CHUYÊN ĐỀ ĐƯỜNG TRÒN

BỒI DƯỠNG MÔN TOÁN 9

I/ Những kiến thức cơ bản :

1) Sự xác định và các tính chất cơ bản của đường tròn :

- Tập hợp các điểm cách đều điểm O cho trước một khoảng không đổi R gọi là đường tròn tâm O bán kính R , kí hiệu là (O,R) .
- Một đường tròn hoàn toàn xác định bởi một bởi một điều kiện của nó . Nếu AB là đoạn cho trước thì đường tròn đường kính AB là tập hợp những điểm M sao cho góc AMB = 90^0 . Khi đó tâm O sẽ là trung điểm của AB còn bán kính thì bằng $R = \frac{AB}{2}$.
- Qua 3 điểm A,B ,C không thẳng hàng luôn vẽ được 1 đường tròn và chỉ một mà thôi . Đường tròn đó được gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Trong một đường tròn , đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm dây đó . Ngược lại đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó .
- Trong đường tròn hai dây cung bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm .
- Trong một đường tròn , hai dây cung không bằng nhau , dây lớn hơn khi và chỉ khi dây đó gần tâm hơn .

2) Tiếp tuyến của đường tròn :

- Định nghĩa : Đường thẳng được gọi là tiếp tuyến của đường tròn nếu nó có một điểm chung với đường tròn . Điểm đó được gọi là tiếp điểm .
- Tính chất : Tiếp tuyến của đường tròn vuông góc với bán kính tại tiếp điểm . Ngược lại , đường thẳng vuông góc với bán kính tại giao điểm của bán kính với đường tròn được gọi là tiếp tuyến .
- Hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì điểm đó cách đến hai tiếp điểm ; tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến ; tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm .
- Đường tròn tiếp xúc với 3 cạnh của một tam giác gọi là đường tròn nội tiếp của tam giác đó . Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao của 3 đường phân giác của tam giác .
- Đường tròn bàng tiếp của tam giác là đường tròn tiếp xúc với một cạnh và phần kéo dài của hai cạnh kia .

3) Vị trí tương đối của hai đường tròn :

- Giả sử hai đường tròn (O;R) và (O';r) có $R \geq r$ và d = OO' là khoảng cách giữa hai tâm . Khi đó mỗi vị trí tương đối giữa hai đường tròn ứng với một hệ thức giữa R , r và d theo bảng sau :

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < d < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc	1	$d = R + r$ ($d = R - r$)
Hai đường tròn không giao nhau	0	$d > R + r$ ($d < R - r$)

- Hai đường tròn tiếp xúc nhau khi và chỉ khi tiếp điểm nằm trên đường nối tâm .
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm vuông góc với dây cung chung và chia dây cung đó ra hai phần bằng nhau .

4) Các loại góc :

a. Góc ở tâm :

- Định nghĩa : Là góc có đỉnh ở tâm đường tròn .
- Tính chất : Số đo của góc ở tâm bằng số đo của cung bị chắn .

b. Góc nội tiếp :

- Định nghĩa : Là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh của góc chứa hai dây của đường tròn đó .
- Tính chất : Số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn .

c. Góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây đi qua tiếp điểm :

- Tính chất : Số đo của góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây bằng một nửa số đo của cung bị chắn .

d. Góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn :

- Tính chất : Số đo của góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo của hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc và các tia đối của hai cạnh ấy .

e. Góc có đỉnh nằm bên ngoài đường tròn :

- Tính chất : Số đo của góc có đỉnh nằm bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo của hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc .

5) Quỹ tích cung chứa góc :

- Quỹ tích những điểm M nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc $\propto$ không đổi là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB gọi là cung chứa góc $\propto$ dựng trên đoạn thẳng AB . Đặc biệt là cung chứa góc 90^0 là đường tròn đường kính AB .
- Dựng tâm O của cung chứa góc trên đoạn AB :
    - Dựng đường trung trực d của AB .
    - Dựng tia Ax tạo với AB một góc $\propto$, sau đó dựng Ax’ vuông góc với Ax .
    - O là giao của Ax’ và d .

6) Tứ giác nội tiếp đường tròn :

- Đinh nghĩa : Tứ giác có 4 đỉnh nằm trên đường tròn .
- Tính chất : Trong một tứ giác nội tiếp , tổng số đo hai góc đối diện bằng 2 góc vuông . Ngược lại , trong một tứ giác có tổng 2 góc đối diện bằng 2 góc vuông thì tứ giác đó nội tiếp một đường tròn .

7) Chu vi đường tròn , cung tròn , diện tích hình tròn , quạt tròn :

- Chu vi hình tròn : $C = 2\pi R$
- Diện tích hình tròn : $S = \pi R^2$
- Độ dài cung tròn : $l = \dfrac{\pi R n}{180}$

- Diện tích hình quạt tròn : $S = \frac{\pi R^2 n}{180}$

8) Tính bán kính đường tròn nội tiếp , ngoại tiếp , bàng tiếp đa giác

a. Bán kính đường tròn nội tiếp đa giác đều n cạnh :

$R = \frac{a}{2\mathrm{Sin}\frac{180^0}{n}}$ $\qquad$ $r = \frac{a}{2\mathrm{tg}\frac{180^0}{n}}$

b. Bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đều n cạnh

$r = \frac{a}{2\mathrm{tg}\frac{180^0}{n}}$

c. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác (R) :

$\mathbf{R} = \frac{a}{2\mathrm{Sin}A} = \frac{b}{2\mathrm{Sin}B} = \frac{c}{2\mathrm{Sin}C}$

$\mathbf{R} = \frac{abc}{4S_\Delta}$

Với tam giác vuông tại A : $R = \frac{a}{2}$

Với tam giác đều cạnh a : $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

d. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác (r) :

$r = \frac{S_\Delta}{p}$ với ($2p = a+b+c$)

Với tam giác vuông tại A : $r = \frac{c+b-a}{2}$

Với tam giác đều cạnh a : $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

e. Bán kính đường tròn bàng tiếp g óc A tam giác (r_a) :

$r_a = \frac{S}{p-a}$ (r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A)

Với tam giác vuông tại A : $r_a = \frac{a+b+c}{2}$

Với tam giác đều cạnh a : $r_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

II/ Bài tập vận dụng

1) Bài tập dụng về tính chất của đường tròn :

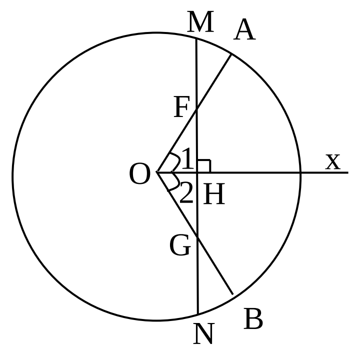
a. Ứng dụng tính chất của đường tròn :

Sử dụng tính chất của đường tròn về quan hệ đường kính và dây cung ; dây cung và khoảng cách đến tâm để chứng minh hai đường thẳng vuông góc , so sánh hai đoạn thẳng .

