CÁC DẠNG TOÁN VỀ GIỚI HẠN DÃY SỐ LỚP 11

Dạng ①	*Chứng minh dãy số có giới hạn là 0*

✧ ***Phương pháp:***

❍Cách 1: Áp dụng định nghĩa.

❍Cách 2: Sử dụng các định lí sau:

∗ Nếu k là số thực dương thì $\lim \frac{1}{n^k} = 0$.

∗ Với hai dãy số (u_n) và (v_n), nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

∗ Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

☒. Ví dụ minh họa:

Ví dụ ❶

Chứng minh các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn là 0.

a). $u_n = \frac{(-1)^n}{4n+5}$ b). $u_n = \frac{\cos 4n}{n+3}$ c). $u_n = \frac{1+\cos n^3}{2n+3}$ d). $u_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}$

⊡ Lời giải

a). Với mỗi số dương ε tùy ý, cho trước, ta có $|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{4n+5}\right| = \frac{1}{4n+5} < \varepsilon \Leftrightarrow 4n+5 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 5\right)$.

Suy ra với mỗi số dương cho trước, thì với mọi số tự nhiên $n > \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 5\right)$ ta đều có $|u_n| < \varepsilon$. Vậy $\lim u_n = 0$.

b). Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $|\cos 4n| \le 1 \Rightarrow |u_n| = \left|\frac{\cos 4n}{n+3}\right| \le \left|\frac{1}{n+3}\right| \le \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$.Áp dụng định lí "Nếu k là một số thực dương cho trước thì $\lim \frac{1}{n^k} = 0$" ta được $\lim \frac{1}{n} = 0$. Từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

c). Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $|\cos n^3| \le 1 \Rightarrow |u_n| = \left|\frac{1+\cos n^3}{2n+3}\right| \le \left|\frac{2}{2n+3}\right| \le \left|\frac{2}{2n}\right| = \frac{1}{n}$.Áp dụng định lí "Nếu k là một số thực dương cho trước thì $\lim \frac{1}{n^k} = 0$" ta được $\lim \frac{1}{n} = 0$. Từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

d). Ta có $|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right| \le \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Vì $\lim \frac{1}{2^n} = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

Dạng ② *Dùng định nghĩa chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn L.*

✧ ***Phương pháp:***

Chứng minh $\lim|u_n - L| = 0$.

☒. Ví dụ minh họa:

Ví dụ ❶

Chứng minh:

a). $u_n = \dfrac{2n+3}{4n+5} = \dfrac{1}{2}$ b). $\lim\dfrac{4.3^n - 5.2^n}{6.3^n + 3.2^n} = \dfrac{2}{3}$ c). $\lim\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right) = 1$

.

⊡ Lời giải

a). gọi $u_n = \dfrac{2n+3}{4n+5}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $\left|u_n - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{2n+3}{4n+5} - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{1}{8n+10}\right| < \dfrac{1}{n}$.

Vì $\lim\dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim\left(u_n - \dfrac{1}{2}\right) = 0$, suy ra $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

b). Gọi $u_n = \dfrac{4.3^n - 5.2^n}{6.3^n + 3.2^n}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $\left|u_n - \dfrac{2}{3}\right| = \left|\dfrac{4.3^n - 5.2^n}{6.3^n + 3.2^n} - \dfrac{2}{3}\right| = \left|\dfrac{12.3^n - 15.2^n - 12.3^n - 6.2^n}{3(6.3^n + 3.2^n)}\right|$

$= \left|\dfrac{-7.2^n}{6.3^n + 3.2^n}\right| = \dfrac{7.2^n}{6.3^n + 3.2^n} < \dfrac{7.2^n}{6.3^n} = \dfrac{7}{6}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Vì $\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ nên $\lim\left(u_n - \dfrac{2}{3}\right) = 0$. Do đó $\lim u_n = \dfrac{2}{3}$.

c). Gọi $u_n = \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $|u_n - 1| = \left|\sqrt{n^2+2n} - (n+1)\right|$

$= \left|\dfrac{\left[\sqrt{n^2+2n} - (n+1)\right]\left[\sqrt{n^2+2n} + (n+1)\right]}{\sqrt{n^2+2n} + (n+1)}\right| = \left|\dfrac{\left(\sqrt{n^2+2n}\right)^2 - (n+1)^2}{\sqrt{n^2+2n} + (n+1)}\right|$

$= \left|\dfrac{-1}{\sqrt{n^2+2n} + (n+1)}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n} + (n+1)} < \dfrac{1}{n}$. Vì $\lim\dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim(u_n - 1) = 0$. Do đó $\lim u_n = 1$.

Dạng ③ *Tìm giới hạn của dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn:*

✧ ***Phương pháp:***

❍DẠNG 1: u_n là một phân thức hữu tỉ dạng $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n), Q(n)$ là hai đa thức của n).

Phương pháp: Chia cả tử và mẫu cho n^k với n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$(hoặc rút n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ ra làm nhân tử) sau đó áp dụng các định lý về giới hạn.

