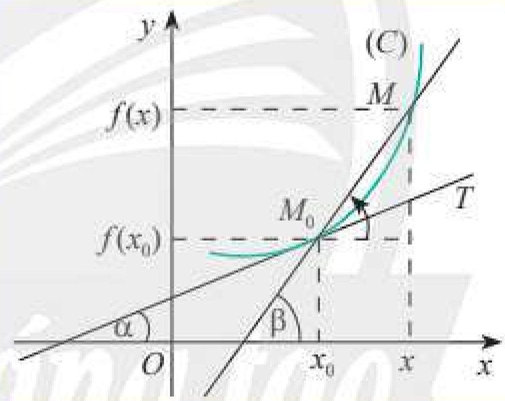
TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
NGUYỄN CAM – NGÔ HOÀNG LONG
PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

TOÁN

11

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA
Môn: TOÁN – LỚP 11

TT	Họ và tên	Chức vụ Hội đồng
1	Ông Lê Mậu Hải	Chủ tịch
2	Bà Cao Thị Hà	Phó Chủ tịch
3	Ông Phạm Đức Tài	Uỷ viên, Thư kí
4	Ông Phạm Khắc Ban	Uỷ viên
5	Ông Nguyễn Hắc Hải	Uỷ viên
6	Ông Nguyễn Doãn Phú	Uỷ viên
7	Ông Nguyễn Chiến Thắng	Uỷ viên
8	Bà Nguyễn Thị Vĩnh Thuyên	Uỷ viên
9	Ông Đinh Cao Thượng	Uỷ viên
10	Bà Vũ Thị Như Trang	Uỷ viên
11	Ông Phạm Đình Tùng	Uỷ viên

TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
NGUYỄN CAM – NGÔ HOÀNG LONG
PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

TOÁN

11

TẬP HAI

Chân trời sáng tạo

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Mỗi bài học trong sách **Toán 11** thường có các phần như sau:

Hoạt động khởi động	Gợi mở, kết nối người học vào chủ đề bài học.
Hoạt động khám phá	Gợi ý để người học tìm ra kiến thức mới.
Kiến thức trọng tâm	Nội dung kiến thức cần lĩnh hội.
Thực hành	Các bài tập cơ bản theo yêu cầu cần đạt.
Vận dụng	Ứng dụng kiến thức để giải quyết vấn đề.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng các em học sinh lớp sau!

Lời nói đầu

Các bạn học sinh, quý thầy, cô giáo thân mến!

Sách ***Toán 11*** thuộc bộ sách giáo khoa ***Chân trời sáng tạo*** được biên soạn theo Chương trình giáo dục phổ thông năm 2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Cấu trúc sách ***Toán 11*** được chia thành hai tập.

Tập hai bao gồm ba phần:

Đại số và Một số yếu tố Giải tích gồm hai chương: *Hàm số mũ và hàm số lôgarit; Đạo hàm.*

Hình học và Đo lường gồm một chương: *Quan hệ vuông góc trong không gian.*

Thống kê và Xác suất gồm một chương: *Xác suất.*

Đầu mỗi chương đều có nêu rõ các kiến thức cơ bản sẽ học và các yêu cầu cần đạt của chương. Các bài học đều xây dựng theo tinh thần định hướng phát triển năng lực và thường được thống nhất theo các bước: *khởi động, khám phá, thực hành, vận dụng*. Sách sẽ tạo nên một môi trường học tập và giảng dạy tương tác tích cực nhằm đảm bảo tính dễ dạy, dễ học đồng thời hỗ trợ các phương pháp giảng dạy hiệu quả.

Nội dung sách thể hiện tính tích hợp, gắn bó môn Toán với các môn học khác. Những hoạt động trải nghiệm được tăng cường giúp người học có thêm cơ hội vận dụng Toán học vào thực tiễn, đồng thời ứng dụng công nghệ thông tin vào việc học Toán.

Chúng tôi tin tưởng rằng với cách biên soạn này, sách giáo khoa ***Toán 11*** sẽ hỗ trợ quý thầy, cô giáo một cách tích cực và hiệu quả trong quá trình dạy học, đồng thời giúp các bạn học sinh hứng thú hơn khi học tập bộ môn Toán.

Rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô giáo và các bạn học sinh để sách được ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

Mục lục

Phần ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương VI HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Hàm số mũ và hàm số lôgarit được sử dụng để mô tả nhiều sự vật, hiện tượng và giải quyết nhiều vấn đề xuất hiện phổ biến trong tự nhiên và xã hội.

Chúng ta sẽ dần thấy rõ điều này thông qua tìm hiểu, khám phá từng nội dung học tập của chương này, bao gồm phép tính luỹ thừa với số mũ thực, phép tính lôgarit, hàm số mũ và hàm số lôgarit, phương trình và bất phương trình mũ và lôgarit.

Sự tăng trưởng hoặc suy giảm của quần thể vi khuẩn thường có thể mô tả bằng cách dùng hàm số mũ.

Học xong chương này, bạn có thể:

– Nhận biết phép tính luỹ thừa với số mũ thực, phép tính lôgarit; sử dụng các tính chất của phép tính luỹ thừa, phép tính lôgarit trong tính toán, rút gọn biểu thức; tính giá trị của biểu thức chứa luỹ thừa, lôgarit bằng máy tính cầm tay.

– Vận dụng phép tính luỹ thừa, phép tính lôgarit trong tính toán, giải quyết các vấn đề trong các môn học và trong thực tiễn.

– Nhận biết hàm số mũ và hàm số lôgarit; vẽ đồ thị và nhận biết tính chất của các hàm số này; vận dụng vào giải quyết các vấn đề trong các môn học khác và trong thực tiễn.

– Giải phương trình, bất phương trình mũ, lôgarit đơn giản; vận dụng vào giải quyết các vấn đề trong các môn học khác và trong thực tiễn.

Bài 1. Phép tính luỹ thừa

Từ khoá: Luỹ thừa; Cơ số; Số mũ; Căn bậc *n*.

Trong khoa học, người ta thường dùng luỹ thừa để ghi các số, có thể rất lớn hoặc rất bé. Chẳng hạn, bảng dưới đây cho một số ví dụ về cách ghi độ dài.

Độ dài (m)	Ghi bằng luỹ thừa (m)	Ghi bằng đơn vị
1 000 000 000	10^9	1 Gm (gigamét)
1 000 000	10^6	1 Mm (megamét)
1 000	10^3	1 km (kilômét)
0,001	10^{-3}	1 mm (milimét)
0,000 001	10^{-6}	1 µm (micrômét)
0,000 000 001	10^{-9}	1 nm (nanomét)

Cách ghi như vậy có tiện ích gì? Từ các luỹ thừa quen thuộc ở ba dòng đầu, hãy dự đoán quy tắc viết luỹ thừa ở ba dòng cuối.

1. Luỹ thừa với số mũ nguyên

1 Cho biết dãy số (a_n) được xác định theo một quy luật nào đó và bốn số hạng đầu tiên của nó được cho như ở bảng dưới đây:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	16	8	4	2	?	?	?

a) Tìm quy luật của dãy số và tìm ba số hạng tiếp theo của nó.

b) Nếu viết các số hạng của dãy số dưới dạng luỹ thừa, thì bốn số hạng đầu tiên có thể viết thành 2^4; 2^3; 2^2; 2^1. Dự đoán cách viết dưới dạng luỹ thừa của ba số hạng tiếp theo của dãy số và giải thích.

Ở cấp Trung học cơ sở, chúng ta đã biết luỹ thừa với số mũ tự nhiên:

$$a^n = \underbrace{a\,.\,a\,.\,\ldots\,.\,a}_{n \text{ thừa số}} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 0, a \in \mathbb{R}),\ a^0 = 1\ (a \neq 0).$$

Phép tính luỹ thừa có thể mở rộng với số mũ nguyên bất kì. Luỹ thừa với số mũ nguyên âm được định nghĩa như sau:

Với số nguyên dương n, số thực $a \neq 0$, ***luỹ thừa*** của a với số mũ $-n$ xác định bởi

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Chú ý: a) $a^0 = 1$ với mọi $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

b) 0^0 và 0^{-n} (với $n > 0$) không có nghĩa.

Ví dụ 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) 2^{-4}; b) $9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : \left(\sqrt{3}\right)^0$.

Giải

a) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$;

b) $9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = 9 \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 9 \cdot \frac{1}{\frac{9}{16}} = 9 \cdot \frac{16}{9} = 16$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : \left(\sqrt{3}\right)^0 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} : 1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$.

1 Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(-5)^{-1}$; b) $2^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$; c) $6^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : 2^{-2}$.

1 Trong khoa học, người ta thường phải ghi các số rất lớn hoặc rất bé. Để tránh phải viết và đếm quá nhiều chữ số 0, người ta quy ước cách ghi các số dưới dạng $A \cdot 10^m$, trong đó $1 \leq A \leq 10$ và m là số nguyên.

Khi một số được ghi dưới dạng này, ta nói nó được ghi dưới dạng *kí hiệu khoa học*.

Chẳng hạn, khoảng cách 149 600 000 km từ Trái Đất đến Mặt Trời được ghi dưới dạng kí hiệu khoa học là $1,496 \cdot 10^8$ km.

Ghi các đại lượng sau dưới dạng kí hiệu khoa học:

a) Vận tốc ánh sáng trong chân không là 299 790 000 m/s;

b) Khối lượng nguyên tử của oxygen là 0,000 000 000 000 000 000 000 000 026 57 kg.

2. Căn bậc *n*

2 Một thùng gỗ hình lập phương có độ dài cạnh a (dm). Kí hiệu S và V lần lượt là diện tích một mặt và thể tích của thùng gỗ này.

Hình 1

a) Tính S và V khi $a = 1$ dm và khi $a = 3$ dm.

b) a bằng bao nhiêu để $S = 25\ \text{dm}^2$?

c) a bằng bao nhiêu để $V = 64\ \text{dm}^3$?

Trong hoạt động trên:

– Nếu cho biết a, yêu cầu tìm S hay V thì ta dùng phép tính luỹ thừa: $S = a^2$, $V = a^3$.

– Nếu cho biết S hay V, yêu cầu tìm a thì ta dùng phép tính lấy căn: $a = \sqrt{S}$, $a = \sqrt[3]{V}$.

Mở rộng phép lấy căn bậc hai, căn bậc ba đã quen thuộc ở cấp Trung học cơ sở, ta có định nghĩa sau đây:

Cho số nguyên dương n ($n \geq 2$) và số thực b bất kì. Nếu có số thực a sao cho

$$a^n = b$$

thì a được gọi là một ***căn bậc n*** của b.

Chú ý: Ở cấp Trung học cơ sở ta đã biết:

a) Nếu $b > 0$ thì b có hai căn bậc hai, kí hiệu là $\sqrt{b}$ (gọi là căn bậc hai số học của b) và $-\sqrt{b}$;

b) Số 0 chỉ có duy nhất một căn bậc hai là chính nó;

c) Nếu $b < 0$ thì b không có căn bậc hai nào;

d) Mọi số thực b có duy nhất một căn bậc ba, kí hiệu là $\sqrt[3]{b}$.

Mở rộng kết quả này, ta có:

Cho n là số nguyên dương ($n \geq 2$), b là số thực bất kì. Khi đó:

– Nếu n là số chẵn thì:

- $b < 0$: không tồn tại căn bậc n của b.
- $b = 0$: có một căn bậc n của b là 0.
- $b > 0$: có hai căn bậc n của b đối nhau, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$ và giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

– Nếu n là số lẻ thì có duy nhất một căn bậc n của b, kí hiệu $\sqrt[n]{b}$.

Chú ý: a) Nếu n chẵn thì căn thức $\sqrt[n]{b}$ có nghĩa chỉ khi $b \geq 0$.

b) Nếu n lẻ thì căn thức $\sqrt[n]{b}$ luôn có nghĩa với mọi số thực b.

Ví dụ 2. Tìm các căn bậc bốn của 16; căn bậc năm của $-4\sqrt{2}$.

Giải

Ta có $2^4 = 16$. Suy ra 16 có hai căn bậc bốn là $\sqrt[4]{16} = 2$ và $-\sqrt[4]{16} = -2$.

Ta có $-4\sqrt{2} = \left(-\sqrt{2}\right)^5$.

Suy ra $\sqrt[5]{-4\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

Ta có các tính chất sau đây (với điều kiện các căn thức đều có nghĩa):

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Ví dụ 3. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$; b) $\sqrt[5]{8} \,.\, \sqrt[5]{-4}$; c) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$.

Giải

a) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4} = |3-\pi| = \pi - 3$ (vì $\pi > 3$);

b) $\sqrt[5]{8} \,.\, \sqrt[5]{-4} = \sqrt[5]{8 \,.\, (-4)} = \sqrt[5]{-2^3 \,.\, 2^2} = \sqrt[5]{-2^5} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$;

c) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 . \sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{2}\right)^4} = \sqrt[3]{2}$.

2 Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$; b) $\left(\sqrt[6]{8}\right)^2$; c) $\sqrt[4]{3} \,.\, \sqrt[4]{27}$.

3. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

3 Cho số thực $a > 0$.

a) Hai biểu thức $\sqrt[6]{a^4}$ và $\sqrt[3]{a^2}$ có giá trị bằng nhau không? Giải thích.

b) Chỉ ra ít nhất hai biểu thức khác nhau có giá trị bằng $\sqrt[3]{a^2}$.

Cho số thực dương a và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$.

Luỹ thừa của a với số mũ r, kí hiệu a^r, được xác định bởi

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Ví dụ 4. Biểu thị các luỹ thừa sau đây dưới dạng căn thức:

a) $2^{\frac{1}{3}}$; b) $5^{-\frac{2}{3}}$.

Giải

a) $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$; b) $5^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^{-2}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{5^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}$.

Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $25^{\frac{1}{2}}$; b) $\left(\frac{36}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$; c) $100^{1,5}$.

Viết các biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $\sqrt{2^3}$; b) $\sqrt[5]{\frac{1}{27}}$; c) $\left(\sqrt[5]{a}\right)^4$ $(a > 0)$.

4. Luỹ thừa với số mũ thực

Ta biết rằng, $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ có thể biểu diễn dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn: $\sqrt{2} = 1,414\,213\,562...$.

Cũng có thể coi $\sqrt{2}$ là giới hạn của dãy số hữu tỉ (r_n):

$$1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ \ldots\ .$$

Từ đây, ta lập dãy số các luỹ thừa (3^{r_n}).

a) Bảng dưới cho biết những số hạng đầu tiên của dãy số (3^{r_n}) (làm tròn đến chữ số thập phân thứ chín). Sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính số hạng thứ 6 và thứ 7 của dãy số này.

n	r_n	3^{r_n}
1	1,4	4,655 536 722
2	1,41	4,706 965 002
3	1,414	4,727 695 035
4	1,4142	4,728 733 930
5	1,41421	4,728 801 466
6	1,414213	?
7	1,4142135	?

b) Nêu nhận xét về dãy số (3^{r_n}).

Người ta chứng minh được rằng dãy số (3^{r_n}) ở trên có giới hạn khi $n \to +\infty$. Giới hạn đó là một số thực, kí hiệu là $3^{\sqrt{2}}$ và gọi là luỹ thừa của 3 với số mũ $\sqrt{2}$. Vậy,

$$3^{\sqrt{2}} = \lim_{n \to +\infty} 3^{r_n}.$$

Sử dụng máy tính cầm tay (làm tròn đến chữ số thập phân thứ chín), ta thấy

$$3^{\sqrt{2}} \approx 4,728804388.$$

Một cách tổng quát, với a là số thực dương, α là số vô tỉ bất kì, người ta chứng minh được rằng có dãy số hữu tỉ (r_n) sao cho $\alpha = \lim_{n \to +\infty} r_n$ và dãy số (a^{r_n}) có giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy (r_n).

Giới hạn của dãy số (a^{r_n}) được gọi là ***luỹ thừa*** của số thực dương a với số mũ α, kí hiệu là a^{α}.

$$a^{\alpha} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} \text{ với } \alpha = \lim_{n\to+\infty} r_n.$$

Chú ý: $1^{\alpha} = 1$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 5. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các luỹ thừa sau, làm tròn đến chữ số thập phân thứ sáu: $2^{\sqrt{3}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$.

Giải

Ấn lần lượt các phím

[2] [$x^{■}$] [$\sqrt{■}$] [3] [=]

ta được $2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321\,997$.

Ấn lần lượt các phím

[(] [1] [$\frac{■}{■}$] [2] [▶] [)] [$x^{■}$] [(−)] [$\sqrt{■}$] [2] [=]

ta được $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}} \approx 2{,}665\,144$.

Sử dụng máy tính cầm tay, tính các luỹ thừa sau đây (làm tròn đến chữ số thập phân thứ sáu):

a) $1{,}2^{1{,}5}$; b) $10^{\sqrt{3}}$; c) $(0{,}5)^{-\frac{2}{3}}$.

5. Tính chất của phép tính luỹ thừa

a) Sử dụng máy tính cầm tay, hoàn thành bảng sau vào vở (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ năm).

a	α	β	$a^{\alpha}.a^{\beta}$	$a^{\alpha}:a^{\beta}$	$a^{\alpha+\beta}$	$a^{\alpha-\beta}$
3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	?	?	?	?

b) Từ kết quả ở câu a, có dự đoán gì về tính chất của phép tính luỹ thừa với số mũ thực?

Phép tính luỹ thừa với số mũ thực có tính chất tương tự như luỹ thừa với số mũ tự nhiên.

Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

- $a^{\alpha} . a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$
- $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$
- $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha\beta}$
- $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha} = \dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

Ví dụ 6. Viết các biểu thức sau dưới dạng một luỹ thừa ($a > 0$):

a) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$;

b) $\sqrt[3]{a} . \sqrt[4]{a^{-3}} : \sqrt[6]{a^{-1}}$.

Giải

a) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = (a . a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (a^{1+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}}$;

b) $\sqrt[3]{a} . \sqrt[4]{a^{-3}} : \sqrt[6]{a^{-1}} = a^{\frac{1}{3}} . a^{-\frac{3}{4}} : a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}} = a^{-\frac{1}{4}}$.

Ví dụ 7. Rút gọn biểu thức: $\dfrac{6^{2+\sqrt{5}} . 2^{1-\sqrt{5}}}{3^{3+\sqrt{5}}}$.

Giải

$$\frac{6^{2+\sqrt{5}} . 2^{1-\sqrt{5}}}{3^{3+\sqrt{5}}} = \frac{(2 . 3)^{2+\sqrt{5}} . 2^{1-\sqrt{5}}}{3^{3+\sqrt{5}}} = 2^{2+\sqrt{5}} . 3^{2+\sqrt{5}} . 2^{1-\sqrt{5}} . 3^{-3-\sqrt{5}}$$

$$= 2^{2+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}} . 3^{2+\sqrt{5}-3-\sqrt{5}} = 2^{3} . 3^{-1} = \frac{8}{3}.$$

6 Viết các biểu thức sau dưới dạng một luỹ thừa ($a > 0$):

a) $a^{\frac{3}{5}} . a^{\frac{1}{2}} : a^{-\frac{2}{5}}$;

b) $\sqrt{a^{\frac{1}{2}}\sqrt{a^{\frac{1}{2}}\sqrt{a}}}$.

7 Rút gọn biểu thức: $\left(x^{\sqrt{2}}y\right)^{\sqrt{2}}\left(9y^{-\sqrt{2}}\right)$ (với $x, y > 0$).

2 Tại một vùng biển, giả sử cường độ ánh sáng I thay đổi theo độ sâu theo công thức $I = I_0 . 10^{-0,3d}$, trong đó d là độ sâu (tính bằng mét) so với mặt hồ, I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ.

a) Tại độ sâu 1 m, cường độ ánh sáng gấp bao nhiêu lần I_0?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 2 m gấp bao nhiêu lần so với tại độ sâu 10 m? Làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân.

Hình 2

BÀI TẬP

1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} . 3^2 . 12^0$;

b) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$;

c) $\left(2^{-2} . 5^2\right)^{-2} : \left(5 . 5^{-5}\right)$.

2. Viết các biểu thức sau dưới dạng một luỹ thừa ($a > 0$):

a) $3 . \sqrt{3} . \sqrt[4]{3} . \sqrt[8]{3}$;

b) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{a} . \sqrt[3]{a} . \sqrt[4]{a}}{\left(\sqrt[5]{a}\right)^3 . a^{\frac{2}{5}}}$.

3. Rút gọn các biểu thức sau ($a > 0$, $b > 0$):

a) $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{7}{6}}$;

b) $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}}$;

c) $\left(\frac{3}{2}a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\right)$.

4. Với một chỉ vàng, giả sử người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng rộng 1 m^2 và dày khoảng $1,94 . 10^{-7}$ m. Đồng xu 5 000 đồng dày $2,2 . 10^{-3}$ m. Cần chồng bao nhiêu lá vàng như trên để có độ dày bằng đồng xu loại 5 000 đồng? Làm tròn kết quả đến chữ số hàng trăm.

5. Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

a) Tính giá trị còn lại của máy sau 2 năm; sau 2 năm 3 tháng.

b) Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

6. Biết rằng $10^{\alpha} = 2$; $10^{\beta} = 5$.

Tính $10^{\alpha+\beta}$; $10^{\alpha-\beta}$; $10^{2\alpha}$; $10^{-2\alpha}$; $1\,000^{\beta}$; $0,01^{2\alpha}$.

7. Biết rằng $4^{\alpha} = \frac{1}{5}$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $16^{\alpha} + 16^{-\alpha}$; b) $\left(2^{\alpha} + 2^{-\alpha}\right)^2$.

Bài 2. Phép tính lôgarit

Từ khoá: Lôgarit; Cơ số; Đối số.

Thang Richter được sử dụng để đo độ lớn các trận động đất. Nếu máy đo địa chấn ghi được biên độ lớn nhất của một trận động đất là $A = 10^{M}$ μm (1 μm $= 10^{-6}$ m) thì trận động đất đó có độ lớn bằng M độ Richter. Người ta chia các trận động đất thành các mức độ như sau:

Mô hình máy đo địa chấn

Biên độ lớn nhất (μm)	Độ Richter	Mức độ	Mô tả ảnh hưởng
$\le 10^{2,9}$	$\le 2,9$	rất nhỏ	Không cảm nhận được
$10^{3} - 10^{3,9}$	$3,0 - 3,9$	nhỏ	Cảm nhận được, không gây hại
$10^{4} - 10^{4,9}$	$4,0 - 4,9$	nhẹ	Đồ đạc rung chuyển, thiệt hại nhỏ
$10^{5} - 10^{5,9}$	$5,0 - 5,9$	trung bình	Gây thiệt hại với kiến trúc yếu
$10^{6} - 10^{6,9}$	$6,0 - 6,9$	mạnh	Gây thiệt hại tương đối nặng đối với vùng đông dân cư
$10^{7} - 10^{7,9}$	$7,0 - 7,9$	rất mạnh	Tàn phá nghiêm trọng trên diện tích lớn
$\ge 10^{8}$	$\ge 8,0$	cực mạnh	Tàn phá cực kì nghiêm trọng trên diện tích lớn

(Theo *Britannica*)

Đo độ lớn của động đất theo thang Richter có ý nghĩa như thế nào?

1. Khái niệm lôgarit

1 Độ lớn M (theo độ Richter) của một trận động đất được xác định như ▶.

a) Tìm độ lớn theo thang Richter của các trận động đất có biên độ lớn nhất lần lượt là $10^{3,5}$ μm; $100\,000$ μm; $100 \,.\, 10^{4,3}$ μm.

b) Một trận động đất có biên độ lớn nhất $A = 65\,000$ μm thì độ lớn M của nó phải thoả mãn hệ thức nào?

Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Số thực α thoả mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là ***lôgarit cơ số a của b*** và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.$$

Ví dụ 1. Viết các đẳng thức luỹ thừa sau thành đẳng thức lôgarit:

a) $3^5 = 243$; b) $10^{-2} = \dfrac{1}{100}$; c) $\left(\sqrt{3}\right)^0 = 1$.

Giải

a) $3^5 = 243 \Rightarrow \log_3 243 = 5$; b) $10^{-2} = \dfrac{1}{100} \Rightarrow \log_{10}\dfrac{1}{100} = -2$;

c) $\left(\sqrt{3}\right)^0 = 1 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} 1 = 0$.

Chú ý:

a) Biểu thức $\log_a b$ chỉ có nghĩa khi $a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0$.

b) Từ định nghĩa lôgarit, ta có:

- $\log_a 1 = 0$; (1)
- $\log_a a = 1$; (2)
- $\log_a a^b = b$; (3)
- $a^{\log_a b} = b$. (4)

Hai công thức (3) và (4) cho thấy phép lấy lôgarit và phép nâng lên luỹ thừa là hai phép toán ngược nhau.

Ví dụ 2. Tính: a) $\log_2 \dfrac{1}{4}$; b) $9^{\log_3 5}$.

Giải

a) $\log_2 \dfrac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$;

b) $9^{\log_3 5} = \left(3^2\right)^{\log_3 5} = 3^{2\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^2 = 5^2 = 25$.

1 Tính: a) $\log_3 \sqrt[3]{3}$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 8$; c) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\log_5 4}$.

2. Tính lôgarit bằng máy tính cầm tay

Sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể tính nhanh giá trị của các lôgarit (thường cần lấy giá trị gần đúng bằng cách làm tròn đến hàng nào đó).

Chú ý:

a) Lôgarit cơ số 10 được gọi là ***lôgarit thập phân***. Ta viết $\log N$ hoặc $\lg N$ thay cho $\log_{10} N$.

b) Lôgarit cơ số e còn được gọi là ***lôgarit tự nhiên***. Ta viết $\ln N$ thay cho $\log_e N$.

Ví dụ 3. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ sáu):

a) $\log_3 5$; b) $\log 0{,}2$; c) $\ln 10$.

Giải

a) Ấn lần lượt các phím

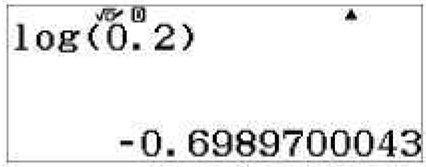
[log■□] [3] [▶] [5] [=]

ta được kết quả $\log_3 5 \approx 1,464974$.

b) Ấn lần lượt các phím

[SHIFT] [(−)] (log) [0] [•] [2] [)] [=]

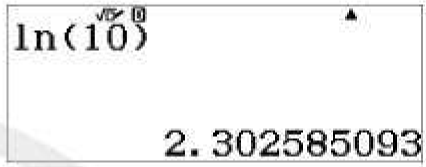
ta được kết quả $\log 0,2 \approx -0,698970$.



c) Ấn lần lượt các phím

[ln] [1] [0] [)] [=]

ta được kết quả $\ln 10 \approx 2,302585$.



2 Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ sáu):

a) $\log_5 0,5$; b) $\log 25$; c) $\ln\frac{3}{2}$.

3. Tính chất của phép tính lôgarit

2 Cho các số thực dương a, M, N với $a \neq 1$. Bạn Quân đã vẽ sơ đồ và tìm ra công thức biến đổi biểu thức $\log_a(MN)$ như sau:

$$MN \begin{cases} \nearrow a^{\log_a M} \cdot a^{\log_a N} \longrightarrow a^{\log_a M + \log_a N} \\ \searrow a^{\log_a (MN)} \end{cases} \Rightarrow \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

a) Giải thích cách làm của bạn Quân.

b) Vẽ sơ đồ tương tự để tìm công thức biến đổi cho $\log_a \frac{M}{N}$ và $\log_a M^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Tổng kết hoạt động trên, ta nhận được các tính chất:

Cho các số thực dương a, M, N với $a \neq 1$, ta có:

- $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$
- $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

Chú ý: Đặc biệt, với a, M, N dương, $a \neq 1$, ta có:

- $\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$;
- $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 4. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 12$; b) $\log_3 (9^2 \,.\, 3^2)$; c) $\log_5 \sqrt[3]{25}$.

Giải

a) $\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 12 = \log_2\left(\frac{2}{3}.12\right) = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3.1 = 3.$

b) $\log_3 (9^2 \,.\, 3^2) = \log_3 9^2 + \log_3 3^2 = 2\log_3 3^2 + 2\log_3 3 = 2 \,.\, 2\log_3 3 + 2 = 4 + 2 = 6.$

c) $\log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 25^{\frac{1}{3}} = \log_5 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_5 5 = \frac{2}{3}\,.\,1 = \frac{2}{3}.$

Ví dụ 5. Trong hoá học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$, trong đó $[\mathrm{H}^+]$ là nồng độ H^+ (ion hydro) tính bằng mol/L. Các dung dịch có pH bé hơn 7 thì có tính acid, có pH lớn hơn 7 thì có tính kiềm, có pH bằng 7 thì trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ H^+ là 0,0001 mol/L. Dung dịch này có tính acid, kiềm hay trung tính?

b) Dung dịch A có nồng độ H^+ gấp đôi nồng độ H^+ của dung dịch B.

Độ pH của dung dịch nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

Giải

a) $\mathrm{pH} = -\log 0{,}0001 = -\log 10^{-4} = 4\log 10 = 4.$

Do $4 < 7$ nên dung dịch có tính acid.

b) Kí hiệu pH_A, pH_B lần lượt là độ pH của hai dung dịch A và B; $[\mathrm{H}^+]_\mathrm{A}$, $[\mathrm{H}^+]_\mathrm{B}$ lần lượt là nồng độ của hai dung dịch A và B. Ta có

$$\mathrm{pH}_\mathrm{A} = -\log[\mathrm{H}^+]_\mathrm{A} = -\log\left(2[\mathrm{H}^+]_\mathrm{B}\right) = -\log 2 - \log[\mathrm{H}^+]_\mathrm{B} = -\log 2 + \mathrm{pH}_\mathrm{B}.$$

Suy ra $\mathrm{pH}_\mathrm{B} - \mathrm{pH}_\mathrm{A} = \log 2 \approx 0{,}301.$

Vậy dung dịch B có độ pH lớn hơn và lớn hơn khoảng 0,301.