Sử dụng đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn để để xác định vị trí của một đường thẳng , một điểm để có hình đặc biệt hoặc là áp dụng để giải các bài toán về cực trị .

b. <u>Các ví dụ</u> :

Bài 1 : Trong đường tròn (O) kẻ hai bán kính OA và OB tùy ý và một dây MN vuông góc với phân giác Ox của góc AOB cắt OA ở F và OB ở G . Chứng tỏ rằng MF = NG và FA = GB .



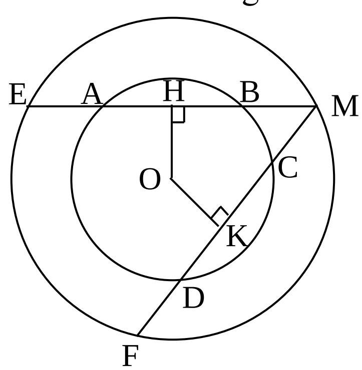
Hướng dẫn chứng minh :

Sử dụng tính chất đường kính dây cung chứng minh : HM = HN

Chứng minh tam giác OFG cân để : HF = HG ; OF = OG

Từ hai điều trên suy ra điều phải chứng minh .

Bài 2 : Cho hai đường tròn đồng tâm như hình vẽ . So sánh các độ dài :



a) OH và OK
b) ME và MF
c) CM và MK

Nếu biết

AB > CD

AB = CD

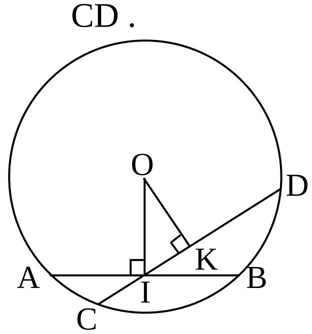
AB < CD

Bài 3 : Cho (O) và điểm I nằm bên trong đường tròn . Chứng minh rằng dây AB vuông góc với OI tại I ngắn hơn mọi dây khác đi qua I .

Hướng dẫn chứng minh :

Kẻ dây CD bất kì đi qua I không trùng với AB .

Nhờ mối liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây , ta kẻ OK vuông góc với CD .



OI > OK nên AB < CD .

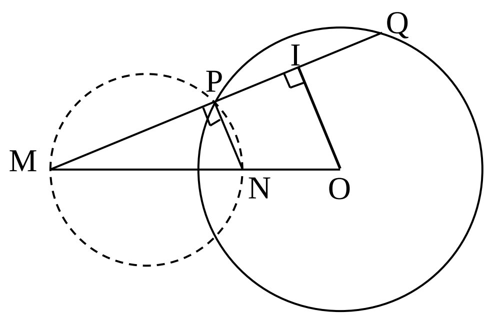
* Từ bài tập trên chúng ta thấy nếu bán kính đường tròn bằng R và OI = d chúng ta có thể hỏi :

- Tính độ dài dây ngắn nhất đi qua I ?

- Tính độ dây dài nhất đi qua I ?

Bài 4 : Cho (O;R) và điểm M nằm ngoài đường tròn . Hãy dựng cát tuyến MPQ với đường tròn sao cho MP = MQ .

Hướng dẫn :



Phân tích : Giả sử dựng được hình thỏa mãn đề bài . Kẻ OI vuông góc với PQ .

Ta có : $IP = \frac{1}{2}PQ \Rightarrow IP = \frac{1}{3}MI \Rightarrow MP = \frac{2}{3}MI$

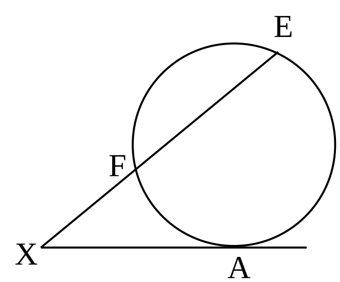
Kẻ PN vuông góc MQ ta thấy $MN = \frac{2}{3}MO$ và P là giao của đường tròn đường kính MN và (O)

Cách dựng : Dựng điểm N rồi dựng điểm P…

2) **<u>Bài tập về tiếp tuyến của đường tròn</u> :**

a. **<u>Ứng dụng của tiếp tuyến</u> :**

- Từ các tính chất của tiếp tuyến , của hai tiếp tuyến cắt nhau ta chỉ ra được các đường thẳng vuông góc , các cặp đoạn thẳng và các cặp góc bằng nhau ; cũng từ đó ta xây dựng được các hệ thức về cạnh , về góc .
- Từ tính chất của tiếp tuyến chúng ta có thể vận dụng vào tam giác tìm ra công thức tính diện tích của đường tròn nội tiếp , đường tròn ngoại tiếp và đường tròn bàng tiếp tam giác , cũng như bán kính .
- ***Lưu ý :*** Chứng minh Ax là tiếp tuyến của (O;R) chúng ta làm theo một trong các cách sau :
  - ❖ A $\in$ (O;R) và góc OAx = 90^0 .
  - ❖ Khoảng cách từ O đến Ax bằng R .
  - ❖ Nếu X nằm trên phần kéo dài của EF và $XA^2 = XE.XF$ (xem hình) .
  - ❖ Góc EAX = góc AEF .



b. **<u>Các ví dụ</u> :**

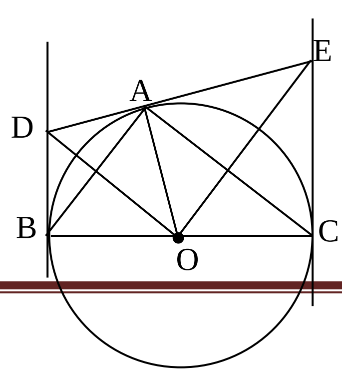
Bài 1 : Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ; d là tiếp tuyến của đường tròn tại A . Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt d theo thứ tự ở D và E .

a) Tính góc DOE .

b) Chứng minh : DE = BD + CE .

c) Chứng minh : BD.CE = R^2 (R là bán kính đường tròn tâm O)

d) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính DE .