❍**DẠNG 2:** u_n **là một phân thức hữu tỉ dạng** $u_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ **(trong đó** $P(n),Q(n)$ **là các biểu thức chứa căn của n).**

❍**DẠNG 3:** u_n **là một phân thức hữu tỉ dạng** $u_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ **(trong đó** $P(n),Q(n)$ **là các biểu thức chứa hàm mũ** a^n,b^n,c^n **,…. Chia cả tử và mẫu cho** a^n **với a là cơ số lớn nhất).**

❍**DẠNG 4 : Nhân lượng liên hợp:**

PHƯƠNG PHÁP : Sử dụng các công thức nhân lượng liên hợp sau:

- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)\to\left[\begin{array}{l} a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b} \\ a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}\end{array}\right.$
- $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ • $a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$.
- $\sqrt[3]{a}-b=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}=\dfrac{a-b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}$.
- $\sqrt[3]{a}+b=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}=\dfrac{a+b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}$
- $a-\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(a-\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a^3-b}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$
- $a+\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(a+\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a^3+b}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$
- $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a-b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$.
- $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a+b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$

❍**DẠNG 5 : TÍNH GIỚI HẠN DỰA VÀO ĐỊNH LÍ KẸP:**

PHƯƠNG PHÁP: Dựa vào định lí: Cho ba dãy số $(u_n),(v_n)$ và (w_n). Nếu $u_n\le v_n\le w_n,(\forall n)$ và $\lim u_n=\lim w_n=a,(a\in\mathbb{R})$ thì $\lim v_n=a$.

❍**DẠNG 6:** u_n **được xác định bởi một công thức truy hồi.**

Phương pháp:

Tìm công thức tổng quát của u_n theo n, sau đó tìm $\lim u_n$.

Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn (có nghĩa chứng minh dãy số tăng và bị chặn trên hoặc dãy số giảm và bị chặn dưới) sau đó dựa vào hệ thức truy hồi để tìm giới hạn.

❍**DẠNG 7: DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC:**

☒**. Ví dụ minh họa:**

Ví dụ 1

Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\dfrac{2n^2-3n+1}{5n^2+3}$ b). $u_n=\dfrac{-2n^3+3n^2+4}{n^4+4n^3+n}$ c). $u_n=\dfrac{2n^4+3n^2-n}{(2n+1)(1-3n)(2n^2+1)}$

d). $u_n=\dfrac{1}{n^2+2n}-\dfrac{1}{2n^2+3}$ e). $u_n=\dfrac{(2n-1)^2(3-4n^3)}{(4n+2)^3(2-n)^2}$ f). $u_n=\dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+2\sqrt{n}-3}$

Lời giải

a). Ta thấy n^2 là lũy thừa cao nhất của tử và mẫu, nên chia cả tử và mẫu của u_n cho n^2 được:

$u_n=\dfrac{2n^2-3n+1}{5n^2+3}=\dfrac{\frac{2n^2-3n+1}{n^2}}{\frac{5n^2+3}{n^2}}=\dfrac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{3}{n^2}}$. Ta có $\lim\dfrac{3}{n}=0,\lim\dfrac{1}{n^2}=0$ và $\lim\dfrac{3}{n^2}=0$ nên

$\lim u_n=\dfrac{2-0+0}{5+0}=\dfrac{2}{5}$.

b). Dễ dàng thấy n^4 là lũy thừa cao nhất của tử và mẫu, nên chia cả tử và mẫu của u_n cho n^4 được:

$u_n=\dfrac{-2n^3+3n^2+4}{n^4+4n^3+n}=\dfrac{\frac{-2n^3+3n^2+4}{n^4}}{\frac{n^4+4n^3+n}{n^4}}=\dfrac{-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^4}}{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^3}}$. Ta có $\lim\dfrac{2}{n}=0$, $\lim\dfrac{3}{n^2}=0$, $\lim\dfrac{4}{n^4}=0$, $\lim\dfrac{4}{n}=0$ và

$\lim\dfrac{1}{n^3}=0$. Do đó $\lim u_n=\dfrac{0+0+0}{1+0+0}=0$.

c). Có $2n^4+3n^2-n=n^4\left(\dfrac{2n^4+3n^2-n}{n^4}\right)=n^4\left(2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^3}\right)$, $2n+1=n\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)=n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$,

$1-3n=n\left(\dfrac{1-3n}{n}\right)=n\left(\dfrac{1}{n}-3\right)$ và $2n^2+1=n^2\left(\dfrac{2n^2+1}{n^2}\right)=n^2\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)$. Từ đó .

$u_n=\dfrac{n^4\left(2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)n\left(\frac{1}{n}-3\right)n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{n^4\left(2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^4\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}$. Vì $\lim\dfrac{3}{n}=0$

, $\lim\dfrac{1}{n^3}=0$, $\lim\dfrac{1}{n}=0$ và $\lim\dfrac{1}{n^2}=0$. Nên $\lim u_n=\dfrac{2+0-0}{(2+0)(0-3)(2+0)}=-\dfrac{1}{6}$.

d). Bước đầu tiên qui đồng mẫu $u_n=\dfrac{1}{n^2+2n}-\dfrac{1}{2n^2+3}=\dfrac{n^2-2n+3}{(n^2+2n)(2n^2+3)}$.

Ta có $n^2-2n+3=n^2\left(\frac{n^2-2n+3}{n^2}\right)=n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)$, $n^2+2n=n^2\left(\frac{n^2+2n}{n^2}\right)=n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)$ và

$2n^2+3=n^2\left(\frac{2n^2+3}{n^2}\right)=n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)$. Từ đó $u_n=\dfrac{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{1}{n^2}\cdot\dfrac{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}$. Vì

$\lim\frac{2}{n}=0$, $\lim\frac{3}{n^2}=0$, $\lim\frac{3}{n^2}=0$ và $\lim\frac{1}{n^2}=0$. Do đó $\lim u_n=0.\frac{1-0+0}{(1+0)(2+0)}=0$.

e). $u_n=\dfrac{(2n-1)^2\left(3-4n^3\right)}{(4n+2)^3(2-n)^2}$. Ta có , $3-4n^3=n^3\left(\frac{3-4n^3}{n^3}\right)=n^3\left(\frac{3}{n^3}-4\right)$,

$(4n+2)^3=\left[n\left(\frac{4n+2}{n}\right)\right]^3=n^3\left(4+\frac{2}{n}\right)^3$ và $(2-n)^2=\left[n\left(\frac{2-n}{n}\right)\right]^2=n^2\left(\frac{2}{n}-1\right)^2$.

