (a ≠ 0 và Δ ≥ 0)

+ Từ biểu thức chứa nghiệm đã cho, áp dụng hệ thức Vi-et để giải phương trình tìm m

+ Đối chiếu với điều kiện để xác định m.

Ví dụ 1: Cho phương trình $mx^2-6(m-1)x+9(m-3)=0$ Tìm giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2=x_1x_2$

Giải:

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$

$$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'\geq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 0 \\ 9(m+1)\geq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 0 \\ m\geq -1 \end{cases}$$

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{6(m-1)}{m} \\ x_1x_2=\dfrac{9(m-3)}{m} \end{cases}$

Từ $x_1+x_2=x_1x_2 \Rightarrow \dfrac{6(m-1)}{m}=\dfrac{9(m-3)}{m}$

$$\Leftrightarrow 6m-6=9m-27 \Leftrightarrow 3m=21 \Leftrightarrow m=7\,(\text{TMĐK})$$

Vậy với m = 7 thì phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2=x_1x_2$

Ví dụ 2: Cho phương trình $mx^2-2(m-4)x+m+7=0$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1-2x_2=0$

Nhận xét:

Ví dụ này khác ví dụ 11 ở chỗ hệ thức không chứa sẵn x_1+x_2 và x_1x_2 nên ta không thể áp dụng ngay hệ thức Vi –et để tìm tham số m

Vấn đề đặt ra là ta phải biến đổi biểu thức đã cho về biểu thức chứa x_1+x_2 và x_1x_2 rồi tìm m như ví dụ trên.

<u>Giải:</u> Điều kiện để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ là: $\begin{cases} m\neq 0 \\ m\leq \dfrac{16}{15} \end{cases}$

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-(m-4)}{m} \\ x_1x_2=\dfrac{m+7}{m} \end{cases}$ (1)

Từ $x_1-2x_2=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=3x_2 \\ 2(x_1+x_2)=3x_1 \end{cases} \Rightarrow 2(x_1+x_2)^2=9x_1x_2$ (2)

Thế (1) vào (2) ta được phương trình $m^2+127m-128=0$, phương trình ẩn m

Có hai nghiệm là: $m_1=1; m_2=-128\,(\text{TMĐK})$

Vậy với $m=1$ hoặc $m=-128$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$

thỏa mãn $x_1-2x_2=0$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình $3x^2+4(m-1)x+m^2-4m+1=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$

Nhận xét: Với bài toán này ta chỉ cần xét điều kiện $\Delta'\geq 0$ vì $a=3\neq 0$

Hay $m^2+4m+1\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -2-\sqrt{3} \\ m\geq -2+\sqrt{3}\end{array}\right.(*)$

- Cần thêm điều kiện $P\neq 0$ để có $\frac{1}{x_1};\frac{1}{x_2}$ đó là $m\neq 2\pm\sqrt{3}$

- Một sai lầm học sinh hay mắc phải đó là biến đổi

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\Leftrightarrow 2(x_1+x_2)=(x_1+x_2)x_1x_2$

Hai vế của đẳng thức đều chứa x_1+x_2 nên rút gọn đi để được $2=x_1x_2$

Điều này sai vì có thể có trường hợp $x_1+x_2=0$

Do đó ta phải chuyển vế để đưa về dạng tích:

$$(x_1+x_2)(2-x_1x_2)=0$$
$$\Leftrightarrow 4(m-1)(-m^2+4m+5)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \\ m=5\end{array}\right.$$

- Ta thấy m = - 1 không thỏa mãn (*) nên loại

Vậy m = 1 hoặc m = 5 là giá trị cần tìm

Ví dụ 4: Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-5=0$

1. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm x_1; x_2 với mọi m.
2. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn điều kiện:

$$(x_1^2-2mx_1+2m-1)(x_2^2-2mx_2+2m-1)<0$$

Giải:

a) $\Delta' = m^2 - 4m + 6 = (m-2)^2 + 2 > 0, \forall m \Rightarrow$ pt luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 nên: $\begin{cases} x_1^2-2(m-1)x_1+2m-5=0 \\ x_2^2-2(m-1)x_2+2m-5=0\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2-2mx_1+2m-1=4-2x_1 \\ x_2^2-2mx_2+2m-1=4-2x_2\end{cases}$$

Theo định lí Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-2 \\ x_1.x_2 = 2m-5 \end{cases}$