Hướng dẫn chứng minh :

a) Sử dụng tính chất tiếp tuyến ta chứng minh được :

$$D\hat{O}E = D\hat{O}A + E\hat{O}A = \frac{1}{2}(B\hat{O}A + C\hat{O}A) = 90^0$$

b) Sử dụng tính chất tiếp tuyến ta chứng minh được :

DE = DA + EA = BD + EC

c) Sử dụng tính chất tiếp tuyến ta có : BD.CE = DA.EA .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông cho tam giác DOE DA.EA = $OA^2 = R^2$

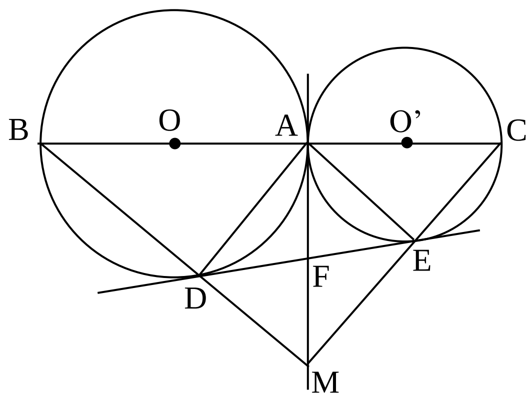
d) Trung điểm I của DE là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông DOE . Ta thấy OI là đường trung bình của hình thang vuông BDEC nên OI // BD // CE hay OI ⊥ BC hay BC là tiếp tuyến đường tròn đường kính DE .

Bài 2 : Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ các đường kính AOB ; AOC' . Gọi DE là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ; D ∈ (O) ; E ∈ (O') . Gọi M là giao điểm của BD và CE .

a) Tính số đo góc DAE .

b) Tứ giác ADME là hình gì ?

c) Chứng minh rằng MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn .



Hướng dẫn chứng minh :

a) Kẻ tiếp tuyến chung của hai đường tròn đi qua A cắt tiếp tuyến chung DE ở F . Dựa vào tính chất tiếp tuyến ta có FA = FD = FE . Vậy tam giác DAE là tam giác vuông tại A hay góc DAE = 90^0 .

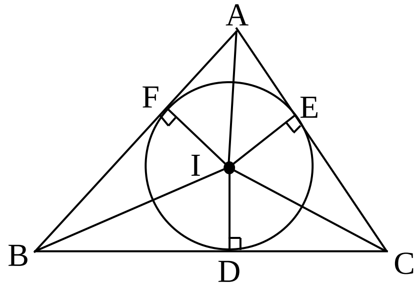
b) Tứ giác ADME có $\hat{D} = \hat{A} = \hat{E} = 90^0$ nên nó là hình chữ nhật .

c) Từ câu b) AM đi qua trung điểm của DE hay AM trùng với AF nên AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn .

Lời bình :

- Với những bài tập cho trước hai đường tròn tiếp xúc nhau , ta nên lưu ý đến tiếp tuyến chung của chúng . Nó thường có một vai trò rất quan trọng trong các lời giải .
- Với bài tập trên chúng ta có thể hỏi :
  - ❖ CMR : góc OFO' là góc vuông .
  - ❖ DE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác OFO' .
  - ❖ Các tia AD và AE cắt (O) và (O') ở H ; K . Chứng minh : $S_{AHK} = S_{ADE}$.

Bài 3 : Gọi a , b, c là số đo 3 cạnh của tam giác ABC , r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác . Tính diện tích tam giác theo p và r , trong đó p là nửa chu vi tam giác .



Hướng dẫn :

Gọi D , E , F là các tiếp điểm .

Theo tính chất tiếp tuyến : ID = IF = IE = r .

Nên : $S_{ABC} = S_{ABI} + S_{BCI} + S_{ACI} = \frac{1}{2}(a + b + c).r = pr$

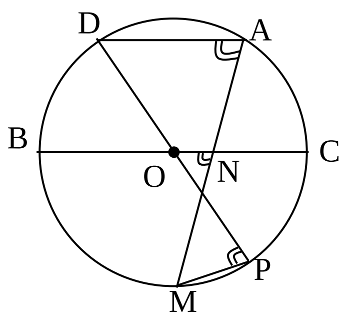
S = pr .

Từ bài tập trên hãy tính :

- Bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác vuông , tam giác đều theo các cạnh của tam giác .
- Các đoạn tiếp tuyến AE , BF , CD theo các cạnh a , b, c của tam giác .

3) Bài tập về các loại góc trong đường tròn

Bài 1 : Cho A là một điểm cố định trên đường tròn (O) và M là một điểm di động trên đường tròn đó . N là giao của AM với đường kính cố định BC . Chứng minh giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN là cố định .



Hướng dẫn chứng minh :

Kẻ DA // BC . Kẻ đường kính DP .

Ta dễ thấy : $\hat{N} = \hat{P}$ (cùng bằng góc A) .

Nên đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN đi qua P $\in$ (O) cố định.

Nhận xét :

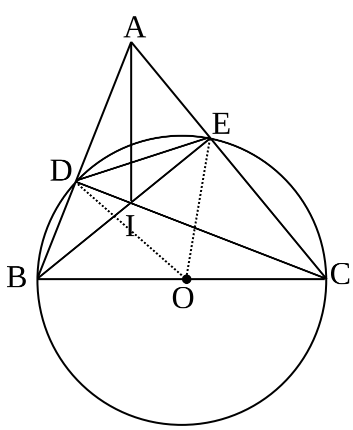
Trong bài này P còn là góc nội tiếp của hai đường tròn nên nó đóng vai trò đại lượng trung gian để chứng minh những góc bằng nhau . Kĩ năng này còn được gặp lại khá thường xuyên .

Bài 2 : Cho tham giác ABC có 3 góc nhọn . Đường tròn (O) có đường kính BC cắt AB , AC theo thứ tự ở D , E . Gọi I là giao điểm của BE và CD .

a) Chứng minh : AI $\perp$ BC

b) Chứng minh : $\widehat{IDE} = \widehat{IAE}$

c) Cho góc BAC = 60^0 . Chứng minh tam giác DOE là tam giác đều .