Từ đó $u_n=\dfrac{n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)^2n^3\left(\frac{3}{n^3}-4\right)}{n^3\left(4+\frac{2}{n}\right)^3n^2\left(\frac{2}{n}-1\right)^2}=\dfrac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{3}{n^3}-4\right)}{\left(4+\frac{2}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}-1\right)^2}$, mà $\lim\frac{1}{n}=0$, $\lim\frac{3}{n^3}=0$, $\lim\frac{2}{n}=0$. Do đó

$\lim u_n=\dfrac{(2-0)^2(0-4)}{(4+0)^3(0-2)^2}=-\frac{1}{16}$.

f). $u_n=\dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+2\sqrt{n}-3}=\dfrac{\frac{2n\sqrt{n}+1}{n^2}}{\frac{n^2+2\sqrt{n}-3}{n^2}}=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n\sqrt{n}}-\frac{3}{n^2}}$. Mà $\lim\frac{2}{\sqrt{n}}=0$, $\lim\frac{1}{n^2}=0$, $\lim\frac{2}{n\sqrt{n}}=0$, $\lim\frac{3}{n^2}=0$.

Ví dụ 2

Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\dfrac{\sqrt{4n^2-n+1}-n}{\sqrt{9n^2+3n}}$ b). $u_n=\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}$

c). $u_n=\dfrac{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n}-\sqrt[4]{n^4+1}}$ d). $u_n=\dfrac{\sqrt{n^3+n}+\sqrt[3]{n^3+3n}}{\sqrt[4]{16n^4+1}}$

Lời giải

a). $u_n=\dfrac{\sqrt{4n^2-n+1}-n}{\sqrt{9n^2+3n}}=\dfrac{\sqrt{n^2\left(\frac{4n^2-n+1}{n^2}\right)}-n}{\sqrt{n^2\left(\frac{9n^2+3n}{n^2}\right)}}=\dfrac{n\sqrt{4-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-n}{n\sqrt{9+\frac{3}{n}}}=\dfrac{\sqrt{4-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-1}{\sqrt{9+\frac{3}{n}}}$. Vì có $\lim\frac{1}{n}=0$,

$\lim\frac{1}{n^2}=0$, và $\lim\frac{3}{n}=0$. Nên $\lim u_n=\dfrac{\sqrt{4-0+0}-1}{\sqrt{9+0}}=\frac{1}{3}$.

b). $u_n=\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}=\dfrac{\sqrt{n\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)}-\sqrt{n\left(\dfrac{n+3}{n}\right)}}{\sqrt{n\left(\dfrac{4n-5}{n}\right)}}=\dfrac{\sqrt{n}.\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{n}.\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}}{\sqrt{n}.\sqrt{4-\dfrac{5}{n}}}=\dfrac{\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}}{\sqrt{4-\dfrac{5}{n}}}$. Vì có $\lim\dfrac{1}{n}=0,\ \lim\dfrac{3}{n}=0$ và $\lim\dfrac{5}{n}=0$.

Từ đó có $\lim u_n=\dfrac{\sqrt{2+0}-\sqrt{1+0}}{\sqrt{4-0}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

c). Ta có $u_n=\dfrac{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n}-\sqrt[4]{n^4+1}}=\dfrac{\sqrt{n^2\left(\dfrac{4n^2-1}{n^2}\right)}+\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{8n^3+2n^2-3}{n^3}\right)}}{\sqrt{n^2\left(\dfrac{16n^2+4n}{n^2}\right)}+\sqrt[4]{n^4\left(\dfrac{n^4+1}{n^4}\right)}}$

$=\dfrac{n.\sqrt{4-\dfrac{1}{n^2}}+n.\sqrt[3]{8+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^3}}}{n.\sqrt{16+\dfrac{4}{n}}+n.\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}}=\dfrac{\sqrt{4-\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{8+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^3}}}{\sqrt{16+\dfrac{4}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}}$. Vì có $\lim\dfrac{1}{n^2}=0,\ \lim\dfrac{2}{n}=0,\ \lim\dfrac{3}{n^3}=0,\ \lim\dfrac{4}{n}=0$ và $\lim\dfrac{1}{n^4}=0$. Từ đó suy ra $\lim u_n=\dfrac{\sqrt{4-0}+\sqrt[3]{8+0-0}}{\sqrt{16+0}+\sqrt{1+0}}=\dfrac{4}{5}$.

d). Ta có $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt[3]{n^3+3n}}{\sqrt[4]{16n^4+1}}=\dfrac{\sqrt{n^2\left(\dfrac{n^2+n}{n^2}\right)}+\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{n^3+3n}{n^3}\right)}}{\sqrt[4]{n^4\left(\dfrac{16n^4+1}{n^4}\right)}}$

$=\dfrac{n.\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+n.\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^2}}}{n.\sqrt[4]{16+\dfrac{1}{n^4}}}=\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^2}}}{\sqrt[4]{16+\dfrac{1}{n^4}}}$. Vì có $\lim\dfrac{1}{n}=0,\ \lim\dfrac{3}{n^2}=0$, và $\lim\dfrac{1}{n^4}=0$. Nên $\lim u_n=\dfrac{\sqrt{1+0}+\sqrt[3]{1+0}}{\sqrt[4]{16+0}}=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 3

Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\dfrac{2^n+4^n}{4^n-3^n}$ b). $u_n=\dfrac{3.2^n-5^n}{5.4^n+6.5^n}$ c). $u_n=\dfrac{4^{n+2}+6^{n+1}}{5^{n-1}+2.6^{n+3}}$

d). $u_n=\dfrac{\sqrt{2}^{n+2}+1}{3^{\frac{n}{2}}+2}$ e). $u_n=\dfrac{(-3)^n-4.5^{n+1}}{2.4^n+3.5^n}$ f). $u_n=\dfrac{2^n-3^n+4.5^{n+2}}{2^{n+1}+3^{n+2}+5^{n+1}}$

Lời giải

a).Ta có $u_n=\dfrac{2^n+4^n}{4^n-3^n}=\dfrac{\dfrac{2^n+4^n}{4^n}}{\dfrac{4^n-3^n}{4^n}}=\dfrac{\dfrac{2^n}{4^n}+\dfrac{4^n}{4^n}}{\dfrac{4^n}{4^n}-\dfrac{3^n}{4^n}}=\dfrac{\left(\dfrac{2}{4}\right)^n+1}{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$. Ta có $\lim\left(\dfrac{2}{4}\right)^n=0$ và $\lim\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0$. Nên

$\lim u_n=\dfrac{0+1}{1-0}=1$.

b). Ta có $u_n=\dfrac{3.2^n-5^n}{5.4^n+6.5^n}=\dfrac{\dfrac{3.2^n-5^n}{5^n}}{\dfrac{5.4^n+6.5^n}{5^n}}=\dfrac{\dfrac{3.2^n}{5^n}-\dfrac{5^n}{5^n}}{\dfrac{5.4^n}{5^n}+\dfrac{6.5^n}{5^n}}=\dfrac{3\left(\dfrac{2}{5}\right)^n-1}{5\left(\dfrac{4}{5}\right)^n+6}$. Ta có $\lim\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$ và $\lim\left(\dfrac{4}{5}\right)^n=0$.

Do đó $\lim u_n=\dfrac{3.0-1}{5.0+6}=-\dfrac{1}{6}$.

c). Ta có $u_n=\dfrac{4^{n+2}+6^{n+1}}{5^{n-1}+2.6^{n+3}}=\dfrac{4^n.4^2+6^n.6}{5^n.5^{-1}+2.6^n.6^3}=\dfrac{\dfrac{4^n.4^2+6^n.6}{6^n}}{\dfrac{5^n.5^{-1}+2.6^n.6^3}{6^n}}=\dfrac{\dfrac{4^n.4^2}{6^n}+\dfrac{6^n.6}{6^n}}{\dfrac{5^n.5^{-1}}{6^n}+\dfrac{2.6^n.6^3}{6^n}}$

$=\dfrac{4^2\left(\dfrac{4}{6}\right)^n+6}{5^{-1}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n+2.6^3}$. Ta có $\lim\left(\dfrac{4}{6}\right)^n=0$ và $\lim\left(\dfrac{5}{6}\right)^n=0$.

Do đó $\lim u_n=\dfrac{4^2.0+6}{5^{-1}.0+2.6^3}=\dfrac{1}{72}$.

d). Ta có $u_n=\dfrac{\sqrt{2}^{n+2}+1}{3^{\frac{n}{2}}+2}=\dfrac{2^{\frac{n}{2}+1}+1}{3^{\frac{n}{2}}+2}=\dfrac{2.2^{\frac{n}{2}}+1}{3^{\frac{n}{2}}+2}=\dfrac{\dfrac{2.2^{\frac{n}{2}}+1}{3^{\frac{n}{2}}}}{\dfrac{3^{\frac{n}{2}}+2}{3^{\frac{n}{2}}}}=\dfrac{2.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}+\dfrac{1}{3^{\frac{n}{2}}}}{1+\dfrac{2}{3^{\frac{n}{2}}}}$. Vì $\left|\dfrac{2}{3}\right|<1\Rightarrow\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}=0$,

$\lim\dfrac{1}{3^{\frac{n}{2}}}=0$ và $\lim\dfrac{2}{3^{\frac{n}{2}}}=0$. Do đó $\lim u_n=\dfrac{2.0+0}{1+0}=0$.

e). Ta có : $u_n=\dfrac{(-3)^n-4.5^{n+1}}{2.4^n+3.5^n}=\dfrac{(-3)^n-20.5^n}{2.4^n+3.5^n}=\dfrac{\dfrac{(-3)^n-20.5^n}{5^n}}{\dfrac{2.4^n+3.5^n}{5^n}}=\dfrac{\dfrac{(-3)^n}{5^n}-20.\dfrac{5^n}{5^n}}{2.\dfrac{4^n}{5^n}+3.\dfrac{5^n}{5^n}}=\dfrac{\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n-20}{2.\left(\dfrac{4}{5}\right)^n+3}$, mà

$\lim\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n=0$ và $\lim\left(\dfrac{4}{5}\right)^n=0$. Do đó $\lim u_n=\dfrac{0-20}{2.0+3}=-\dfrac{20}{3}$.

f). Ta có $u_n=\dfrac{2^n-3^n+4.5^{n+2}}{2^{n+1}+3^{n+2}+5^{n+1}}=\dfrac{2^n-3^n+100.5^n}{2.2^n+9.3^n+5.5^n}=\dfrac{\dfrac{2^n-3^n+100.5^n}{5^n}}{\dfrac{2.2^n+9.3^n+5.5^n}{5^n}}$

$=\dfrac{\dfrac{2^n}{5^n}-\dfrac{3^n}{5^n}+100.\dfrac{5^n}{5^n}}{2.\dfrac{2^n}{5^n}+9.\dfrac{3^n}{5^n}+5.\dfrac{5^n}{5^n}}=\dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+100}{2.\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+9.\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+5}$. Vì $\lim\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$ và $\lim\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$ nên

$\lim u_n=\dfrac{0-0+100}{2.0+9.0+5}=20$.

