PHÒNG GD&ĐT THANH OAI

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
Năm học 2020 – 2021, môn Toán
Thời gian: 150 phút *(Không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: 25/11/2020
(Đề thi có 01 trang;
Người coi thi không giải thích gì thêm)

Bài 1: *(5 điểm)*

1. Cho biểu thức A = $\dfrac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$

a. Rút gọn biểu thức A

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của A

2. Chứng minh rằng: A= $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}<2$ (2020 chữ số 2)

Bài 2: *(5 điểm)*

1. Giải phương trình sau: $\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3$

2. Tìm các số nguyên x để biểu thức $x^4+2x^3+2x^2+x+3$ là một số chính phương.

Bài 3: *(4 điểm)*

1. Cho $P(x)=x^4+ax^3-bx^2+cx+d$, trong đó a, b, c, d là hằng số.

Biết P(-2) = 6; P(-4) = 12; P(-6) = 18. Tính $A=\dfrac{P(0)+P(-8)+437.P(-2)}{2020}$

2. Với các số dương a, b thỏa mãn $a^3+b^3+6ab\le 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{3}{ab}+ab$$

Bài 4: *(5 điểm)*

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O) có D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC

a) Chứng minh tam giác HAB và tam giác ODE đồng dạng

b) Kẻ các đường thẳng DM//OA, EN//OB, FG//OC ($M\in AH$; $N\in BH$; $G\in CH$). Chứng minh các đường thẳng DM, EN, FG đồng quy

2. Từ điểm M nằm trong tam giác ABC cho trước lần lượt vẽ các đường vuông góc MA’, MB’, MC’ đến BC, CA, AB. Tìm vị trí của M để tích MA’.MB’.MC’ đạt giá trị lớn nhất.

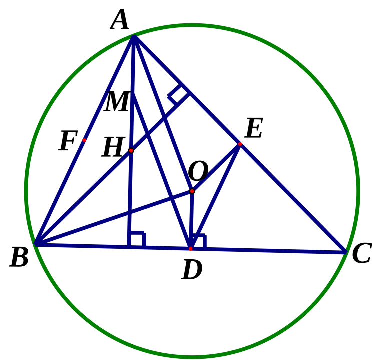
Bài 5: *(1 điểm)*

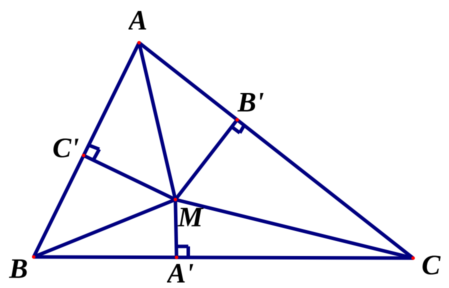
Cho dãy gồm 1000 số: 7, 77, 777, 7777, …, 777…7. Chứng minh trong dãy trên tồn tại ít nhất một số chia hết cho 2013.

\- Hết -

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
Bài 1 (5đ)	***1. a) 2,5 điểm*** ĐKXĐ : $x \ge 0$; $x \ne 9$ $A = \dfrac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \dfrac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ $A = \dfrac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \dfrac{2(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \dfrac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}$ $A = \dfrac{x\sqrt{x}-3-2x+12\sqrt{x}-18-x-4\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$ $A = \dfrac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \dfrac{(\sqrt{x}-3)(x+8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \dfrac{x+8}{\sqrt{x}+1}$	0,5 0,5 0,5 1
	1.b) 1,5 điểm $A = \dfrac{x-1+9}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1+\dfrac{9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1+\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}-2 \overset{Cosi}{\ge} 2.3-2=4$ Vậy giá trị nhỏ nhất của A = 4 $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \dfrac{9}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow (\sqrt{x}+1)^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x}+1=3 \Rightarrow x=4(t/m)$	1 0,5
	2. (1 điểm) $A_1 = \sqrt{2} < 2$ $A_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+A_1} < \sqrt{2+2} = 2$ $A_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2+A_2} < \sqrt{2+2} = 2$ ... $A_{2020} = A = \sqrt{2+A_{2019}} < \sqrt{2+2} = 2$ $\Rightarrow A = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} < 2$ (đpcm)	0,5 0,5
Bài 2 (5 điểm)	***1. (3 điểm)*** **ĐK:** $2 \le x \le 4$ Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt{x-2}-1+1-\sqrt{4-x} = 2x^2-5x-3$ $\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}-1} + \dfrac{x-3}{1+\sqrt{4-x}} = (x-3)(2x+1)$ $\Leftrightarrow (x-3)\left[\dfrac{1}{\sqrt{x-2}-1} + \dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}} - (2x+1)\right] = 0$ $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} + \dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}} - (2x+1) = 0 \end{array}\right.$ Với $2 \le x \le 4$ thì $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} \le 1; \dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}} \le 1; 2x+1 \ge 5$ nên $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} + \dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}} - (2x+1) < 0$ Từ đó suy ra: $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
	2. (2 điểm)	