Hướng dẫn chứng minh :

a) Dựa vào tính chất góc chắn nửa đường tròn , ta chứng minh được I là trực tâm của tam giác ABC nên AI $\perp$ BC .

b) Góc IAE = EBC góc có cạnh tương ứng vuông góc .

Góc EBC = EDC cùng chắn cung EC .

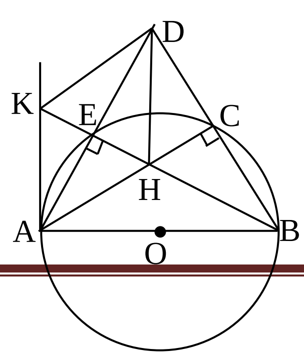
Từ hai điều trên suy ra điều chứng minh .

c) Góc BAC = 60^0 $\Rightarrow$ Góc DBE = 30^0 chắn cung DE

$\Rightarrow$ Số đo cung DE = 60^0

$\Rightarrow$ Góc DOE = 60^0 mà tam giác DOE cân đỉnh O nên DOE là tam giác đều .

Bài 3 : Cho đường tròn (O) đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn . Điểm C thuộc nửa đường tròn cùng nửa mặt phẳng với Ax với bờ là AB. Phân giác góc ACx cắt đường tròn tại E , cắt BC ở D .Chứng minh :



a) Tam giác ABD cân .

b) H là giao điểm của BC và DE . Chứng minh DH $\perp$ AB .

c) BE cắt Ax tại K . Chứng minh tứ giác AKDH là hình thoi .

Hướng dẫn giải :

a) AD là phân giác hai cung AE và CE bằng nhau .

Dựa vào góc nội tiếp ta dễ dàng chứng minh được BE vừa là phân giác vừa là đường cao của tam giác ABD , nên ΔABD cân đỉnh B.

b) Dựa vào góc chắn nửa đường tròn .Ta thấy H là trực tâm của ΔABD nên DH ⊥ AB.

c) Ta thấy KE = HE (vì ΔAKH cân đỉnh A) và AE = DE (Δ ABD cân đỉnh B) và AD⊥KH , nên tứ giác AKDH là hình thoi .

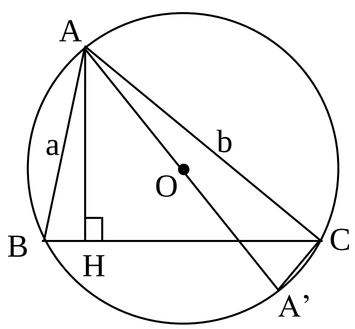
*** Từ bài tập trên có thể ra các câu hỏi khác :***

- Chứng minh OE ⊥ AC .
- Tìm vị trí của C trên cung AB để ΔABD đều

Bài 4 : Cho tam giác ABC nội tiếp (O;R) .Chứng minh rằng :

a) $\mathbf{R} = \dfrac{a}{2\text{SinA}} = \dfrac{b}{2\text{SinB}} = \dfrac{c}{2\text{SinC}}$

b) $\mathbf{R} = \dfrac{abc}{4S_{\Delta}}$



Hướng dẫn giải

a) Kẻ đường kính AA’lúc đó ΔACA’ vuông tại C .

Dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông và góc nội tiếp chắn cùng một cung ta có : $b = AA'.\text{Sin}A\hat{A}'C = 2R.\text{SinB}$

Hay $R = \dfrac{b}{2\text{SinB}}$

Chứng minh tương tự .

b) Ta thấy hai tam giác vuông AHB và ACA’ đồng dạng nên $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AC}{AA'}$

hay $\dfrac{h_a}{c} = \dfrac{b}{2R}$ mà $h_a = \dfrac{2S}{a}$ suy ra $\dfrac{2S}{ac} = \dfrac{b}{2R}$ hay $S = \dfrac{abc}{4R}$

Từ bài tập trên hãy tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông , tam giác đều .

4) Bài tập về tứ giác nội tiếp một đường tròn

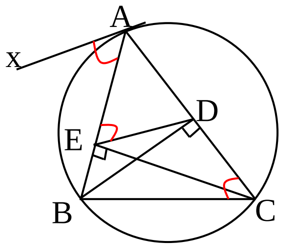
Chứng minh tứ giác nội tiếp một đường tròn theo một trong các cách sau đây :

- Chứng minh tổng hai góc đối diện trong một tứ giác bằng 180^0.
- Chứng minh hai điểm nhìn hai điểm còn lại dưới cùng một góc .
- Tứ giác ABCD có AC cắt BD tại M mà MA.MC = MB.MD thì tứ giác ABCD nội tiếp .
- Tứ giác có hai cạnh bên AB và CD giao nhau tại M mà MA.MB = MC.MD thì tứ giác ABCD nội tiếp .

<u>Các ví dụ :</u>

Bài 1 : Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn với các đường cao BD , CE .

a) Chứng minh BEDC là tứ giác nội tiếp .



b) Chứng minh : AD.AC = AE.AB .

c) Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng : Ax // ED .

Hướng dẫn chứng minh :

a) D, E cùng nhìn BC dưới một góc 90^0 nên tứ giác BEDC nội tiếp .

b) Hai tam giác vuông ABD và ACE đồng dạng . Suy ra AD.AC = AE.AB .

c) $x\hat{A}B = A\hat{C}B$ vì cùng chắn cung AB.

$A\hat{E}D = A\hat{C}B$ vì cùng phụ với góc BED .

Nên $x\hat{A}B = A\hat{E}D$. Suy ra Ax // ED .

Nhận xét :

Với giả thiết của bài toán trên chúng ta có thể khai thác bài toán theo nhiều hướng và ra được nhiều câu hỏi :

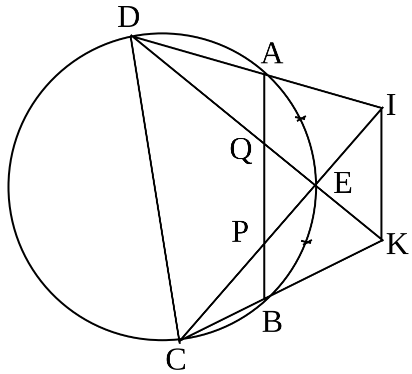
- Kéo dài các đường cao BD , CE , AF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ở D’ , E’ , F’ . Chứng minh :
    - H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác D’E’F’ .
    - H đối xứng với D’,E’,F’ qua AC , AB , BC .
    - ED // E’D’.
    - OA ⊥ E’D’.
    - Các đường tròn tam giác : HAB , HBC, HCA có bán kính bằng nhau .
    - $S_{ABC} = \dfrac{abc}{4R}$.
- Vẽ hình bình hành BHCK , I là trung điểm của BC . Chứng minh :
    - Tứ giác ABKC nội tiếp với K nằm trên đường tròn (O) .
    - $B\hat{A}H = O\hat{A}C$.
    - H , I , K thẳng hàng .
    - AH // OI ; AH = 2.OI . Nếu B , C cố định A di động thì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE không đổi .
    - Đường thẳng qua K song song với BC cắt AH tại M thì A,B,C,K,M cùng nằm trên một đường tròn .