Theo bài ra ta có :

$$(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1) < 0$$
$$\Leftrightarrow (4-2x_1).(4-2x_2) < 0 \Leftrightarrow 16 - 8(x_1 + x_2) + 4x_1x_2 < 0$$
$$\Leftrightarrow 16 - 8(2m-2) + 4(2m-5) < 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$$

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho phương trình $x^2 + (m-1)x + 5m - 6 = 0$. Tìm giá trị của tham số m để hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $4x_1 + 3x_2 = 1$

Bài 2: Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$. Tìm giá trị của tham số m để hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$

Bài 3: Cho phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 3 = 0$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$

Bài 4: Cho phương trình $x^2 + (2m-1)x - m = 0$

a) Chứng tỏ rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 - x_2 = 1$

Bài 5: Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$. Tìm giá trị của tham số m để hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$.

Bài 6: Cho phương trình $8x^2 - 8x + m^2 + 1 = 0$ (*) (x là ẩn số)

Định m để phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa điều kiện:

$$x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3$$

HD: $\Delta' = 16 - 8m^2 - 8 = 8(1 - m^2)$.

Khi m = ± 1 thì ta có $\Delta' = 0$ tức là : $x_1 = x_2$ khi đó $x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3$ thỏa

Điều kiện cần để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt là: $|m| < 1 \; hay \; -1 < m < 1$.

Khi $|m| < 1 \; hay \; -1 < m < 1$ ta có

$$x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3 \Leftrightarrow (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1.x_2)$$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) = (x_1^2 + x_2^2 + x_1.x_2)$(Do x_1 khác x_2)

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] = (x_1 + x_2)^2 - x_1.x_2 \Leftrightarrow S(S^2 - 2P) = S^2 - P$

$\Leftrightarrow 1(1^2 - 2P) = 1^2 - P$ (Vì S = 1)

$\Leftrightarrow P = 0 \Leftrightarrow m^2 + 1 = 0$ (vô nghiệm)

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = \pm 1$

Bài 7: Cho phương trình : $3x^2 - (3m-2)x - (3m+1) = 0$.

Tìm *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức : $3x_1 - 5x_2 = 6$

Bài 8: Cho phương trình $x^2 - (m+1)x + m - 5 = 0$

Xác định tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1^3 - x_2^3 = 32 \end{cases}$

HD: $\Delta = (m+1)^2 - 4(m-5) = (m-1)^2 + 20 > 0 \forall m$

Theo Vi- ét ta có S= $x_1 + x_2$ =m+1; P = $x_1.x_2$ = m – 5

Theo giả thiết: $x_1 - x_2 = 4$ và $x_1^3 - x_2^3 = 32$ nên ta biến đổi:

$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 4((x_1+x_2)^2 - x_1x_2) = 4((m+1)^2 - (m-5)) = 32$

$\Leftrightarrow m^2 + m + 6 = 8$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$

Cả hai giá trị của m=1 hoặc m=-2 đều thỏa mãn.

Bài 9: Định m để phương trình $x^2 - (m-1)x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạng huyền bằng 5.

HD: $(x_1^2 + x_2^2 = 5)$

Bài 10: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 4m = 0$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + m)(x_2 + m) = 3m^2 + 12$

HD: Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2 \geq 0$ vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

Áp dụng định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} S = 2(m+1) \\ P = 4m \end{cases}$

Để $(x_1 + m)(x_2 + m) = 3m^2 + 12$ khi và chỉ khi $x_1x_2 + (x_1 + x_2)m - 2m^2 - 12 = 0$, khi và chỉ khi : $4m + m.2(m + 1) - 2m^2 - 12 = 0$ khi và chỉ khi $6m = 12$ khi và chỉ khi $m= 2$

Bài 11: Cho phương trình $x^2 - 3x + m = 0$ (1) (x là ẩn).

Tìm các giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}=3\sqrt{3}.$$

HD: Tìm m để x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}=3\sqrt{3}$

Pt (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 9 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{4}$ (1)

Theo định lí Viet $x_1 + x_2 = 3, x_1x_2 = m$. Bình phương ta được $x_1^2 + x_2^2 + 2 + 2\sqrt{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} = 27$

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2\sqrt{x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1} = 25$.

Tính được $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9 - 2m$ và đưa hệ thức trên về dạng

$\sqrt{m^2 - 2m + 10} = m + 8$ (2)

$\Rightarrow m^2 - 2m + 10 = m^2 + 16m + 64 \Leftrightarrow 18m = -54 \Leftrightarrow m = -3.$

Thử lại thấy $m = -3$ thỏa mãn pt (2) và điều kiện (1).

