CÁC DẠNG TOÁN VỀ GIỚI HẠN SỐ LỚP 11

Dạng 1 Sử dụng định nghĩa giới hạn dãy số và những quy tắc cơ bản

Phương pháp giải

- Theo định nghĩa thì giới hạn hàm số $f(x)$ trên cơ sở giới hạn các dãy $f(x_n)$. Nếu có 2 dãy x_n và x'_n cùng tiến đến x_0 mà $\lim f(x_n) \neq \lim f'(x'_n)$ thì không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
- Với mọi số nguyên dương *k*, ta có:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2k} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2k+1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$
- Xác định dấu $+\infty$ hoặc $-\infty$ dựa trên dấu của tích số, thương số, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to \pm\infty$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Tính giới hạn của các hàm số

a) $f(x) = \sqrt{2x+10}$ khi $x \to -3$ b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+6}$ khi $x \to 3$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $[-5; +\infty)$. Chọn dãy số (x_n) với $x_n \in [-5; +\infty)$ sao cho $\lim x_n = -3$.

Theo định nghĩa $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{2x+10} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{2x_n + 10}$

Theo định lí về giới hạn của dãy số, ta có $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{2x_n + 10} = \sqrt{\lim\limits_{n \to \infty} (2x_n + 10)}$

$= \sqrt{2.\lim\limits_{n \to \infty} x_n + 10} = \sqrt{2.(-3)+10} = \sqrt{4} = 2$.

☞ Vậy $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{2x+10} = 2$

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ nên chọn dãy số (x_n) sao cho $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 3$

Ta có $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x+3}{3^2+6} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2x_n + 3}{x_n^2 + 6} = \dfrac{\lim\limits_{n \to \infty}(2x_n + 3)}{\lim\limits_{n \to \infty}(x_n^2 + 6)}$

$= \dfrac{2.\lim\limits_{n \to \infty} x_n + 3}{\lim\limits_{n \to \infty} x_n^2 + 6} = \dfrac{2.3+3}{3^2+6} = \dfrac{3}{5}$.

☞ Vậy $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x+3}{x^2+6} = \dfrac{3}{5}$

Chú ý: Nếu hàm số $f(x)$ là một đa thức, là một phân thức đại số hoặc một hàm số lượng giác có tập xác định là D thì với mỗi $x_0 \in D$ ta có $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ví dụ 2

Tính giới hạn của các hàm số

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$ khi $x \to 3$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-10}{2x^2-x-6}$ khi $x \to 2$

Lời giải

a) Theo định lí 1, ta có $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 3}(x^2+1)}{\lim\limits_{x \to 3} 2\sqrt{x}}$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 3} x^2 + \lim\limits_{x \to 3} 1}{\lim\limits_{x \to 3} 2 . \lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} . \lim\limits_{x \to 3} + \lim\limits_{x \to 3} 1}{\lim\limits_{x \to 3} 2 . \sqrt{\lim\limits_{x \to 3} x}} = \frac{3.3+1}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$

b) Vì $(2x^2 - x - 6) \to 0$ khi $x \to 2$ nên chưa thể áp dụng ngay Định lí 1.

Nhưng với $x \neq 2$, ta có $\begin{cases} x^2+3x-10 = (x-2)(x+5) \\ 2x^2-x-6 = (x-2)(2x+3) \end{cases}$ suy ra $f(x) = \dfrac{x+5}{2x+3}$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+5}{2x+3} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2}(x+5)}{\lim\limits_{x \to 2}(2x+3)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 5}{2.\lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 3} = \dfrac{2+5}{2.2+3} = 1$

Ví dụ 3

Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{x^2-1}{x+1} \right)$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{4-x^2}{x+2} \right)$ c) $\lim\limits_{x \to 6} \left(\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} \right)$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{x^2-1}{x+1} \right) = \lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{(-3)^2-1}{-3+1} \right) = -\dfrac{8}{-2} = -4$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{4-x^2}{x+2} \right) = \lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{(2-x)(2+x)}{x+2} \right) = \lim\limits_{x \to -2} (2-x) = 4$

c) $\lim\limits_{x \to 6} \left(\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} \right) = \lim\limits_{x \to 6} \left(\dfrac{(\sqrt{x+3}-3)(\sqrt{x+3}+3)}{x-6} \right) = \lim\limits_{x \to 6} \left(\dfrac{x-6}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)} \right) = \lim\limits_{x \to 6} \dfrac{1}{(\sqrt{x+3}+3)} = \dfrac{1}{6}$

Dạng 2: *Khử dạng vô định về 0/0*

Xét bài toàn: Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, trong đó $f(x),\ g(x)$ là các đa thức và căn thức.

