CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC LỚP 11

Dạng ❶ Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Phương pháp giải: Để xét sự liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại điểm tại x_0 ta thực hiện các bước :

- **Bước 1 :** Tính $f(x_0)$
- **Bước 2 :** Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (trong nhiều trường hợp để tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ta cần tính $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
- **Bước 3 :** So sánh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ và $f(x_0)$ rồi rút ra kết luận.

Chú ý: *hàm số không liên tục tại x_0 thì được gọi là gián đoạn tại x_0*

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra :

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1} & khi\ x\neq 1 \\ -1 & khi\ x=1 \end{cases}$ (tại $x=1$)

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & khi\ x\neq 1 \\ \dfrac{1}{4} & khi\ x=1 \end{cases}$ (tại $x=1$)

Lời giải

a) Ta có: $f(-1)=\dfrac{-1+3}{-1-1}=-1$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+3}{x-1}=-1=f(-1)\Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x=-1$

b) Ta có : $f(1)=\dfrac{1}{4}$.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=f(1)$$

☞ Vậy hàm số liên tục tại $x=1$.

Ví dụ 2

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & khi\ x\neq 2\\ 1 & khi\ x=2\end{cases}$ (tại $x=2$) b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & khi\ x>5\\ (x-5)^2+3 & khi\ x\leq 5\end{cases}$ (tại $x=5$)

Lời giải

a) Ta có: $f(2)=1$

- Mà $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(-x^2+3x-1)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2+3x-1}{(x-1)}=1=f(2)$
- Vậy hàm số liên tục tại $x=2$

b) Ta có: $f(5)=(5-5)^2+3=3$.

- Lại có $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\left[(x-5)^2+3\right]=3$
- Và $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}{\left(\sqrt{2x-1}-3\right)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{\sqrt{2x-1}+3}{2}=3$
- Từ đó $f(5)=\lim\limits_{x\to 5} f(x)\Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x=5$.

Ví dụ 3

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & khi\ x\leq 0\\ \sqrt{x+1} & khi\ x>0\end{cases}$ (tại $x=0$) b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & khi\ x<1\\ -2x & khi\ x\geq 1\end{cases}$ (tại $x=1$)

Lời giải

a) Ta có: $f(0)=1-\cos 0=0$.

- Lại có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-\cos x)\end{cases}$ nên không tồn tại giới hạn hàm số tại $x=0$
- Vậy hàm số không liên tục tại $x=0$.

b) Ta có: $f(1)=-2.1=-2$.

- Lại có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x)=-2\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{2-x}+1}{-1}=-2\end{cases}$
- Rõ ràng $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ nên hàm số liên tục tại $x=1$.

Dạng 2 Xét tính liên tục của hàm số trên khoảng, đoạn

Phương pháp

- Để chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên một khoảng, đoạn ta dùng các định nghĩa về hàm số liên tục trên khoảng, đoạn và các nhận xét để suy ra kết luận.
- Khi nói xét tính liên tục của hàm số (mà không nói rõ gì hơn) thì ta hiểu phải xét tính liên tục trên tập xác định của nó.
- Tìm các điểm gián đoạn của hàm số tức là xét xem trên tập xác định của nó hàm số không liên tục tại các điểm nào

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x+2}{x^3+1} & khi\ x\neq -1 \\ \dfrac{4}{3} & khi\ x=-1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+4 & khi\ x<2 \\ 5 & khi\ x=2 \\ 2x+1 & khi\ x>2 \end{cases}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1+(x+1)}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\left(1+\dfrac{1}{x^2-x+1}\right)=\dfrac{4}{3}$

Do đó, hàm số này liên tục tại $x=-1$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-3x+4\right)$ =2; $\lim\limits_{x\to 2^+}(2x+1)=5$

- Mà $f(x)=5$ khi $x=2$ nên $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

Do đó, hàm số đã cho liên tục khi $x\geq 2$

Ví dụ 2

Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & khi\ x\neq -2 \\ -4 & khi\ x=-2 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & khi\ x\neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & khi\ x=\sqrt{2} \end{cases}$

Lời giải

a) Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x\neq -2$ (1)

- $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4.$

- $f(-2) = -4 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = -2$ $\quad (2)$
- Từ (1) và (2) ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq \sqrt{2}$ $\quad (1)$

- $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} = \lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)}{x - \sqrt{2}} = \lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \left(x + \sqrt{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$
- $f\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f(x) = f\left(\sqrt{2}\right) \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = \sqrt{2}$ $\quad (2)$
- Từ (1) và (2) ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3

Tìm các giá trị của m để các hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & khi\ x \neq -2 \\ m & khi\ x = -2 \end{cases}$ $\qquad$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & khi\ x < 1 \\ 2 & khi\ x = 1 \\ mx + 1 & khi\ x > 1 \end{cases}$

Lời giải

a) Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq 2$.