Bài 2 : Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O) ; E là điểm chính giữa của cung AB , hai dây EC , ED cắt AB tại P và Q . Các dây AD và EC kéo dài cắt nhau tại I , các dây BC và ED kéo dài cắt nhau tại K . Chứng minh rằng :

a) Tứ giác CDIK nội tiếp .

b) Tứ giác CDQP nột tiếp .

c) IK // AB .



d) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQD tiếp xúc với EA .

Hướng dẫn :

a) D và C cùng nhìn IK dưới hai góc bằng nhau (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) . Suy ra tứ giác DIKC nội tiếp .

b) sđ ($\widehat{QDC} + \widehat{QPC}$) = ½sđ ($\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{CB}$) + ½ sđ ($\overset{\frown}{ADC} + \overset{\frown}{BE}$)

= ½ sđ($\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{ADC}$ + BE)

= 180^0

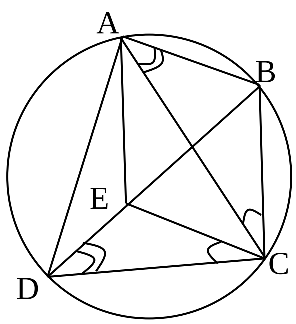
Nên tứ giác CDQP nội tiếp .

c) sđ $\widehat{API}$ = ½ sđ($\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{AE}$) = ½ sđ ($\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{BE}$) = sđ $\widehat{CDK}$ = sđ $\widehat{CIK}$ = ½ sđ $\overset{\frown}{CK}$

Từ đó suy ra IK // AB .

d) $\widehat{EAQ} = \widehat{ADQ}$ (góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau) . Suy ra AE là tiếp tuyến

Bài 3 : Cho tứ giác nội tiếp đường tròn (O) . Chứng minh rằng tích hai đường chéo bằng tổng của tích các cặp cạnh đối diện .



Hướng dẫn :

Giả sử ACD > ACB .

Lấy E trên BD sao cho ACB = DCE .

Hai tam giác ABC và DEC đồng dạng : AB.DC = AC.DE .

Hai tam giác ADC và BEC đồng dạng : AD.BC = AC.BE .

Cộng từng vế hai đẳng thức trên suy ra điều chứng minh .

II . Bài tập tổng hợp :

Trong phần I , chúng ta đã làm quen dần với các dạng toán tương ứng với những kiến thức cơ bản của đường tròn .

Trong phần II này , chúng ta sẽ nâng cao kĩ năng giả toán trên những bài tập tổng hợp của những dạng toán trên .

1) <u>Các câu hỏi thường gặp trong các bài toán hình</u> :

1. Chứng minh : Nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn (đặc biệt là 4 điểm cùng nằm trên một đường tròn hay chứng minh tứ giác nội tiếp) .
2. Chứng minh hai đường thẳng song song , vuông góc với nhau .
3. Chứng minh đẳng thức hình học .
4. Nhận biết hình là hình gì ? (có thể là tam giác cân , hình bình hành , hình thoi , hình chữ nhật , hình thang cân …) . Lưu ý : Khi chứng minh tứ giác là hình thang cân không được chứng minh là hình thang có hai cạnh bên bằng nhau .
5. Chứng minh 3 đường thẳng đồng quy ; 3 hay nhiều điểm thẳng hàng .
6. Chứng minh đường thẳng là tiếp tuyến của 1 đường tròn , tiếp tuyến chung của hai đường tròn .
7. Xác định vị trí đặc biệt để có hình đặc biệt .

8. Toán cực trị hình học .
9. Toán các đại lượng hình học : Đoạn thẳng , cung ,góc , chu vi , diện tích …

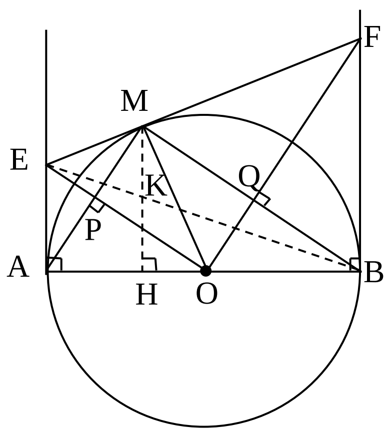
Trong các câu hỏi trên tùy theo từng bài mà ra các câu hỏi sao cho có sự logic giữa các câu thứ nhất , thứ hai và các câu sau .

Thông thường kết quả của các câu trên bao giờ cũng là giả thiết để chứng minh câu dưới, đôi khi cần vẽ thêm hình thì bài toán trở lên đơn giản hơn .

2) **Bài tập vận dụng**

Bài 1 : Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Từ A và B kẻ tiếp tuyến Ax và By . Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ 3 cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt tại E và F .

1. Chứng minh AEMO là tứ giác nội tiếp .
2. AM cắt OE tại P , BM cắt OF tại Q . Tứ giác MPOQ là hình gì ? Tại sao ?
3. Kẻ MH ⊥ AB (H ∈ AB) . Gọi K là giao của MH và EB . So sánh MK và KH.



Hướng dẫn :

1) $\widehat{EAO} = \widehat{EMO} = 90^0$. Nên AEMO là tứ giác nội tiếp .

2) Dựa vào tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau có $\widehat{MPO} = \widehat{MQO} = 90^0$ và $\widehat{PMQ} = 90^0$ nên PMQO là hình chữ nhật .