Ví dụ 4

Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n$

b). $u_n=\sqrt{9n^2+3n-4}-3n+2$

c). $u_n=\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n$

d). $u_n=\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n+3$

e). $.u_n=\sqrt{4n^2+3n+7}-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}$.

f). $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)$

Lời giải

a). Ta có $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n=\dfrac{\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=\dfrac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}$. Và có

$3n+5=n\left(\dfrac{3n+5}{n}\right)=n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)$ và $\sqrt{n^2+3n+5}=\sqrt{n^2\left(\dfrac{n^2+3n+5}{n^2}\right)}=n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}$.

Do đó $u_n=\dfrac{n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)}{n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+n}=\dfrac{3+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+1}$, vì $\lim\dfrac{5}{n}=0$, $\lim\dfrac{3}{n}=0$ và $\lim\dfrac{5}{n^2}=0$. Nên $\lim u_n=\dfrac{3}{2}$.

b). $u_n=\sqrt{9n^2+3n-4}-3n+2=\dfrac{\left(\sqrt{9n^2+3n-4}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2+3n-4}+3n\right)}{\sqrt{9n^2+3n-4}+3n}+2=\dfrac{3n-4}{\sqrt{9n^2+3n-4}+3n}+2$. Ta có $3n-2=n\left(\dfrac{3n-2}{n}\right)=n\left(3-\dfrac{2}{n}\right)$ và $\sqrt{9n^2+3n-4}=\sqrt{n^2\left(\dfrac{9n^2+3n-4}{n^2}\right)}=n\sqrt{9+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}$. Từ đó suy ra

$u_n=\dfrac{n\left(3-\dfrac{2}{n}\right)}{n\sqrt{9+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}+3n}+2=\dfrac{3-\dfrac{2}{n}}{\sqrt{9+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}+3}+2$, vì $\lim\dfrac{2}{n}=0$, $\lim\dfrac{3}{n}=0$ và $\lim\dfrac{4}{n^2}=0$. Nên

$\lim u_n=\dfrac{3-0}{\sqrt{9+0-0}+3}=\dfrac{1}{2}$.

c). $u_n=\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n=\dfrac{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)\left[\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}=\dfrac{3n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}$.

Ta có $\sqrt[3]{n^3+3n^2}=\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{n^3+3n^2}{n^3}\right)}=n.\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}$. Do đó

$u_n=\dfrac{3n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}\right)^2+n^2.\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}+n^2}=\dfrac{3}{\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}+1}$, ta có $\lim\dfrac{3}{n}=0$. Nên $\lim u_n=1$

d). $u_n=\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n+3$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n\right)\left[\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}\right)^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}\right)^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2}+3$$

$$=\frac{4n^2+2}{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}\right)^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2}+3.$$

Ta có $\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}=\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{8n^3+4n^2+2}{n^3}\right)}=n\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}$. Do đó

$u_n=\dfrac{n^2\left(4+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}\right)^2+2n^2.\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}+4n^2}=\dfrac{4+\dfrac{2}{n^2}}{\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}\right)^2+2.\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}+4}$. Vì $\lim\dfrac{2}{n^2}=0$,

$\lim\dfrac{4}{n}=0$ và $\lim\dfrac{2}{n^3}=0$. Nên $\lim u_n=\dfrac{1}{3}$.

e). $u_n=\sqrt{4n^2+3n+7}-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}=\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-2n\right)+\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)$

- Tính $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-2n\right)=\lim\dfrac{3n+7}{\sqrt{4n^2+3n+7}+2n}=\lim\dfrac{3+\dfrac{7}{n}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}}+2}=\dfrac{3}{4}$

- Tính $\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)$

$$=\lim\frac{\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)\left[4n^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\left(\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)^2\right]}{4n^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\left(\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)^2}$$

$$=\lim\frac{-5n^2-1}{4n^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\left(\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)^2}\quad(1)$$

Có $\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}=\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{8n^3+5n^2+1}{n^3}\right)}=n.\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}$

Nên $(1)\Leftrightarrow \lim\dfrac{n^2\left(-5-\dfrac{1}{n^2}\right)}{4n^2+2n^2.\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}+n^2.\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}\right)^2}$

$$=\lim\dfrac{-5-\dfrac{1}{n^2}}{4+2.\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}+\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}\right)^2}=-\dfrac{5}{12}.$$

Từ đó suy ra $\lim u_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{12}=\dfrac{1}{3}$.

f). $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)=\lim\left[\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\right)-\left(\sqrt[3]{n^6+1}-n^2\right)\right]$

- Tính $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\right)=\lim\left(\dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2}\right)=\lim\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

- Tính $\lim(\sqrt[3]{n^6+1}-n^2)=\lim\dfrac{1}{\sqrt[3]{(n^6+1)^2}+n^2\sqrt[3]{(n^6+1)}+n^4}=0$

Do đó $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 5

Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}$ b). $u_n=\dfrac{2n-\sqrt{4n^2+n}}{n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}}$

c). $\lim\left(2n-\sqrt{9n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}\right)$ d). $\lim\left(\sqrt{n^2-2n}+2\sqrt[3]{n^2-8n^3}+3\sqrt{n^2+n}\right)$

Lời giải

a). Ta có $\sqrt{n^2+n}-n=\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\dfrac{n}{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$ và

$$\sqrt{4n^2+3n}-2n=\dfrac{\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+3n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}=\dfrac{3n}{n\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}+2n}=\dfrac{3}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}+2}.$$

Do đó $\lim u_n = \lim \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}+2}{3\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right)} = \dfrac{2}{3}$.