- Do đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ $\quad (1)$
- Ta có $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2}(x+1) = 2 + 1 = 3;\ f(2) = m.$
- Khi đó $(1) \Leftrightarrow 3 = m \Leftrightarrow m = 3$.

b) Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+}(mx + 1) = m + 1;\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-}\left(x^2 + x\right) = 1 + 1 = 2;\ f(1) = 2.$

- Từ YCBT $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1.$

Dạng 3: *Ứng dụng tính liên tục trong giải phương trình*

Phương pháp giải:

- Biến đổi phương trình về dạng: $f(x)=0$
- Tìm hai số a, b sao cho $f(a).f(b)<0$ (Dùng chức nắng TABLE của máy tính (Mode 7) tìm cho nhanh)
- Chứng minh $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ từ đó suy ra $f(x)=0$ có nghiệm

Chú ý:

- Nếu $f(a).f(b)<0$ thì phương trình có nghiệm thuộc $[a;b]$
- Để chứng minh $f(x)=0$ có ít nhất n nghiệm trên $[a;b]$, ta chia đoạn $[a;b]$ thành n khoảng nhỏ rời nhau, rồi chứng minh trên mỗi khoảng đó phương trình có ít nhất một nghiệm.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a) $x^3-3x+1=0$ b) $2x+6\sqrt[3]{1-x}=3$

Lời giải

a) Dễ thấy hàm $f(x)=x^3-3x+1$ liên tục trên R. Ta có:

- $\begin{cases} f(-2)=-1 \\ f(-1)=3 \end{cases} \Rightarrow f(-2).f(-1)<0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_1\in(-2;-1)$: $f(a_1)=0(1)$.
- $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1)<0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_2\in(0;1)$: $f(a_2)=0(2)$.
- $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(2)=3 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2)<0 \Rightarrow$ tồn tại một số $a_3\in(1;2)$: $f(a_3)=0(3)$.

- Do ba khoảng $(-2;-1)$, $(0;1)$ và $(1;2)$ đôi một không giao nhau nên phương trình $x^3-3x+1=0$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt.
- Mà phương trình bậc 3 thì chỉ có tối đa là 3 nghiệm nên $x^3-3x+1=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

b) Đặt $\sqrt[3]{1-x}=t \Leftrightarrow x=1-t^3 \Rightarrow 2t^3-6t+1=0$.

- Xét hàm số $f(t)=2t^3-6t+1$ liên tục trên R.
- Ta có: $\begin{cases} f(-2).f(-1)=-3.5<0 \\ f(0).f(1)=1.(-3)<0 \\ f(1).f(2)=-3.5<0 \end{cases} \Rightarrow$ tồn tại 3 số $t_1,\ t_2$ và t_3 lần lượt thuộc 3 khoảng đôi một không giao nhau là $(-2;-1)$, $(0;1)$ và $(1;2)$ sao cho $f(t_1)=f(t_2)=f(t_3)=0$ và do đây là phương trình bậc 3 nên $f(t)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.
- Ứng với mỗi giá trị $t_1,\ t_2$ và t_3 ta tìm được duy nhất một giá trị x thỏa mãn $x=1-t^3$ và hiển nhiên 3 giá trị này khác nhau nên PT ban đầu có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2

Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^5-3x+3=0$ b) $x^4+x^3-3x^2+x+1=0$

Lời giải

a) Xét $f(x)=x^5-3x+3$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow$ tồn tại một số $x_1>0$ sao cho $f(x_1)>0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow$ tồn tại một số $x_2<0$ sao cho $f(x_2)<0$.
- Từ đó $f(x_1).f(x_2)<0 \Rightarrow$ luôn tồn tại một số $x_0\in(x_2;x_1): f(x_0)=0$ nên phương trình $x^5-3x+3=0$ luôn có nghiệm.

b) Xét $f(x)=x^4+x^3-3x^2+x+1$ liên tục trên R

- Ta có: $f(-1)=-3<0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow$ tồn tại một số $a>0$ sao cho $f(a)>0$.
- Từ đó $\Rightarrow x^2-x-3=0$ nên luôn tồn tại một số $x_0\in(0;a)$ thỏa mãn $f(x_0)=0$ nên phương trình $x^4+x^3-3x^2+x+1=0$ luôn có nghiệm.

Ví dụ 3

Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số:

a) $(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3=0$

b) $\cos x+m\cos 2x=0$

c) $m\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)=2\sin 5x+1$

Lời giải

a) Xét $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$. Phương trình có dạng $x^2-x-3=0$ nên PT có nghiệm

- Với $\begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 1 \end{cases}$ giả sử $f(x)=(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3$

- $f\left(x\right)$ liên tục trên R nên $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-1;0\right]$
- Ta có $f\left(-1\right)=m^2+1>0;\ \mathrm{f}\left(0\right)=-1<0\Rightarrow f\left(-1\right).\mathrm{f}\left(0\right)<0$
- Do đó PT luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m

b) Đặt $f\left(x\right)=\cos x+m\cos 2x\Rightarrow f\left(x\right)$ liên tục trên R

- Ta có $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}>0;\ \mathrm{f}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}<0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right).\mathrm{f}\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0$
- Do đó PT luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m

c) Đặt $f\left(x\right)=m\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)-2\sin 5x-1\Rightarrow f\left(x\right)$ liên tục trên R

- Ta có $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}-1<0;\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1>0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right).\mathrm{f}\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0$
- Do đó PT luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m