Phương pháp

- Phân tích tử và mẫu thành các nhân tử và giản ước:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0).A(x)}{(x-x_0).B(x)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{A(x)}{B(x)}$$

- Nếu $A(x),\ B(x)$ đều chứa nhân tử $x-x_0$ ta sẽ tiếp tục phân tích thành các nhân tử.

Chú ý:

- Với $f(x),\ g(x)$ là đa thức (thường là hàm số bậc hai, bậc ba, bậc bốn…) thì ta phân tích nhân tử bằng việc giải phương trình $f(x)=g(x)=0$
- Với $f(x),\ g(x)$ là căn thức, ta sẽ sử dụng phương pháp nhân liên hợp (liên hợp số hoặc liên hợp biến) để phân tích nhân tử.
- Sử dụng các hằng đẳng thức, nhóm số hạng, phân tích ra thừa số bậc 2, chia đa thức, sơ đồ Hoócne,…
- Chia tách thành các phân thức bằng cách thêm bớt đại lượng đơn giản nhất theo *x* hoặc hằng số mà các giới hạn mới vẫn giữ nguyên dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\infty;\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left[(x)+g(x)\right]=+\infty;\ \lim\limits_{x\to x_0}\left[(x).g(x)\right]=+\infty$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{-2x^2+6x-4}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{-x^2+3x-2}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{-2x^2+6x-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{-2(x^2-3x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{-2(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{-2(x-1)}=-1$

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+2}{x^2+2x+3}\right)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{-x^2+3x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{-(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+2}=0$

Ví dụ 2

Tìm giới hạn các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^4-x^2-72}{x^2-2x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}$

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-5x^2+4x^6}{(1-x)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x-a}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^4-x^2-72}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x^3+3x^2+8x+24)}{(x+1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3+3x^2+8x+24}{x+1}=\dfrac{51}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x^2-2x-3)}{(x-3)(x^3+3x^2+x+3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+3x^2+x+3}=0$

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-5x^2+4x^6}{(1-x)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(4x^5+4x^4+4x^3+4x^2-x)}{(1-x)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^5+4x^4+4x^3+4x^2-x}{(x-1)}=\infty$

d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x^3+ax^2+a^2x+a^3)=4a^3$

Ví dụ 3

Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$

b) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{4-x^2}{x^3+8}$

c) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+5)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x+4}{x+5}=\dfrac{8}{9}$

b) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{4-x^2}{x^3+8}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2-x}{x^2-2x+4}=\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(2x-3)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+1}{2x-3}=\dfrac{1}{9}$

Dạng ❸ *Khử dạng vô định ∞/∞, 0.∞ hoặc ∞ - ∞*

① ***Bài toàn 1:*** Tính $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$, trong đó $f(x),\ g(x)$ là các đa thức và căn thức.

Phương pháp giải: Chia cả tử và mẫu cho x^n với n là số mũ bậc cao nhất của biến số x trong mẫu thức. Nếu $f(x),\ g(x)$ có chứa biến x trong dấu căn thức thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (với k là số mũ bậc cao nhất của x trong dấu căn).

Chú ý:

- Khi $x\to+\infty$ thì ta xử lý giống như với giới hạn của dãy số.
- Khi $x\to-\infty$ ta cần lưu ý khi đưa x^{2k} ra ngoài dấu căn thức bậc chẵn.

Dạng hay gặp chính là $\sqrt{x^2}=|x|=x$ khi $x\to+\infty$ và $=-x$ khi $x\to-\infty$

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có hệ số của hạng tử bậc cao nhất của $f(x),\ g(x)$ lần lượt là *a*,*b*.

Và kí hiệu $\deg f(x),\ \deg g(x)$ lần lượt là bậc của $f(x),\ g(x)$ thì:

- Nếu $\deg f(x)>\deg g(x)$ thì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$
- Nếu $\deg f(x)=\deg g(x)$ thì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$
- Nếu $\deg f(x)<\deg g(x)$ thì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

❷ ***Bài toán 2*:** Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$

Phương pháp giải: Ta biến đổi $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ để đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$

Hoặc biến đổi $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ để đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

❸ ***Bài toán 3:*** Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$

Phương pháp giải: Nhân hoặc chia với biểu thức liên hợp hoặc quy đồng để đưa về cùng một phân thức.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{1-3x-5x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{2+0}{1-0}=2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{1-3x-5x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-5}=\dfrac{1+0}{0-3.0-5}=-\dfrac{1}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{0+0}{1+0+0}=0$

Ví dụ 2

Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x\left(2x^2-1\right)}{(5x-1)\left(x^2+2x\right)}$ b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^3-2x^2-1}{4x^4+3x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^3-2x+2}{-2x^3+2x^2-1}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x\left(2x^2-1\right)}{(5x-1)\left(x^2+2x\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6-\frac{3}{x^2}}{\left(5-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\dfrac{6-3.0}{(5-0)(1+2.0)}=\dfrac{6}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^3-2x^2-1}{4x^4+3x-2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{4+\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}}=\dfrac{3.0-2.0-0}{4+3.0-2.0}=0$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^3-2x+2}{-2x^3+2x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{-2+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}=\dfrac{3-2.0+2.0}{-2+2.0-0}=-\dfrac{3}{2}$