Bài 12: Cho phương trình : $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1{}^2 + 2mx_2 = 9$

Đ/a: Vậy $m = \dfrac{5}{3}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 : $x_1{}^2 + 2mx_2 = 9$

Bài 13: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 4 = 0$ (m là tham số)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \le 3m^2 + 16$.

4.4. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức nghiệm

Cách làm: Cũng tương tự như những dạng bài trên ta áp dụng hệ thức Vi-et để biến đổi biểu thức đã cho rồi tìm giá trị lớn nhất(nhỏ nhất)

Ví dụ 1: Cho phương trình : $x^2 - (m-1)x - m^2 + m - 2 = 0$

Gọi 2 nghiệm của phương trình là x_1 và x_2. Tìm giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải: Ta có: $x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (m-1)^2 - 2(-m^2 + m - 2)$

$$= m^2 - 2m + 1 + 2m^2 - 2m + 4 = 3m^2 - 4m + 5$$

$$= 3\left(m^2 - \frac{4}{3}m + \frac{5}{3}\right) = 3(m^2 - 2m\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{11}{9})$$

$$= 3(m - \frac{2}{3})^2 + \frac{11}{3} \geq \frac{11}{3}$$

Vậy GTNN của $\left(x_1^2 + x_2^2\right)$ là $\frac{11}{3}$ khi $m = \frac{2}{3}$

Ví dụ 2: Cho phương trình $x^2 - 2(m+4)x + m^2 - 8 = 0$ (1) trong đó m là tham số.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $A = x_1 + x_2 - 3x_1x_2$ đạt GTLN.

<u>Giải</u>: Ta có $\Delta' = (m+4)^2 - (m^2-8) = m^2 + 8m + 16 - m^2 + 8 = 8m + 24$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm thì: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 8m + 24 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -3$

Ta có: $x_1 + x_2 = 2(m+4)$; $x_1x_2 = (m^2 - 8)$

$A = x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = 2m + 8 - 3(m^2 - 8) = -3m^2 + 2m + 32$

$A = -3(m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{1}{9}) + \frac{97}{3} = -3(m - \frac{1}{3})^2 + \frac{97}{3} \geq \frac{97}{3}$

Vậy Max $A = \frac{97}{3}$. Dấu '=' xảy ra khi $m = \frac{1}{3}$

Ví dụ 3: Cho phương trình $x^2 + 2x - m = 0$ (1) . (x ; là ẩn, m là tham số)

Tìm tất cả các giá trị của *m* để phương trình (1) có nghiệm. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm (có thể bằng nhau) của phương trình (1). Tính biểu thức $P = x_1^4 + x_2^4$ theo *m*, tìm *m* để *P* đạt giá trị nhỏ nhất.

<u>Giải:</u> Phương trình (1) là phương trình bậc 2 (vì hệ số của x^2 là $1 \neq 0$) có

$\Delta' = 1 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm $\Rightarrow m \geq -1$.

Khi đó, áp dụng định lý Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = -2$; $x_1.x_2 = -m$

Do đó, $P = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2.x_2^2$

$= [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2]^2 - 2(x_1.x_2)^2$

$= (4 + 2m)^2 - 2m^2 = 2m^2 + 16m + 16.$

Vì $m \geq -1 \Leftrightarrow m + 1 \geq 0$ nên ta có: $P = 2m^2 + 16m + 16$

$= 2(m^2 + 2m + 1) + 12m + 14$

$= 2(m + 1)^2 + 12(m + 1) + 2 \geq 2$

Suy ra P đạt giá trị nhỏ nhất là 2 khi và chỉ khi m + 1 = 0 $\Leftrightarrow$ m = –1.

Ví dụ 4: Cho a, b, c là 3 số thực thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{a} \\ a + b + c = abc \end{cases}$$ Tìm GTNN của a (Xác định b, c khi a min)

Giải: Từ giả thiết bài toán ta có: $\begin{cases} bc = a^2 \\ b + c = abc - a = a^3 - a \end{cases}$

Theo Viet: b, c là nghiệm của phương trình bậc 2: $x^2 - (a^3 - a)x + a^2 = 0$

$\Rightarrow \Delta = (a^3 - a)^2 - 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2\,[(a^2 - 1)^2 - 4] \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2 - 3)\,(a^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq 3$

$\Rightarrow a \geq \sqrt{3}$ $(a > 0) \Rightarrow$ min a = $\sqrt{3}$ tại b = c = $\sqrt{3}$

Vậy: $a_{min} = \sqrt{3}$ tại b = c = $\sqrt{3}$

1. Ở bài toán trên do vai trò của a, b, c như nhau nên có thể yêu cầu tìm min của1 trong các biến a, b, c.