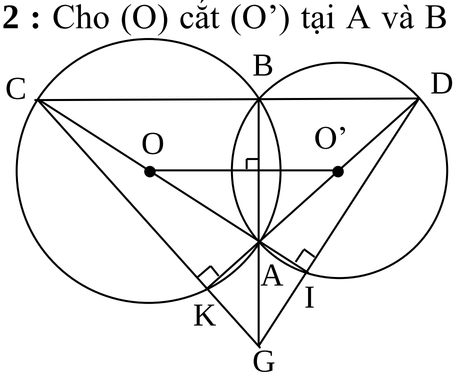
3) $\Delta EMK \backsim \Delta EFB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{EM}{MK} = \frac{EF}{FB}$ mà MF = FB

$\Rightarrow \frac{EM}{MK} = \frac{EF}{MF}$

$\Delta EAB \backsim \Delta KHB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{EK}{KH} = \frac{AB}{HB}$ mà $\frac{EF}{MF} = \frac{AB}{HB}$ (Ta let) $\Rightarrow \frac{EM}{MK} = \frac{EA}{KH}$

Vì EM = EA $\Rightarrow$ MK = KH .

Bài 2 : Cho (O) cắt (O’) tại A và B . Kẻ cát tuyến chung CBD ⊥ AB (C ở trên (O) và D ở trên (O’).)



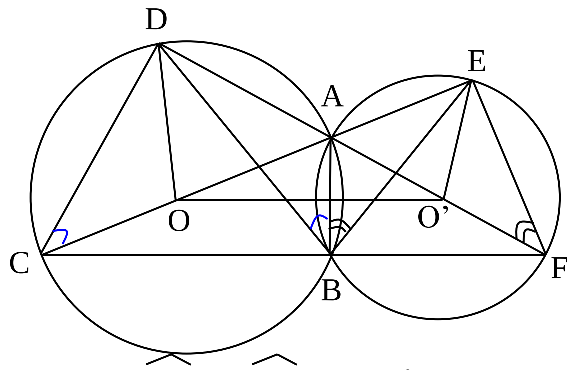
1. Chứng minh A , O , C và A ,O’, D thẳng hàng .
2. Kéo dài CA và DA cắt (O’) và (O) theo thứ tự tại I và K . Chứng minh tứ giác CKID nội tiếp .
3. Chứng minh BA , CK và DI đồng quy .

Hướng dẫn :

1. $\widehat{CBA} = \widehat{DBA} = 90^0$ nên AC và DA là đường kính hay A,O, C thẳng hàng D ,O’,A thẳng hàng .
2. Từ câu 1) và dựa vào góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ta thấy K , I cùng nhìn CD dưới một góc vuông nên tứ giác CDIK nội tiếp .

3. A là trực tâm của tam giác ADG có AB là đường cao hay BA đi qua G .

Bài 3 : Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A,B . Các đường AO và AO'cắt đường tròn (O) lần lượt tại C và D , cắt đường tròn (O') lần lượt tại E , F .



a) Chứng minh B , F , C thẳng hàng .

b) Chứng minh tứ giác CDEF nội tiếp .

c) Chứng minh A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BDE .

d) Tìm điều kiện để DE là tiếp tuyến chung của (O) và (O')

Hướng dẫn :

a) $\widehat{CBA} + \widehat{FBA} = 180^0$ nên A , B , F thẳng hàng .

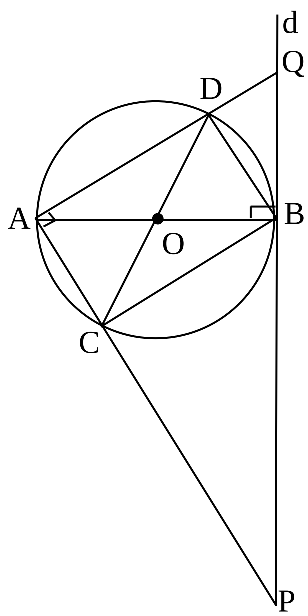
b) D, E cùng nhìn CF dưới một góc vuông nên CDEF nội tiếp .

c) Tứ giác CDEF nội tiếp nên $\widehat{EDF} = \widehat{ECF}$; $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ từ đó suy ra $\widehat{EDF} = \widehat{ADB}$. Hay DE là phân giác góc D của ΔBDE . Tương tự EC là phân giác góc E của ΔBDE . Hai phân giác cắt nhau tại A nên A là tâm đường tròn nội tiếp ΔBDE .

d) Giả sử DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ta có OO' // CE cùng vuông góc với AB : $\widehat{AOO'} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{ACB} = \widehat{FDE}$ (DCFE nội tiếp) suy ra : $\widehat{AOO'} = \widehat{ODE}$ hay tứ giác ODEO' nội tiếp (1)

DE là tiếp tuyến thì DE vuông góc với OD và O'E (2)

Vậy ODEO' là hình chữ nhật : Hay OD = O'E (Hai đường tròn có bán kính bằng nhau)



Bài 4 : Cho (O,R) đường kính AB , đường kính CD di động . Gọi đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn tại B . Đường thẳng d cắt các đường thẳng AC , AD theo thứ tự tại P và Q .

1) Chứng minh tứ giác CPQD nội tiếp một đường tròn .

2) Chứng minh AD. AQ = AC.AP .

3) Tứ giác ADBC là hình gì ? Tại sao ?

4) Xác định vị trí của CD để $S_{CPQD} = 3.S_{ACD}$

Hướng dẫn :

1. $\widehat{CPB} = \widehat{CDA}$ (cùng bằng $\widehat{CBA}$) nên $\widehat{CPB} + \widehat{CDQ} = 180^0$.

2. ΔADC∽ ΔAPQ (g.g) suy ra AD.AQ = AC.AP .

3. Tứ giác ADBC là hình chữ nhật vì có 4 góc vuông.

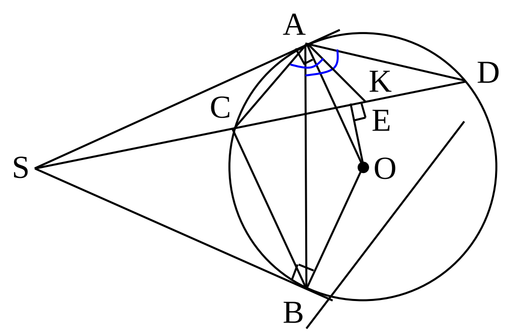
4. Để $S_{CPQD} = 3.S_{ACD} \Rightarrow S_{ADC} = ¼\ S_{APQ}$ tức là tỉ số đồng dạng của hai tam giác này là ½ .