3 Tính: a) $\log_5 4 + \log_5 \frac{1}{4}$; b) $\log_2 28 - \log_2 7$; c) $\log\sqrt{1000}$.

Độ lớn M của một trận động đất theo thang Richter được tính theo công thức $M = \log\frac{A}{A_0}$, trong đó A là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chấn, A_0 là biên độ tiêu chuẩn được sử dụng để hiệu chỉnh độ lệch gây ra bởi khoảng cách của máy đo địa chấn so với tâm chấn (ở ▶ và 1, $A_0 = 1$ μm).

a) Tính độ lớn của trận động đất có biên độ A bằng

i) $10^{5,1}A_0$; ii) $65\,000A_0$.

b) Một trận động đất tại địa điểm N có biên độ lớn nhất gấp ba lần biên độ lớn nhất của trận động đất tại địa điểm P. So sánh độ lớn của hai trận động đất.

4. Công thức đổi cơ số

3 Khi chưa có máy tính, người ta thường tính các lôgarit dựa trên bảng giá trị các lôgarit thập phân đã được xây dựng sẵn. Chẳng hạn, để tính $x = \log_2 15$, người ta viết $2^x = 15$, rồi lấy lôgarit thập phân hai vế, nhận được $x\log 2 = \log 15$ hay $x = \dfrac{\log 15}{\log 2}$.

Sử dụng cách làm này, tính $\log_a N$ theo $\log a$ và $\log N$ với $a, N > 0$, $a \neq 1$.

Với cách làm như ở 3, ta nhận được ***công thức đổi cơ số***:

Cho các số dương a, b, N với $a \neq 1$, $b \neq 1$, ta có

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

Đặc biệt, ta có:

- $\log_a N = \dfrac{1}{\log_N a}\ (N \neq 1)$;
- $\log_{a^\alpha} N = \dfrac{1}{\alpha}\log_a N\ (\alpha \neq 0)$.

Ví dụ 6. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_9 27$;

b) $\log_2 3 \,.\, \log_3 \dfrac{1}{4}$.

Giải

a) $\log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = \dfrac{3}{2}\log_3 3 = \dfrac{3}{2}\,.\,1 = \dfrac{3}{2}$;

b) $\log_2 3 \,.\, \log_3 \dfrac{1}{4} = \log_2 3 \,.\, \dfrac{\log_2 \frac{1}{4}}{\log_2 3} = \log_2 2^{-2} = -2\log_2 2 = -2.1 = -2$.

Ví dụ 7. Đặt $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. Biểu thị $\log_9 10$ theo a và b.

Giải

$$\log_9 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 9} = \frac{\log_2(2\,.\,5)}{\log_2 3^2} = \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{2\log_2 3} = \frac{1+b}{2a}.$$

4 Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_{\frac{1}{4}} 8$;

b) $\log_4 5 \,.\, \log_5 6 \,.\, \log_6 8$.

5 Đặt $\log_3 2 = a$, $\log_3 7 = b$. Biểu thị $\log_{12} 21$ theo a và b.

BÀI TẬP

1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_2 16$; b) $\log_3 \frac{1}{27}$; c) $\log 1\,000$; d) $9^{\log_3 12}$.

2. Tìm các giá trị của x để biểu thức sau có nghĩa:

a) $\log_3(1-2x)$; b) $\log_{x+1} 5$.

3. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư):

a) $\log_3 15$; b) $\log 8 - \log 3$; c) $3\ln 2$.

4. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_6 9 + \log_6 4$; b) $\log_5 2 - \log_5 50$; c) $\log_3 \sqrt{5} - \frac{1}{2}\log_3 15$.

5. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_2 9 \,.\, \log_3 4$; b) $\log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}}$; c) $\log_2 3 \,.\, \log_9 \sqrt{5} \,.\, \log_5 4$.

6. Đặt $\log 2 = a$, $\log 3 = b$. Biểu thị các biểu thức sau theo a và b.

a) $\log_4 9$; b) $\log_6 12$; c) $\log_5 6$.

7. a) Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L. Tính độ pH của nước cất.

b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính độ pH của dung dịch đó.

Bài 3. Hàm số mũ. Hàm số lôgarit

Từ khoá: Hàm số mũ; Hàm số lôgarit.

Chuyện kể rằng, ngày xưa ở xứ Ấn Độ, người phát minh ra bàn cờ vua được nhà vua cho phép tự chọn phần thưởng tuỳ thích. Nhà phát minh đã đề nghị phần thưởng là những hạt thóc đặt vào 64 ô của bàn cờ theo quy tắc như sau: 1 hạt thóc ở ô thứ nhất, 2 hạt thóc ở ô thứ hai, 4 hạt thóc ở ô thứ ba, … Cứ như thế, số hạt thóc ở ô sau gấp đôi số hạt thóc ở ô trước. Nhà vua nhanh chóng chấp nhận lời đề nghị, vì cho rằng phần thưởng như vậy thì quá dễ dàng.

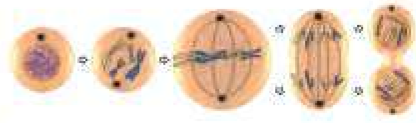
Tuy nhiên, theo phần thưởng này, tổng số hạt thóc có trong 64 ô là $2^{64} - 1$, tính ra được hơn $18 \,.\, 10^{18}$ hạt thóc, hay hơn 450 tỉ tấn thóc (mỗi hạt thóc nặng khoảng 25 mg). Nhà vua không thể có đủ thóc để thưởng cho nhà phát minh.

Từ tình huống trên, có nhận xét gì về giá trị của biểu thức 2^x khi x trở nên lớn?

1. Hàm số mũ

1 Nguyên phân là quá trình tế bào phân chia thành hai tế bào con giống hệt nhau về mặt di truyền.

Lập bảng sau đây để tính số tế bào được tạo ra từ một tế bào ban đầu sau những lần nguyên phân.



Hình 1

Số lần nguyên phân	0	1	2	3	4	5	6	7
Số tế bào	1	2	4	?	?	?	?	?

a) Hoàn thành bảng trên vào vở.

b) Gọi y là số tế bào được tạo ra từ một tế bào ban đầu sau x ($x = 0, 1, 2, \ldots$) lần nguyên phân. Viết công thức biểu thị y theo x.

Cho số thực dương a khác 1.
Hàm số cho tương ứng mỗi số thực x với số thực a^x được gọi là ***hàm số mũ*** cơ số a, kí hiệu $y = a^x$.

Nhận xét: Hàm số $y = a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số mũ? Chỉ ra cơ số của nó.

a) $y = 3^{\frac{x}{2}}$; b) $y = x^{-4}$; c) $y = 4^{-x}$.

Giải

a) $y = 3^{\frac{x}{2}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \left(\sqrt{3}\right)^x$ là hàm số mũ với cơ số $\sqrt{3}$.

b) $y = x^{-4}$ không phải là hàm số mũ.

c) $y = 4^{-x} = (4^{-1})^x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ là hàm số mũ với cơ số $\dfrac{1}{4}$.

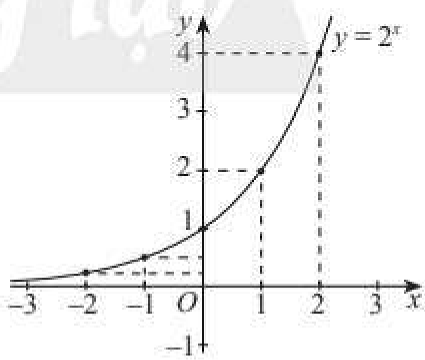
Đồ thị của hàm số mũ

2 a) Xét hàm số mũ $y = 2^x$ với tập xác định $\mathbb{R}$.

i) Hoàn thành bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
y	?	$\dfrac{1}{2}$	1	?	?

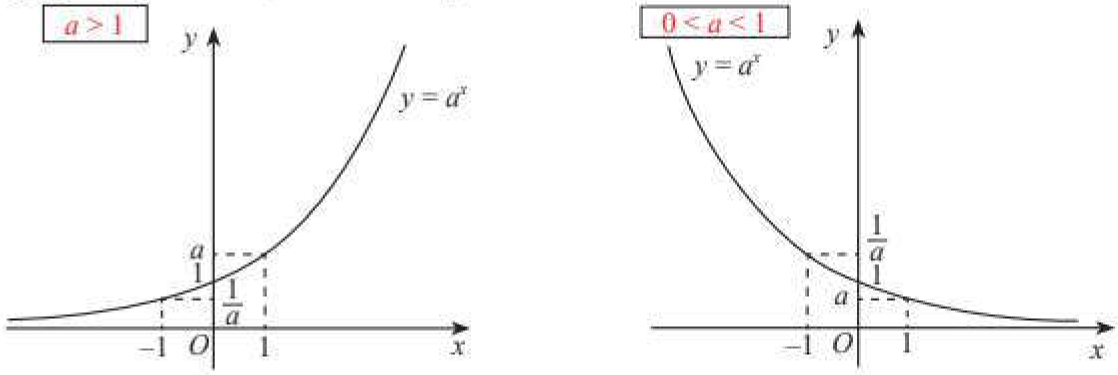
ii) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xác định các điểm có toạ độ như bảng trên. Làm tương tự, lấy nhiều điểm $M(x; 2^x)$ với $x \in \mathbb{R}$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = 2^x$ như Hình 2. Từ đồ thị này, nêu nhận xét về tính liên tục, tính đồng biến, nghịch biến, giới hạn khi $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ và tập giá trị của hàm số đã cho.



Hình 2

b) Lập bảng giá trị và vẽ đồ thị của hàm số $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. Từ đó, nêu nhận xét về tính liên tục, tính đồng biến, nghịch biến, giới hạn khi $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ và tập giá trị của hàm số này.

Tổng quát, ta có đồ thị của hàm số $y = a^x$ với $a > 1$ và $0 < a < 1$ như sau:



Hình 3

Từ đó, hàm số $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) có:

(1) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$.
Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

(2) Sự biến thiên:

- Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty,\ \lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} a^x = 0.$$

- Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} a^x = 0,\ \lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty.$$

(3) Đồ thị:

- Cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$; đi qua điểm $(1; a)$.
- Nằm phía trên trục hoành.

Ví dụ 2. Sử dụng tính chất của hàm số mũ, so sánh các cặp số sau:

a) $1{,}4^2$ và $1{,}4^{1{,}8}$; b) $0{,}9^{-1{,}2}$ và $0{,}9^{-0{,}8}$; c) $\sqrt[3]{2}$ và $\sqrt[5]{4}$.

Giải

a) Do $1{,}4 > 1$ nên hàm số $y = 1{,}4^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $2 > 1{,}8$ nên $1{,}4^2 > 1{,}4^{1{,}8}$.

b) Do $0{,}9 < 1$ nên hàm số $y = 0{,}9^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $-1{,}2 < -0{,}8$ nên $0{,}9^{-1{,}2} > 0{,}9^{-0{,}8}$.

c) Ta có: $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{2^2} = 2^{\frac{2}{5}}$.

Do $2 > 1$ nên hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$ nên $2^{\frac{1}{3}} < 2^{\frac{2}{5}}$, suy ra $\sqrt[3]{2} < \sqrt[5]{4}$.

Ví dụ 3. Năm 2020, dân số thế giới là 7,795 tỉ người và tốc độ tăng dân số 1,05%/năm (*nguồn:* https://www.worldmeters.info/world-population). Nếu tốc độ tăng này tiếp tục duy trì ở những năm tiếp theo thì dân số thế giới sau t năm kể từ năm 2020 được tính bởi công thức:

$$P(t) = 7{,}795 \,.\, (1 + 0{,}0105)^t \text{ (tỉ người).} \qquad (*)$$

Khi đó, hãy tính dân số thế giới vào năm 2025 và vào năm 2030. (Mốc thời điểm để tính dân số của mỗi năm là ngày 1 tháng 7.)

Giải

Năm 2025 ứng với $t = 5$ nên có dân số thế giới là

$$P(5) = 7{,}795 \,.\, (1 + 0{,}0105)^5 \approx 8{,}213 \text{ (tỉ người).}$$

Năm 2030 ứng với $t = 10$ nên có dân số thế giới là

$$P(10) = 7{,}795 \,.\, (1 + 0{,}0105)^{10} \approx 8{,}653 \text{ (tỉ người).}$$

Chú ý: Với giả thiết tốc độ tăng dân số 1,05%/năm không đổi, công thức (*) được áp dụng để tính dân số thế giới tại thời điểm bất kì sau năm 2020. Chẳng hạn, dân số thế giới tại thời điểm ngày 1 tháng 1 năm 2022 (ứng với $t = 1{,}5$) là

$$P(1{,}5) = 7{,}795 \,.\, (1 + 0{,}0105)^{1{,}5} \approx 7{,}918 \text{ (tỉ người).}$$

1 Trên cùng một hệ trục toạ độ, vẽ đồ thị các hàm số $y = 3^x$ và $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

2 So sánh các cặp số sau:

a) $0{,}85^{0{,}1}$ và $0{,}85^{-0{,}1}$; b) $\pi^{-1{,}4}$ và $\pi^{-0{,}5}$; c) $\sqrt[4]{3}$ và $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

1 Khối lượng vi khuẩn của một mẻ nuôi cấy sau t giờ kể từ thời điểm ban đầu được cho bởi công thức $M(t) = 50 \,.\, 1{,}06^t$ (g).

(*Nguồn:* Sinh học 10, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 101)

a) Tìm khối lượng vi khuẩn tại thời điểm bắt đầu nuôi cấy (gọi là *khối lượng ban đầu*).

b) Tính khối lượng vi khuẩn sau 2 giờ và sau 10 giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

c) Khối lượng vi khuẩn tăng dần hay giảm dần theo thời gian? Tại sao?

2. Hàm số lôgarit

3 Cho s và t là hai đại lượng liên hệ với nhau theo công thức $s = 2^t$.

a) Với mỗi giá trị của t nhận giá trị trong $\mathbb{R}$, tìm được bao nhiêu giá trị tương ứng của s? Tại sao?

b) Với mỗi giá trị của s thuộc $(0; +\infty)$, có bao nhiêu giá trị tương ứng của t?

c) Viết công thức biểu thị t theo s và hoàn thành bảng sau.

s	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
t	?	–2	?	0	?	2	?	?

Trong 3, t là một hàm số của s xác định bởi công thức $t = \log_2 s$. Đây là một hàm số lôgarit.

Cho số thực dương a khác 1.

Hàm số cho tương ứng mỗi số thực dương x với số thực $\log_a x$ được gọi là ***hàm số lôgarit*** cơ số a, kí hiệu $y = \log_a x$.

Nhận xét: Hàm số $y = \log_a x$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.

Ví dụ 4. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lôgarit? Chỉ ra cơ số của nó.

a) $y = \log_{\sqrt{2}} x$; b) $y = -\log_3 x$; c) $y = x\log_2 3$.

Giải

a) $y = \log_{\sqrt{2}} x$ là hàm số lôgarit với cơ số $\sqrt{2}$.

b) $y = -\log_3 x = \log_{\frac{1}{3}} x$ là hàm số lôgarit với cơ số $\frac{1}{3}$.

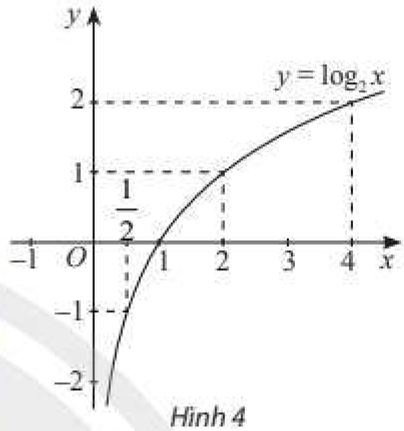
c) $y = x\log_2 3$ không phải là hàm số lôgarit (mà là hàm bậc nhất với hệ số góc $\log_2 3$).

Đồ thị hàm số lôgarit

4 a) Xét hàm số $y = \log_2 x$ với tập xác định $D = (0; +\infty)$.

i) Hoàn thành bảng giá trị sau:

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	?	0	?	?

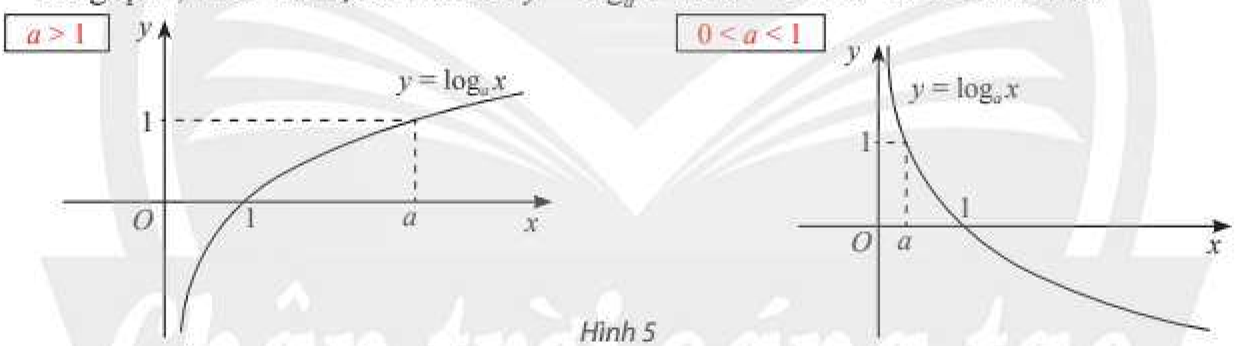


Hình 4

ii) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xác định các điểm có toạ độ như bảng trên. Làm tương tự, lấy nhiều điểm $M(x; \log_2 x)$ với $x > 0$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ như Hình 4. Từ đồ thị này, nêu nhận xét về tính liên tục, tính đồng biến, nghịch biến, giới hạn khi $x \to +\infty$, $x \to 0^+$ và tập giá trị của hàm số đã cho.

b) Lập bảng giá trị và vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Từ đó, nhận xét về tính liên tục, tính đồng biến, nghịch biến, giới hạn khi $x \to +\infty$, $x \to 0^+$ và tập giá trị của hàm số này.

Tổng quát, ta có đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ với $a > 1$ và $0 < a < 1$ như sau:



Hình 5

Từ đó, hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) có:

(1) Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.
Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.
Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.

(2) Sự biến thiên:

• Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty,\ \lim_{x\to0^+} y = \lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty.$$

• Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty,\ \lim_{x\to0^+} y = \lim_{x\to0^+} \log_a x = +\infty.$$

(3) Đồ thị:

• Cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$, đi qua điểm $(a; 1)$.

• Nằm bên phải trục tung.

Ví dụ 5. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_3 7$ và $3\log_3 2$;   b) $2\log_{0,4} 5$ và $3\log_{0,4} 3$.

Giải

a) $3\log_3 2 = \log_3 2^3 = \log_3 8$.

Hàm số $y = \log_3 x$ có cơ số $3 > 1$ nên đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mà $7 < 8$ nên $\log_3 7 < \log_3 8$. Vậy $\log_3 7 < 3\log_3 2$.

b) $2\log_{0,4} 5 = \log_{0,4} 5^2 = \log_{0,4} 25$; $3\log_{0,4} 3 = \log_{0,4} 3^3 = \log_{0,4} 27$.

Hàm số $y = \log_{0,4} x$ có cơ số $0,4 < 1$ nên nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Mà $25 < 27$ nên $\log_{0,4} 25 > \log_{0,4} 27$. Vậy $2\log_{0,4} 5 > 3\log_{0,4} 3$.

Ví dụ 6. Trong âm học, mức cường độ âm được tính bởi công thức $L = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ (dB) (dB là đơn vị mức cường độ âm, đọc là đêxiben), trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 là cường độ âm chuẩn (cường độ âm thấp nhất mà tai người bình thường có thể nghe được).

(*Nguồn:* Vật lí 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52, 53)

a) Mức cường độ âm L thấp nhất mà tai người có thể nghe được là bao nhiêu?

b) Cuộc trò chuyện có cường độ âm 10^{-9} W/m^2 thì có mức cường độ âm bằng bao nhiêu?

c) Cường độ âm tại một khu văn phòng nằm trong miền từ 10^{-7} W/m^2 đến $5 \,.\, 10^{-6}$ W/m^2 (tức là $10^{-7} \le I \le 5 \,.\, 10^{-6}$). Mức cường độ âm tại khu văn phòng này nằm trong khoảng nào? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

Giải

a) Khi $I = I_0$ thì $L = 10\log 1 = 0$ (dB). Vậy mức cường độ âm thấp nhất mà tai người bình thường có thể nghe được là 0 dB.

b) Khi $I = 10^{-9}$ W/m^2, ta có $L = 10\log\dfrac{10^{-9}}{10^{-12}} = 10\log 10^3 = 30\log 10 = 30$ (dB).

c) Với $I = 10^{-7}$ W/m^2, $L = 10\log\dfrac{10^{-7}}{10^{-12}} = 10\log 10^5 = 50\log 10 = 50$ (dB).

Với $I = 5 \,.\, 10^{-6}$ W/m^2, $L = 10\log\dfrac{5.10^{-6}}{10^{-12}} = 10\log(5 \,.\, 10^6) = 10(6 + \log 5) \approx 67$ (dB).

Hàm số $y = \log x$ đồng biến nên hàm số $y = 10\log x$ cũng đồng biến.

Do đó, từ $10^{-7} \le I \le 5 \,.\, 10^{-6}$ suy ra $50 \le L \le 67$.

Vậy mức cường độ âm tại khu văn phòng nằm trong khoảng từ 50 dB đến 67 dB.

3 Trên cùng một hệ trục toạ độ, vẽ đồ thị các hàm số $y = \log_3 x$ và $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

4 So sánh các cặp số sau:

a) $\log_{\frac{1}{2}} 4,8$ và $\log_{\frac{1}{2}} 5,2$;   b) $\log_{\sqrt{5}} 2$ và $\log_5 2\sqrt{2}$;   c) $-\log_{\frac{1}{4}} 2$ và $\log_{\frac{1}{2}} 0,4$.

2 Mức cường độ âm được tính theo công thức như ở Ví dụ 6.

a) Tiếng thì thầm có cường độ âm $I = 10^{-10}$ W/m^2 thì có mức cường độ âm bằng bao nhiêu?

b) Để nghe trong thời gian dài mà không gây hại cho tai, âm thanh phải có cường độ không vượt quá 100 000 lần cường độ của tiếng thì thầm. Âm thanh không gây hại cho tai khi nghe trong thời gian dài phải ở mức cường độ âm như thế nào?

BÀI TẬP

1. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 4^x$; b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

2. So sánh các cặp số sau:

a) $1,3^{0,7}$ và $1,3^{0,6}$; b) $0,75^{-2,3}$ và $0,75^{-2,4}$.

3. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $\log_2(3 - 2x)$; b) $\log_3(x^2 + 4x)$.

4. Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = \log x$; b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

5. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_\pi 0,8$ và $\log_\pi 1,2$; b) $\log_{0,3} 2$ và $\log_{0,3} 2,1$.

6. Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là hằng số ($a > 0$) và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(*Nguồn:* https://www.britannica.com/science/seawer/Optical-properties)

a) Có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$ không? Giải thích.

b) Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng $0,95I_0$. Tìm giá trị của a.

c) Tại độ sâu 20 m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

7. Công thức $h = -19,4.\log\frac{P}{P_0}$ là mô hình đơn giản cho phép tính độ cao h so với mặt nước biển của một vị trí trong không trung (tính bằng kilômét) theo áp suất không khí P tại điểm đó và áp suất P_0 của không khí tại mặt nước biển (cùng tính bằng Pa – đơn vị áp suất, đọc là Pascal).

(*Nguồn:* https://doi.org/10.1007/s40828-020-0111-6)

a) Nếu áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ thì máy bay đang ở độ cao nào?

b) Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B. Ngọn núi nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Bài 4. Phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit

Từ khoá: Phương trình mũ; Bất phương trình mũ; Phương trình lôgarit; Bất phương trình lôgarit.

Sau khi sinh vật chết, lượng đồng vị phóng xạ carbon-14 trong cơ thể cứ sau 5 730 năm thì giảm đi một nửa do quá trình phân rã. Đây là cơ sở của phương pháp xác định tuổi của hoá thạch bằng carbon phóng xạ carbon-14 trong khảo cổ học.

(*Nguồn:* https://www.britannica.com/science/carbon-14)

Việc tính toán tuổi của hoá thạch được thực hiện như thế nào?

1. Phương trình mũ

1 Số lượng cá thể vi khuẩn của một mẻ nuôi cấy tuân theo công thức $P(t) = 50 \,.\, 10^{kt}$, trong đó t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm bắt đầu nuôi cấy, k là hằng số.

(*Nguồn:* Sinh học 10, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 101)

a) Ban đầu mẻ có bao nhiêu cá thể vi khuẩn?

b) Sau 1 giờ thì mẻ có 100 cá thể vi khuẩn. Tìm giá trị của k (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

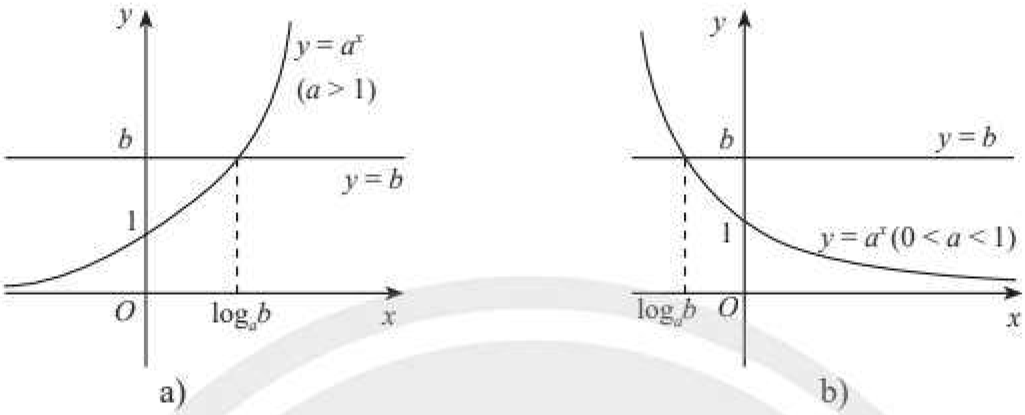
c) Sau bao lâu thì số lượng cá thể vi khuẩn đạt đến 50 000?

Hình 1

Phương trình dạng $a^x = b$, trong đó a và b là những số cho trước, $a > 0$, $a \neq 1$, được gọi là ***phương trình mũ cơ bản***.

Nghiệm của phương trình mũ cơ bản

2 Cho đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ và $y = b$ như Hình 2a (với $a > 0$) hay Hình 2b (với $0 < a < 1$). Từ đây, hãy nhận xét về số nghiệm và công thức nghiệm của phương trình $a^x = b$ trong hai trường hợp $b > 0$ và $b \leq 0$.



Hình 2

Cho phương trình $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Nếu $b > 0$ thì phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý: a) Nếu $b = a^{\alpha}$ thì ta có $a^x = a^{\alpha} \Leftrightarrow x = \alpha$.

b) Tổng quát hơn, $a^{u(x)} = a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $2^x = \frac{1}{8}$;

b) $5 \,.\, 10^x = 1$;

c) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{27^x}{3}$.

Giải

a) $2^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -3$.

b) $5 \,.\, 10^x = 1 \Leftrightarrow 10^x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \log\frac{1}{5} = -\log 5$.

c) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{27^x}{3} \Leftrightarrow \left(3^{-2}\right)^x = \frac{\left(3^3\right)^x}{3} \Leftrightarrow 3^{-2x} = 3^{3x-1} \Leftrightarrow -2x = 3x - 1 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$.

Ví dụ 2. Nếu khối lượng carbon-14 trong cơ thể sinh vật lúc chết là M_0 (g) thì khối lượng carbon-14 còn lại (tính theo gam) sau t năm được tính theo công thức $M(t) = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (g), trong đó $T = 5\,730$ (năm) là chu kì bán rã của carbon-14. Nghiên cứu hoá thạch của một sinh vật, người ta xác định được khối lượng carbon-14 hiện có trong hoá thạch là $5 \,.\, 10^{-13}$ g. Nhờ biết tỉ lệ khối lượng của carbon-14 so với carbon-12 trong cơ thể sinh vật sống, người ta xác định được khối lượng carbon-14 trong cơ thể lúc sinh vật chết là $M_0 = 1{,}2 \,.\, 10^{-12}$ (g). Sinh vật này sống cách đây bao nhiêu năm? (Làm tròn kết quả đến hàng trăm.)

Giải

Gọi t là thời gian từ lúc sinh vật chết đến nay. Ta có:

$$5.10^{-13} = 1{,}2.10^{-12}.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{t}{T} = \log_{\frac{1}{2}}\frac{5}{12}$$

$$\Leftrightarrow t = T\log_{\frac{1}{2}}\frac{5}{12} = -5\,730.\log_2\frac{5}{12} \approx 7\,237 \approx 7\,200.$$

Vậy sinh vật này sống cách đây khoảng 7 200 năm.

1 Giải các phương trình sau:

a) $3^{x+2} = \sqrt[3]{9}$; b) $2 \,.\, 10^{2x} = 30$; c) $4^{2x} = 8^{2x-1}$.