Ví dụ 5: Cho phương trình : $x^2 - mx + m - 1 = 0$

Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2\left(x_1x_2 + 1\right)}$$

Ta có: Theo hệ thức Vi -ét thì : $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2\left(x_1x_2 + 1\right)} = \frac{2x_1x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 + 2} = \frac{2(m-1) + 3}{m^2 + 2} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}$$

Cách 1: Thêm bớt để đưa về dạng như phần (*) đã hướng dẫn

Ta biến đổi B như sau:

$$B = \frac{m^2 + 2 - \left(m^2 - 2m + 1\right)}{m^2 + 2} = 1 - \frac{\left(m-1\right)^2}{m^2 + 2}$$

Vì $\left(m-1\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{\left(m-1\right)^2}{m^2+2} \geq 0 \Rightarrow B \leq 1$

Vậy $\max \text{B=1} \Leftrightarrow m = 1$

Với cách thêm bớt khác ta lại có:

$$B = \frac{\frac{1}{2}m^2+2m+1-\frac{1}{2}m^2}{m^2+2} = \frac{\frac{1}{2}\left(m^2+4m+4\right)-\frac{1}{2}\left(m^2+2\right)}{m^2+2} = \frac{\left(m+2\right)^2}{2\left(m^2+2\right)} - \frac{1}{2}$$

Vì $\left(m+2\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{\left(m+2\right)^2}{2\left(m^2+2\right)} \geq 0 \Rightarrow B \geq -\dfrac{1}{2}$

Vậy $\min B = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2$

Cách 2: Đưa về giải phương trình bậc 2 với ẩn là *m* và *B* là tham số, ta sẽ tìm điều kiện cho tham số *B* để phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi *m*.

$B = \dfrac{2m+1}{m^2+2} \Leftrightarrow Bm^2 - 2m + 2B - 1 = 0$ (Với *m* là ẩn, *B* là tham số) (**)

Ta có: $\Delta = 1 - B(2B-1) = 1 - 2B^2 + B$

Để phương trình (**) luôn có nghiệm với mọi m thì $\Delta \geq 0$

hay $-2B^2 + B + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2B^2 - B - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \left(2B+1\right)\left(B-1\right) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2B+1 \leq 0 \\ B-1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2B+1 \geq 0 \\ B-1 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B \leq -\frac{1}{2} \\ B \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} B \geq -\frac{1}{2} \\ B \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq B \leq 1$$

Vậy: $\max \text{B=1} \Leftrightarrow m = 1$

$\min B = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2$

Bài tập áp dụng:

<u>Bài 1</u>: Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m-4)x + m^2 - 8 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn:

a) $A = x_1 + x_2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất

b) $B = x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 2: Cho phương trình $x^2+(4m+1)x+2(m-4)=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$.

Tìm m để $A=(x_1-x_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 3: (Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT 2004 – 2005)

Cho phương trình $\left(m^4+1\right)x^2-m^2x-(m^2-2m+2)=0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi m = 1

b) Gọi $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình (1).Tìm giá trị lớn nhất của x_1+x_2

Bài 4: (Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT năm học 2008 – 2009)

Cho phương trình $x^2-(3m-1)x+2(m^2-1)=0$ (1) ,(m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi m = 2

b) Chứng minh (1) luôn có nghiệm với mọi m

c) Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của (1), tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x_1{}^2+x_2{}^2$

Bài 5: Cho phương trình $x^2-2(m-1)x-3-m=0$. Tìm m để hai nghiệm $x_1;x_2$

thỏa mãn $x_1{}^2+x_2{}^2\geq 10$.

Bài 6: Cho phương trình $x^2+(m-2)x-8=0$, với m là tham số.

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức

Q = $(x_1^2-1)(x_2^2-4)$ có giá trị lớn nhất.