Suy ra AD = ½ AP hay BC = ½ AP mà tam giác ABC vuông tại B nên C là trung điểm của CP

⇒ CB = CA hay ΔACB cân ⇒ CD ⊥ AB .

Bài 5 : Từ một điểm S nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến SA , SB và cát tuyến SCD của đường tròn đó .

1) Gọi E là trung điểm của dây CD . Chứng minh 5 điểm S ,A , E , O , B cùng nằm trên một đường tròn .



2) Nếu SA = OA thì SAOB là hình gì ? Tại sao ?

3) Chứng minh AC . BD = BC.DA = ½ AB.CD

Hướng dẫn chứng minh

1) Sử dụng tính chất tiếp tuyến , ta có A , B cùng nhìn SO dưới một góc vuông , nên tứ giác SADO nội tiếp đường tròn đường kính SO .

Dựa vào tính chất đường kính vuông góc với dây cung , ta có $\widehat{SEO} = 90^0$. Nên E thuộc đường tròn đường kính SO .

2) Nếu SA = OA thì SA = AB = OA = OB và góc A vuông nên tứ giác SAOB là hình vuông .

3) Ta thấy $\Delta SAC \backsim \Delta SDA \Rightarrow \dfrac{AC}{DA} = \dfrac{SC}{SA}$

$\Delta SCB \backsim \Delta SBD \Rightarrow \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{SC}{SB}$

Mà SA = SB $\Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{BD} \Rightarrow AC.BD = AD.BC$ (1)

Trên SD lấy K sao cho $\widehat{CAK} = \widehat{BAD}$ lúc đó

$\Delta CAK \backsim \Delta BAD$ (g.g) $\Rightarrow$ AC.DB = AB.CK

$\Delta BAC \backsim \Delta DAK$ (g.g) $\Rightarrow$ BC.AD = DK.AB

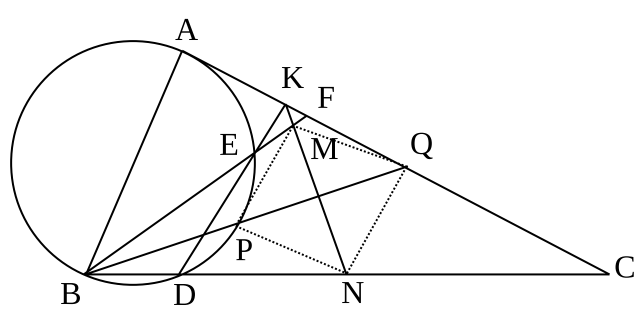
Cộng từng vế ta được AC.BD + BC.AD = AB(CK+DK)= AB.CD (2)

Từ (1) và (2) suy ra : AC.BD + AC.BD = AB.CD hay AC.BD = ½ AB.CD

Vậy AC.BD = AD.BC = ½ AB.CD .

Bài 6 : Cho tam giác ABC vuông ở A . Đường tròn đường kính AB cắt BC tại D . Trên cung AD lấy một điểm E . Nối BE và kéo dài cắt AC tại F .

1) Chứng minh CDEF nội tiếp .
2) Kéo dài DE cắt AC ở K . Tia phân giác của góc CKD cắt EF và CD tại M và N . Tia phân giác của góc CBF cắt DE và CF tại P và Q . Tứ giác MNPQ là hình gì ? Tại sao ?
3) Gọi r_1 , r_2 , r_3 theo thứ tự là đường tròn nội tiếp các tam giác ABC , ADB , ADC . Chứng minh : $r = r_1^2 + r_2^2$.



Hướng dẫn :

1) Dựa vào số đo cung ta thấy

$\widehat{C} = \widehat{DEB} \Rightarrow \widehat{C} + \widehat{DEF} = 180^0$

Nên tứ giác CDEF nội tiếp .

2) $\Delta BED \backsim \Delta BCQ$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BPE} = \widehat{BQC}$

$\Rightarrow \widehat{KPQ} = \widehat{KQP}$ hay ΔKPQ cân .

ΔCNK $\Delta MK \Rightarrow \widehat{EMK} = \widehat{CNK}$

$\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{BNM}$ hay ΔBMN cân . $\Rightarrow MN \perp PQ$ và MN cắt PQ là trung điểm của mỗi đường . Nên MNPQ là hình thoi.

3) $\Delta ABC \backsim \Delta DAB \backsim \Delta DAC \Rightarrow \frac{r}{BC} = \frac{r_1}{AB} = \frac{r_2}{AC} \Rightarrow \frac{r^2}{BC^2} = \frac{r_1^{\ 2}}{AB^2} = \frac{r_2^{\ 2}}{AC^2}$

$\Leftrightarrow \frac{r^2}{BC^2} = \frac{r_1^{\ 2} + r_2^{\ 2}}{AB^2 + AC^2} = \frac{r_1^{\ 2} + r_2^{\ 2}}{BC^2}$

$\Leftrightarrow r^2 = r_1^{\ 2} + r_2^{\ 2}$.

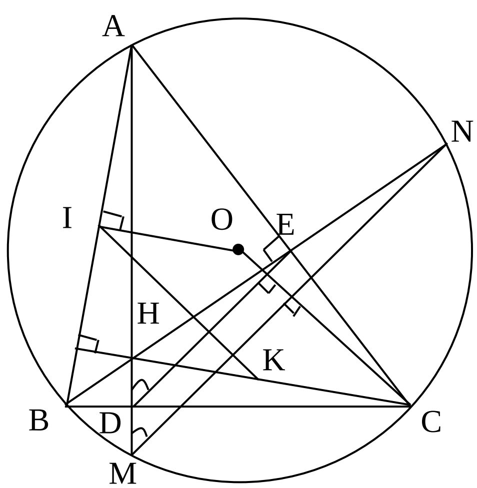
Bài 7 : Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O;R) . Hạ các đường cao AD , BE của tam giác . Các tia AD , BE lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai M , N . Chứng minh rằng :

a) Bốn điểm A , E , D , B nằm trên một đường tròn . TÌm tâm I của đường tròn đó .

b) MN // DE .

c) Cho (O) và dây AB cố định , điểm C di chuyển trên cung lớn AB . Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CED không đổi .