1 Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu M_0 là $M(t) = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó t là thời gian tính từ thời điểm ban đầu và T là chu kì bán rã của chất. Đồng vị plutonium-234 có chu kì bán rã là 9 giờ.

(*Nguồn:* https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Plutonium#section=Atomic-Mass-Half-Life-and-Decay)

Từ khối lượng ban đầu 200 g, sau bao lâu thì khối lượng plutonium-234 còn lại là:

a) 100 g? b) 50 g? c) 20 g?

2. Phương trình lôgarit

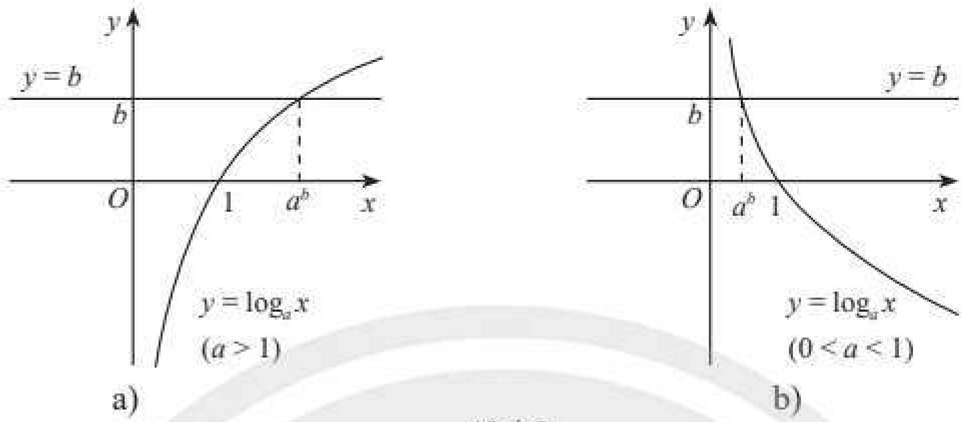
3 Nhắc lại rằng, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức pH = –log x, trong đó x là nồng độ ion H^+ tính bằng mol/L.

Biết sữa có độ pH là 6,5. Nồng độ H^+ của sữa bằng bao nhiêu?

Phương trình dạng $\log_a x = b$, trong đó a, b là những số cho trước, $a > 0$, $a \neq 1$, được gọi là ***phương trình lôgarit cơ bản***.

Nghiệm của phương trình lôgarit cơ bản

4 Cho đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) và $y = b$ như Hình 3a (với $a > 1$) hay Hình 3b (với $0 < a < 1$). Từ đây hãy nhận xét về số nghiệm và công thức nghiệm của phương trình $\log_a x = b$.



Hình 3

Phương trình $\log_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Chú ý: Tổng quát, xét phương trình dạng

$$\log_a u(x) = \log_a v(x) \quad (a > 0, a \neq 1). \qquad (1)$$

Để giải phương trình (1), trước hết cần đặt điều kiện có nghĩa: $u(x) > 0$ và $v(x) > 0$.

Khi đó, (1) được biến đổi thành phương trình

$$u(x) = v(x). \qquad (2)$$

Sau khi giải phương trình (2), ta cần kiểm tra sự thoả mãn điều kiện. Nghiệm của phương trình (1) là những nghiệm của (2) thoả mãn điều kiện.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a) $\log_3 x = -2$; b) $\log_2(x^2 - 3) = \log_2 2x$.

Giải

a) Điều kiện: $x > 0$.

$\log_3 x = -2 \Leftrightarrow x = 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ 2x > 0. \end{cases}$ (*)

Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$x^2 - 3 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Thay lần lượt hai giá trị này vào (*), ta thấy chỉ có $x = 3$ thoả mãn.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

Ví dụ 4. Nước chanh có độ pH bằng 2,4; giấm có độ pH bằng 3. Nước chanh có độ acid gấp bao nhiêu lần giấm (nghĩa là có nồng độ H^+ gấp bao nhiêu lần)? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)

Giải

Kí hiệu x, y lần lượt là nồng độ H^+ trong nước chanh và giấm. Theo giả thiết, ta có

$$2{,}4 = -\log x \text{ và } 3 = -\log y.$$

Suy ra $x = 10^{-2,4}$ và $y = 10^{-3}$. Suy ra $\dfrac{x}{y} = \dfrac{10^{-2,4}}{10^{-3}} = 10^{0,6} \approx 3{,}98.$

Vậy nồng độ H^+ của nước chanh gấp 3,98 lần nồng độ H^+ của giấm.

2 Giải các phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = -2$;

b) $\log_2(x+6) = \log_2(x+1) + 1$.

3. Bất phương trình mũ

5 Xét quần thể vi khuẩn ở 1.

a) Ở những thời điểm nào thì số lượng cá thể vi khuẩn vượt quá 50 000?

b) Ở những thời điểm nào thì số lượng cá thể vi khuẩn vượt quá 50 000 nhưng chưa vượt quá 100 000?

Bất phương trình mũ cơ bản là bất phương trình có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$), với a, b là những số cho trước, $a > 0$, $a \neq 1$.

Xét bất phương trình

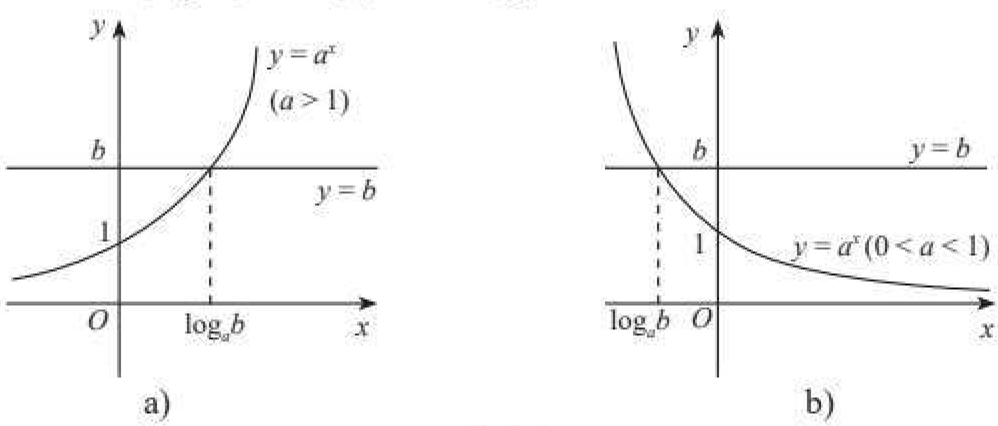
$$a^x > b. \qquad (3)$$

Nghiệm của (3) là hoành độ các điểm trên đồ thị hàm số $y = a^x$ nằm phía trên đường thẳng $y = b$. Từ đồ thị ở Hình 4, ta nhận được:

- Nếu $b \leq 0$ thì mọi $x \in \mathbb{R}$ đều là nghiệm của (3).
- Nếu $b > 0$ thì:

 – Với $a > 1$, nghiệm của (3) là $x > \log_a b$;

 – Với $0 < a < 1$, nghiệm của (3) là $x < \log_a b$.



Hình 4

Chú ý: a) Tương tự như trên, từ đồ thị ở Hình 4, ta nhận được kết quả về nghiệm của mỗi bất phương trình $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$ (các bất phương trình $a^x < b$, $a^x \leq b$ vô nghiệm nếu $b \leq 0$).

b) Nếu $a > 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) > v(x)$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

Ví dụ 5. Giải các bất phương trình sau:

a) $10^x < 0{,}001$; b) $0{,}4^x > 2$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2 \,.\, 4^{2x}$.

Giải

a) $10^x < 0{,}001 \Leftrightarrow 10^x < 10^{-3} \Leftrightarrow x < -3$ (do $10 > 1$).

c) $0{,}4^x > 2 \Leftrightarrow x < \log_{0,4} 2$ (do $0 < 0{,}4 < 1$).

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2 \,.\, 4^{2x} \Leftrightarrow (2^{-1})^x \geq 2 \,.\, (2^2)^{2x} \Leftrightarrow 2^{-x} \geq 2^{1+4x} \Leftrightarrow -x \geq 1 + 4x$ (do $2 > 1$)

$\Leftrightarrow 5x \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{5}$.

3 Giải các bất phương trình sau:

a) $2^x > 16$; b) $0{,}1^x \leq 0{,}001$; c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^x$.

4. Bất phương trình lôgarit

6 Biết rằng máu của người bình thường có độ pH từ 7,30 đến 7,45 (*nguồn:* Hoá học 11, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 15). Nồng độ H^+ trong máu nhận giá trị trong miền nào?

Bất phương trình lôgarit cơ bản là bất phương trình có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$), với a, b là những số cho trước, $a > 0$, $a \neq 1$.

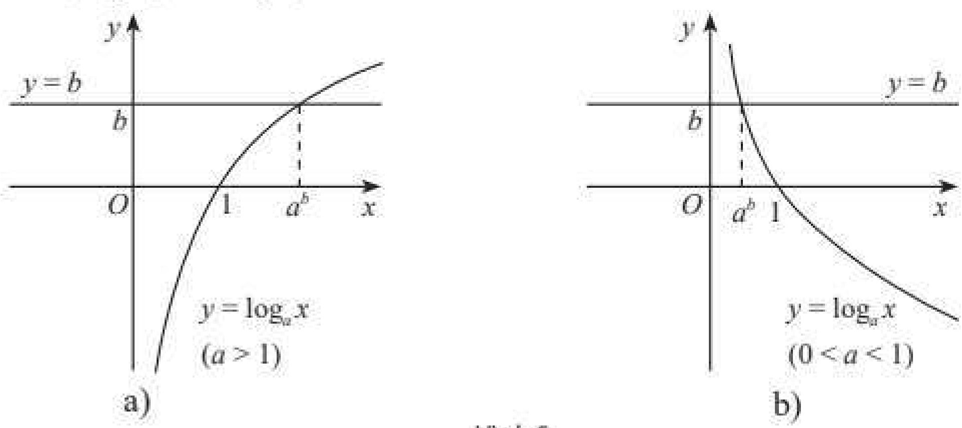
Xét bất phương trình

$$\log_a x > b. \qquad (4)$$

Điều kiện xác định của bất phương trình là $x > 0$.

Nghiệm của (4) là hoành độ các điểm của đồ thị hàm số $y = \log_a x$ nằm phía trên đường thẳng $y = b$. Từ đồ thị ở Hình 5, ta nhận được:

- Với $a > 1$, nghiệm của (4) là $x > a^b$.
- Với $0 < a < 1$, nghiệm của (4) là $0 < x < a^b$.



Hình 5

Chú ý: a) Tương tự như trên, từ đồ thị ở Hình 5, ta nhận được kết quả về nghiệm của mỗi bất phương trình $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$.

b) Nếu $a > 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) > v(x) > 0$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow 0 < u(x) < v(x)$.

Ví dụ 6. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_2 (2x - 1) \leq 1$;

b) $\log_{\frac{1}{2}}(1-x) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+2)$.

Giải

a) Điều kiện: $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Khi đó, do cơ số $2 > 1$ nên bất phương trình đã cho trở thành

$$2x - 1 \leq 2^1 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} 1 - x > 0 \\ 3x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 1$. (*)

Khi đó, do cơ số $\frac{1}{2} < 1$ nên bất phương trình đã cho trở thành

$$1 - x < 3x + 2 \Leftrightarrow 4x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{4} < x < 1$.

4 Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2$;

b) $\log_5 (x + 2) \leq 1$.

2 Nước uống đạt tiêu chuẩn phải có độ pH nằm trong khoảng từ 6,5 đến 8,5 (theo Quy chuẩn Việt Nam QCVN 01:2009/BYT). Nồng độ H^+ trong nước uống tiêu chuẩn phải nằm trong khoảng nào?

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau:

a) $5^{2x-1} = 25$;

b) $3^{x+1} = 9^{2x+1}$;

c) $10^{1-2x} = 100\,000$.

2. Giải các phương trình sau. Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

a) $3^{x+2} = 7$;

b) $3 \cdot 10^{2x+1} = 5$.

3. Giải các phương trình sau:

a) $\log_6(4x + 4) = 2$;

b) $\log_3 x - \log_3(x - 2) = 1$.

4. Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq 9$;

b) $4^x > 2^{x-2}$.

5. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_2(x - 2) < 2$;

b) $\log(x + 1) \geq \log(2x - 1)$.

6. Chất phóng xạ polonium-210 có chu kì bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong một mẫu chỉ bằng một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100 g có khối lượng polonium-210 còn lại sau t ngày được tính theo công thức $M(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}$ (g).

(*Nguồn:* https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Polonium#section=Atomic-Mass-Half-Life-and-Decay)

a) Khối lượng polonium-210 còn lại bao nhiêu sau 2 năm?

b) Sau bao lâu thì còn lại 40 g polonium-210?

7. Nhắc lại rằng, mức cường độ âm L được tính bằng công thức $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ (dB), trong đó I là cường độ của âm tính bằng W/m^2 và $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

(*Nguồn:* Vật lí 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52)

a) Một giáo viên đang giảng bài trong lớp học có mức cường độ âm là 50 dB. Cường độ âm của giọng nói giáo viên bằng bao nhiêu?

b) Mức cường độ âm trong một nhà xưởng thay đổi trong khoảng từ 75 dB đến 90 dB. Cường độ âm trong nhà xưởng này thay đổi trong khoảng nào?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Rút gọn biểu thức $\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}.(\sqrt{3})^5$, ta được

A. $\sqrt{3}$.   B. $3\sqrt{3}$.

C. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.   D. 9.

2. Nếu $2^{\alpha} = 9$ thì $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{\alpha}{8}}$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{1}{3}$.   B. 3.

C. $\dfrac{1}{9}$.   D. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Nếu $a^{\frac{1}{2}} = b$ $(a > 0, a \neq 1)$ thì

A. $\log_{\frac{1}{2}} a = b$.   B. $2\log_a b = 1$.

C. $\log_a \dfrac{1}{2} = b$.   D. $\log_{\frac{1}{2}} b = a$.

4. Nếu $x = \log_3 4 + \log_9 4$ thì 3^x có giá trị bằng

A. 6.   B. 8.

C. 16.   D. 64.

5. Cho α, β là hai số thực với α < β. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(0,3)^{\alpha} < (0,3)^{\beta}$.

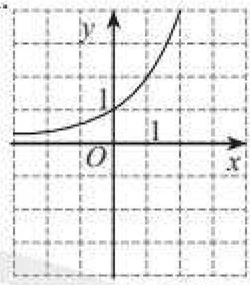
B. $\pi^{\alpha} \geq \pi^{\beta}$.

C. $\left(\sqrt{2}\right)^{\alpha} < \left(\sqrt{2}\right)^{\beta}$.

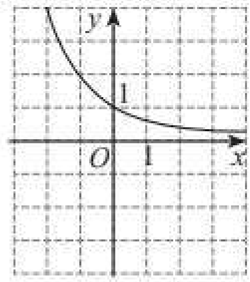
D. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\beta} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\alpha}$.

6. Hình nào vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$?

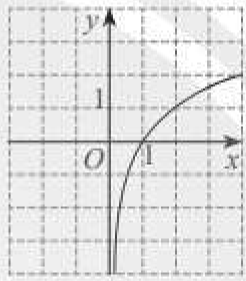
A.



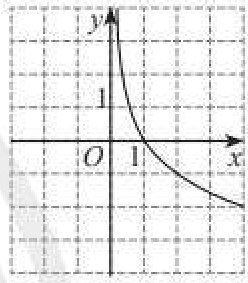
B.



C.



D.



7. Phương trình $0,1^{2x-1} = 100$ có nghiệm là

A. $-\dfrac{1}{2}$.   B. $\dfrac{1}{3}$.

C. $1\dfrac{1}{2}$.   D. $2\dfrac{1}{3}$.

8. Tập nghiệm của bất phương trình $0,5^{3x-1} > 0,25$ là

A. $(-\infty; 1)$.   B. $(1; +\infty)$.

C. $(0; 1)$.   D. $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$.

9. Nếu $\log x = 2\log 5 - \log 2$ thì

A. $x = 8$.   B. $x = 23$.

C. $x = 12,5$.   D. $x = 5$.

10. Số nguyên x nhỏ nhất thoả mãn $\log_{0,1}(1 - 2x) > -1$ là

A. $x = 0$.   B. $x = 1$.

C. $x = -5$.   D. $x = -4$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

11. Biết $4^{\alpha} + 4^{-\alpha} = 5$.

Tính giá trị của các biểu thức:

a) $2^{\alpha} + 2^{-\alpha}$;

b) $4^{2\alpha} + 4^{-2\alpha}$.

12. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $\log_2 72 - \frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_2 27)$;

b) $5^{\log_2 40 - \log_2 5}$;

c) $3^{2+\log_9 2}$.

13. Biết rằng $5^x = 3$ và $3^y = 5$.

Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của xy.

14. Viết công thức biểu thị y theo x, biết $2\log_2 y = 2 + \frac{1}{2}\log_2 x$.

15. Giải các phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = \sqrt{8}$;

b) $9^{2x-1} = 81 \,.\, 27^x$;

c) $2\log_5(x-2) = \log_5 9$;

d) $\log_2(3x+1) = 2 - \log_2(x-1)$.

16. Giải các bất phương trình:

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > \frac{1}{81}$;

b) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^x \le 27.3^x$;

c) $\log_2(x+1) \le \log_2(2-4x)$.

17. Thực hiện một mẻ nuôi cấy vi khuẩn với 1 000 vi khuẩn ban đầu, nhà sinh học phát hiện ra số lượng vi khuẩn tăng thêm 25% sau mỗi hai ngày.

a) Công thức $P(t) = P_0 \,.\, a^t$ cho phép tính số lượng vi khuẩn của mẻ nuôi cấy sau t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Xác định các tham số P_0 và a ($a > 0$). Làm tròn a đến hàng phần trăm.

b) Sau 5 ngày thì số lượng vi khuẩn bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng trăm.

c) Sau bao nhiêu ngày thì số lượng vi khuẩn vượt gấp đôi số lượng ban đầu? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

18. Nhắc lại rằng, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức pH = $-\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L. Nồng độ H^+ trong dung dịch cho biết độ acid của dung dịch đó.

a) Dung dịch acid A có độ pH bằng 1,9; dung dịch acid B có độ pH bằng 2,5. Dung dịch nào có độ acid cao hơn và cao hơn bao nhiêu lần?

b) Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L. Nước chảy ra từ một vòi nước có độ pH từ 6,5 đến 6,7 thì có độ acid cao hay thấp hơn nước cất?

Chương VII ĐẠO HÀM

Đạo hàm là một khái niệm quan trọng của Giải tích. Đạo hàm cho biết "tốc độ thay đổi" của hàm số theo biến số. Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về đạo hàm, ý nghĩa hình học của đạo hàm, các quy tắc tính đạo hàm. Chúng ta cũng tìm hiểu về đạo hàm cấp hai và giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với đạo hàm.

Một vật được thả từ trực thăng. Làm thế nào để biết được vận tốc rơi của vật tại một thời điểm bất kì?

Học xong chương này, bạn có thể:

– Nhận biết được định nghĩa của đạo hàm. Dùng định nghĩa tính được đạo hàm của một số hàm đơn giản.

– Nhận biết được ý nghĩa hình học của đạo hàm.

– Viết được phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại một điểm.

– Nhận biết được số *e* thông qua bài toán lãi suất ngân hàng.

– Tính được đạo hàm một số hàm sơ cấp cơ bản.

– Sử dụng được các công thức tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của các hàm số và đạo hàm của hàm hợp.

– Nhận biết được khái niệm đạo hàm cấp hai, tính được đạo hàm cấp hai của một số hàm đơn giản và giải quyết được một số bài toán thực tiễn.

Bài 1. Đạo hàm

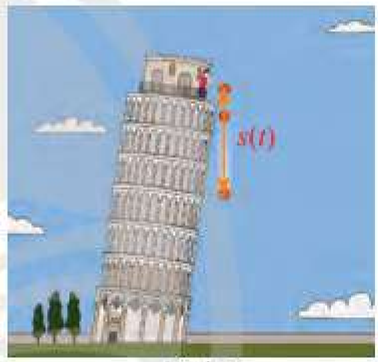
Từ khoá: **Đạo hàm; Tiếp tuyến của đồ thị hàm số; Số *e*.**

Giữa tốc độ của xe và quãng đường mà xe đi được có mối liên hệ như thế nào? Nếu biết quãng đường *s*(*t*) tại mọi thời điểm *t* thì có thể tính được tốc độ của xe tại mỗi thời điểm không?

1. Đạo hàm

1 Quãng đường rơi tự do của một vật được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4{,}9t^2$ với t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét.

Vận tốc trung bình của chuyển động này trên khoảng thời gian $[5; t]$ hoặc $[t; 5]$ được tính bằng công thức $\dfrac{s(t) - s(5)}{t - 5}$.



Hình 1

a) Hoàn thiện bảng sau về vận tốc trung bình trong những khoảng thời gian khác nhau. Nêu nhận xét về $\dfrac{s(t) - s(5)}{t - 5}$ khi t càng gần 5.

Khoảng thời gian	[5; 6]	[5; 5,1]	[5; 5,05]	[5; 5,01]	[5; 5,001]	[4,999; 5]	[4,99; 5]
$\dfrac{s(t) - s(5)}{t - 5}$	53,9	?	?	?	?	?	?

b) Giới hạn $\lim\limits_{t \to 5} \dfrac{s(t) - s(5)}{t - 5}$ được gọi là *vận tốc tức thời* của chuyển động tại thời điểm $t_0 = 5$. Tính giá trị này.

c) Tính giới hạn $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ để xác định vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 nào đó trong quá trình rơi của vật.

Mở rộng tình huống trong hoạt động trên, giả sử $s(t)$ là toạ độ tại thời điểm t của một chất điểm chuyển động thẳng trên trục $s'Os$ (Hình 2).

Hình 2

Khi đó, giới hạn

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

được gọi là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0, kí hiệu $v(t_0)$. Giới hạn này cũng được gọi là đạo hàm của hàm số $s(t)$ theo thời gian t tại thời điểm t_0, kí hiệu $s'(t_0)$.
Vậy

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Tổng quát, ta có định nghĩa đạo hàm của hàm số bất kì như sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.
Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn này được gọi là ***đạo hàm*** của hàm số $f(x)$ tại x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$.
Vậy:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = x^2$. Tính $f'(x_0)$ với $x_0 \in \mathbb{R}$.

Giải

Ta có $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$.

Chú ý:
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Nếu hàm số này có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a; b)$ thì ta nói nó có *đạo hàm trên khoảng* $(a; b)$, kí hiệu y' hoặc $f'(x)$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = C$ (C là hằng số);

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ với $x \neq 0$.

Giải

a) Với bất kì x_0, ta có:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0.$$

Vậy $f'(x) = (C)' = 0$ trên $\mathbb{R}$.

a) Với bất kì $x_0 \neq 0$, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x_0 - x}{xx_0(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{xx_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Vậy $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

1 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$.

Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$.

a) Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của biến tại x_0. Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ gọi là số gia tương ứng của hàm số. Khi đó, $x = x_0 + \Delta x$ và

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

b) Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ biểu thị tốc độ thay đổi trung bình của đại lượng y theo đại lượng x trong khoảng từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$; còn $f'(x_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi (tức thời) của đại lượng y theo đại lượng x tại điểm x_0.

Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0.
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0.

Với tình huống trong 1, hãy tính vận tốc tức thời của chuyển động lúc $t = 2$.

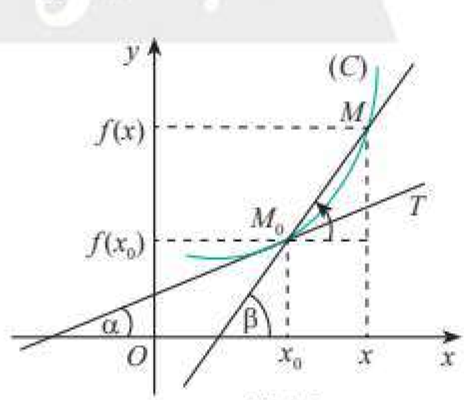
2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

2 Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$ thuộc (C).

a) Vẽ (C) và tính $f'(1)$.

b) Vẽ đường thẳng d đi qua điểm M và có hệ số góc bằng $f'(1)$. Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa d và (C).

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ và điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ thuộc (C). Xét $M(x; f(x))$ là một điểm di chuyển trên (C). Đường thẳng M_0M là một cát tuyến của (C). Hệ số góc của cát tuyến M_0M được tính bởi công thức $k_{M_0M} = \tan\beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Khi cho x dần tới x_0 thì M di chuyển trên (C) tới M_0. Giả sử cát tuyến M_0M có vị trí giới hạn là M_0T thì M_0T được gọi là tiếp tuyến của (C) tại M_0 và M_0 được gọi là tiếp điểm.



Hình 3

Ta có hệ số góc của tiếp tuyến M_0T là $k_{M_0T} = \tan\alpha = \lim_{x \to x_0} \tan\beta = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Sau đây, ta không xét trường hợp tiếp tuyến song song hoặc trùng với trục Oy.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đó.

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.
Tiếp tuyến M_0T có phương trình là $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(2; 4) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình của tiếp tuyến đó.

Giải

Ta có $(x^2)' = 2x$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là $f'(2) = 2.2 = 4$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

$$y - 4 = 4(x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 4.$$

2 Cho (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ và điểm $M(1; 1) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình tiếp tuyến đó.

3. Số *e*

3 Một người gửi tiết kiệm khoản tiền A triệu đồng (gọi là vốn) với lãi suất r/năm theo thể thức lãi kép (tiền lãi sau mỗi kì hạn được cộng gộp vào vốn). Tính tổng số tiền vốn và lãi sau một năm của người gửi nếu kì hạn là

a) một năm; b) một tháng.

Lưu ý: Nếu một năm được chia thành n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) thì lãi suất mỗi kì hạn là $\dfrac{r}{n}$.

Xét tình huống gửi tiết kiệm ở 3. Kí hiệu T là tổng số tiền vốn và lãi của người gửi sau một năm. Tuỳ theo kì hạn, ta có những công thức tính T khác nhau.

- Nếu kì hạn là 1 năm thì $T = A(1 + r)$.
- Nếu kì hạn là 6 tháng thì $T = A\left(1+\dfrac{r}{2}\right)^2$.
- Nếu kì hạn là 3 tháng thì $T = A\left(1+\dfrac{r}{4}\right)^4$.
- Nếu kì hạn là 1 tháng thì $T = A\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12}$.
- Nếu kì hạn là 1 ngày thì $T = A\left(1+\dfrac{r}{365}\right)^{365}$ (luôn coi một năm có 365 ngày).

Tổng quát, nếu một năm được chia thành n kì hạn thì

$$T = A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} = A\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mr} \text{ (với } m = \frac{n}{r}, r > 0).$$

Khi kì hạn càng ngắn thì n càng lớn, do đó m càng lớn. Người ta chứng minh được rằng có giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Hơn nữa, người ta còn biết rằng e là số vô tỉ và $e = 2{,}718281828\ldots$ (số thập phân vô hạn không tuần hoàn).

Từ kết quả trên suy ra, khi kì hạn trở nên rất ngắn (m dần đến $+\infty$) thì $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ dần đến e, và do đó $T = A\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mr}$ dần đến $A\,.\,e^{r}$.

Số e xuất hiện trong nhiều bài toán ở những lĩnh vực khác nhau như Toán học, Vật lí, Sinh học, Kinh tế, ….

Ví dụ 4. Công thức $T = A\,.\,e^{rt}$ được dùng để tính tổng số tiền vốn và lãi mà người gửi nhận được sau thời gian t kể từ thời điểm người đó gửi tiết kiệm A đồng theo thể thức "lãi kép liên tục" với lãi suất r/năm. Trong đó, A và T tính theo đồng, t tính theo năm và t có thể nhận giá trị thực bất kì. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của T (làm tròn đến hàng đơn vị) khi $A = 2\,000\,000$, $r = 0{,}05$ và

a) $t = \frac{1}{4}$;   b) $t = \frac{1}{365}$.

Giải

a) $T = 2\,000\,000\,.\,e^{0{,}05\cdot\frac{1}{4}} = 2\,000\,000\,.\,e^{0{,}0125} \approx 2\,025\,157$ (đồng).

b) $T = 2\,000\,000\,.\,e^{0{,}05\cdot\frac{1}{365}} \approx 2\,000\,274$ (đồng).

3 Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 5 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 4%/năm và theo thể thức lãi kép liên tục. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau

a) 1 ngày;   b) 30 ngày.

(Luôn coi một năm có 365 ngày.)

BÀI TẬP

1. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = -x^2$;   b) $f(x) = x^3 - 2x$;   c) $f(x) = \frac{4}{x}$.

2. Cho hàm số $f(x) = -2x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; -2) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm A.

3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$

a) Tại điểm $(-1; 1)$; b) Tại điểm có hoành độ bằng 2.

4. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại $t = 2$.

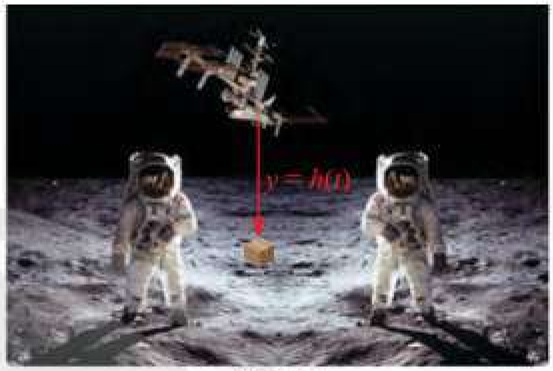
5. Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 5%/năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau một năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức

a) lãi kép với kì hạn 6 tháng;

b) lãi kép liên tục.

6. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $h(t) = 0,81t^2$, với t được tính bằng giây và h tính bằng mét. Hãy tính vận tốc tức thời của vật được thả rơi tự do trên Mặt Trăng tại thời điểm $t = 2$.

(*Nguồn:* https://www.britannica.com/place/Moon)



Hình 4

Bài 2. Các quy tắc tính đạo hàm

Từ khoá: Đạo hàm của hàm hợp; Đạo hàm cấp hai.

Giả sử hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$ và $g'(x_0)$. Làm thế nào để tính đạo hàm của các hàm số là tổng, hiệu, tích hoặc thương của $f(x)$ và $g(x)$ tại x_0?

1. Đạo hàm của hàm số $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

1 a) Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số $y = x$ tại điểm $x = x_0$.

b) Nhắc lại đạo hàm của các hàm số $y = x^2$, $y = x^3$ đã tìm được ở bài học trước. Từ đó, dự đoán đạo hàm của hàm số $y = x^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Hàm số $y = x^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^5$ tại điểm $x = 2$ và $x = -\frac{1}{2}$.

Giải

Ta có $(x^5)' = 5x^4$. Từ đó, $y'(2) = 5 . 2^4 = 80$ và $y'\left(-\frac{1}{2}\right) = 5.\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$.

Tính đạo hàm của hàm số $y = x^{10}$ tại $x = -1$ và $x = \sqrt[3]{2}$.

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x = x_0$ với $x_0 > 0$.

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x = 1$ và $x = \dfrac{1}{4}$.

Giải

Ta có $y' = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$. Từ đó, $y'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$ và $y'\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{4}}} = \dfrac{1}{2.\dfrac{1}{2}} = 1$.

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm có hoành độ bằng 4.

Nhận xét:

a) Cho số thực α. Hàm số $y = x^\alpha$ được gọi là *hàm số luỹ thừa* (với tập xác định $(0; +\infty)$).

Công thức $(x^n)' = nx^{n-1}$ còn đúng khi n là số thực, tức là với số thực α bất kì

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}\ (x > 0).$$

Với $\alpha = \dfrac{1}{2}$, ta nhận được công thức đã biết:

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ (x > 0).$$

b) Ở bài học trước, dùng định nghĩa ta tìm được các công thức đạo hàm:

- $(C)' = 0$ (C là hằng số);
- $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}\ (x \neq 0)$.

Ví dụ 3. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ tại điểm $x = 8$.

Giải

Ta có $y' = (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Từ đó, $y'(8) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \dfrac{1}{3(\sqrt[3]{2^3})^2} = \dfrac{1}{3.2^2} = \dfrac{1}{12}$.

Tìm đạo hàm của các hàm số:

a) $y = \sqrt[4]{x}$ tại $x = 1$;

b) $y = \dfrac{1}{x}$ tại $x = -\dfrac{1}{4}$.

3. Đạo hàm của hàm số lượng giác

Cho biết $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x$.

Ta có công thức đạo hàm của các hàm số lượng giác sau:

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$
- $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$ tại $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Giải

Ta có $y' = (\cos x)' = -\sin x$. Vậy $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$.

Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ tại $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

4. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

Cho biết $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ và $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = e^x$;

b) $y = \ln x$.

Ta có công thức đạo hàm của các hàm số mũ và hàm số lôgarit sau:

- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$
- $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$

Ví dụ 5. Tìm đạo hàm của các hàm số:

a) $y = e^x$ tại $x = 2\ln 3$;

b) $y = \log_5 x$ tại $x = 2$.

Giải

a) Ta có $y' = (e^x)' = e^x$. Từ đó, $y'(2\ln 3) = e^{2\ln 3} = (e^{\ln 3})^2 = 3^2 = 9$.

b) Ta có $y' = (\log_5 x)' = \dfrac{1}{x\ln 5}$ $(x > 0)$. Từ đó, $y'(2) = \dfrac{1}{2\ln 5}$.

Tìm đạo hàm của các hàm số:

a) $y = 9^x$ tại $x = 1$;

b) $y = \ln x$ tại $x = \dfrac{1}{3}$.

5. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số

5 Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số có đạo hàm tại x_0. Xét hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$.

Ta có $\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

nên $h'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \ldots + \ldots$

Chọn biểu thức thích hợp thay cho chỗ chấm để tìm $h'(x_0)$.

Cho hai hàm số $u(x)$, $v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc tập xác định. Ta có:

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(u-v)' = u' - v'$
- $(u\,.\,v)' = u'v + uv'$ (1)
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$) (2)

Chú ý: • Với $u = C$ (C là hằng số), công thức (1) trở thành $(C\,.\,v)' = C\,.\,v'$.

• Với $u = 1$, công thức (2) trở thành $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$).

Ví dụ 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3x^2 - 4x + 2$; b) $y = x\sin x$; c) $y = \dfrac{3x+2}{2x-1}$.

Giải

a) $(3x^2-4x+2)' = (3x^2)' - (4x)' + (2)' = 3(x^2)' - 4(x)' + 0 = 3\,.\,2x - 4\,.\,1 = 6x - 4$.

b) $(x\sin x)' = (x)'\sin x + x(\sin x)' = 1\,.\,\sin x + x\,.\,\cos x = \sin x + x\cos x$.

c) $\left(\dfrac{3x+2}{2x-1}\right)' = \dfrac{(3x+2)'.(2x-1)-(3x+2).(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \dfrac{3.(2x-1)-(3x+2).2}{(2x-1)^2}$

$= \dfrac{6x-3-6x-4}{(2x-1)^2} = -\dfrac{7}{(2x-1)^2}$.

Ví dụ 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 3^x$; b) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}$.

Giải

a) $(x^2 3^x)' = (x^2)'\,.\,3^x + x^2\,.\,(3^x)' = 2x\,.\,3^x + x^2\,.\,3^x\,.\,\ln 3 = x3^x(2 + x\ln 3)$.

b) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sqrt{x})'.\cos x - \sqrt{x}.(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos x - \sqrt{x}(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x + 2x\sin x}{2\sqrt{x}\cos^2 x}$.

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x\log_2 x$; b) $y = x^3 e^x$.

6. Đạo hàm của hàm hợp

Cho hàm số $u = \sin x$ và hàm số $y = u^2$.

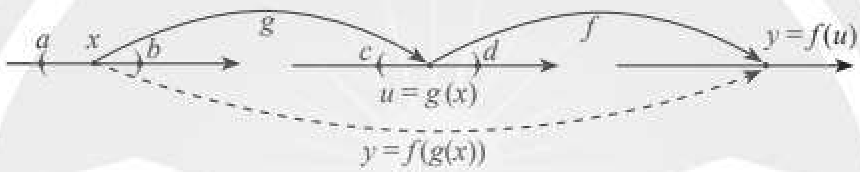
a) Tính y theo x.

b) Tính y'_x (đạo hàm của y theo biến x), y'_u (đạo hàm của y theo biến u) và u'_x (đạo hàm của u theo biến x) rồi so sánh y'_x với $y'_u . u'_x$.

Cho $u = g(x)$ là hàm số của x xác định trên khoảng $(a; b)$ và lấy giá trị trên khoảng $(c; d)$; $y = f(u)$ là hàm số của u xác định trên khoảng $(c; d)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$. Ta lập hàm số xác định trên $(a; b)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ theo quy tắc sau:

$$x \mapsto f(g(x))$$

Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.



Hình 1

Ví dụ 8.

a) Hàm số $y = (2x + 1)^3$ là hàm hợp của các hàm số nào?

b) Hàm số $y = \cos(x^2 + 1)$ là hàm hợp của các hàm số nào?

Giải

a) Hàm số $y = (2x + 1)^3$ là hàm hợp của hàm số $y = u^3$ với $u = 2x + 1$.

b) Hàm số $y = \cos(x^2 + 1)$ là hàm hợp của hàm số $y = \cos u$ với $u = x^2 + 1$.

Cho hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u . u'_x$.

Ví dụ 9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (3x^2 + x)^3$; b) $y = \sin 2x$; c) $y = e^{x^2+1}$.

Giải

a) Đặt $u = 3x^2 + x$ thì $y = u^3$. Ta có $u'_x = 6x + 1$ và $y'_u = (u^3)' = 3u^2$.

Suy ra $y'_x = y'_u . u'_x = 3u^2 . (6x + 1) = 3(3x^2 + x)^2 . (6x + 1)$.

Vậy $y' = 3(3x^2 + x)^2 . (6x + 1)$.

b) Đặt $u = 2x$ thì $y = \sin u$. Ta có $u'_x = 2$ và $y'_u = (\sin u)' = \cos u$.

Suy ra $y'_x = y'_u \,.\, u'_x = \cos u \,.\, 2 = 2\cos 2x$.

Vậy $y' = 2\cos 2x$.

c) Đặt $u = x^2 + 1$ thì $y = e^u$. Ta có $u'_x = 2x$ và $y'_u = (e^u)' = e^u$.

Suy ra $y'_x = y'_u \,.\, u'_x = e^u \,.\, 2x = 2xe^{x^2+1}$.

Vậy $y' = 2xe^{x^2+1}$.

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x^3 + 3)^2$; b) $y = \cos 3x$; c) $y = \log_2(x^2 + 2)$.

BẢNG ĐẠO HÀM

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \,.\, u'$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\sin u)' = u' \,.\, \cos u$ $(\cos u)' = -u' \,.\, \sin u$ $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a \;\; (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$	$(e^u)' = u' \,.\, e^u$ $(a^u)' = u' \,.\, a^u \ln a \;\; (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a} \;\; (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a} \;\; (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$

7. Đạo hàm cấp hai

Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^3 + 4t + 1$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây.

a) Tính vận tốc tức thời $v(t)$ tại thời điểm t.

b) Đạo hàm $v'(t)$ biểu thị tốc độ thay đổi của vận tốc theo thời gian, còn gọi là gia tốc của chuyển động, kí hiệu $a(t)$. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi $x \in (a; b)$.

Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là ***đạo hàm cấp hai*** của hàm số $y = f(x)$ tại x, kí hiệu y'' hoặc $f''(x)$.

Ví dụ 10. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số:

a) $y = 3x^2 + 5x + 1$;   b) $y = \sin x$.

Giải

a) $y' = 3.2x + 5 + 0 = 6x + 5$, $y'' = 6.1 + 0 = 6$.

b) $y' = \cos x$; $y'' = -\sin x$.

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.

Ví dụ 11. Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t) = t^2 - 4t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$.

Giải

Ta có $s'(t) = 2t - 4$; $s''(t) = 2$.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ là $s''(4) = 2$ m/s^2.

8 Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - x$;

b) $y = \cos x$.

Một hòn sỏi rơi tự do có quãng đường rơi tính theo thời gian t là $s(t) = 4{,}9t^2$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t = 3$.

BÀI TẬP

1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 4x - \dfrac{1}{3}$;   b) $y = \dfrac{-2x+3}{x-4}$;

c) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x-1}$;   d) $y = \sqrt{5x}$.

2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin 3x$; b) $y = \cos^3 2x$;

c) $y = \tan^2 x$; d) $y = \cot(4 - x^2)$.

3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 - x) \cdot 2^x$;

b) $y = x^2 \log_3 x$;

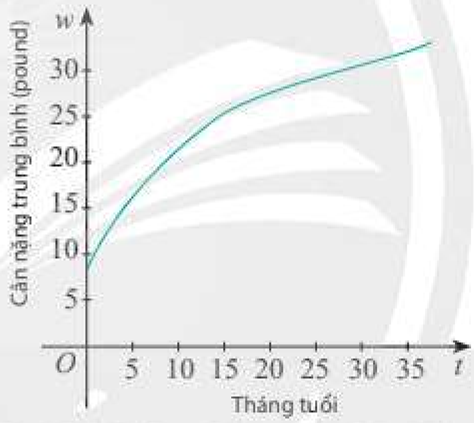
c) $y = e^{3x+1}$.

4. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = 2x^4 - 5x^2 + 3$;

b) $y = xe^x$.

5. Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0{,}000758t^3 - 0{,}0596t^2 + 1{,}82t + 8{,}15$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound (*nguồn:* https://www.cdc.gov/growthcharts/data/who/GrChrt_Boys). Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi.



Hình 2

6. Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ, tính theo nghìn đô-la, để sản xuất x mặt hàng là $C(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng nhanh thế nào sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó?

7. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $s(t) = 0{,}81t^2$, trong đó t là thời gian được tính bằng giây và s tính bằng mét. Một vật được thả rơi từ độ cao 200 m phía trên Mặt Trăng. Tại thời điểm $t = 2$ sau khi thả vật đó, tính:

a) Quãng đường vật đã rơi;

b) Gia tốc của vật.

Bạn có biết?

Isaac Newton là nhà toán học, nhà vật lí học, nhà thiên văn học, nhà triết học người Anh. Ông sinh năm 1643 và mất năm 1727. Trong hai năm 1665 và 1666, Newton đã khám phá ra phép toán vi phân và tích phân nhưng mãi đến năm 1687 mới cho xuất bản.

(*Nguồn:* https://www.britannica.com/biography/Isaac-Newton)

Gottfried Wilhelm Leibniz là nhà toán học người Đức. Ông sinh năm 1646 và mất năm 1716. Năm 17 tuổi ông nhận bằng cử nhân và năm 20 tuổi ông có bằng Tiến sĩ Luật. Năm 1672 ông cho công bố phép tính vi phân và tích phân mà các kí hiệu của ông đưa ra được chúng ta sử dụng đến ngày nay.

(*Nguồn:* https://www.britannica.com/biography/Gottfried-Wilhelm-Leibniz)

Cả Newton và Leibniz đã khám phá ra phép toán vi phân và tích phân một cách độc lập.

Phép toán vi phân và tích phân dựa trên khái niệm quan trọng là giới hạn. Thế nhưng, phải rất lâu sau đó khái niệm giới hạn mới được làm rõ và chặt chẽ bởi nhà toán học người Pháp, Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857).

(*Nguồn:* https://www.britannica.com/biography/Augustin-Louis-Baron-Cauchy)

Isaac Newton
(1643 – 1727)

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 – 1716)

Augustin-Louis Cauchy
(1789 – 1857)

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm $M(-1; -4)$ có hệ số góc bằng

A. -3. B. 9.

C. -9. D. 72.

2. Hàm số $y = -x^2 + x + 7$ có đạo hàm tại $x = 1$ bằng

A. -1. B. 7.

C. 1. D. 6.

3. Cho hai hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$

$$\text{và } g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 5.$$

Bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

B. $(0; 1)$.

C. $[0; 1]$.

D. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

4. Hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+2}$ có đạo hàm là

A. $y' = \dfrac{1}{(x+2)^2}$. B. $y' = \dfrac{5}{(x+2)^2}$.

C. $y' = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$. D. $y' = \dfrac{-5}{(x+2)^2}$.

5. Hàm số $y = \dfrac{1}{x+1}$ có đạo hàm cấp hai tại $x = 1$ là

A. $y''(1) = \dfrac{1}{2}$. B. $y''(1) = -\dfrac{1}{4}$.

C. $y''(1) = 4$. D. $y''(1) = \dfrac{1}{4}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

6. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ có đồ thị (C) và điểm $M(-1; 6) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M.

7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 1$;

b) $y = (x^2 - x)^3$;

c) $y = \dfrac{4x-1}{2x+1}$.

8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 + 3x - 1)e^x$;

b) $y = x^3 \log_2 x$.

9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \tan(e^x + 1)$;

b) $y = \sqrt{\sin 3x}$;

c) $y = \cot(1 - 2^x)$.

10. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 4x^2 + 2x - 3$;

b) $y = x^2e^x$.

11. Một viên sỏi rơi từ độ cao 44,1 m thì quãng đường rơi được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4,9t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính:

a) Vận tốc rơi của viên sỏi lúc $t = 2$;

b) Vận tốc của viên sỏi khi chạm đất.

12. Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức

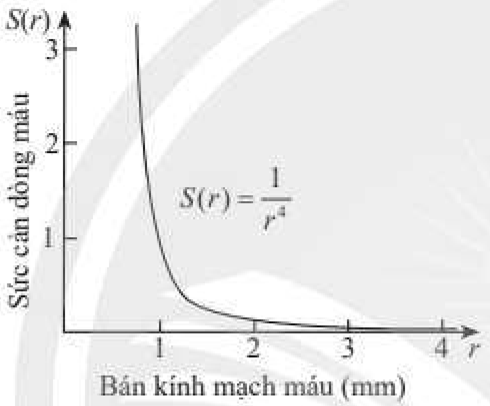
$$s(t) = 2t^3 + 4t + 1,$$

trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét.

Tính vận tốc và gia tốc của vật khi $t = 1$.

13. Dân số P (tính theo nghìn người) của một thành phố nhỏ được cho bởi công thức $P(t) = \dfrac{500t}{t^2 + 9}$, trong đó t là thời gian được tính bằng năm. Tìm tốc độ tăng dân số tại thời điểm $t = 12$.

14. Hàm số $S(r) = \dfrac{1}{r^4}$ có thể được sử dụng để xác định sức cản S của dòng máu trong mạch máu có bán kính r (tính theo milimét) (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của S theo r khi $r = 0{,}8$.



Hình 1

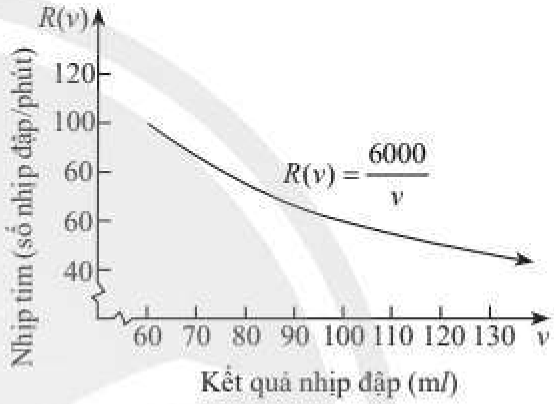
15. Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức

$$T(t) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 98{,}6,$$

trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ ở thời điểm $t = 1{,}5$.

(*Nguồn:* https://www.algebra.com/algebra/homework/Trigonometry-basics/Trigonometry-basics.faq.question.1111985.html)

16. Hàm số $R(v) = \dfrac{6\,000}{v}$ có thể được sử dụng để xác định nhịp tim R của một người mà tim của người đó có thể đẩy đi được 6 000 ml máu trên mỗi phút và v ml máu trên mỗi nhịp đập (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của nhịp tim khi lượng máu tim đẩy đi ở một nhịp là $v = 80$.



Hình 2

Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương VIII QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu quan hệ vuông góc giữa các đường thẳng và mặt phẳng trong không gian, phép chiếu vuông góc, góc và khoảng cách trong không gian cũng như những ứng dụng của quan hệ vuông góc trong giải toán và trong các hoạt động thực tiễn.

Toà nhà Landmark 81, Thành phố Hồ Chí Minh

Các công trình xây dựng cho ta nhiều hình ảnh về đường thẳng và mặt phẳng vuông góc.

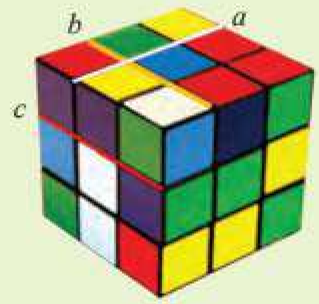
Học xong chương này, bạn có thể:

– Nhận biết được quan hệ vuông góc giữa các đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Sử dụng được các kiến thức về quan hệ vuông góc để mô tả các hình ảnh trong thực tiễn.
– Giải thích được mối liên hệ giữa tính song song và tính vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.
– Nhận biết được khái niệm phép chiếu vuông góc.
– Tính được các loại góc và các loại khoảng cách trong không gian.
– Tính được thể tích của hình lăng trụ, hình hộp, hình chóp, hình chóp cụt đều.
– Vận dụng được kiến thức về quan hệ vuông góc trong không gian để giải quyết một số vấn đề trong thực tiễn.

Bài 1. Hai đường thẳng vuông góc

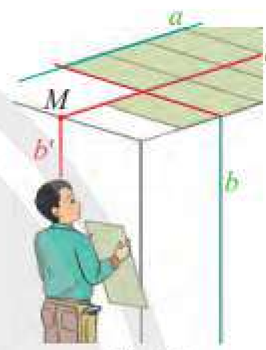
Từ khoá: Góc giữa hai đường thẳng; Hai đường thẳng vuông góc.

Ta đã biết cách xác định góc giữa hai đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng. Có góc giữa hai đường thẳng chéo nhau không? Nếu có, làm thế nào để xác định?



1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

1 Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b trong không gian. Qua một điểm M tuỳ ý vẽ $a' // a$ và vẽ $b' // b$. Khi thay đổi vị trí của điểm M, có nhận xét gì về góc giữa a' và b'?



Hình 1

Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a, b trong không gian, kí hiệu (a, b), là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

Chú ý:

a) Để xác định góc giữa hai đường thẳng a, b ta có thể lấy một điểm O nằm trên một trong hai đường thẳng đó và vẽ đường thẳng song song với đường thẳng còn lại.

b) Góc giữa hai đường thẳng nhận giá trị từ 0° đến 90°.

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông và M, N, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, BA, AA', $A'D'$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

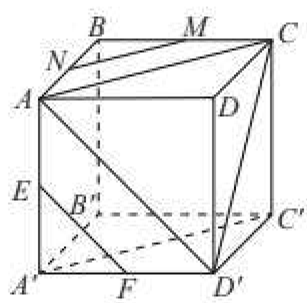
a) $A'C'$ và BC; b) MN và EF.

Giải

a) Ta có $AC // A'C'$, suy ra $(A'C', BC) = (AC, BC) = \widehat{ACB} = 45^\circ$ (tam giác ACB vuông cân tại B).

b) Ta có $AC // MN$, $AD' // EF$,

suy ra $(MN, EF) = (AC, AD') = \widehat{CAD'} = 60^\circ$ (tam giác ACD' có ba cạnh bằng nhau).

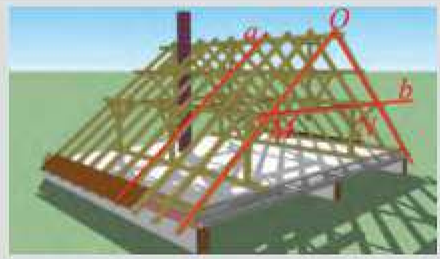


Hình 2

Thực hành 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông M, N, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, BA, AA', $A'D'$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a) MN và DD'; b) MN và CD'; c) EF và CC'.

Vận dụng 1. Khung của một mái nhà được ghép bởi các thanh gỗ như Hình 3. Cho biết tam giác OMN vuông cân tại O. Tính góc giữa hai thanh gỗ a và b.



Hình 3

2. Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

Khám phá 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông. Nêu nhận xét về góc giữa các cặp đường thẳng:

a) AB và BB'; b) AB và DD'.

Định nghĩa

Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Hai đường thẳng a, b vuông góc được kí hiệu là $a \perp b$ hoặc $b \perp a$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông. Chứng minh rằng $AB \perp CC'$, $AC \perp B'D'$.

Giải

Ta có $CC' \parallel BB'$, suy ra $(AB, CC') = (AB, BB') = \widehat{ABB'} = 90^\circ$. Vậy $AB \perp CC'$.

Ta có $B'D' \parallel BD$, suy ra $(AC, B'D') = (AC, BD) = 90^\circ$ (hai đường chéo của hình vuông luôn vuông góc với nhau). Vậy $AC \perp B'D'$.

Thực hành 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông.

a) Tìm các đường thẳng đi qua hai đỉnh của hình lập phương và vuông góc với AC.

b) Trong các đường thẳng tìm được ở câu a, tìm đường thẳng chéo với AC.

Chú ý:

a) Hai đường thẳng vuông góc có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

b) Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường này thì cũng vuông góc với đường kia.

c) Trong không gian, khi có hai đường thẳng phân biệt a, b cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba c thì ta chưa kết luận được $a \parallel b$ như trong hình học phẳng.

Vận dụng 2. Hình bên mô tả một người thợ đang ốp gạch vào tường có sử dụng thước laser để kẻ vạch. Tìm các đường thẳng vuông góc với đường thẳng a trong Hình 4.

Hình 4

BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a. Cho biết $SA = a\sqrt{3}, SA \perp AB$ và $SA \perp AD$. Tính góc giữa SB và CD, SD và CB.

2. Cho tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh rằng $AB \perp CD$.

3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{BSA} = \widehat{CSA} = 60^{\circ}$, $\widehat{BSC} = 90^{\circ}$. Cho I và J lần lượt là trung điểm của SA và BC. Chứng minh rằng $IJ \perp SA$ và $IJ \perp BC$.

4. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi K là trung điểm của CD. Tính góc giữa hai đường thẳng AK và BC.

5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa AB và CD.

6. Một ô che nắng có viền khung hình lục giác đều $ABCDEF$ song song với mặt bàn và có cạnh AB song song với cạnh bàn a (Hình 5). Tính số đo góc hợp bởi đường thẳng a lần lượt với các đường thẳng AF, AE và AD.

Hình 5

Bài 2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Từ khoá: Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng; Phép chiếu vuông góc.

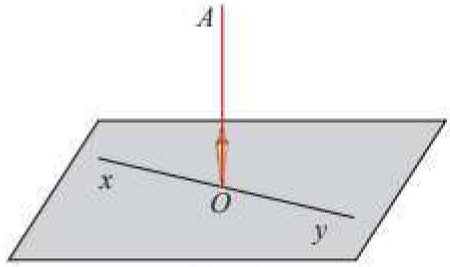
Trong thực tế, người thợ xây dựng thường dùng dây dọi để xác định đường vuông góc với nền nhà. Thế nào là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng?

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1 Thả một dây dọi AO chạm sàn nhà tại điểm O. Kẻ một đường thẳng xOy bất kì trên sàn nhà.

a) Dùng êke để kiểm tra xem AO có vuông góc với xOy không.

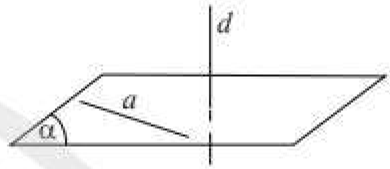
b) Nêu nhận xét về góc giữa dây dọi và một đường thẳng bất kì trong sàn nhà.



Hình 1

Định nghĩa

Đường thẳng d gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong (α), kí hiệu $d \perp (\alpha)$.



Hình 2

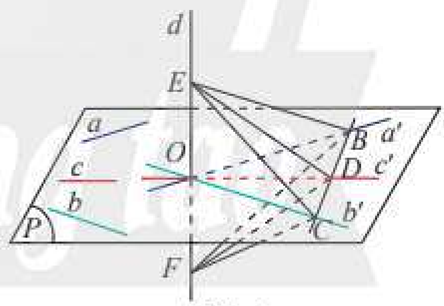
Ví dụ 1. Cho biết cột của trụ gôn của một sân bóng đá là đường thẳng d vuông góc với mặt sân (Hình 3). Tìm góc giữa d và một đường thẳng a kẻ trên sân.

Hình 3

Giải

Do đường thẳng d vuông góc với mặt sân nên suy ra d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt sân. Vậy ta có góc giữa d và a bằng 90°.

2 Cho đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b trong mặt phẳng (P). Xét một đường thẳng c bất kì trong (P) (c không song song với a và b). Gọi O là giao điểm của d và (P). Trong (P) vẽ qua O ba đường thẳng a', b', c' lần lượt song song với a, b, c. Vẽ một đường thẳng cắt a', b', c' lần lượt tại B, C, D. Trên d lấy hai điểm E, F sao cho O là trung điểm của EF (Hình 4).



Hình 4

a) Giải thích tại sao hai tam giác CEB và CFB bằng nhau.

b) Có nhận xét gì về tam giác DEF? Từ đó suy ra góc giữa d và c.

Định lí 1

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (α) thì $d \perp (\alpha)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O và có $SA = SC$, $SB = SD$. Cho I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (ABCD)$;　　　　b) $IK \perp (SBD)$.

Giải

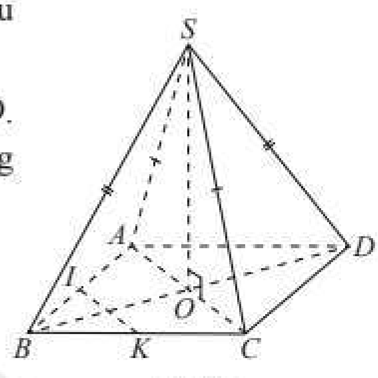
a) Ta có $ABCD$ là hình thoi, suy ra AC, BD vuông góc với nhau và có cùng trung điểm O.

Tam giác SAC cân tại S nên $SO \perp AC$. Tương tự, ta có $SO \perp BD$. Do SO vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AC và BD trong $(ABCD)$, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

b) Ta có $IK // AC$ và $AC \perp BD$, do đó $IK \perp BD$.

Ta có $SO \perp (ABCD)$, do đó $SO \perp IK$.