Ví dụ 3

Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+2x}{3x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+3}{x^2+1}$

Lời giải

a) Đặt $x=-t$. Với $x\to-\infty\Rightarrow t=+\infty$

✸ Khi đó $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+2x}{3x-1}=\lim\limits_{t\to-\infty}=\dfrac{\sqrt{t^2+3t}-2t}{-3t-1}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{3}{t}}-2}{-3-\frac{1}{t}}=\dfrac{\sqrt{1+3.0}-2}{-3-0}=\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}-1}=4$

✸ Đặt $x=-t$. Với $x\to-\infty\Rightarrow t=+\infty$. Khi đó

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{t^2-t+2}-3t+1}{\sqrt{4t^2+1}+1+t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}}-3+\frac{1}{t}}{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}+\frac{1}{t}+1}=-\dfrac{2}{3}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+3}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{0+3.0}}{1+0}=0$

Dạng 4 Giới hạn một bên

Phương pháp giải: * Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ thì không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

* Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{(x-2)(2x-1)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{(x-2)(2x-1)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-1}{2x-1}=-\dfrac{1}{3}$

Ví dụ 2

Tìm các giới hạn của các hàm số tại các điểm chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{8-x^3} & khi\ \ x>2\\ \dfrac{x^4-16}{x-2} & khi\ \ x<2\end{cases}$ tại $x=2$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & khi\ \ x>1\\ -\dfrac{x}{2} & khi\ \ x\le 1\end{cases}$ tại $x=1$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x}{8-x^3}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x(x-2)}{(2-x)(4+2x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{x^2+2x+4}=-\dfrac{2}{2^2+2.2+4}=-\dfrac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^4-16}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)(x^2+4)=4.8=32$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$.. Do đó, không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{1-2}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x}{2}=-\dfrac{1}{2}$

Nhận thấy $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-\dfrac{1}{2}$. Do đó $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 3

Tìm các giới hạn của hàm số tại các điểm chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases} x+m & khi \;\; x<0 \\ \dfrac{x^2+100x+3}{x+3} & khi \;\; x\geq 0 \end{cases}$ tại $x=0$

b) $f(x)=\begin{cases} x+3m & khi \;\; x<-1 \\ x^2+x+m+3 & khi \;\; x\geq -1 \end{cases}$ tại $x=-1$

Lời giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+m)=m$

và $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+100x+3}{x+3}=\dfrac{3}{0+3}=1$

- Để tồn tại $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow m=1$
- Với $m=1$ thì $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
- Vậy với $m=1$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

b) Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x+3m)=3m-1$

và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2+x+m+3\right)=1-1+m+3=m+3$

- Để tồn tại $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\Rightarrow 3m-1=m+3\Rightarrow 2m=4\Rightarrow m=2$
- Với $m=2$ thì $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=3.2-1=5 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=2+3=5 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=5$
- Vậy với $m=2$ thì $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=5$

Dạng 5 *Một số bài toán giới hạn ẩn tham số đặc sắc*

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Kết quả giới hạn $L=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-7x+12}}{3|x|-17}=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$

⊡ Lời giải

✸ Ta có $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-7x+12}}{3|x|-17}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}\right)}}{3|x|-17}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}}{3|x|-17}$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}}{-3x-17}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}}{3+\dfrac{17}{x}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{a}}{b}\to\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}.$$

Vậy $P=13$

Ví dụ 2

Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b-1}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+ab$.

⊡ Lời giải

✸ Đặt $f(x)=x^2+ax+b-1\Rightarrow f(1)=0$

✸ Khi đó $f(x)=(x-1)(x-x_0)\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-x_0)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x_0}{x+1}=\dfrac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow\dfrac{1-x_0}{2}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow x_0=-2\Rightarrow f(x)=(x-1)(x+2)=x^2+x-2\Rightarrow a=1;\ b=-1\Rightarrow T=0.$$

Ví dụ 3

Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-(3a+2)x+b}{x^2-3x+2}=4$. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2$.

⊡ Lời giải

✸ Đặt $f(x)=3x^2+(2a+1)x+b\Rightarrow f(2)=0$

✸ Khi đó: $f(x)=(x-2)(3x-m)\Rightarrow\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-(3a+2)x+b}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(3x-m)}{(x-2)(x-1)}=4$

$$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-m}{x-1}=4\Leftrightarrow 6-m=4\Leftrightarrow m=2$$

⇨ Suy ra $f(x)=(x-2)(3x-2)=3x^2-8x+4\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=4\end{cases}\Rightarrow T=20.$