Hướng dẫn giải :



a) E,D cùng nhìn AB dưới một góc vuông nên tứ giác AEDB nội tiếp trong một đường tròn đường kính AB có I (trung điểm của AB) là tâm

b) Ta thấy : $\widehat{ABE} = \widehat{ADE}$ (chắn cung AE)

mà $\widehat{ABE} = \widehat{AMN}$ (chắn cung AN)

nên $\widehat{ADE} = \widehat{AMN}$ hay DE // MN .

c) Kẻ thêm hình như hình vẽ . Dựa vào góc nội tiếp của tứ giác AEBD suy ra được CN = CM nên $OC \perp MM \Rightarrow OC \perp DE$

Tứ giác HDCE nội tiếp đường tròn tâm K (trung điểm của HC) đây cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE $\Rightarrow$ KD = KE và ID = IE nên $IK \perp DE$ hay IK // OC và OI // CK nên OIKC là hình bình hành $\Rightarrow$ KC = OI không đổi .

Bài 8 : Cho tam giác đều nội tiếp đường tròn (O,R)

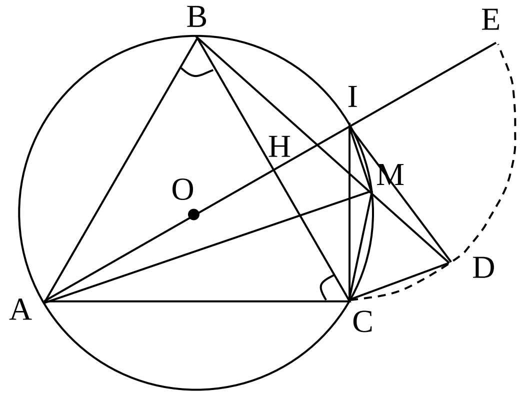
1) Tính theo chiều R độ dài cạnh và chiều cao của ΔABC .

2) Gọi M là điểm di động trên cung nhỏ BC ($M \neq B,C$) Trên tia đối của MB lấy MD = MC . Chứng tỏ ΔMCD đều .

3) CMR : M di động trên cung nhỏ BC thì D di chuyển trên một đường tròn cố định , xác định tâm và các vị trí giới hạn .

4) Xác định vị trí điểm M sao cho tổng S = MA + MB + MC là lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất của S theo R .

Hướng dẫn :



1) $AH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$ và $AB = AC = BC = R\sqrt{3}$

2) Có MC = MD (gt)

sđ $\overset{\frown}{BMC}$ = ½ sđ $\overset{\frown}{BAC}$ = ½ (360^0 : 3).2 = 120^0 .

$\Rightarrow \overset{\frown}{CMD} = 60^0$. Vậy ΔCMD đều

3) ΔIMC = ΔIMD (c.g.c) ⇒ IC = ID .

Khi M di động trên cung nhỏ BC thì D chạy trên đường tròn (I ; IC)

Khi M ≡ C ⇒ D ≡ C ; M ≡ I ⇒ D ≡ E .

4) ΔACM = ΔBCD (g.c.g) ⇒ AM = BD ⇒ S = MA + MB + MC = 2.AM ≤ 2.AI

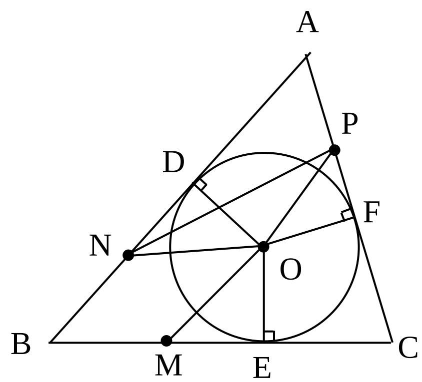
⇒ S ≤ 4R . S_{Max}= 4R khi AM là đường kính .

Bài 9 : Cho ΔABC ngoại tiếp (O) . Trên BC lấy M , trên BA lấy N , trên CA lấy P sao cho BM=BN và CM = CP . Chứng minh rằng :

a) O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMNP .

b) Tứ giác ANOP nội tiếp đường tròn .

c) Tìm vị trí M , N , P sao cho độ dài NP nhỏ nhất .



Hướng dẫn :

a) Từ tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau và giả thiết suy ra :

DN = EM = FP ⇒ ΔODA = ΔOEM = ΔOFP (c.g.c)

⇒ON = OM = OP hay O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMNP

b) Từ câu a) suy ra OND = OPF nên tứ giác ANOP nội tiếp .

c) Kẻ OH ⊥ NP .

Có NP = 2 .NH = 2. NO .cos$\overset{\frown}{HNO}$ = 2.NO.Cos(A/2)

= 2.OE .Cos (A/2) .

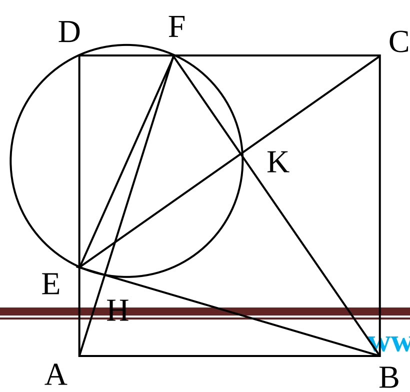
Vậy NP_{Min} = 2r.cos(A/2) .

Khi đó M , N , P trùng với các tiếp điểm .

Bài 10 : Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 3a . Lấy AE = a trên cạnh AD và DF = a trên cạnh DC . Nối AF và BE cắt nhau ở H .

a) Chứng minh : AF ⊥ BE .

b) Tính cạnh của tứ giác ABFE và đường chéo của nó theo a .



c) Tính theo a đoạn HE , HB .

d) Chứng minh : EDFH nội tiếp đường tròn . Đường tròn ấy cắt BF ở K . Tính theo a đoạn BK . Nhận xét gì về 3 điểm E , K ,C .

Hướng dẫn :

a) ΔADF = ΔBAE ⇒$\overset{\frown}{DAF} = \overset{\frown}{EBA}$ ⇒ BE ⊥ AF .

b) Pitago : BE = AF = $a\sqrt{10}$; EF = $a\sqrt{5}$; BF = $a\sqrt{13}$

c) Dùng hệ thức lượng : EH = $\frac{a\sqrt{10}}{10}$; HB = $\frac{9a\sqrt{10}}{10}$

d) Dựa vào tổng 2 góc đối bằng 180^0 nên EDFH nội tiếp.

$\Delta BEK \quad \Delta BFH \Rightarrow BK = \frac{BE.BH}{BF} = \frac{9a\sqrt{13}}{13}$

e) Dựa vào vuông góc : E , K , C thẳng hàng .