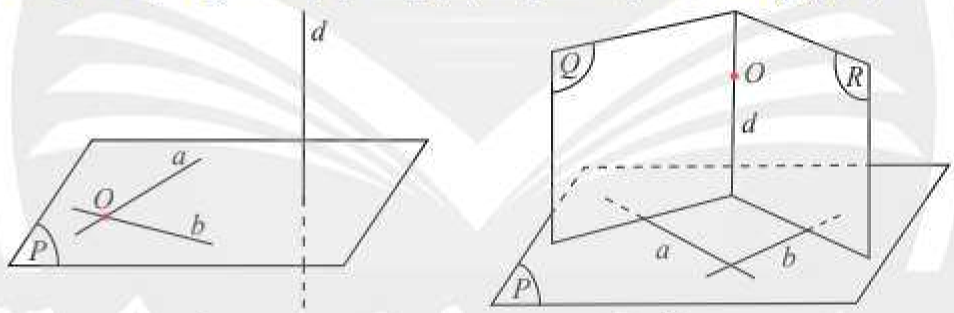
Từ $IK \perp BD$ và $IK \perp SO$ suy ra $IK \perp (SBD)$.



Hình 5

3 a) Trong không gian, cho điểm O và đường thẳng d. Gọi a, b là hai đường thẳng phân biệt đi qua O và vuông góc với d (Hình 6a). Có nhận xét gì về vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mp(a, b)?

b) Trong không gian, cho điểm O và mặt phẳng (P). Gọi (Q) và (R) là hai mặt phẳng đi qua O và lần lượt vuông góc với hai đường cắt nhau a, b nằm trong (P) (Hình 6b). Có nhận xét gì về vị trí giữa mặt phẳng (P) và giao tuyến d của (Q), (R)?



a)　　　　b)

Hình 6

Định lí 2

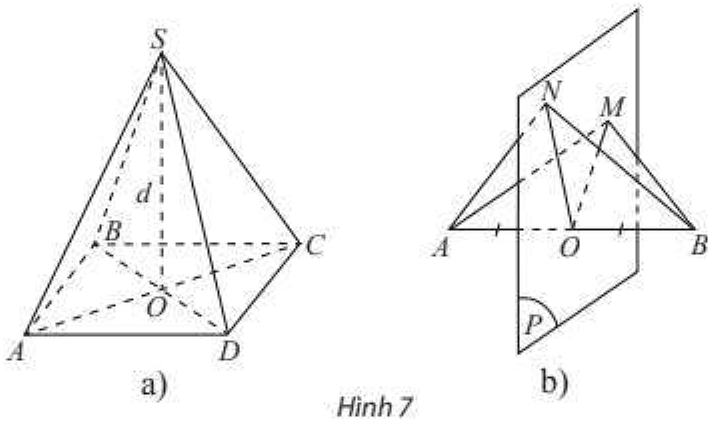
Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Ví dụ 3.

a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O (Hình 7a). Gọi d là đường thẳng đi qua S và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh d đi qua O.

b) Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với AB; M, N là hai điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng AB sao cho M, N, O không thẳng hàng (Hình 7b). Chứng minh M và N thuộc mặt phẳng (P).



Hình 7

Giải

a) Ta có: $SA = SC$ suy ra $SO \perp AC$; $SB = SD$ suy ra $SO \perp BD$. Suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Theo giả thiết, ta có đường thẳng d đi qua S và vuông góc với $(ABCD)$. Do qua điểm S chỉ có duy nhất một đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ nên d phải trùng với đường thẳng SO, suy ra d đi qua O.

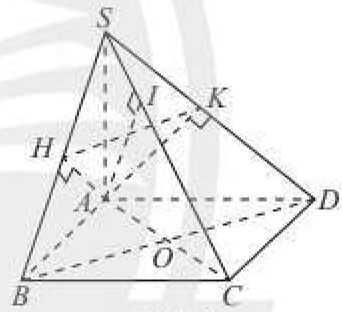
b) Ta có: $MA = MB$ suy ra $OM \perp AB$; $NA = NB$ suy ra $ON \perp AB$. Suy ra $AB \perp (OMN)$.

Theo giả thiết, ta có (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với AB. Do qua điểm O chỉ có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với AB nên (P) phải trùng với (OMN), suy ra M và N thuộc (P).

1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, O là giao điểm của AC và BD, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC, SD. Chứng minh rằng:

a) $CB \perp (SAB)$ và $CD \perp (SAD)$;

b) $HK \perp AI$.



Hình 8

1 Làm thế nào để dựng cột chống một biển báo vuông góc với mặt đất?

Hình 9

2. Liên hệ giữa tính song song và tính vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

4 Nêu nhận xét về vị trí tương đối của:

a) Hai thân cây cùng mọc vuông góc với mặt đất.

b) Mặt bàn và mặt đất cùng vuông góc với chân bàn.

c) Thanh xà ngang nằm trên trần nhà và mặt sàn nhà cùng vuông góc với cột nhà.

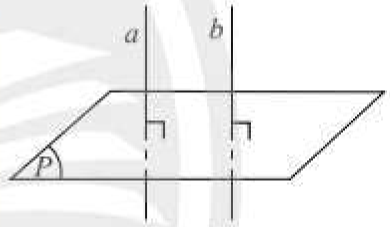
Hình 10

Người ta chứng minh được các định lí sau về liên hệ giữa tính song song và vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng:

Định lí 3

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

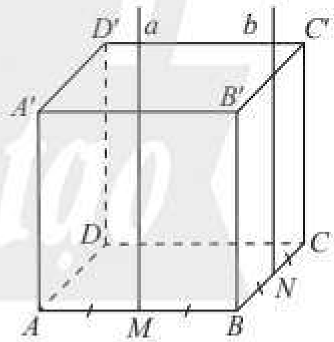


Hình 11

Ví dụ 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a) Qua M vẽ đường thẳng a song song với AA'. Chứng minh $a \perp (ABCD)$.

b) Qua N vẽ đường thẳng b vuông góc với $(ABCD)$. Chứng minh $b \parallel AA'$.



Hình 12

Giải

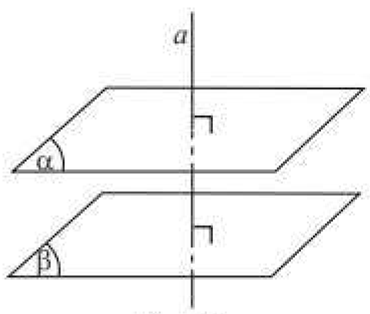
a) Theo đề bài ta có $a \parallel AA'$ và $AA' \perp (ABCD)$, suy ra $a \perp (ABCD)$.

b) Theo đề bài ta có $b \perp (ABCD)$ và $AA' \perp (ABCD)$, suy ra $b \parallel AA'$.

Định lí 4

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

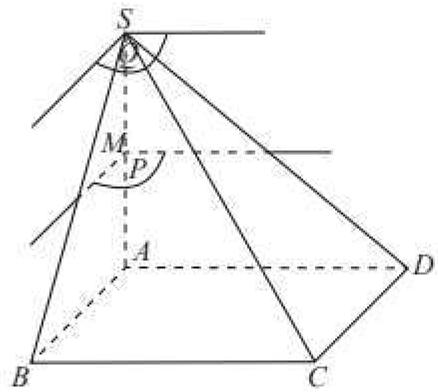


Hình 13

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$.

a) Vẽ mặt phẳng (Q) đi qua S và song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh $SA \perp (Q)$.

b) Cho M là trung điểm của SA. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với $(ABCD)$. Chứng minh $SA \perp (P)$.



Hình 14

Giải

a) Ta có $SA \perp (ABCD)$ (1)

và $(Q) \mathbin{/\mkern-5mu/} (ABCD)$. (2)

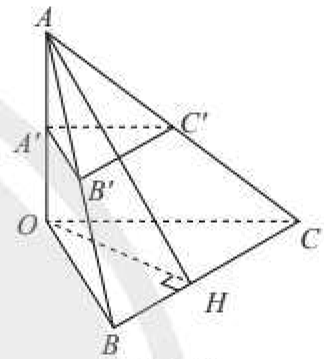
Từ (1) và (2) suy ra $SA \perp (Q)$.

b) Ta có $(P) \mathbin{/\mkern-5mu/} (ABCD)$. (3)

Từ (1) và (3) suy ra $SA \perp (P)$.

Cho tứ diện $OABC$ có OA vuông góc với mặt phẳng (OBC) và có A', B', C' lần lượt là trung điểm của OA, AB, AC. Vẽ OH là đường cao của tam giác OBC. Chứng minh rằng:

a) $OA \perp (A'B'C')$; b) $B'C' \perp (OAH)$.

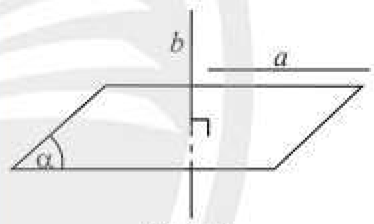


Hình 15

Định lí 5

a) Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a.

b) Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (α) (không chứa a) cùng vuông góc với một đường thẳng b thì chúng song song với nhau.

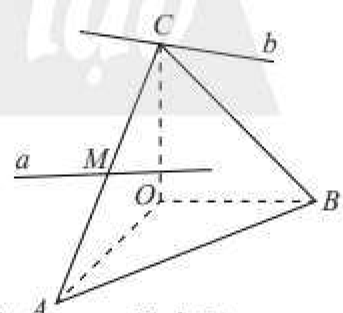


Hình 16

Ví dụ 6. Cho ba đoạn thẳng OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau.

a) Cho M là trung điểm của CA và a là đường thẳng tuỳ ý đi qua M và song song với mặt phẳng (OAB). Chứng minh $a \perp OC$.

b) Gọi b là một đường thẳng tuỳ ý đi qua C và b vuông góc với OC. Chứng minh $b \mathbin{/\mkern-5mu/} (OAB)$.



Hình 17

Giải

a) Ta có $OC \perp OA$ và $OC \perp OB$, suy ra $OC \perp (OAB)$. (1)

Ta có $a \mathbin{/\mkern-5mu/} (OAB)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a \perp OC$.

b) Ta có $b \perp OC$. (3)

Từ (1) và (3), suy ra $b \mathbin{/\mkern-5mu/} (OAB)$.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông với AB là cạnh góc vuông và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Cho M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SB, AB, CD, SC. Chứng minh rằng:

a) $AB \perp (MNPQ)$; b) $MQ \perp (SAB)$.

Một kệ sách có bốn trụ chống và các ngăn làm bằng các tấm gỗ (Hình 18). Làm thế nào dùng một êke để kiểm tra xem các tấm gỗ có vuông góc với mỗi trụ chống và song song với nhau hay không? Giải thích cách làm.

Hình 18

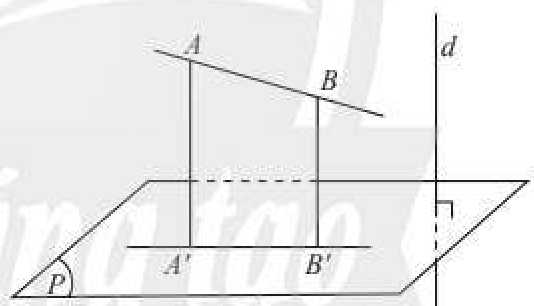
3. Phép chiếu vuông góc

Hai người thợ trong hình đang thả dây dọi từ một điểm M trên trần nhà và đánh dấu điểm M' nơi đầu nhọn quả dọi chạm sàn. Có nhận xét gì về đường thẳng MM' với mặt sàn?

Hình 19

Định nghĩa

Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d vuông góc với (P). Phép chiếu song song theo phương của d lên mặt phẳng (P) được gọi là ***phép chiếu vuông góc lên*** (P).



Hình 20

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ và $SA \perp (ABCD)$. Tìm hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ và hình chiếu vuông góc của điểm D trên mặt phẳng (SAB).

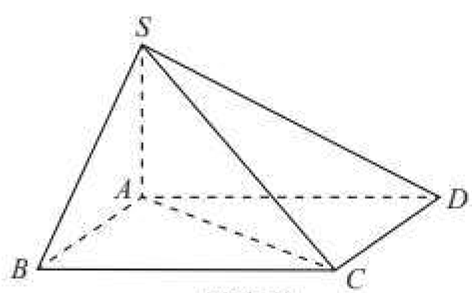
Giải

Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD)$.

Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ta $SA \perp AD$. (1)

Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật, suy ra $AB \perp AD$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $AD \perp (SAB)$, suy ra A là hình chiếu vuông góc của điểm D trên (SAB).



Hình 21

4 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Xác định hình chiếu vuông góc của điểm C, đường thẳng CD và tam giác SCD trên mặt phẳng (SAB).

Chú ý:

a) Phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song.

b) Người ta còn dùng "phép chiếu lên (P)" thay cho "phép chiếu vuông góc lên (P)" và dùng $(\mathscr{H}')$ là hình chiếu của $(\mathscr{H})$ trên (P) thay cho $(\mathscr{H}')$ là hình chiếu vuông góc của $(\mathscr{H})$ trên (P).

Định lí ba đường vuông góc

6 Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và b là đường thẳng không thuộc (P) và không vuông góc với (P). Lấy hai điểm A, B trên b và gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên (P).

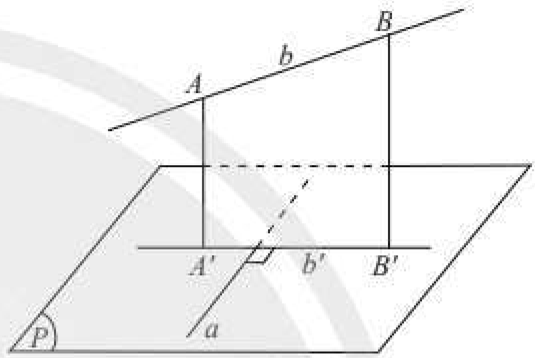
a) Xác định hình chiếu b' của b trên (P).

b) Cho a vuông góc với b, nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa:

i) đường thẳng a và mp(b, b'); ii) hai đường thẳng a và b'.

c) Cho a vuông góc với b', nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa:

i) đường thẳng a và mp(b, b'); ii) giữa hai đường thẳng a và b.



Hình 22

Định lí 6

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và b là đường thẳng không nằm trong (P) và không vuông góc với (P). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (P). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.

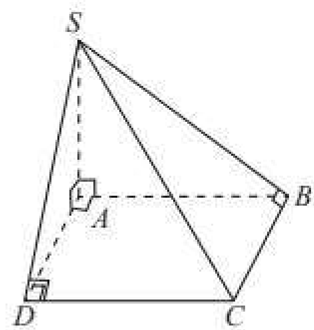
Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ và có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Chứng minh $CD \perp SD$ và $CB \perp SB$.

Giải

Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra DA là hình chiếu vuông góc của DS trên $(ABCD)$ và BA là hình chiếu vuông góc của BS trên $(ABCD)$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $CD \perp DA$, suy ra theo định lí ba đường vuông góc ta có $CD \perp SD$.

Tương tự ta cũng có $CB \perp AB$, suy ra theo định lí ba đường vuông góc ta có $CB \perp SB$.



Hình 23

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Vẽ đường thẳng qua O và vuông góc với (ABC) tại H. Chứng minh $AH \perp BC$.

Nêu cách tìm hình chiếu vuông góc của một đoạn thẳng AB trên trần nhà xuống nền nhà bằng hai dây dọi.

BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Cho biết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2AD$.

   a) Chứng minh $CD \perp (SAD)$.

   b) Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh $CM \perp (SAB)$.

2. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, AD. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại H, lấy điểm S. Chứng minh rằng:

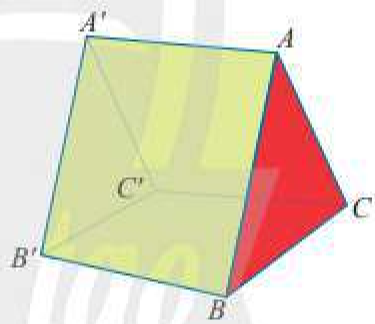
   a) $AC \perp (SHK)$; b) $CK \perp (SDH)$.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, có các cạnh bên đều bằng $2a$.

   a) Tính góc giữa SC và AB.

   b) Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác SAB trên mặt phẳng $(ABCD)$.

4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$ và $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh AC. Chứng minh $SI \perp (ABC)$.



Hình 24

5. Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên AA' vuông góc với đáy (Hình 24).

   Cho biết $AB = AC = 2{,}4$ m; $BC = 2$ m; $AA' = 3$ m.

   a) Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC; $A'B'$ và AC.

   b) Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác ABB' trên mặt phẳng $(BB'C'C)$.

Bài 3. Hai mặt phẳng vuông góc

Từ khoá: Góc giữa hai mặt phẳng; Hai mặt phẳng vuông góc; Hình lăng trụ đứng; Hình lăng trụ đều; Hình chóp đều; Hình chóp cụt đều.

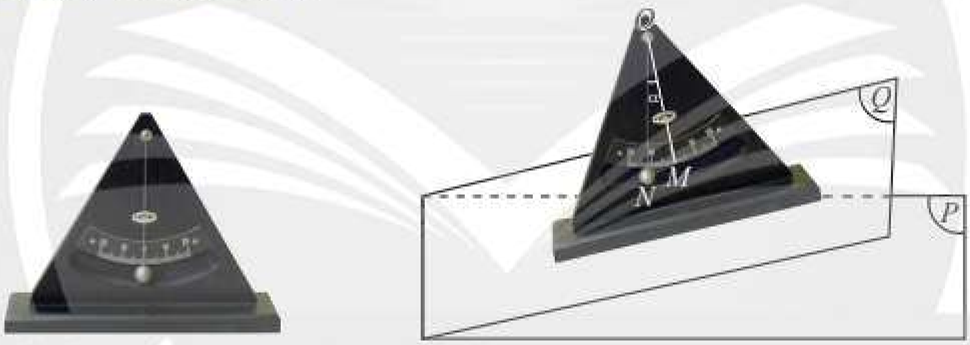
Trong thực tế người ta thường nói mặt ngang và mặt đứng của các bậc thang vuông góc với nhau. Vậy thế nào là hai mặt phẳng vuông góc?

1. Góc giữa hai mặt phẳng

1 a) Có thể xác định góc giữa hai cánh cửa nắp hầm (Hình 1) bằng cách sử dụng góc giữa hai cây chống vuông góc với mỗi cánh hay không?

b) Thế nào là góc giữa hai mặt phẳng? Tại sao thiết bị trong Hình 2 lại có thể đo được góc giữa mặt phẳng nghiêng (Q) và mặt đất (P).

Hình 1

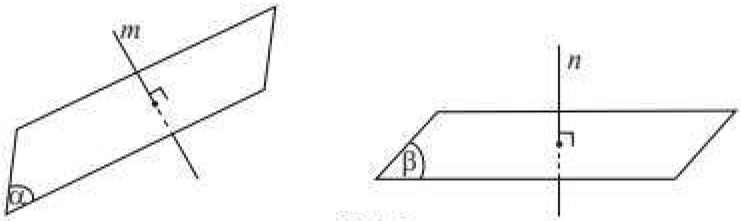


Hình 2

Định nghĩa

Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với (α) và (β), kí hiệu $((\alpha), (\beta))$.

Ta có: $((\alpha), (\beta)) = (m, n)$ với $m \perp (\alpha)$, $n \perp (\beta)$ (Hình 3).

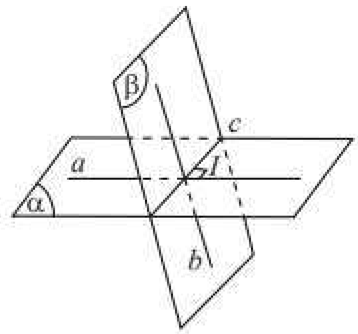


Hình 3

Người ta chứng minh được góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng.

Cho $c = (\alpha) \cap (\beta)$:

$((\alpha), (\beta)) = (a, b)$ với $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$, $a \perp c$, $b \perp c$ (Hình 4).



Hình 4

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa hai mặt phẳng:

a) (SAC) và (SAD); b) (SAB) và (SAD).

Giải

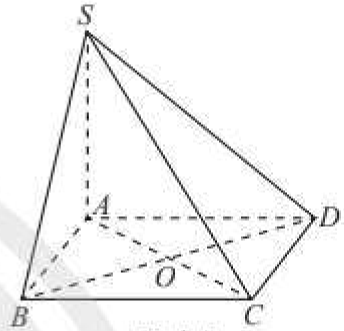
a) Ta có: $BO \perp SA$ và $BO \perp AC$, suy ra $BO \perp (SAC)$;

$BA \perp SA$ và $BA \perp AD$, suy ra $BA \perp (SAD)$.

Do đó, nếu gọi góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAD) là α thì $\alpha = (BO, BA) = \widehat{ABO} = 45^{o}$.

b) Ta có: $CB \perp SA$ và $CB \perp AB$, suy ra $CB \perp (SAB)$;

$CD \perp SA$ và $CD \perp AD$, suy ra $CD \perp (SAD)$.

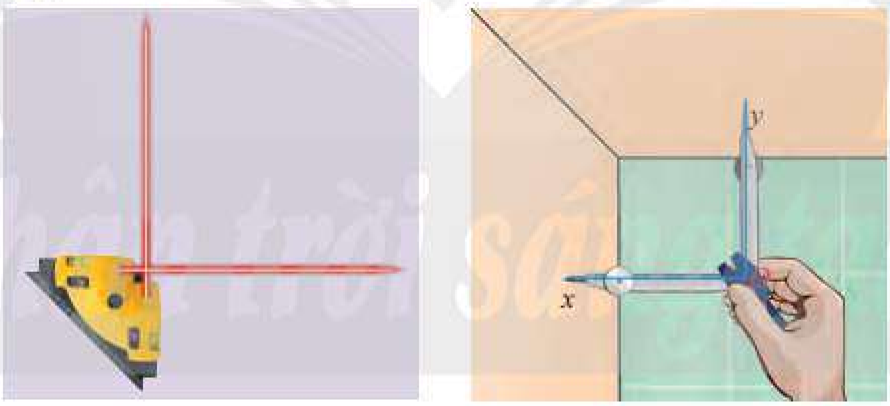


Hình 5

Do đó, nếu gọi góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là β thì $\beta = (CB, CD) = \widehat{BCD} = 90^{o}$.

2. Hai mặt phẳng vuông góc

2 Từ một điểm O vẽ hai tia Ox và Oy lần lượt vuông góc với hai bức tường trong phòng. Đo góc $\widehat{xOy}$.

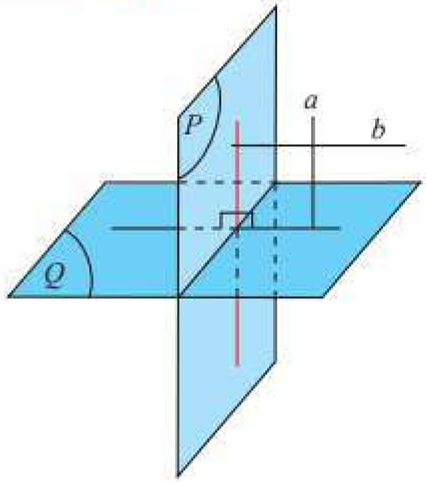


Hình 6

Định nghĩa

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là một góc vuông.

Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc được kí hiệu là $(P) \perp (Q)$.



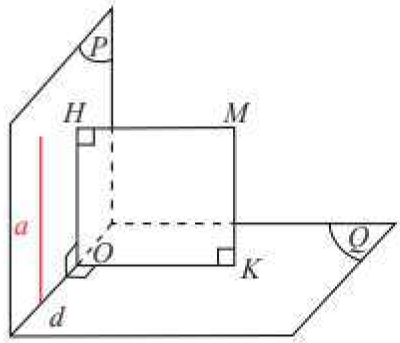
Hình 7

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

3 Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d, điểm M không thuộc (P) và (Q). Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên (P) và (Q). Gọi O là giao điểm của d và (MHK) (Hình 8).

a) Giả sử $(P) \perp (Q)$, hãy cho biết tứ giác $MHOK$ là hình gì? Tìm trong (P) đường thẳng vuông góc với (Q).

b) Giả sử (P) chứa đường thẳng a với $a \perp (Q)$, hãy cho biết tứ giác $MHOK$ là hình gì? Tính góc giữa (P) và (Q).



Hình 8

Định lí 1

Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng các mặt phẳng (ABC), (BAD), (CAD) đôi một vuông góc với nhau.

Giải

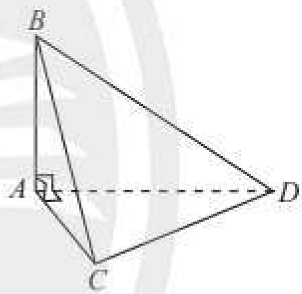
Ta có $AB \perp AC, AB \perp AD \Rightarrow AB \perp (CAD)$

$\Rightarrow (ABC) \perp (CAD), (BAD) \perp (CAD)$.

Tương tự ta cũng có $CA \perp AB$, $CA \perp AD$

$\Rightarrow CA \perp (BAD) \Rightarrow (CAD) \perp (BAD)$.

Vậy các mặt phẳng (ABC), (BAD), (CAD) từng đôi một vuông góc với nhau.



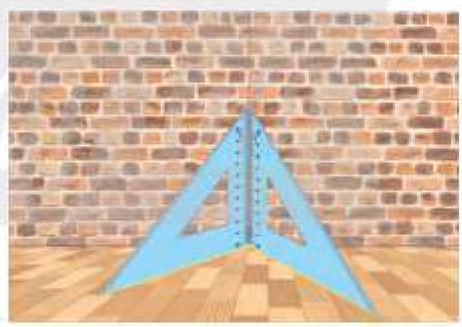
Hình 9

1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và đáy là hình vuông. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (ABCD)$;

b) $(SAC) \perp (SBD)$.

1 Mô tả cách kiểm tra một bức tường vuông góc với mặt sàn bằng hai cái êke trong Hình 10.

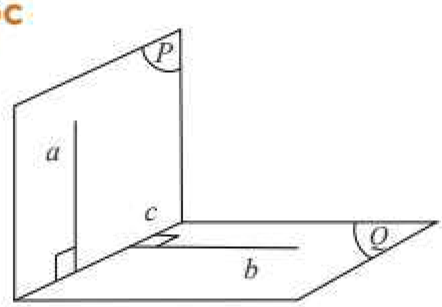

Hình 10

3. Tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc

4 Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (Q). Mặt phẳng (P) chứa a và cắt (Q) theo giao tuyến c. Trong (Q) ta vẽ đường thẳng b vuông góc với c. Hỏi:

a) (P) có vuông góc với (Q) không?

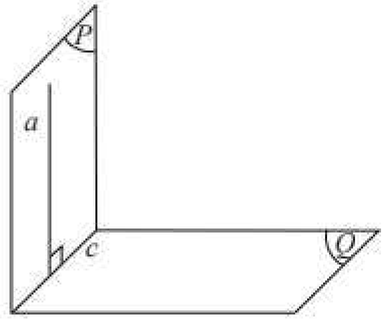
b) Đường thẳng b vuông góc với (P) không?



Hình 11

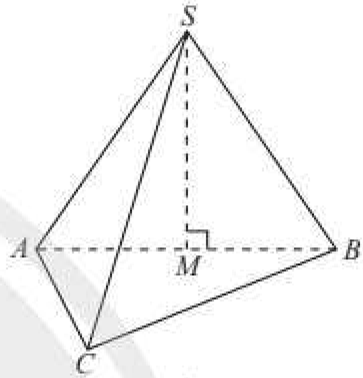
Định lí 2

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.



Hình 12

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh $SM \perp (ABC)$.



Hình 13

Giải

Theo đề bài ta có $(SAB) \perp (ABC)$.

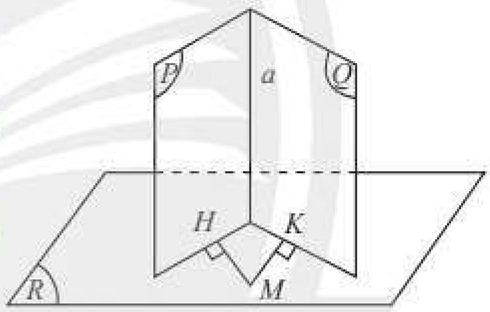
Ta có tam giác SAB đều và M là trung điểm của AB, suy ra $SM \perp AB$. Đường thẳng SM nằm trong (SAB) và vuông góc với giao tuyến AB của hai mặt phẳng (SAB) và (ABC).

Từ đó suy ra $SM \perp (ABC)$.

5 Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R). Gọi a là giao tuyến của (P) và (Q). Lấy điểm M trong (R), vẽ hai đường thẳng MH và MK lần lượt vuông góc với (P) và (Q). Hỏi:

a) Hai đường thẳng MH và MK có nằm trong (R) không?

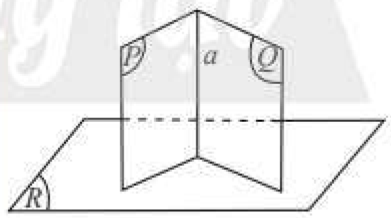
b) Đường thẳng a có vuông góc với (R) không?



Hình 14

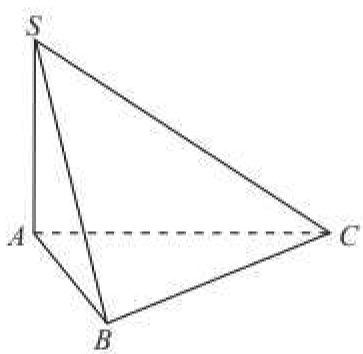
Định lí 3

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.



Hình 15

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA bằng a, đáy ABC là tam giác đều với cạnh bằng a. Cho biết hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính SB và SC theo a.



Hình 16

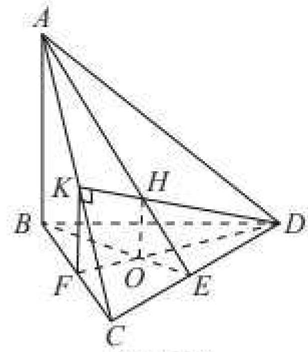
Giải

Ta có hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy (ABC), theo Định lí 3, giao tuyến SA của (SAB) và (SAC) vuông góc với (ABC). Từ $SA \perp (ABC)$ ta có $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$, suy ra tam giác SAB và SAC vuông cân tại S, suy ra $SB = SC = a\sqrt{2}$.