	Đặt $x^4+2x^3+2x^2+x+3=y^2$ (với y là số tự nhiên) Ta có: $y^2=(x^4+2x^3+x^2)+(x^2+x+3)=(x^2+x)^2+(x^2+x+3)$ Ta sẽ chứng minh: $a^2<y^2<(a+2)^2$ với $a = x^2 + x$ Thật vậy: $y^2-a^2=x^2+x+3=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}>0 \Rightarrow y^2>a^2$ $(a+2)^2-y^2=3x^2+3x+1=3(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}>0 \Rightarrow y^2<(a+2)^2$ Do $a^2<y^2<(a+2)^2$ nên $y^2 = (a+1)^2$ Hay $(x^2+x)+(x^2+x+3)=(x^2+x+1)^2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$ $\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$ Thử lại: với x = 1 hoặc x = -2 biểu thức đã cho đều bằng $9=3^2$, thỏa mãn. Vậy $x \in \{1;-2\}$	0,5 0,5 0,5 0,5
Bài 3 (4 điểm)	***1. (2 điểm)*** Đặt Q(x) = P(x) +3x $\Rightarrow$ Q(-2)=Q(-4)=Q(-6)=0 $\Rightarrow$ -2;-4;-6 là nghiệm của Q(x), mà Q(x) là đa thức bậc 4 nên Q(x) có dạng: Q(x)= (x+2)(x+4)(x+6)(x-m) $\Rightarrow$ P(x)= (x+2)(x+4)(x+6)(x-m)-3x Tính được P(0)=48m; P(-8)= 408+48m $A=\frac{-48m+408+48m+437.6}{202}=\frac{3030}{2020}=\frac{3}{2}$	0,5 0,5 0,5 0,5
	2. (2 điểm) Ta có: $a^3+b^3+6ab\le 8 \Leftrightarrow (a+b-2)(a^2-ab+b^2+2a+2b+4)\le 0 \Rightarrow a+b\le 2$ $P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{3}{ab}+ab=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{ab}+ab+\frac{3}{2ab}$ $P\ge \frac{4}{a^2+b^2+2ab}+2+\frac{6}{(a+b)^2}\ge \frac{9}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a=b=1 Kết luận:	0,5 0,75 0,5 0,25
Bài 4 (5 điểm)	***1. (4 điểm)*** ***1.a (2,5 điểm)***  a) Chứng minh được ED//=$\frac{1}{2}$AB, OD//AH (cùng vuông góc BC), BH//OE (cùng vuông góc AC) $\Rightarrow ABH = DEO$; $BAH = EDO$ (góc có cạnh tương ứng song song) $\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle DEO$(g.g) (đpcm)	1 1 0,5

	1.b) (1,5 điểm) Từ câu a) suy ra: $OD // = \frac{1}{2}AH$ Chứng minh được tứ giác AMDO là hình bình hành suy ra OD=AM=MH, dẫn đến tứ giác MODH là hình bình hành. Nên DM đi qua trung điểm I của OH. Chứng minh tương tự có EN, FG đi qua I. Nên các đường thẳng DM, EN, FG đồng quy (đpcm)	0,5 0,5 0,5
	2. (1 điểm)  Đặt MA’=x, MB’=y, MC’=z; BC=a; AC=b; AB=c $S_{ABC} = S_{BMC} + S_{AMC} + S_{BMA} = \frac{1}{2}(ax + by + cz)$ $\Rightarrow ax + by + cz = 2S_{ABC}$ $MA'.MB'.MC' = xyz = \frac{1}{abc}(ax)(by)(cz) \le \frac{1}{abc}(\frac{ax+by+cz}{3})^3 = \frac{8S^3_{ABC}}{27abc}$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow$ ax=by=cz, suy ra diện tích các tam giác BMC, tam giác AMC, tam giác AMB bằng nhau, khi đó M là trọng tâm tam giác ABC. Vậy MA’.MB’.MC’ lớn nhất khi M là trọng tâm của tam giác ABC	0,5 0,5
Bài 5 (1 điểm)	Tách 2013 = 3.11.61 trong đó 3;11;61 đôi một nguyên tố cùng nhau Sử dụng điều kiện chia hết cho đồng thời 3 và 11, đó là những số có số chữ số là bội của 6. Đó là những số: 777777 (6 chữ số), 777777777777 (12 chữ số), 777…77 (996 chữ số) Số số hạng của dãy trên là (996-6) : 6 +1=166 Khi chia 166 số trên cho 61 thì có 166 số dư, mà số dư của các phép chia này chỉ nhận 61 giá trị từ 0 đến 60, nên theo nguyên lý Dirichle sẽ tồn tại 2 số trong dãy trên có cùng số dư khi chia cho 61 $\Rightarrow$ hiệu của hai số đó chia hết cho 61 Hiệu của hai số có dạng: $77...7.10^n$ (có k số 7, $6 \le k \le 990$) Mà $(10^n, 61)=1$ suy ra 77...7 chia hết cho 61 Vậy trong 1000 số đã cho tồn tại ít nhất một số chia hết cho 2013	0,5 0,5