b). $\lim \dfrac{2n-\sqrt{4n^2+n}}{n+\sqrt[3]{4n-n^3}}$

Ta có $2n-\sqrt{4n^2+n}$

$$=\frac{\left(2n-\sqrt{4n^2+n}\right)\left(2n+\sqrt{4n^2+n}\right)}{2n+\sqrt{4n^2+n}}=\frac{-n}{2n+\sqrt{4n^2+n}}=\frac{-1}{2+\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}}$$

và $n+\sqrt[3]{4n^2-n^3} = \dfrac{\left(n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)\left[n^2-n.\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\left(\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)^2\right]}{n^2-n.\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\left(\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)^2}$

$$=\frac{4n^2}{n^2-n.\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{4n^2-n^3}{n^3}\right)}+\left(\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{4n^2-n^3}{n^3}\right)}\right)^2}=\frac{4n^2}{n^2-n^2.\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}+n^2\left(\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}\right)^2}$$

$$=\frac{4n^2}{n^2\left[1-\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}+\left(\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}\right)^2\right]}=\frac{4}{1-\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}+\left(\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}\right)^2}.$$

Do đó $\lim u_n = \lim -\dfrac{1-\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}+\left(\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}\right)^2}{4\left(2+\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}\right)} = -\dfrac{3}{16}$.

c). $u_n = 2n-\sqrt{9n^2+n}+\sqrt{n^2+2n} = \left(3n-\sqrt{9n^2+n}\right)+\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$.

Tính $\lim\left(3n-\sqrt{9n^2+n}\right) = \lim \dfrac{\left(3n-\sqrt{9n^2+n}\right)\left(3n+\sqrt{9n^2+n}\right)}{\left(3n+\sqrt{9n^2+n}\right)}$

$$=\lim\frac{-n}{3n+\sqrt{9n^2+n}}=\lim\frac{-n}{3n+\sqrt{n^2\left(\dfrac{9n^2+n}{n^2}\right)}}$$

$$=\lim\frac{-n}{3n+n\sqrt{9+\dfrac{1}{n}}}=\lim\frac{-n}{n\left(3+\sqrt{9+\dfrac{1}{n}}\right)}=\lim\frac{-1}{3+\sqrt{9+\dfrac{1}{n}}}=-\frac{1}{6}$$

Và $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$=\lim\frac{2n}{\sqrt{n^2\left(\frac{n^2+2n}{n^2}\right)}+n}=\lim\frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n}=\lim\frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=1.$

Do đó $\lim u_n=-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$.

d). $u_n=\sqrt{n^2-2n}+2\sqrt[3]{n^2-8n^3}+3\sqrt{n^2+n}=\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)+\left(2\sqrt[3]{n^2-8n^3}+4n\right)$

$+\left(3\sqrt{n^2+n}-3n\right)=\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)+2\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}+2n\right)+3\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

- Tính $\lim\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-2n}+n\right)}{\sqrt{n^2-2n}+n}=\lim\frac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n}$

$=\lim\frac{-2n}{\sqrt{n^2\left(\frac{n^2-2n}{n^2}\right)}+n}=\lim\frac{-2n}{n\sqrt{1-\frac{2}{n}}+n}=\lim\frac{-2n}{n\left(\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1\right)}=\lim\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1}=-1.$

- Tính $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}+2n\right)$

$$=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}+2n\right)\left[\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)^2-2n.\sqrt[3]{n^2-8n^3}+4n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)^2-2n.\sqrt[3]{n^2-8n^3}+4n^2}$$

$$=\lim\frac{n^2}{\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)^2-2n.\sqrt[3]{n^2-8n^3}+4n^2}\quad(1)$$

Có $\sqrt[3]{n^2-8n^3}=\sqrt[3]{n^3\left(\frac{n^2-8n^3}{n^3}\right)}=n.\sqrt[3]{\frac{1}{n}-8}\Rightarrow\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)^2=n^2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}-8}\right)^2$

Do đó $(1)\Leftrightarrow\lim\frac{n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}-8}\right)^2-2n^2.\sqrt[3]{\frac{1}{n}-8}+4n^2}=\lim\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}-8}\right)^2-\sqrt[3]{\frac{1}{n}-8}+4}=\frac{1}{12}$.

- Tính $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim\frac{n}{\sqrt{n^2\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)}+n}=\lim\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}=\lim\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$.

Từ đó suy ra $\lim u_n=-1+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}=-\frac{5}{12}$.

Ví dụ ❻

Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ b). $u_n=\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

c). $u_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ d). $u_n=\frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}$

e). $u_n=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n(n+1)(n+2)}$ f). $\lim\left(\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$

g). $\lim\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4+4n^3+1}$ h). $\lim\left(\frac{2.1^2+3.2^2+\cdots+(n+1)n^2+n(n+1)^2}{n^4}\right)$

Lời giải

a). Ta có $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{k+1}{k(k+1)}-\frac{k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},(\forall k=1,2,...,n)$. Từ đó

$u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$.

Nên $\lim u_n=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\lim 1-\lim\frac{1}{n+1}=1-0=1$.

b). Ta có $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3k+1)-(3k-2)}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{3k+1}{(3k-2)(3k+1)}-\frac{3k-2}{(3k-2)(3k+1)}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right),(\forall k=1,2,3...,n)$. Từ đó $u_n=\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$, có $\lim\frac{1}{3n+1}=0$. Do đó

$\lim u_n=\frac{1}{3}(1-0)=\frac{1}{3}$.

c). $\forall k\ge 2$ ta có $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$. Do đó $u_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{2.4}{3^2}\cdot\frac{3.5}{4^2}\cdot\frac{4.6}{5^2}\cdots\frac{(n-3)(n-1)}{(n-2)^2}\cdot\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$.