2 Tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$. Trong tam giác BCD vẽ đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mặt phẳng (ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD. Chứng minh rằng:

a) $(ADC) \perp (ABE)$ và $(ADC) \perp (DFK)$;

b) $OH \perp (ADC)$.



Hình 17

2 Nêu cách đặt một quyển sách lên mặt bàn sao cho tất cả các trang sách đều vuông góc với mặt bàn.

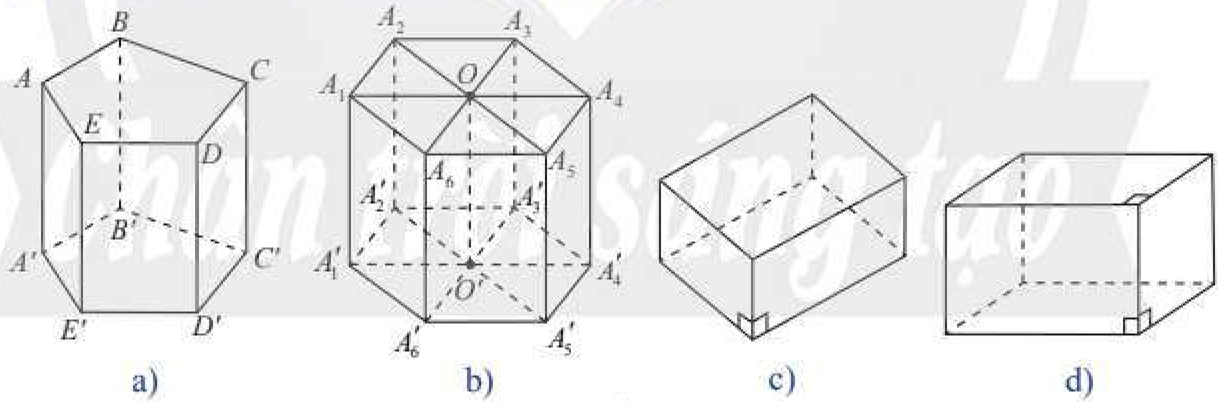
4. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

6 a) Cho hình lăng trụ $ABCDE.A'B'C'D'E'$ có cạnh bên AA' vuông góc với một mặt phẳng đáy (Hình 18a). Có nhận xét gì về các mặt bên của hình lăng trụ này?

b) Cho hình lăng trụ có đáy là đa giác đều và có cạnh bên vuông góc với một mặt phẳng đáy (Hình 18b). Có nhận xét gì các mặt bên của hình lăng trụ này?

c) Một hình lăng trụ nếu có đáy là hình bình hành và có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy (Hình 18c) thì có bao nhiêu mặt là hình chữ nhật?

d) Một hình hộp nếu có đáy là hình chữ nhật và có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy (Hình 18d) thì có bao nhiêu mặt là hình chữ nhật?

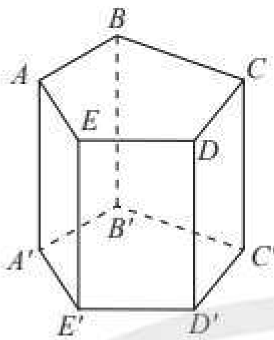
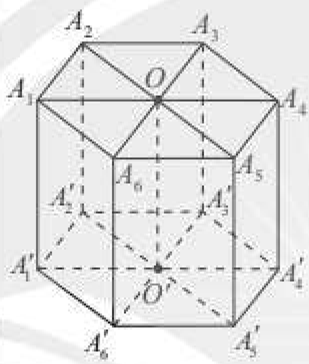
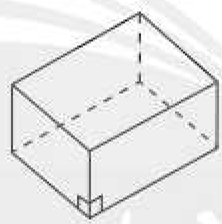
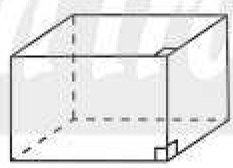
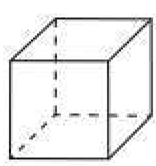


Hình 18

Định nghĩa

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có mặt đáy là đa giác đều.
Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có mặt đáy là hình chữ nhật.
Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

Sử dụng quan hệ song song và vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng ta chứng minh được các tính chất sau đây của các hình vừa nêu:

Tên	Hình vẽ	Tính chất cơ bản
Hình lăng trụ đứng		– Cạnh bên vuông góc với hai đáy. – Mặt bên là các hình chữ nhật.
Hình lăng trụ đều		– Hai đáy là hai đa giác đều. – Mặt bên là các hình chữ nhật. – Cạnh bên và đường nối tâm hai đáy vuông góc với hai đáy.
Hình hộp đứng		– Bốn mặt bên là hình chữ nhật. – Hai đáy là hình bình hành.
Hình hộp chữ nhật		– Sáu mặt là hình chữ nhật. – Độ dài a, b, c của ba cạnh cùng đi qua một đỉnh gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật. – Độ dài đường chéo d được tính theo ba kích thước: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
Hình lập phương		– Sáu mặt là hình vuông. – Độ dài đường chéo d được tính theo độ dài cạnh a: $d = a\sqrt{3}$.

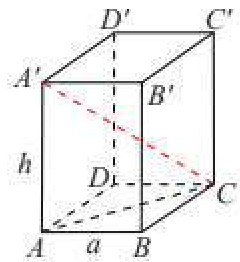
Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $AA' = h$ (Hình 19). Tính đường chéo $A'C$ theo a và h.

Giải

Đáy $ABCD$ của lăng trụ đều phải là tứ giác đều, suy ra $ABCD$ là hình vuông, vậy $AC = a\sqrt{2}$. Lăng trụ đều có cạnh bên vuông góc với đáy, suy ra $AA' \perp (ABCD)$, vậy $AA' \perp AC$.

Trong tam giác $A'AC$ vuông tại A ta có:

$$A'C = \sqrt{A'A^2 + AC^2} = \sqrt{h^2 + 2a^2}.$$



Hình 19

Chú ý: Lăng trụ đều có đáy tứ giác thường được gọi là lăng trụ tứ giác đều. Tương tự ta cũng có lăng trụ tam giác đều, lăng trụ lục giác đều, ...

Cho hình lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ có cạnh bên bằng h và cạnh đáy bằng a. Tính $A'C$ và $A'D$ theo a và h.

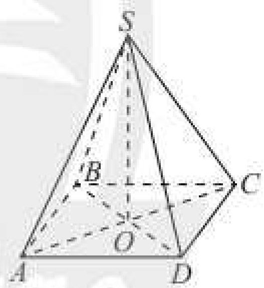
Một chiếc lồng đèn kéo quân có dạng hình lăng trụ lục giác đều với cạnh đáy bằng 10 cm và cạnh bên bằng 30 cm (Hình 20). Tính tổng diện tích các mặt bên của chiếc lồng đèn đó.


Hình 20

5. Hình chóp đều. Hình chóp cụt đều

Hình chóp đều

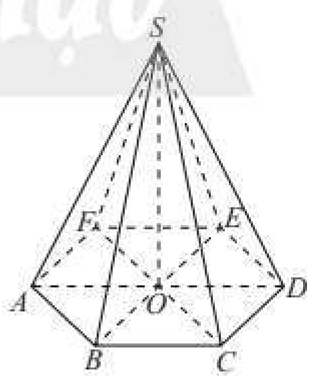
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với tâm O và các cạnh bên của hình chóp bằng nhau (Hình 21). Đường thẳng SO có vuông góc với đáy không?



Hình 21

Định nghĩa

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.



Hình 22

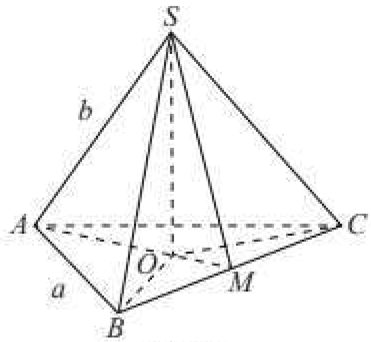
Chú ý: Hình chóp đều có:

a) Các mặt bên là các tam giác cân tại đỉnh hình chóp và bằng nhau.

b) Đoạn thẳng nối từ đỉnh hình chóp đến tâm của đáy thì vuông góc với mặt đáy và gọi là đường cao của hình chóp.

c) Độ dài đường cao gọi là chiều cao của hình chóp đều.

Ví dụ 6. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $SA = b$ (Hình 23). Tính độ dài đường cao SO theo a, b.



Hình 23

Giải

Ta có O là trọng tâm của tam giác đều ABC,

suy ra $AO = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SOA vuông tại O, ta có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}.$$

4 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là tâm của đáy và $AB = a$, $SA = 2a$. Tính SO theo a.

4 Cho biết kim tự tháp Khafre tại Ai Cập có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao khoảng 136 m và cạnh đáy dài khoảng 152 m. Tính độ dài đường cao của mặt bên xuất phát từ đỉnh của kim tự tháp.

(*nguồn:*https://vi.wikipedia.org/wiki/Kim_tự_tháp_Khafre)

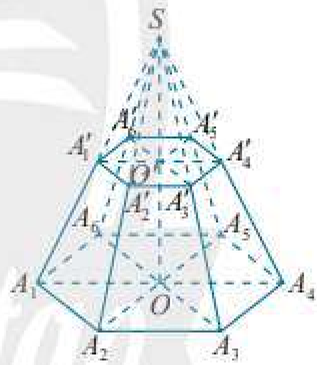

Hình 24

Hình chóp cụt đều

8 Cho hình chóp đều $S.A_1A_2A_3 \ldots A_6$. Mặt phẳng (P) song song với mặt đáy và cắt các cạnh bên lần lượt tại $A_1', A_2', A_3', \ldots, A_6'$.

a) Đa giác $A_1'A_2'A_3' \ldots A_6'$ có phải lục giác đều không? Giải thích.

b) Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai lục giác $A_1A_2A_3 \ldots A_6$ và $A_1'A_2'A_3' \ldots A_6'$. Đường thẳng OO' có vuông góc với mặt đáy không?



Hình 25

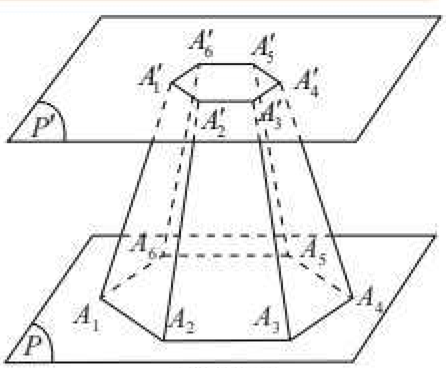
Định nghĩa

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là ***hình chóp cụt đều***.

Trong hình chóp cụt đều $A_1A_2A_3 \ldots A_6.A_1'A_2'A_3' \ldots A_6'$, ta gọi:

– Các điểm $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_6, A_1', A_2', A_3', \ldots, A_6'$ là các ***đỉnh***.

– Đa giác $A_1A_2A_3 \ldots A_6$ là ***đáy lớn***, đa giác $A_1'A_2'A_3' \ldots A_6'$ là ***đáy nhỏ***. Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên hai mặt phẳng song song.



Hình 26

– Cạnh của hai đa giác đáy là ***cạnh đáy***. Các cạnh đáy tương ứng song song từng đôi một.

– Các hình thang cân $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, ..., $A_6A_1A_1'A_6'$ là các ***mặt bên***.

– Cạnh bên của mặt bên gọi là ***cạnh bên*** của hình chóp cụt đều. Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.

– Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là ***đường cao***. Độ dài đường cao là ***chiều cao***.

Ví dụ 7. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng a, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng b, chiều cao $OO' = h$ với O, O' lần lượt là tâm của hai đáy. Tính độ dài cạnh bên CC' của hình chóp cụt đó.

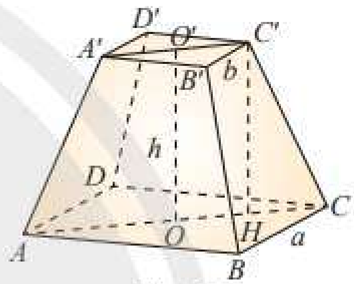
Giải

Trong hình thang vuông $OO'C'C$, vẽ đường cao $C'H$ ($H \in OC'$) (Hình 27).

Ta có $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $O'C' = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$, suy ra $HC = \dfrac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông $CC'H$, ta có

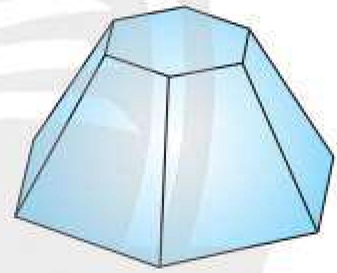
$$CC' = \sqrt{C'H^2 + HC^2} = \sqrt{h^2 + \frac{(a-b)^2}{2}}.$$



Hình 27

Cho hình chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy lớn a, cạnh đáy nhỏ $\dfrac{a}{2}$ và cạnh bên $2a$. Tính độ dài đường cao của hình chóp cụt đó.

Một người cần sơn tất cả các mặt của một cái bục để đặt tượng có dạng hình chóp cụt lục giác đều có cạnh đáy lớn 1 m, cạnh bên và cạnh đáy nhỏ bằng 0,7 m. Tính tổng diện tích cần sơn.


Hình 28

BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC).

a) Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAC)$.

b) Gọi I là trung điểm của SC. Chứng minh rằng $(ABI) \perp (SBC)$.

2. Cho tam giác đều ABC cạnh a, I là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với A qua I. Vẽ đoạn thẳng SD có độ dài bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với (ABC). Chứng minh rằng:

a) $(SBC) \perp (SAD)$;

b) $(SAB) \perp (SAC)$.

3. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AA' = 2a$, $AD = 2a$, $AB = BC = a$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AC'.

b) Tính tổng diện tích các mặt của hình lăng trụ.

4. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Cho biết $AB = BD = a$, $A'C = 2a$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AA'.

b) Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

5. Cho hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ và đường nối tâm hai đáy bằng a. Tính độ dài cạnh bên và đường cao của mỗi mặt bên.

6. Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là 21,6 m và cạnh đáy dài 34 m. Tính độ dài cạnh bên và diện tích xung quanh của kim tự tháp.

Hình 29
(*Nguồn:* https://en.wikipedia.org/wiki/Louvre_Pyramid)

Bài 4. Khoảng cách trong không gian

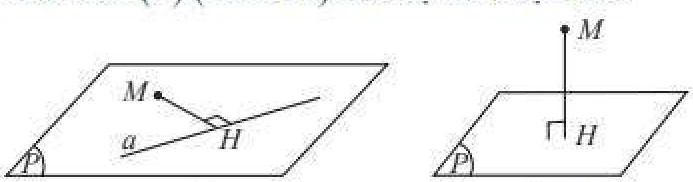
Từ khoá: **Các loại khoảng cách trong không gian; Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.**

Có bao nhiêu loại khoảng cách trong công trình đang xây dựng này? Làm thế nào tính được những khoảng cách đó?

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

1 a) Cho điểm M và đường thẳng a không đi qua M. Trong mặt phẳng (M, a), dùng êke để tìm điểm H trên a sao cho $MH \perp a$ (Hình 1a). Đo độ dài đoạn MH.

b) Cho điểm M không nằm trên mặt phẳng sàn nhà (P). Dùng dây dọi để tìm hình chiếu vuông góc H của M trên (P) (Hình 1b). Đo độ dài đoạn MH.



a) b)

Hình 1

Định nghĩa

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng a thì độ dài đoạn MH được gọi là ***khoảng cách từ M đến đường thẳng a***, kí hiệu $d(M, a)$.

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) thì độ dài đoạn MH được gọi là ***khoảng cách từ M đến (P)***, kí hiệu $d(M, (P))$.

Chú ý:

Ta quy ước:
- $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc a;
- $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc (P).

Nhận xét:

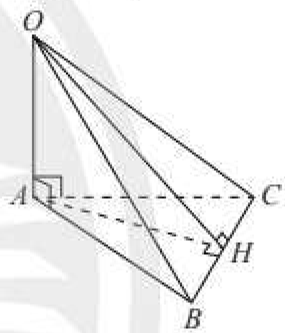
a) Lấy điểm N tuỳ ý trên đường thẳng a, ta luôn có $d(M, a) \leq MN$.

b) Lấy điểm N tuỳ ý trên mặt phẳng (P), ta luôn có $d(M, (P)) \leq MN$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $O.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $OA \perp (ABC)$. Cho biết $OA = a$.

a) Tính khoảng cách từ điểm O đến (ABC).

b) Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC.



Hình 2

Giải

a) Ta có $OA \perp (ABC)$, suy ra $d(O, (ABC)) = OA = a$.

b) Vẽ $AH \perp BC$, ta có $OH \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc), suy ra $d(O, BC) = OH$.

Tam giác ABC đều có cạnh bằng a suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông OAH, ta có $OH = \sqrt{OA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Vậy ta có $d(O, BC) = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

1 Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cho biết $SA = a$ và SA vuông góc với $(ABCD)$.

a) Tính khoảng cách từ điểm B đến (SAD).

b) Tính khoảng cách từ điểm A đến cạnh SC.

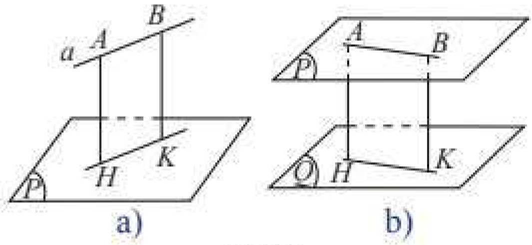
1 Một quạt trần có bề dày của thân quạt là 20 cm. Người ta muốn treo quạt sao cho khoảng cách từ đỉnh quạt đến sàn nhà là 2,5 m. Hỏi phải làm cán quạt dài bao nhiêu? Cho biết trần nhà cao 3,6 m.

Hình 3

2. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

a) Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Lấy hai điểm A, B tuỳ ý trên a và gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên (P) (Hình 4a). So sánh độ dài hai đoạn thẳng AH và BK.

b) Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Lấy hai điểm A, B tuỳ ý trên (P) và gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên (Q) (Hình 4b). So sánh độ dài hai đoạn thẳng AH và BK.



Hình 4

Định nghĩa

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a và b là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến b, kí hiệu $d(a, b)$.

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P), kí hiệu $d(a, (P))$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì trên (P) đến (Q), kí hiệu $d((P), (Q))$.

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính theo a:

a) Khoảng cách giữa đường thẳng DD' và $(AA'C'C)$;

b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'D'D)$ và $(BB'C'C)$.

Giải

a) Ta có $DD' \mathbin{//} AA'$, $d(DD', (AA'C'C)) = d(D, (AA'C'C))$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có $DO \perp AC$ và $DO \perp AA'$, suy ra $DO \perp (AA'C'C)$.

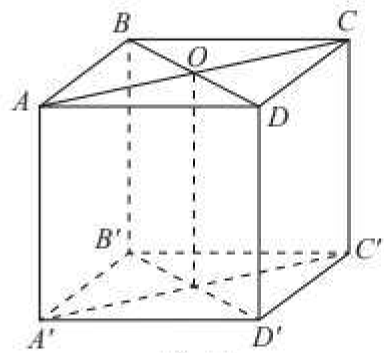
Vậy $d(DD', (AA'C'C)) = d(D, (AA'C'C)) = DO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $(AA'D'D) \mathbin{//} (BB'C'C)$ suy ra

$d((AA'D'D), (BB'C'C)) = d(A, (BB'C'C))$.

Do $AB \perp BB'$ và $AB \perp BC$, suy ra $AB \perp (BB'B'C)$.

Vậy $d((AA'D'D), (BB'C'C)) = AB = a$.



Hình 5

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách:

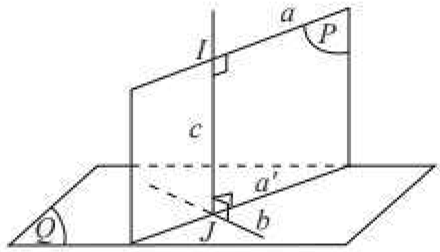
a) Giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(A'C'B)$.

b) Giữa đường thẳng AB và $(A'B'C'D')$.

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa b và song song với a. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng a, vuông góc với (Q) và cắt b tại điểm J. Trong (P), gọi c là đường thẳng đi qua J, vuông góc với a và cắt a tại điểm I.

Đường thẳng IJ có vuông góc với b không? Giải thích.



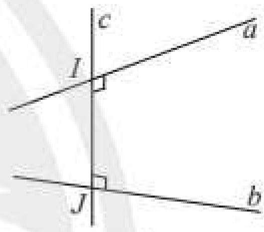
Hình 6

Định nghĩa

Đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b được gọi là ***đường vuông góc chung*** của a và b.

Nếu đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b cắt chúng lần lượt tại I và J thì đoạn IJ gọi là ***đoạn vuông góc chung*** của a và b.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.

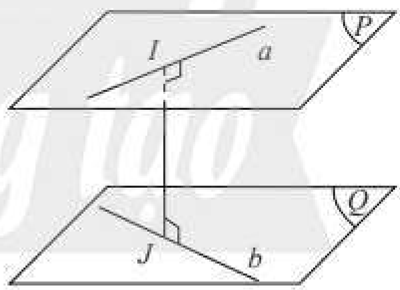


Hình 7

Chú ý:

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng khoảng cách giữa một trong hai đường đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường còn lại.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



Hình 8

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) SB và CD; b) AB và SC.

Giải

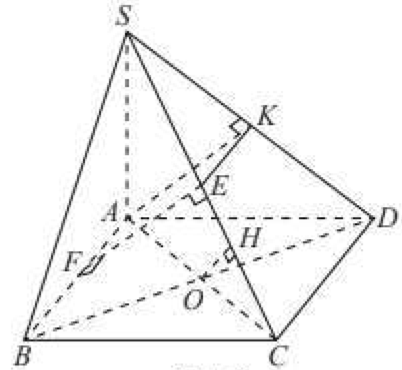
a) Ta có $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$, suy ra $BC \perp SB$.

Mặt khác $BC \perp CD$, suy ra BC là đoạn vuông góc chung của hai đường SB và CD. Ta có $d(SB, CD) = BC = a$.

b) ***Cách 1.*** Ta có $AB \perp (SAD)$ và SD là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAD). Vẽ $AK \perp SD$, $KE // AB$, $EF // AK$.

Ta có $AB \perp AK$, $AK \perp SD$, suy ra $AK \perp SC$. Do $EF // AK$, suy ra ta cũng có $EF \perp AB$ và EF cắt AB tại F, $EF \perp SC$ và EF cắt SC tại E.

Các kết quả trên chứng tỏ EF là đoạn vuông góc chung của AB và SC.



Hình 9

Trong tam giác SAD vuông cân tại A ta có $AK = \dfrac{SD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AB, SC) = EF = AK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

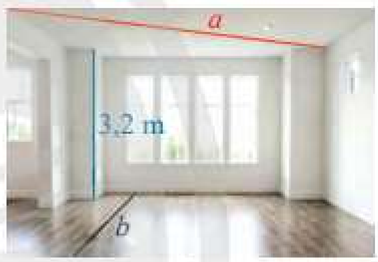
Cách 2. Ta có mặt phẳng (SCD) chứa SC và song song với AB, suy ra:

$$d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

3 Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đều bằng a và vuông góc từng đôi một. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) OA và BC; b) OB và AC.

2 Một căn phòng có trần cao 3,2 m. Tính khoảng cách giữa một đường thẳng a trên trần nhà và đường thẳng b trên sàn nhà.



Hình 10

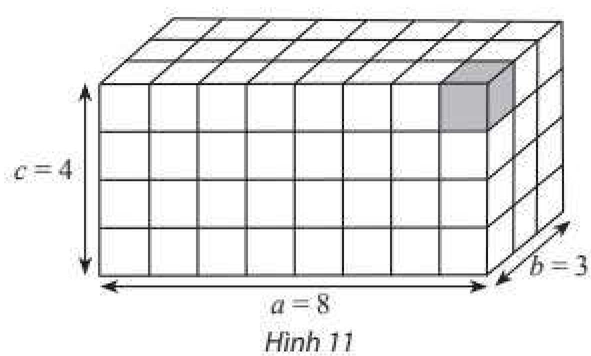
4. Công thức tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ, khối hộp

Chúng ta đã biết các công thức tính thể tích của một số hình khối đơn giản.

Thể tích một hình khối là số đo phần không gian mà nó chiếm chỗ. Ta công nhận hình lập phương có cạnh 1 (đơn vị độ dài) có thể tích là 1 (đơn vị thể tích).

Thể tích khối hộp chữ nhật

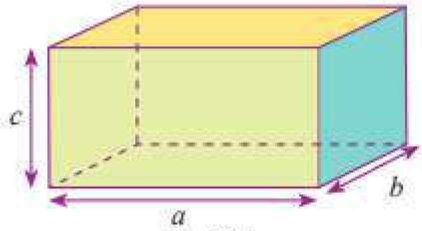
4 Cho một khối hộp chữ nhật với các kích thước là a, b, c đều là số nguyên dương. Vẽ các mặt phẳng song song với các mặt của hình hộp và chia nó thành các khối lập phương có cạnh bằng 1 (Hình 11). Tìm số hình lập phương đơn vị có trong hình hộp.



Hình 11

Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước.

$$V = abc.$$



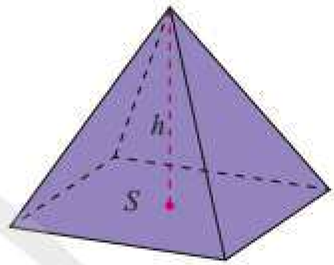
Hình 12

Thể tích khối chóp

Khoảng cách h từ đỉnh đến mặt phẳng đáy của một hình chóp gọi là *chiều cao* của hình chóp đó. Người ta chứng minh được công thức sau đây:

Thể tích khối chóp bằng một phần ba diện tích đáy nhân với chiều cao.

$$V = \frac{1}{3}Sh.$$



Hình 13

Thể tích khối chóp cụt đều

Để tìm thể tích khối chóp cụt đều, ta sử dụng công thức sau đây:

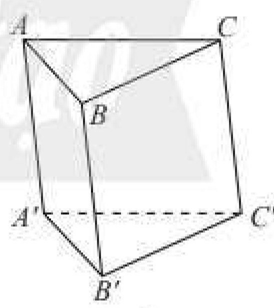
$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S')$$

với h là chiều cao và S, S' là diện tích hai đáy.

Thể tích khối lăng trụ

Khoảng cách h giữa hai mặt phẳng đáy của hình lăng trụ là *chiều cao* của hình lăng trụ đó.

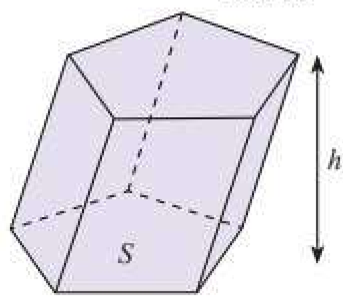
5 Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ (Hình 14). Tìm cách chia khối lăng trụ thành ba khối chóp có cùng chiều cao và diện tích đáy.



Hình 14

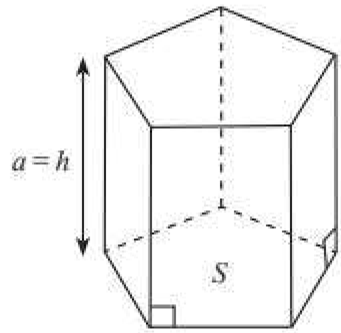
Thể tích khối lăng trụ bằng tích diện tích đáy và chiều cao.

$$V = Sh.$$



Hình 15

Chú ý: Ta gọi khối lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy là khối lăng trụ đứng. Chiều dài cạnh bên a của khối lăng trụ đứng bằng chiều cao h và ta có công thức: $V = Sa$.



Hình 16

Ví dụ 4.

a) Tính thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước là: $6a$; $4a$; $3a$.

b) Tính thể tích khối tứ diện đều $SABC$ cạnh a.

c) Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $AA' = 2a$, hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ trùng với giao điểm O của AC và BD. Tính thể tích khối lăng trụ đó.

Giải

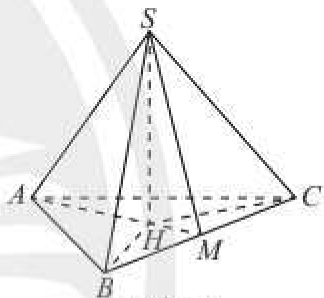
a) Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước:

$$V = 6a \,.\, 4a \,.\, 3a = 72a^3.$$

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC). Ta có ba tam giác vuông SHA, SHB, SHC bằng nhau, suy ra $HA = HB = HC$. Vậy H là tâm của tam giác đều ABC. Ta có:

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ AH = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Hình 17

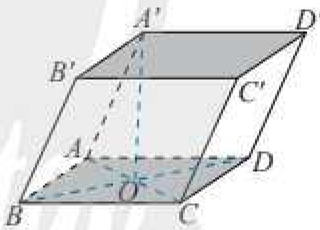
Khối tứ diện đều $SABC$ có thể tích là

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}\,.\,SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

c) Chiều cao của khối lăng trụ:

$$h = A'O = \sqrt{A'A^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Thể tích khối lăng trụ: $V = S\,.\,h = 4a^2.\,a\sqrt{2} = 4a^3\sqrt{2}.$



Hình 18

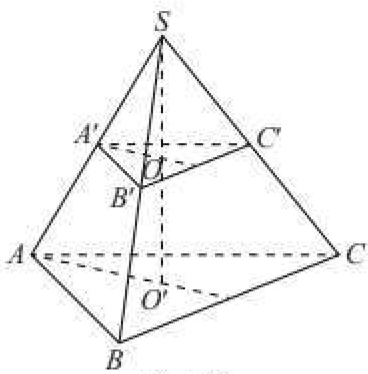
Ví dụ 5. Cắt khối chóp tam giác đều $S.ABC$ với cạnh đáy bằng a và chiều cao $2a$ bởi một mặt phẳng song song với đáy và đi qua trung điểm các cạnh bên. Tính thể tích khối chóp cụt đều được tạo thành.