HD: $\Delta=\left(m-2\right)^2+8>0$ với mọi m. Vậy pt có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

Do $x_1x_2=-8$ nên $x_2=\dfrac{-8}{x_1}$

$$Q=(x_1^2-1)(x_2^2-4)=(x_1^2-1)(\frac{64}{x_1^2}-4)=68-4(x_1^2+\frac{16}{x_1^2})\leq 68-4.8=36$$

(Do $x_1^2+\dfrac{16}{x_1^2}\geq 8$) . Ta có Q = 36 khi và chỉ khi $x_1=\pm\ 2$

Khi $x_1=2$ thì m = 4, khi x_1 = -2 thì m = 0. Do đó ta có giá trị lớn nhất của Q = 36 khi và chỉ khi m = 0 hay m = 4 .

Bài 7: Cho phương trình $x^2 – 2(m+4)x + m^2 - 8 = 0$

Tìm m để phương trình x_1, x_2 thỏa mãn :

1. $A = x^2_1 + x^2_2 - x_1 - x_2$ đạt GTNN.

2. $B = x^2_1 + x^2_2 - x_1 x_2$ đạt GTNN.

Bài 8: Cho phương trình $x^2 – 2mx + m^2 – 1 = 0$ (x là ẩn, m là tham số).

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1 , x_2 sao cho tổng

$P = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

5. Dạng 5: Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai

Khi xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai có thể xảy ra các trường hợp sau: hai nghiệm trái dấu, cùng dấu (cùng dương hoặc cùng âm). Dấu của các nghiệm liên quan với Δ; S; P như thế nào?

Ta có bảng xét dấu sau:

Dấu của hai nghiệm $x_1; x_2$		Điều kiện		
		Δ	S	P
Trái dấu	$x_1x_2 < 0$	> 0		< 0
Cùng dấu	Cùng dương $(x_1x_2 > 0;\ x_1 + x_2 > 0)$	≥ 0	> 0	> 0
	Cùng âm $(x_1x_2 > 0;\ x_1 + x_2 < 0)$	≥ 0	< 0	> 0

Ví dụ 1: Không giải phương trình hãy cho biết dấu của các nghiệm?

$a) 5x^2 + 7x + 1 = 0$

$b) x^2 - 13x + 40 = 0$

$c) 3x^2 + 5x - 1 = 0$

Cách làm:

Tính S; P theo hệ thức Vi – et rồi dựa theo bảng xét dấu trên

Giải:

a) $P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{5} > 0$; $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{5} < 0$ nên hai nghiệm cùng dấu âm

Tương tự với phần b và c

b) P = 40 > 0; S= 13 > 0 nên hai nghiệm cùng dấu dương

c) $P=-\frac{1}{3}<0$ nên hai nghiệm trái dấu

Ví dụ 2: Cho phương trình $x^2-(m-1)x+m^2-m+2=0$ (m là tham số)

Chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu với ∀ m

Giải : Ta có $ac=m^2-m+2=m^2-2\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}+1\frac{3}{4}=(m-\frac{1}{2})^2+1\frac{3}{4}$

$$\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0\Rightarrow\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+1\frac{3}{4}\geq 1\frac{3}{4}\Rightarrow ac\geq 1\frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow P>0,\forall m$$

Vậy phương trình có hai nghiệm cùng dấu với ∀ m

Ví dụ 3: Xác định m để phương trình $2x^2-(3m+1)x+m^2-m-6=0$

có hai nghiệm trái dấu.

Giải:Để phương trình có hai nghiệm trái dấu thì:

$$\begin{cases}\Delta>0\\P<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-7)^2>0\\\dfrac{m^2-m-6}{2}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall m\neq 7\\(m-3)(m+2)<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<3$$

Vậy với -2 < m < 3 thì phương trình có hai nghiệm trái dấu

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-3=0$ (1)

a) Chứng minh (1) luôn có nghiệm với mọi m

b) Tìm giá trị của m để (1) có hai nghiệm trái dấu

c) Tìm giá trị của m để (1) có hai nghiệm sao cho nghiệm này gấp đôi nghiệm kia

Bài 2: (Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT năm học 2007 – 2008)

Cho phương trình $x^2-5x+m=0$

a) Giải phương trình với m = 6

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương.

Bài 3: Cho phương trình $x^2 - 2(m+3)x + 4m - 1 = 0$

a) Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm dương

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

Bài 4 : Xác định m để phương trình

a) $mx^2 - 2(m+2)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm cùng dấu

b) $(m-1)x^2 - 2x + m = 0$ có ít nhất một nghiệm không âm

*** Lưu ý:** phần b: xét các trường hợp phương trình có:

+ hai nghiệm trái dấu

+ hai nghiệm cùng dương