Nên $\lim u_n=\lim\frac{n+1}{2n}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$.

d). $u_n=\frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}$.

Ta có dãy số $1+3+5+\cdots+(2n+1)$ là một cấp số cộng với $u_1=1$ công sai $d=3-1=2$ và số hạng tổng quát $u_m=2n+1\Leftrightarrow u_1+(m-1)d=2n+1\Leftrightarrow 1+(m-1).2=2n+1\Leftrightarrow m=n+1$, nên tổng của dãy số trên là

$S=\frac{m}{2}\left(u_1+u_m\right)=\frac{n+1}{2}(1+2n+1)=\left(n+1\right)^2$. Từ đó $u_n=\frac{\left(n+1\right)^2}{3n^2+4}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{3+\frac{4}{n^2}}$ có $\lim\frac{1}{n}=0$ và $\lim\frac{4}{n^2}=0$ từ đó suy ra $\lim u_n=\frac{1}{3}$.

e). $u_n=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n(n+1)(n+2)}$. Ta có tổng $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$ (được chứng minh bằng phương pháp quy nạp). Nên $u_n=\frac{2n+1}{6(n+2)}=\frac{2+\frac{1}{n}}{6\left(1+\frac{2}{n}\right)}$ vì $\lim\frac{1}{n}=\lim\frac{2}{n}=0$ do đó $\lim u_n=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

f). Ta có $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$ (Chứng minh dựa vào nguyên lý quy nạp). Do đó $L=\lim\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\lim\frac{1}{4}-\lim\frac{1}{2(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$.

g). Ta có $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}$ (chứng minh bằng phương pháp quy nạp). Do đó

$$L=\lim\frac{n^2\left(n+1\right)^2}{4\left(n^4+4n^3+1\right)}=\lim\frac{n^2\left[n\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^2}{4n^4\left(\frac{n^4+4n^3+1}{n^4}\right)}=\lim\frac{n^4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4n^4\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}$$

$=\lim\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}$. Vì $\lim\frac{1}{n}=\lim\frac{4}{n}=\lim\frac{1}{n^4}=0$ nên $L=\frac{1}{4}$.

h). Ta có $2.1^2+3.2^2+\cdots+(n+1)n^2+n(n+1)^2=\frac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)}{4}$.

Do đó $L=\lim\frac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)}{4n^4}=\lim\frac{n.n\left(1+\frac{1}{n}\right)n\left(1+\frac{2}{n}\right)n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{4n^4}=\lim\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}{4}$ có $\lim\frac{1}{n}=\lim\frac{2}{n}=\lim\frac{3}{n}=0$ nên $L=\frac{1}{4}$.

Ví dụ 7

Tìm giới hạn của dãy $\left(u_n\right)$ biết:

a). $u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$

b). $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

c). $u_n=\frac{1.3.5.7....\left(2n-1\right)}{2.4.6...2\text{n}},\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

d). $u_n=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Lời giải

a). Ta có $\frac{2k-1}{2k}=\frac{2k-1}{\sqrt{4k^2}}\le\frac{2k-1}{\sqrt{4k^2-1}}=\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}},\left(\forall k\in\mathbb{N}^*\right)$. Từ đó ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\le\sqrt{\frac{1}{3}}\\ \frac{3}{4}\le\sqrt{\frac{3}{5}}\\ \dots\dots\dots\\ \frac{2n-1}{2n}\le\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\le\sqrt{\frac{1}{3}}.\sqrt{\frac{3}{5}}\dots\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}\Leftrightarrow u_n\le\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\ .$$

Do đó $|u_n|\le\frac{1}{\sqrt{2n+1}},\forall n$. Mà $\lim\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$ do đó $\lim u_n=0$.

b). Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}<\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$$

…………………

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên, vế theo vế ta được $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le u_n<1,\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Mà $\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$ và $\lim 1=1$. Từ đó suy ra $\lim u_n=1$.

c). Rõ ràng $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ do đó $\left(u_n\right)^2>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Có

$$\left(u_n\right)^2=\frac{1^2.3^2.5^2.7^2....(2n-1)^2}{2^2.4^2.6^2...(2\text{n})^2}<\frac{1^2.3^2.5^2.7^2....(2n-1)^2}{\left(2^2-1\right)\left(4^2-1\right)\left(6^2-1\right)...\left[(2n)^2-1\right]}$$

$$=\frac{1^2.3^2.5^2.7^2....(2n-1)^2}{1.3.3.5.5.7....(2\text{n}-1)(2\text{n}+1)}=\frac{1}{2n+1}.$$

Do đó ta có $\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì $0<\left(u_n\right)^2<\frac{1}{2n+1}$. Mà $\lim 0=0$ và $\lim\frac{1}{2n+1}=0$ nên $\lim\left(u_n\right)^2=0$. Từ đó suy ra $\lim u_n=0$.

d). Dễ dàng chứng minh $\frac{3}{2}\sqrt{k}<(k+1)\sqrt{k+1}-k\sqrt{k}<\frac{3}{2}\sqrt{k+1}$.Áp dụng với $k=1,2,3,...,n$ được :

$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)\sqrt{k+1}-k\sqrt{k}\right]=\frac{2}{3}\left[(n+1)\sqrt{k+1}-1\right]$ (1) và

$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}>\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[k\sqrt{k}-(k-1)\sqrt{k-1}\right]>\frac{2}{3}n\sqrt{n}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{2}{3}<1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{2}{3}\frac{(n+1)\sqrt{n+1}-1}{n\sqrt{n}}$. Mà $\lim\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ và $\lim\frac{2}{3}\frac{(n+1)\sqrt{n+1}-1}{n\sqrt{n}}=\frac{2}{3}$ do đó $\lim\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\right)=\frac{2}{3}$.