Giải

Gọi $ABC.A'B'C'$ là khối chóp cụt đều được tạo thành, O và O' lần lượt là tâm của hai đáy (Hình 19). Ta có:

Chiều cao của khối chóp cụt đều là $h = OO' = \dfrac{SO}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$;

Tam giác đều ABC có diện tích: $S = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$;



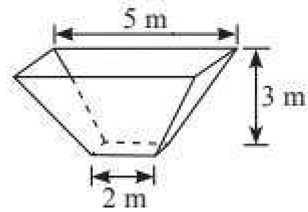
Hình 19

Tam giác đều $A'B'C'$ có cạnh $A'B' = \dfrac{AB}{2}$ nên có diện tích: $S' = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{16} = \dfrac{S}{4}$.

Do đó, thể tích khối chóp cụt đều được tạo thành là:

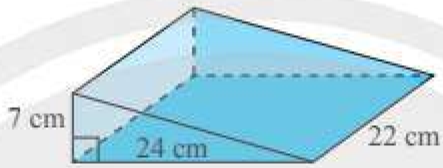
$$V = \frac{1}{3}h\left(S + \sqrt{SS'} + S'\right) = \frac{1}{3}a\left(S + \frac{S}{2} + \frac{S}{4}\right) = \frac{7aS}{12} = \frac{7a}{12} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{48}.$$

4 Tính thể tích của một bồn chứa có dạng khối chóp cụt đều có kích thước được cho như trong Hình 20.



Hình 20

3 Tính thể tích cái nêm hình lăng trụ đứng có kích thước như trong Hình 21.



Hình 21

BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có O là giao điểm của hai đường chéo, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$, $SO = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD).

2. Cho hai tam giác cân ABC và ABD có đáy chung AB và không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Chứng minh rằng $AB \perp CD$.

b) Xác định đoạn vuông góc chung của AB và CD.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh $AB \perp (SIJ)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

4. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60°.

a) Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ.

b) Tính thể tích của khối lăng trụ.

5. Một cây cầu dành cho người đi bộ (Hình 22) có mặt sàn cầu cách mặt đường 3,5 m, khoảng cách từ đường thẳng a nằm trên tay vịn của cầu đến mặt sàn cầu là 0,8 m. Gọi b là đường thẳng kẻ theo tim đường. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.

Hình 22

6. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên $AA' = 2a$ và đáy $ABCD$ là hình thoi có $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và AA'.

b) Tính thể tích của khối hộp.

7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a và có O là giao điểm hai đường chéo của đáy.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

b) Tính thể tích của khối chóp.

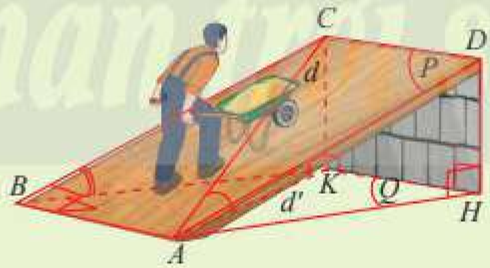
8. Tính thể tích của khối chóp cụt lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ với O và O' là tâm hai đáy, cạnh đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là a và $\frac{a}{2}$, $OO' = a$.

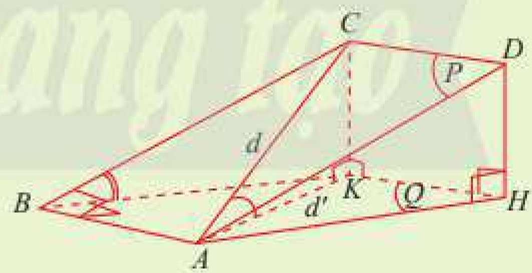
Bài 5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Góc nhị diện

Từ khoá: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng; Góc nhị diện; Góc phẳng nhị diện.

Mặt phẳng nghiêng thường được sử dụng trong lao động vì tính tiện dụng của nó. Quan sát hình mặt phẳng nghiêng (*P*) và mặt đất (*Q*) trong hình dưới đây và hãy tìm hiểu tại sao:

- $\widehat{CAK}$ **được gọi là góc hợp bởi đường thẳng *d* và (*Q*).**
- $\widehat{CBK}$ **được xem là góc hợp bởi hai mặt phẳng (*P*) và (*Q*).**





1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

1 Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P).

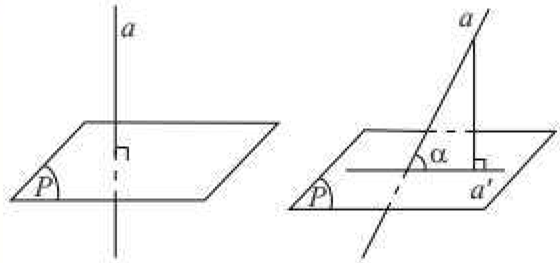
a) Trong trường hợp a vuông góc với (P), tìm góc giữa a và một đường thẳng b tuỳ ý trong (P).

b) Trong trường hợp a không vuông góc với (P), tìm góc giữa a và đường thẳng a' là hình chiếu vuông góc của a trên (P).

Định nghĩa

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a với (P) bằng 90^o.

Nếu đường thẳng a không vuông góc với (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và (P).



Hình 1

Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) được kí hiệu là $(a, (P))$.

Chú ý: a) Góc α giữa đường thẳng và mặt phẳng luôn thoả mãn $0^o \le \alpha \le 90^o$.

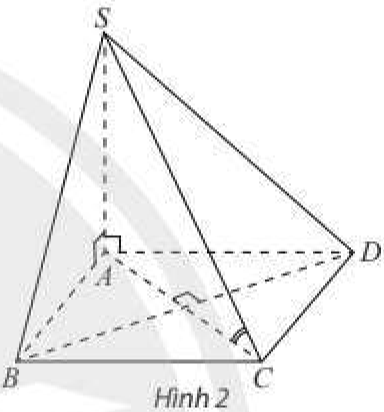
b) Nếu đường thẳng a nằm trong (P) hoặc a song song với (P) thì $(a, (P)) = 0^o$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Tính:

a) Góc giữa đường thẳng BC và (SAB);

b) Góc giữa đường thẳng BD và (SAD);

c) Góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$.



Hình 2

Giải

a) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $BC \perp SA$. Ta lại có $BC \perp AB$, suy ra $BC \perp (SAB)$, suy ra góc giữa đường thẳng BC và (SAB) bằng 90^o.

b) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $BA \perp SA$. Ta lại có $BA \perp AD$, suy ra $BA \perp (SAD)$. Vậy AD là hình chiếu của BD trên (SAD). Nếu gọi φ là góc giữa đường thẳng BD và (SAD) thì $\varphi = (BD, AD) = \widehat{BDA} = 45^o$ (vì tam giác ABD vuông cân tại A).

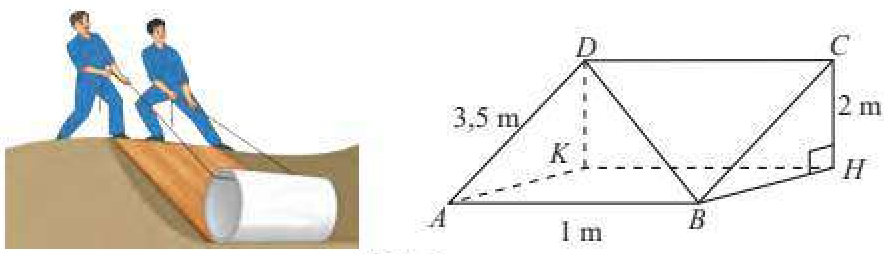
c) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$. Nếu gọi φ' là góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ thì $\varphi' = (SC, CA) = \widehat{SCA}$.

Trong tam giác SCA vuông tại A, ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, suy ra góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ bằng 60^o.

1 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa các đường thẳng sau đây với mặt phẳng $(ABCD)$:

a) AA'; b) BC'; c) $A'C$.

1 Một tấm ván hình chữ nhật $ABCD$ được dùng làm mặt phẳng nghiêng để kéo một vật lên khỏi hố sâu 2 m. Cho biết $AB = 1$ m, $AD = 3,5$ m. Tính góc giữa đường thẳng BD và đáy hố.

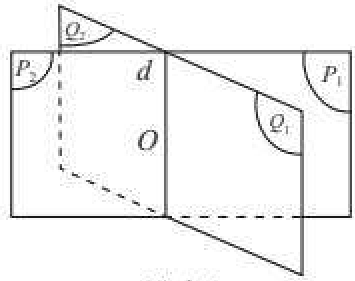


Hình 3

2. Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện

Góc nhị diện

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d. Hãy gọi tên các nửa mặt phẳng có chung bờ d. Các nửa mặt phẳng này chia không gian thành bao nhiêu phần?

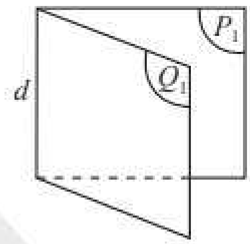


Hình 4

Định nghĩa

Cho hai nửa mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d. Hình tạo bởi (P_1), (Q_1) và d được gọi là ***góc nhị diện*** tạo bởi (P_1) và (Q_1), kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.

Hai nửa mặt phẳng (P_1), (Q_1) gọi là ***hai mặt của nhị diện*** và d gọi là ***cạnh của nhị diện***.



Hình 5

Chú ý:

a) Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.

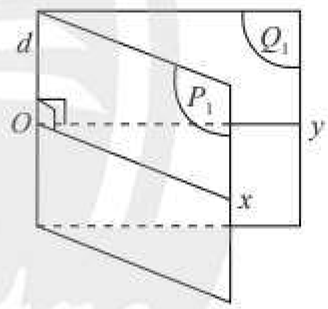
b) Góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$ còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng (P_1), (Q_1).

Góc phẳng nhị diện

Cho góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$. Gọi O là một điểm tuỳ ý trên d, Ox là tia nằm trong (P_1) và vuông góc với d, Oy là tia nằm trong (Q_1) và vuông góc với d (Hình 6).

a) Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa d và mp(Ox, Oy).

b) Nêu nhận xét về số đo của góc xOy khi O thay đổi trên d.



Hình 6

Định nghĩa

Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Chú ý:

a) Đối với một góc nhị diện, các góc phẳng nhị diện đều bằng nhau.

b) Nếu mặt phẳng (R) vuông góc với cạnh d của góc nhị diện và cắt hai mặt (P_1), (Q_1) của góc nhị diện theo hai nửa đường thẳng Ou và Ov thì $\widehat{uOv}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện tạo bởi (P_1), (Q_1).

c) Góc nhị diện có góc phẳng nhị diện là góc vuông được gọi là góc nhị diện vuông.

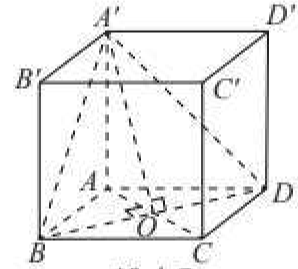
d) Số đo góc phẳng nhị diện được gọi là số đo góc nhị diện.

e) Số đo góc nhị diện nhận giá trị từ 0^o đến 180^o.

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Xác định và tính góc phẳng nhị diện:

a) $[A, BD, A']$; b) $[C, BD, A']$.

Giải



Hình 7

a) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có $OA \perp BD$ và $OA' \perp BD$, suy ra $\widehat{AOA'}$ là góc phẳng nhị diện $[A, BD, A']$.

Trong tam giác AOA' vuông tại A, ta có:

$$\tan \widehat{A'OA} = \frac{AA'}{AO} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{A'OA} \approx 54,7^\circ.$$

b) Ta có $OC \perp BD$ và $OA' \perp BD$, suy ra $\widehat{A'OC}$ là góc phẳng nhị diện $[C, BD, A']$.

Ta có $\widehat{A'OC} = 180^\circ - \widehat{A'OA} \approx 125,3^\circ$.

2 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đáy và có tất cả các cạnh đều bằng a. Xác định và tính góc phẳng nhị diện:

a) $[S, BC, O]$; b) $[C, SO, B]$.

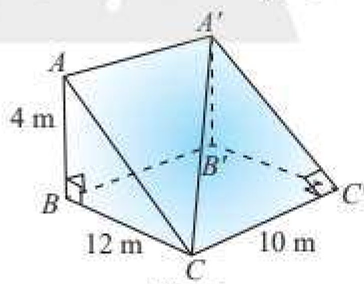
2 Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao 98 m và cạnh đáy 180 m. Tính số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.

(*Nguồn:* https://en.wikipedia.org/wiki/Memphis_Pyramid)


Hình 8

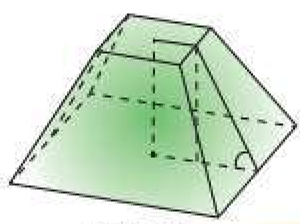
BÀI TẬP

1. Cho tứ diện đều $ABCD$. Vẽ hình bình hành $BCED$.
   a) Tìm góc giữa đường thẳng AB và (BCD).
   b) Tìm góc phẳng nhị diện $[A, CD, B]$; $[A, CD, E]$.
2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là tâm của đáy và có tất cả các cạnh bằng nhau.
   a) Tìm góc giữa đường thẳng SA và $(ABCD)$.
   b) Tìm góc phẳng nhị diện $[A, SO, B]$, $[S, AB, O]$.
3. Cho hình chóp cụt lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ với O và O' là tâm hai đáy, cạnh đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là a và $\frac{a}{2}$, $OO' = a$.
   a) Tìm góc giữa cạnh bên và mặt đáy.
   b) Tìm góc phẳng nhị diện $[O, AB, A']$, $[O', A'B', A]$.



Hình 9

4. Một con dốc có dạng hình lăng trụ đứng tam giác với kích thước như trong Hình 9.
   a) Tính số đo góc giữa đường thẳng CA' và $(CC'B'B)$.
   b) Tính số đo góc nhị diện cạnh CC'.
5. Người ta định đào một cái hầm có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có hai cạnh đáy là 14 m và 10 m. Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 135°. Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm.


Hình 10

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

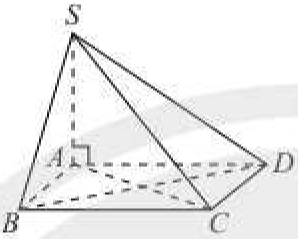
1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy. Đường thẳng CD vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SAD).

B. (SAC).

C. (SAB).

D. (SBD).



Hình 1

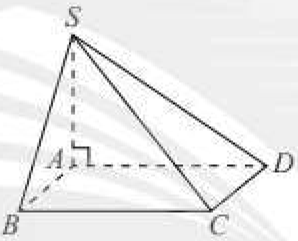
2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh b, SA vuông góc với mặt đáy, $SC = 2b\sqrt{2}$. Số đo góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy là

A. 60°.

B. 30°.

C. 45°.

D. 50°.



Hình 2

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Gọi M là trung điểm của SA. Mặt phẳng (MBD) vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. (SBC). B. (SAC).

C. (SBD). D. $(ABCD)$.

4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên là

A. $\dfrac{a\sqrt{14}}{7}$. B. $\dfrac{a\sqrt{2}}{7}$.

C. $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$. D. $\dfrac{2a\sqrt{14}}{7}$.

5. Thể tích của khối chóp cụt tam giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a và chiều cao bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ là

A. $\dfrac{7\sqrt{2}}{8}a^3$. B. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

C. $\dfrac{7\sqrt{2}}{12}a^3$. D. $\dfrac{7\sqrt{3}}{4}a^3$.

6. Cho chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Góc nhị diện $[S, BC, A]$ có số đo là

A. $75^\circ46'$. B. $71^\circ21'$.

C. $68^\circ31'$. D. $65^\circ12'$.

7. Nếu hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 3; 4; 5 thì độ dài đường chéo của nó là

A. $5\sqrt{2}$. B. 50.

C. $2\sqrt{5}$. D. 12.

8. Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

9. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD.

a) Chứng minh rằng $(SMD) \perp (SNC)$.

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SNC).

10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC và SD. Tính khoảng cách giữa AM và NP.

11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a$; $CD = a$; số đo góc nhị diện $[S, BC, A]$ bằng 60°. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

12. Một chân cột bằng gang có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a, chiều cao $h = 2a$ và bán kính đáy phần trụ rỗng bên trong bằng $\frac{a}{2}$.

a) Tìm góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.

b) Tính thể tích chân cột nói trên theo a.

13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên $AA' = a$, đáy $ABCD$ là hình thoi có $AB = BD = a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với điểm O là giao điểm hai đường chéo của đáy. Tính thể tích của khối hộp.

Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Chương IX XÁC SUẤT

Trong chương này, chúng ta sẽ tiếp tục tìm hiểu một số khái niệm cơ bản về xác suất cổ điển và một số quy tắc tính xác suất.

Trong thời gian diễn ra đại dịch Covid-19, việc phân tích xác suất truyền bệnh từ người này sang người khác trong các điều kiện khác nhau đóng vai trò quan trọng trong việc xây dựng các quy tắc an toàn nhằm kiểm soát sự lây lan của bệnh dịch.

Học xong chương này, bạn có thể:

– Nhận biết được một số khái niệm về xác suất cổ điển: hợp và giao các biến cố; biến cố độc lập.

– Tính được xác suất của biến cố hợp bằng cách sử dụng công thức cộng.

– Tính được xác suất của biến cố giao bằng cách sử dụng công thức nhân (cho trường hợp biến cố độc lập).

– Tính được xác suất của biến cố trong một số bài toán đơn giản bằng phương pháp tổ hợp.

– Tính được xác suất trong một số bài toán đơn giản bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây.

Bài 1. Biến cố giao và quy tắc nhân xác suất

Từ khoá: Biến cố giao; Hai biến cố xung khắc; Biến cố độc lập; Quy tắc nhân xác suất.

Nguyệt và Nhi cùng tham gia một cuộc thi bắn cung. Xác suất bắn trúng tâm bia của Nguyệt là 0,9 và của Nhi là 0,8. Tính xác suất để cả hai bạn cùng bắn trúng tâm bia.

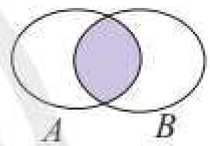
1. Biến cố giao

1 Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5", B là biến cố "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6".

a) Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố trên.

b) Hãy liệt kê các kết quả của phép thử làm cho cả hai biến cố A và B cùng xảy ra.

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "Cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu AB hoặc $A \cap B$ được gọi là ***biến cố giao*** của A và B.



Hình 1

Chú ý: Tập hợp mô tả biến cố AB là giao của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B. Biến cố AB xảy ra khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B xảy ra.

Ví dụ 1. Xét phép thử gieo hai con xúc xắc ở 1. Gọi C là biến cố "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm". Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố giao AC và BC.

Giải

Biến cố $C = \{(1; 6); (6; 1); (1; 5); (5; 1); (1; 4); (4; 1); (1; 3); (3; 1); (1; 2); (2; 1); (1; 1)\}$.

Kết hợp tập hợp mô tả biến cố A, B ở 1, ta có biến cố $AC = \{(1; 4); (4; 1)\}$; biến cố $BC = \{(1; 6); (6; 1)\}$.

1 Tiếp tục với phép thử ở Ví dụ 1.

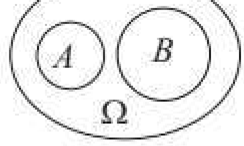
a) Gọi D là biến cố "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc thứ nhất là 3". Hãy xác định các biến cố AD, BD và CD.

b) Gọi $\overline{A}$ là biến cố đối của biến cố A. Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố giao $\overline{A}B$ và $\overline{A}C$.

2. Hai biến cố xung khắc

2 Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5", gọi B là biến cố "Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm". Hai biến cố A và B có thể đồng thời cùng xảy ra không?

Hai biến cố A và B được gọi là ***xung khắc*** nếu A và B không đồng thời xảy ra.



Hình 2

Chú ý: Hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \varnothing$.

Ví dụ 2. Một hộp có 5 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Hãy xác định các cặp biến cố xung khắc trong các biến cố sau:

A: "Hai viên bi lấy ra cùng màu xanh";

B: "Hai viên bi lấy ra cùng màu đỏ";

C: "Hai viên bi lấy ra cùng màu";

D: "Hai viên bi lấy ra khác màu".

Giải

Ta có hai biến cố A và B xung khắc.

Biến cố C xảy ra khi lấy ra 2 viên bi xanh hoặc 2 viên bi đỏ hoặc 2 viên bi vàng. Khi lấy được 2 viên bi màu xanh thì biến cố A và biến cố C cùng xảy ra. Khi lấy được 2 viên bi màu đỏ thì biến cố B và biến cố C cùng xảy ra. Do đó biến cố C không xung khắc với biến cố A và biến cố B.

Biến cố D xảy ra khi lấy ra 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ; hoặc 1 viên bi xanh, 1 viên bi vàng; hoặc 1 viên bi đỏ, 1 viên bi vàng. Do đó biến cố D xung khắc với biến cố A, xung khắc với biến cố B và xung khắc với biến cố C.

Vậy có 4 cặp biến cố xung khắc là: A và B; A và D; B và D; C và D.

2 Hãy tìm một biến cố khác rỗng và xung khắc với cả ba biến cố A, B và C trong Ví dụ 1.

3 a) Hai biến cố đối nhau có xung khắc với nhau không?

b) Hai biến cố xung khắc có phải là hai biến cố đối nhau không?

3. Biến cố độc lập

3 An và Bình mỗi người gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "An gieo được mặt 6 chấm" và B là biến cố "Bình gieo được mặt 6 chấm".

a) Tính xác suất của biến cố B.

b) Tính xác suất của biến cố B trong hai trường hợp sau:

- Biến cố A xảy ra;
- Biến cố A không xảy ra.

Trong 3, ta thấy dù biến cố A xảy ra hay không thì xác suất của biến cố B vẫn luôn là $\frac{1}{6}$.

Ta nói A và B là hai *biến cố độc lập*.

Hai biến cố A và B được gọi là ***độc lập*** nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Nhận xét: Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $\overline{A}$ và B; A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập.

Ví dụ 3. Trong hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng, xem màu rồi trả lại hộp. Lặp lại phép thử trên 2 lần và gọi A_k là biến cố quả bóng lấy ra lần thứ k là bóng xanh ($k = 1, 2$).

a) A_1, A_2 có là các biến cố độc lập không? Tại sao?

b) Nếu trong mỗi phép thử trên ta không trả bóng lại hộp thì A_1, A_2 có là các biến cố độc lập không? Tại sao?

Giải

a) Nếu A_1 xảy ra thì sau khi trả lại quả bóng thứ nhất vào hộp, trong hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ và 1 quả bóng vàng, do đó xác suất xảy ra A_2 là $\frac{1}{3}$.

Ngược lại, nếu A_1 không xảy ra thì sau khi trả lại quả bóng thứ nhất vào hộp, trong hộp vẫn có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ và 1 quả bóng vàng, do đó xác suất xảy ra A_2 là $\frac{1}{3}$.

Ta thấy khi A_1 xảy ra hay không xảy ra thì xác suất của biến cố A_2 luôn bằng $\frac{1}{3}$. Do quả bóng lấy ra lần thứ nhất được trả lại hộp nên biến cố A_2 xảy ra hay không xảy ra không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của A_1. Vậy A_1 và A_2 là hai biến cố độc lập.

b) Giả sử quả bóng lấy ra lần đầu tiên không được trả lại hộp.

Nếu A_1 xảy ra thì trước khi bốc quả bóng thứ hai, trong hộp có 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng. Do đó xác suất xảy ra A_2 là 0.

Ngược lại, nếu A_1 không xảy ra thì trước khi bốc quả bóng thứ hai, trong hộp có 2 quả bóng, trong đó có đúng 1 quả bóng xanh. Do đó xác suất xảy ra A_2 là $\frac{1}{2}$.

Ta thấy xác suất xảy ra của biến cố A_2 phụ thuộc vào sự xảy ra của A_1. Vậy A_1 và A_2 không là hai biến cố độc lập.

4 Hãy chỉ ra 2 biến cố độc lập trong phép thử tung 2 đồng xu cân đối và đồng chất.

4. Quy tắc nhân xác suất của hai biến cố độc lập

4 Trong 3, hãy tính và so sánh $P(AB)$ với $P(A)P(B)$.

Để tính xác suất của giao các biến cố độc lập, ta sử dụng ***quy tắc nhân xác suất*** sau:

Nếu hai biến cố A và B độc lập thì

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Chú ý: Từ quy tắc nhân xác suất ta thấy, nếu $P(AB) \neq P(A)P(B)$ thì hai biến cố A và B không độc lập.

Ví dụ 4. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0{,}6$ và $P(B) = 0{,}8$. Hãy tính xác suất của các biến cố AB, $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$.

Giải

Do A và B là hai biến cố độc lập nên

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}48.$$

Vì $\overline{A}$ là biến cố đối của A nên $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}4$. Do $\overline{A}$ và B độc lập nên

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B) = 0{,}32.$$

Vì $\overline{B}$ là biến cố đối của B nên $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}2$. Do $\overline{A}$ và $\overline{B}$ độc lập nên

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0{,}08.$$

Ví dụ 5. Hai bệnh nhân X và Y bị nhiễm vi rút SARS-CoV-2. Biết rằng xác suất bị biến chứng nặng của bệnh nhân X là 0,1 và của bệnh nhân Y là 0,2. Khả năng bị biến chứng nặng của hai bệnh nhân là độc lập.

Hãy tính xác suất của các biến cố:

a) "Cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng nặng";

b) "Cả hai bệnh nhân đều không bị biến chứng nặng";

c) "Bệnh nhân X bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y không bị biến chứng nặng".

Giải

Gọi A là biến cố "Bệnh nhân X bị biến chứng nặng". Ta có $P(A) = 0,1$ và $P(\overline{A}) = 0,9$.

Gọi B là biến cố "Bệnh nhân Y bị biến chứng nặng". Ta có $P(B) = 0,2$ và $P(\overline{B}) = 0,8$.

a) Ta thấy A và B là hai biến cố độc lập nên xác suất cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng nặng là

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,02.$$

b) Do $\overline{A}$ và $\overline{B}$ độc lập nên xác suất cả hai bệnh nhân không bị biến chứng nặng là

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0,72.$$

c) Do A và $\overline{B}$ độc lập nên xác suất bệnh nhân X bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y không bị biến chứng nặng là

$$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = 0,08.$$

Ta cũng có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây như sau:

Theo sơ đồ trên thì:

a) Xác suất cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng nặng là 0,02;

b) Xác suất cả hai bệnh nhân không bị biến chứng nặng là 0,72;

c) Xác suất bệnh nhân X bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y không bị biến chứng nặng là 0,08.

Hãy trả lời câu hỏi ở ▶ nếu Nguyệt và Nhi bắn độc lập với nhau.

BÀI TẬP

1. Hộp thứ nhất chứa 3 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 3. Hộp thứ hai chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 thẻ. Gọi A là biến cố "Tổng các số ghi trên 2 thẻ bằng 6", B là biến cố "Tích các số ghi trên 2 thẻ là số lẻ".

a) Hãy viết tập hợp mô tả biến cố AB và tính $P(AB)$.

b) Hãy tìm một biến cố khác rỗng và xung khắc với cả hai biến cố A và B.

2. Một hộp chứa 21 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 21. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2", B là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3".

a) Hãy mô tả bằng lời biến cố AB.

b) Hai biến cố A và B có độc lập không? Tại sao?

3. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

a) Biết $P(A) = 0,7$ và $P(B) = 0,2$. Hãy tính xác suất của các biến cố AB, $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$.

b) Biết $P(A) = 0,5$ và $P(AB) = 0,3$. Hãy tính xác suất của các biến cố B, $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$.

4. Một xạ thủ bắn lần lượt 2 viên đạn vào một bia. Xác suất trúng đích của viên thứ nhất và thứ hai lần lượt là 0,9 và 0,6. Biết rằng kết quả các lần bắn là độc lập với nhau. Tính xác suất của các biến cố sau bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây:

a) "Cả 2 lần bắn đều trúng đích";

b) "Cả 2 lần bắn đều không trúng đích";

c) "Lần bắn thứ nhất trúng đích, lần bắn thứ hai không trúng đích".

5. Một bệnh truyền nhiễm có xác suất truyền bệnh là 0,8 nếu tiếp xúc với người bệnh mà không đeo khẩu trang; là 0,1 nếu tiếp xúc với người bệnh mà có đeo khẩu trang. Anh Lâm tiếp xúc với 1 người bệnh hai lần, trong đó có một lần đeo khẩu trang và một lần không đeo khẩu trang. Tính xác suất anh Lâm bị lây bệnh từ người bệnh mà anh tiếp xúc đó.

Bài 2. Biến cố hợp và quy tắc cộng xác suất

Từ khoá: Biến cố hợp; Quy tắc cộng xác suất.

Tỉ lệ nảy mầm của một loại hạt giống là 0,8. Gieo 2 hạt giống một cách độc lập với nhau. Tính xác suất có đúng 1 trong 2 hạt giống đó nảy mầm.