Ví dụ ❽

Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1=2022 \\ u_{n+1}=\sqrt[n+1]{u_n^n+\frac{1}{2022^n}} \quad (n\ge 1)\end{cases}$

Tìm công thức số hạng tổng quát và giới hạn dãy số (u_n)?

Lời giải

Ta có $u_n>0,\forall n\in N^*$ và $u_{n+1}^{n+1}=u_n^n+\frac{1}{2022^n}\Rightarrow u_{n+1}^{n+1}-u_n^n=\frac{1}{2022^n}$

Do đó: $u_2^2-u_1^1=\frac{1}{2022^1}$ $\qquad u_3^3-u_2^2=\frac{1}{2022^2}$ $\qquad$ ...

$u_n^n-u_{n-1}^{n-1}=\frac{1}{2022^{n-1}}$

Suy ra: $u_n^n-u_1^1=\frac{1}{2022^1}+\frac{1}{2022^2}+...+\frac{1}{2022^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2022}\right)^{n-1}}{2021}$

Vậy $u_n=\sqrt[n]{2022+\frac{1-\left(\frac{1}{2022}\right)^{n-1}}{2021}}$

$1<u_n=\sqrt[n]{2013+\frac{1-\left(\frac{1}{2022}\right)^{n-1}}{2021}}<\sqrt[n]{2023}<\frac{\overbrace{1+1+...+1}^{n}+2023}{n}=1+\frac{2022}{n}$ (Cô si)

Mặt khác $\lim\left(1+\frac{2022}{n}\right)=1$. Vậy $\lim u_n=1$

Ví dụ ❻

Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=3n^3+2n^2-2$ b). $u_n=-2n^4+3n^3+n$ c). $u_n=\sqrt{\frac{4n^4+2n^3+1}{n^2+1}}$

d). $u_n=4^n+2.(-3)^{n+1}$ e). $u_n=n\cos\frac{n^2\pi}{10}-4n^2$ f). $u_n=\frac{\sqrt{n^4+4n^2-1}-2n^2}{\sqrt{n^3+3n}-2n}$.

Lời giải

a). Ta có $u_n=3n^3+2n^2-2=n^3\left(3+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)$. Có $\lim\frac{2}{n}=0,\lim\frac{2}{n^3}=0$ nên $\lim\left(3+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)=3$ và $\lim n^3=+\infty$. Từ đó suy ra $\lim u_n=+\infty$.

b). Ta có $u_n=-2n^4+3n^3+n=n^4\left(-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)$. Vì $\lim\frac{3}{n}=0,\lim\frac{1}{n^3}=0$ nên $\lim\left(-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)=-2$ và $\lim n^4=+\infty$. Từ đó suy ra $\lim u_n=-\infty$.

c). Ta có $u_n=\sqrt{\frac{4n^4+2n^3+1}{n^2+1}}=\sqrt{\frac{n^4\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}=\sqrt{\frac{n^2\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}{1+\frac{1}{n^2}}}=n.\sqrt{\frac{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{n^2}}}$. Vì $\lim\frac{2}{n}=0$, $\lim\frac{1}{n^4}=0$ và $\lim\frac{1}{n^2}=0$ nên $\lim\sqrt{\frac{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{\sqrt{4}}{1}=2$ và có $\lim n=+\infty$. Từ đó suy ra $\lim u_n=+\infty$.

d). Ta có $u_n=4^n+2.(-3)^{n+1}=4^n-6.(-3)^n=4^n\left(1-6.\frac{(-3)^n}{4^n}\right)=4^n\left[1-6\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]$. Vì $\lim\left(-\frac{3}{4}\right)^n=0$ nên $\lim\left[1-6\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]=1-6.0=1$ ngoài ra $\lim 4^n=+\infty$. Từ đó có $\lim u_n=+\infty$.

e). Ta có $u_n=n\cos\frac{n^2\pi}{10}-4n^2=n^2\left(\frac{\cos\frac{n^2\pi}{10}}{n}-4\right)$. Vì $\left|\frac{\cos\frac{n^2\pi}{10}}{n}\right|\le\frac{1}{n}$ mà $\lim\frac{1}{n}=0$ nên $\lim\frac{\cos\frac{n^2\pi}{10}}{n}=0$ do đó $\lim\left(\frac{\cos\frac{n^2\pi}{10}}{n}-4\right)=0-4=-4$ (1). Ngoài ra $\lim n^2=+\infty$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\lim u_n=-\infty$.

f). Ta có $u_n=\frac{\sqrt{n^4+4n^2-1}-2n^2}{\sqrt{n^3+3n}-2n}=\frac{\sqrt{n^4\left(\frac{n^4+4n^2-1}{n^4}\right)}-2n^2}{\sqrt{n^3\left(\frac{n^3+3n}{n^3}\right)}-2n}=\frac{n^2\sqrt{1+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^4}}-2n^2}{n\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}-2n}$

$=\frac{n^2\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^4}}-2\right)}{n\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}=\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^4}}-2\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}-\frac{2}{\sqrt{n}}}$. Ta có $\lim\frac{4}{n^2}=0$, $\lim\frac{1}{n^4}=0$, $\lim\frac{3}{n^2}=0$ và $\lim\frac{2}{\sqrt{n}}=0$ do đó $\lim\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^4}}-2}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}-\frac{2}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{1+0-0}-2}{\sqrt{1+0}-0}=-1$ (1). Ngoài ra có $\lim\sqrt{n}=+\infty$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\lim u_n=-\infty$.