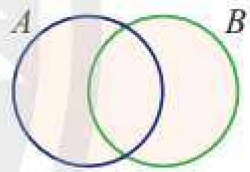
1. Biến cố hợp

1 Trong hộp có 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên lần lượt 2 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố "Thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số chẵn"; B là biến cố "Thẻ lấy ra lần thứ hai ghi số chẵn" và C là biến cố "Tích các số ghi trên hai thẻ lấy ra là số chẵn".

Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố trên.

Ta thấy biến cố C xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra. Ta nói biến cố C là hợp của hai biến cố A và B, kí hiệu là $C = A \cup B$.

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là ***biến cố hợp*** của A và B.



Hình 1

Chú ý: Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra. Tập hợp mô tả biến cố $A \cup B$ là hợp của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B.

Ví dụ 1. Một hộp chứa 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Gọi A là biến cố "Hai viên bi lấy ra đều có màu xanh", B là biến cố "Hai viên bi lấy ra đều có màu đỏ".

a) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố A? Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố B?

b) Hãy mô tả bằng lời biến cố $A \cup B$ và tính số kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cup B$.

Giải

a) Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $C_5^2 = 10$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là $C_3^2 = 3$.

b) $A \cup B$ là biến cố "Hai viên bi lấy ra có cùng màu". Số kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cup B$ là $C_5^2 + C_3^2 = 13$.

Ví dụ 2. Thực hiện hai thí nghiệm. Gọi T_1 và T_2 lần lượt là các biến cố "Thí nghiệm thứ nhất thành công" và "Thí nghiệm thứ hai thành công". Hãy biểu diễn các biến cố sau theo hai biến cố T_1 và T_2.

a) A: "Có ít nhất một trong hai thí nghiệm thành công";

b) B: "Có đúng một trong hai thí nghiệm thành công".

Giải

a) $A = T_1 \cup T_2$;

b) $B = \overline{T_1}T_2 \cup T_1\overline{T_2}$.

1 Một lớp học có 15 học sinh nam và 17 học sinh nữ. Chọn ra ngẫu nhiên 3 học sinh của lớp. Gọi A là biến cố "Cả 3 học sinh được chọn đều là nữ", B là biến cố "Có 2 học sinh nữ trong 3 học sinh được chọn".

a) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố A? Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố B?

b) Hãy mô tả bằng lời biến cố $A \cup B$ và tính số kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cup B$.

2. Quy tắc cộng xác suất

Quy tắc cộng cho hai biến cố xung khắc

2 Cho hai biến cố xung khắc A và B. Có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố A và 12 kết quả thuận lợi cho biến cố B. Hãy so sánh $P(A \cup B)$ với $P(A) + P(B)$.

Để tính xác suất của biến cố hợp hai biến cố xung khắc, ta sử dụng ***quy tắc*** sau:

Cho hai biến cố xung khắc A và B. Khi đó

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Ví dụ 3. Một đội tình nguyện gồm 9 học sinh khối 10 và 7 học sinh khối 11. Chọn ra ngẫu nhiên 3 người trong đội. Tính xác suất của biến cố "Cả 3 người được chọn học cùng một khối".

Giải

Gọi A là biến cố "Cả 3 học sinh được chọn đều thuộc khối 10" và B là biến cố "Cả 3 học sinh được chọn đều thuộc khối 11". Khi đó $A \cup B$ là biến cố "Cả 3 người được chọn học cùng một khối". Do A và B là hai biến cố xung khắc nên $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ta thấy $P(A) = \dfrac{C_9^3}{C_{16}^3}$ và $P(B) = \dfrac{C_7^3}{C_{16}^3}$, nên $P(A \cup B) = \dfrac{C_9^3 + C_7^3}{C_{16}^3} = \dfrac{17}{80}$.

Ví dụ 4. Ở lúa, hạt gạo đục là tính trạng trội hoàn toàn so với hạt gạo trong. Cho cây lúa có hạt gạo đục thuần chủng thụ phấn với cây lúa có hạt gạo trong được F1 toàn hạt gạo đục. Tiếp tục cho các cây lúa F1 thụ phấn với nhau và thu được các hạt gạo mới. Lần lượt chọn ra ngẫu nhiên 2 hạt gạo mới, tính xác suất của biến cố "Có đúng 1 hạt gạo đục trong 2 hạt gạo được lấy ra".

Giải

Quy ước gene A: hạt gạo đục và gene a: hạt gạo trong. Ở thế hệ F2, ba kiểu gene AA, Aa, aa xuất hiện với tỉ lệ 1: 2: 1 nên tỉ lệ hạt gạo đục so với hạt gạo trong là 3: 1.

Gọi A_1, A_2 lần lượt là biến cố "Hạt gạo lấy ra lần thứ nhất là hạt gạo đục" và biến cố "Hạt gạo lấy ra lần thứ hai là hạt gạo đục".

Ta có A_1, A_2 là hai biến cố độc lập và $P(A_1) = P(A_2) = \frac{3}{4}$. Xác suất của biến cố "Có đúng 1 hạt gạo đục trong 2 hạt gạo được lấy ra" là

$$P(A_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1A_2) = P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1A_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

Hãy trả lời câu hỏi ở ▶.

Quy tắc cộng cho hai biến cố bất kì

Rút ngẫu nhiên 1 lá bài từ bộ bài tây 52 lá. Tính xác suất của biến cố "Lá bài được chọn có màu đỏ hoặc là lá có số chia hết cho 5".

Với hai biến cố A, B bất kì, ta có công thức cộng tổng quát như sau:

Cho hai biến cố A và B. Khi đó

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Ví dụ 5. Một hộp chứa 100 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 100. Chọn ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Tính xác suất của biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3 hoặc 5".

Giải

Gọi A là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3" và B là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 5".

$A \cup B$ là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3 hoặc 5".

Từ 1 đến 100 có 33 số chia hết cho 3 nên $P(A) = \frac{33}{100} = 0{,}33$.

Từ 1 đến 100 có 20 số chia hết cho 5 nên $P(B) = \frac{20}{100} = 0{,}2$.

Một số chia hết cho cả 3 và 5 khi nó chia hết cho 15. Từ 1 đến 100 có 6 số chia hết cho 15 nên

$$P(AB) = \frac{6}{100} = 0,06.$$

Vậy $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,33 + 0,2 - 0,06 = 0,47$.

Cho hai biến cố A và B độc lập với nhau. Biết $P(A) = 0,9$ và $P(B) = 0,6$. Hãy tính xác suất của biến cố $A \cup B$.

Khảo sát một trường trung học phổ thông, người ta thấy có 20% học sinh thuận tay trái và 35% học sinh bị cận thị. Giả sử đặc điểm thuận tay nào không ảnh hưởng đến việc học sinh có bị cận thị hay không. Gặp ngẫu nhiên một học sinh của trường. Tính xác suất của biến cố học sinh đó bị cận thị hoặc thuận tay trái.

BÀI TẬP

1. Một hộp chứa 5 quả bóng xanh, 6 quả bóng đỏ và 2 quả bóng vàng có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên từ hộp 3 quả bóng. Tính xác suất của các biến cố:

   a) "Cả 3 quả bóng lấy ra đều có cùng màu";

   b) "Có ít nhất 2 quả bóng xanh trong 3 quả bóng lấy ra".

2. Trên đường đi từ Hà Nội về thăm Đền Hùng ở Phú Thọ, Bình, Minh và 5 bạn khác ngồi vào 7 chiếc ghế trên một xe ô tô 7 chỗ. Khi xe quay lại Hà Nội, mỗi bạn lại chọn ngồi ngẫu nhiên một ghế. Tính xác suất của biến cố "Có ít nhất một trong hai bạn Bình và Minh vẫn ngồi đúng ghế cũ của mình".

3. Cho hai biến cố A và B độc lập với nhau.

   a) Biết $P(A) = 0,3$ và $P(AB) = 0,2$. Tính xác suất của biến cố $A \cup B$.

   b) Biết $P(B) = 0,5$ và $P(A \cup B) = 0,7$. Tính xác suất của biến cố A.

4. Lan gieo một đồng xu không cân đối 3 lần độc lập với nhau. Biết xác suất xuất hiện mặt sấp trong mỗi lần gieo đều bằng 0,4. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của biến cố "Có đúng 1 lần gieo được mặt sấp trong 3 lần gieo".

5. Một hộp chứa 50 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 50. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

   a) A: "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra là số chẵn";

   b) B: "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 4".

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "Tích số chấm xuất hiện là số lẻ". Biến cố nào sau đây xung khắc với biến cố A?

A. "Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm".

B. "Tổng số chấm xuất hiện là số lẻ".

C. "Xuất hiện ít nhất một mặt có số chấm là số lẻ".

D. "Xuất hiện hai mặt có số chấm khác nhau".

2. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,4$ và $P(B) = 0,5$. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

A. 0,9. B. 0,7. C. 0,5. D. 0,2.

3. Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 5" là

A. $\frac{5}{36}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{7}{36}$. D. $\frac{2}{9}$.

4. Lấy ra ngẫu nhiên 2 quả bóng từ một hộp chứa 5 quả bóng xanh và 4 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Xác suất của biến cố "Hai bóng lấy ra có cùng màu" là

A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{2}{9}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{5}{9}$.

5. Chọn ngẫu nhiên 2 đỉnh của một hình bát giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Xác suất để khoảng cách giữa hai đỉnh đó bằng $R\sqrt{2}$ là

A. $\frac{2}{7}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{4}{7}$. D. $\frac{5}{56}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

6. Cho A và B là hai biến cố thoả mãn $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,7$ và $P(A \cup B) = 0,8$.

a) Tính xác suất của các biến cố AB, $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$.

b) Hai biến cố A và B có độc lập hay không?

7. Vệ tinh A lần lượt truyền một tin đến vệ tinh B cho đến khi vệ tinh B phản hồi là đã nhận được. Biết khả năng vệ tinh B phản hồi đã nhận được tin ở mỗi lần A gửi là độc lập với nhau và xác suất phản hồi mỗi lần đều là 0,4. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất vệ tinh A phải gửi tin không quá 3 lần.

8. Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 6".

9. Một hộp có 5 quả bóng xanh, 6 quả bóng đỏ và 4 quả bóng vàng có kích thước và khối lượng như nhau. Chọn ra ngẫu nhiên từ hộp 4 quả bóng. Tính xác suất của các biến cố:

A: "Cả 4 quả bóng lấy ra có cùng màu";

B: "Trong 4 bóng lấy ra có đủ cả 3 màu".

10. Cường, Trọng và 6 bạn nữ xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang để chụp ảnh. Tính xác suất của biến cố "Có ít nhất một trong hai bạn Cường và Trọng đứng ở đầu hàng".

11. Chọn ngẫu nhiên 3 trong số 24 đỉnh của một đa giác đều 24 cạnh. Tính xác suất của biến cố "3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác cân hoặc một tam giác vuông".

12. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Tính xác suất của các biến cố:

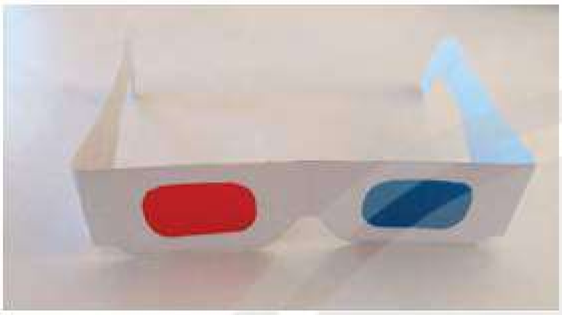
A: "Số được chọn chia hết cho 2 hoặc 7";

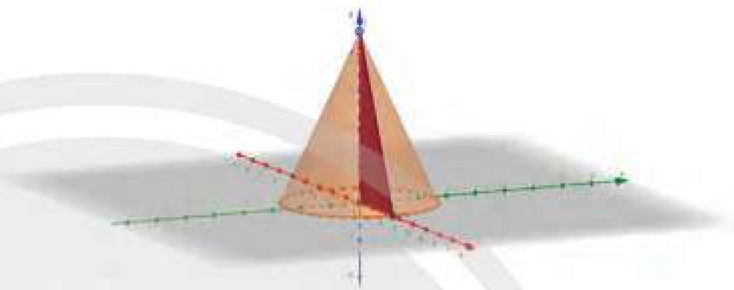
B: "Số được chọn có tổng các chữ số là số chẵn".

13. Cho hai giống cá kiếm mắt đen thuần chủng và mắt đỏ thuần chủng giao phối với nhau được F1 toàn cá kiếm mắt đen. Lại cho cá F1 giao phối với nhau được một đàn cá con mới. Chọn ra ngẫu nhiên 2 con trong đàn cá con mới. Ước lượng xác suất của biến cố "Có ít nhất 1 con cá mắt đen trong 2 con cá đó".

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Bài 1. Vẽ hình khối bằng phần mềm GeoGebra. Làm kính 3D để quan sát ảnh nổi





MỤC ĐÍCH

– Thực hành vẽ các hình khối đã học bằng phần mềm GeoGebra.

– Vận dụng kiến thức liên môn Toán – Vật lí – Sinh học để làm kính 3D quan sát ảnh nổi ba chiều của các hình khối vẽ được trên màn hình bằng phần mềm GeoGebra.

– Phát huy trí tưởng tượng không gian và năng lực sử dụng các công cụ toán.

CHUẨN BỊ

– Sách giáo khoa Toán 11, tập hai – bộ sách Chân trời sáng tạo.

– Máy tính để bàn hoặc máy tính xách tay có cài phần mềm GeoGebra.

– Giấy bìa cứng, giấy bóng kiếng hai màu xanh dương và đỏ, viết chì, thước kẻ, kéo, hồ dán.

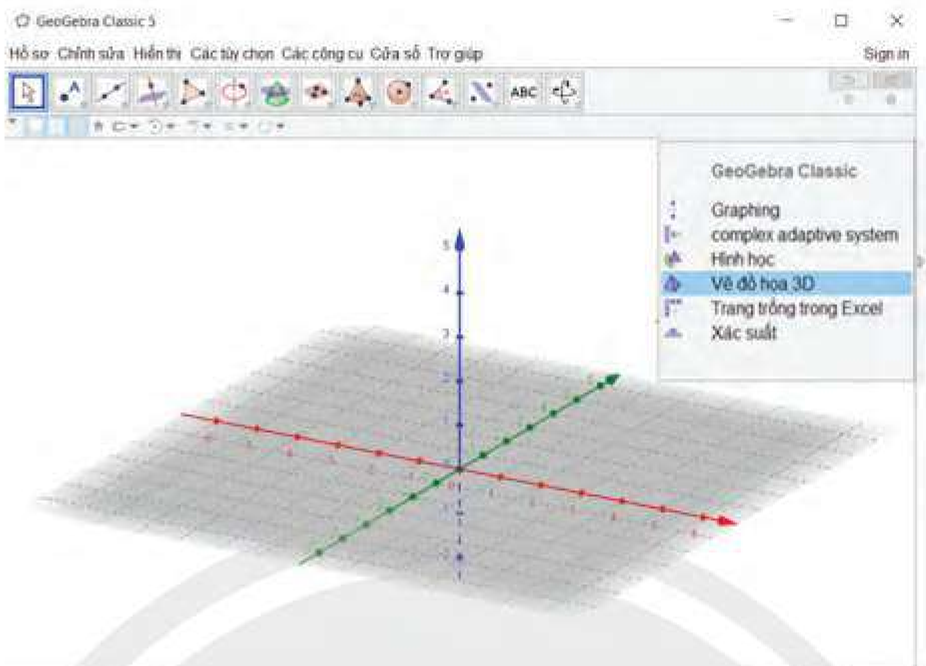
TỔ CHỨC HOẠT ĐỘNG

Chia lớp thành các nhóm, mỗi nhóm từ 4 đến 8 học sinh.

Nhóm trưởng phân công các thành viên trong nhóm thực hiện công việc theo các hoạt động sau:

HOẠT ĐỘNG 1. Vẽ các khối quen thuộc bằng phần mềm GeoGebra

1. Khởi động phần mềm GeoGebra, chọn chế độ **Vẽ đồ hoạ 3D** với giao diện là một mặt phẳng nền để vẽ đáy các khối (Hình 1).

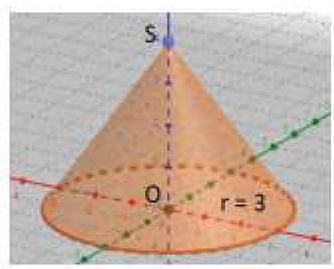


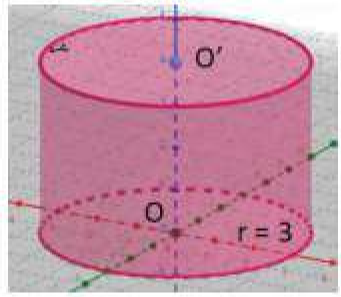
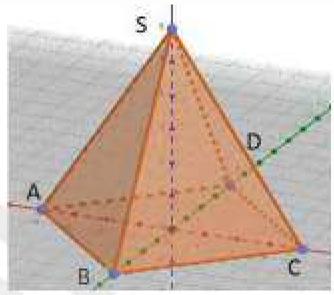
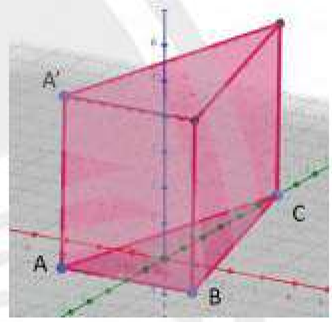
Hình 1

2. Chọn công cụ vẽ khối:  rồi chọn khối muốn vẽ (Hình 2).

Hình 2

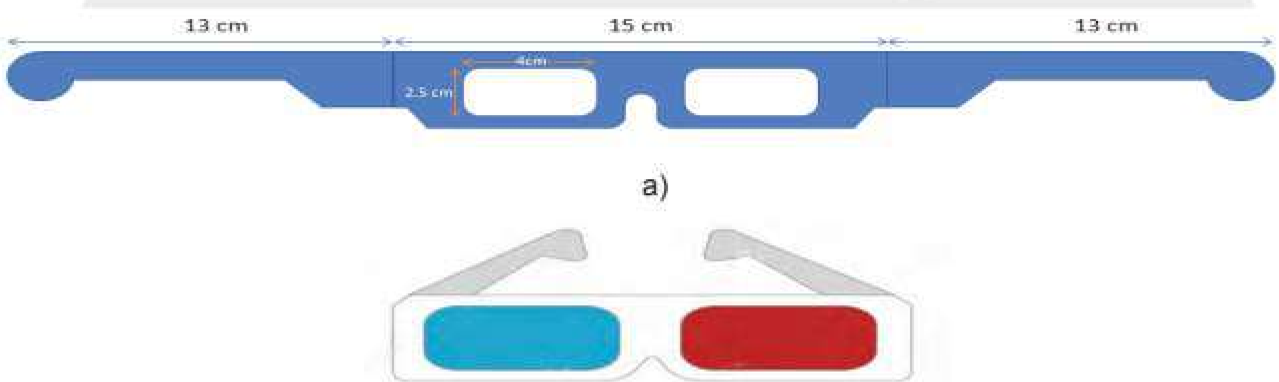
3. Vẽ các khối đã học theo hướng dẫn sau:

Vẽ khối	Thao tác theo thứ tự	Hình vẽ được
Khối nón tròn xoay	– Chọn điểm O là tâm đường tròn đáy. – Chọn điểm S là đỉnh. – Nhập độ dài bán kính đáy r trong hộp thoại. Ví dụ $r = 3$. – Bấm OK để vẽ.	 *Hình 3*

Khối trụ tròn xoay	– Chọn điểm O là tâm đường tròn đáy dưới. – Chọn điểm O' là tâm đường tròn đáy trên. – Nhập độ dài bán kính đáy r trong hộp thoại. Ví dụ: $r = 3$. – Bấm OK để vẽ.	 *Hình 4*
Khối chóp	– Chọn các đỉnh để vẽ đa giác đáy. Lưu ý: Phải chọn các đỉnh để được đường gấp khúc khép kín. Ví dụ: A, B, C, D, A. – Chọn đỉnh S của hình chóp. – Kéo chuột di chuyển S để chọn chiều cao cần thiết của khối.	 *Hình 5*
Khối lăng trụ	– Chọn các đỉnh để vẽ đa giác đáy dưới. Ví dụ: A, B, C, A. – Chọn một đỉnh A' của đa giác đáy trên. – Kéo chuột di chuyển A' để chọn chiều cao cần thiết của khối.	 *Hình 6*

HOẠT ĐỘNG 2. Làm kính 3D để xem ảnh nổi đã vẽ

1. Cắt giấy bìa hai lớp theo mẫu để làm hai khung kính giống nhau. Cắt giấy bóng kính hai màu khác nhau để làm hai mắt kính. Dán hai khung kính ép hai mắt kính ở giữa ta được kính 3D với hai mắt kính có hai màu khác nhau (Hình 7).



a)

b)

Hình 7

2. Các bạn thay phiên nhau đeo kính 3D vừa làm để quan sát màn hình và dùng chuột xoay khối vừa vẽ được để cảm nhận hình ảnh nổi của hình khối.

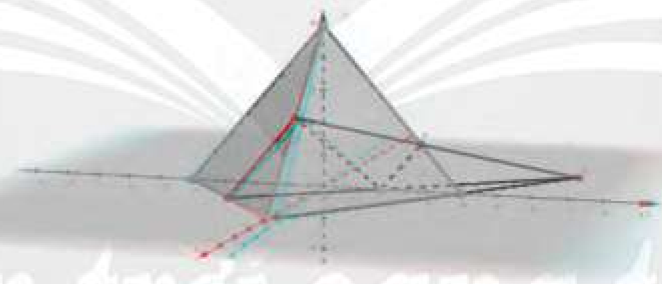
3. Các nhóm thay phiên nhau giới thiệu sản phẩm của nhóm cho các bạn còn lại quan sát bằng kính 3D.

Hình 8

4. GV chỉ định một vài nhóm dùng kiến thức liên môn (Toán – Vật lí – Sinh học) để giải thích nguyên lí của kính.

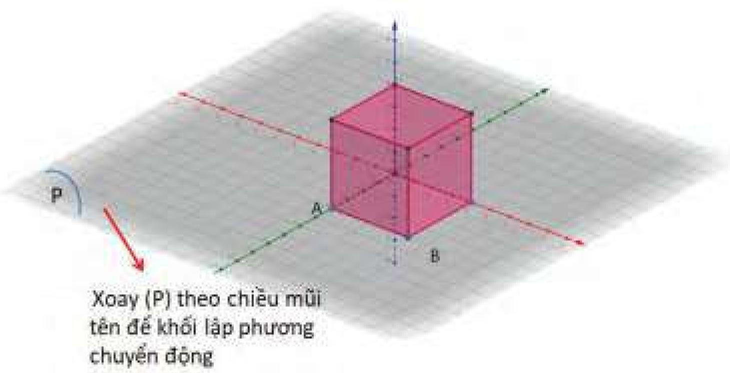
Chú ý:

– Có thể vẽ một vài hình biểu diễn một số bài toán hình học không gian mà lớp đã học để tăng tính trực quan của việc giải các bài tập.



Hình 9

– Có thể dùng chuột xoay mặt phẳng đáy để có hình 3D chuyển động.



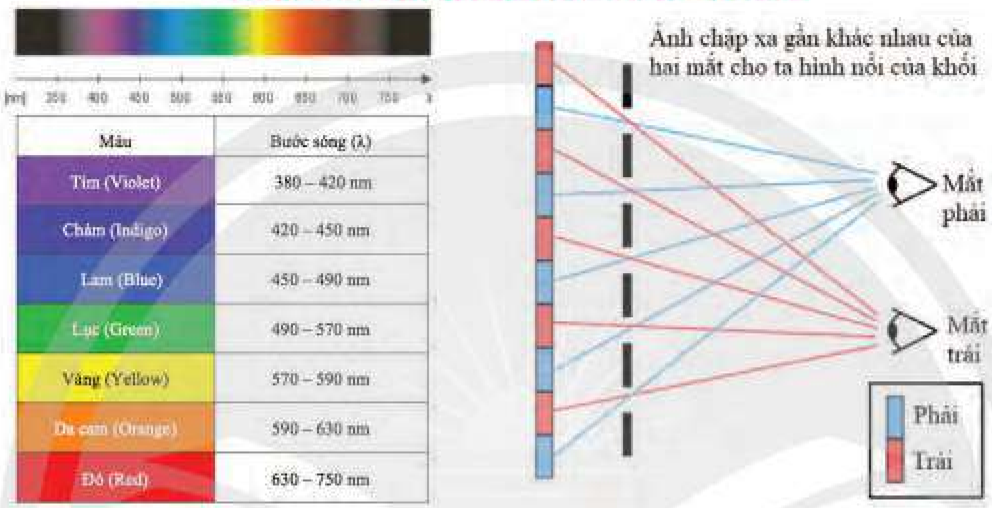
Hình 10

– GV khuyến khích học sinh truy cập Internet để tìm hiểu nguyên lí của kính 3D.

Hình 11

Ví dụ:

GIẢI THÍCH NGUYÊN LÍ CỦA KÍNH 3D



a) b)

Hình 12

– Trong các môi trường khác nhau, ánh sáng có bước sóng khác nhau sẽ có vận tốc khác nhau. Bước sóng của ánh sáng đỏ (630 – 750 nm) lớn hơn bước sóng của ánh sáng xanh (490 – 570 nm) (Hình 12a) hay vận tốc của ánh sáng đỏ (có bước sóng 630 – 750 nm) lớn hơn vận tốc của ánh sáng xanh (có bước sóng 490 – 570 nm). Khi ta nhìn một hình ảnh bằng kính 3D R/B thì hình ảnh màu đỏ sẽ đến trước hình ảnh màu xanh nhưng độ lệch về thời gian là rất ít. Mắt của chúng ta có thể lưu hình ảnh trong khoảng 0 đến 0,08 s nên mắt sẽ nhìn được đồng thời cả hai hình ảnh và tổng hợp lại ta được hình ảnh nổi.

(*Nguồn:* https://en.wikipedia.org/wiki/Polarized_3D_system)

Bài 2. Ứng dụng lôgarit vào đo lường độ pH của dung dịch

MỤC ĐÍCH

– Vận dụng kiến thức lôgarit vào các hoạt động thực tiễn liên môn Toán – Hoá học – Sinh học.

– Phát huy năng lực giao tiếp toán học và năng lực sử dụng các công cụ toán.

– Tạo cơ hội trải nghiệm, thực hành, ôn tập và củng cố các tính chất và phép toán lôgarit.

CHUẨN BỊ

– Sách giáo khoa Toán 11, tập hai – bộ sách Chân trời sáng tạo.

– Máy tính để bàn hoặc máy tính xách tay có kết nối Internet.

TỔ CHỨC HOẠT ĐỘNG

Chia lớp thành các nhóm, mỗi nhóm từ 4 đến 8 học sinh.

Nhóm trưởng phân công các thành viên trong nhóm thực hiện công việc theo các hoạt động sau:

HOẠT ĐỘNG 1. Tìm hiểu công thức tính độ pH

Số đo độ pH sinh ra từ định nghĩa dựa trên độ hoạt động của các ion hydro trong dung dịch.

Công thức để tính độ pH là: **$\mathrm{pH} = -\log[H^+]$**.

Suy ra công thức tính $[H^+]$ là: **$[H^+] = 10^{-\mathrm{pH}}$**.

Trong đó: $[H^+]$ biểu thị nồng độ H^+ (ion hydro) tính bằng mol/L, $\log_{10}$ biểu thị lôgarit cơ số 10, pH vì thế được định nghĩa là thang đo lôgarit của tính acid.

Ví dụ: Một dung dịch có pH = 8,2 sẽ có nồng độ $[H^+]$ là $10^{-8,2}$ mol/L, hay khoảng $6,31 \cdot 10^{-9}$ mol/L; một dung dịch có nồng độ $[H^+]$ là $4,5 \cdot 10^{-4}$ mol/L sẽ có độ pH là $-\log(4,5 \cdot 10^{-4})$, hay khoảng 3,35.

Một số giá trị pH phổ biến

Chất	pH
Axit ắc quy	< 1
Nước thoát ra từ các mô	0,5 – 1,0
Dịch vị dạ dày	2,0
Nước chanh	2,4
Cola	2,5
Dấm	2,9
Nước cam hay táo	3,5
Bia	4,5
Cà phê	5,0
Nước chè	5,5
Mưa axit	< 5,6
Sữa	6,5
Nước tinh khiết	7,0
Nước bọt của người khỏe mạnh	6,5 – 7,4
Máu	7,34 – 7,45
Nước biển	8,0
Xà phòng	9,0 – 10,0
Amonia dùng trong gia đình	11,5
Chất tẩy	12,5
Thuốc giặt quần áo	13,5

Hình 1

Hình 1 cho biết độ pH của một số dung dịch thông dụng. Tính độ pH và nồng độ $[H^+]$ tương ứng của các dung dịch sau:

a) Nước chanh; b) Dấm; c) Cà phê;

d) Nước tinh khiết; e) Nước bọt của người khoẻ mạnh;

g) Nước biển; h) Sữa; i) Xà phòng.

HOẠT ĐỘNG 2. Tìm hiểu ứng dụng của việc đo độ pH

Ví dụ 1: Độ chua, độ kiềm của đất được đo bằng độ pH. Đất thường có độ pH từ 3 đến 9. Căn cứ vào độ pH, người ta chia đất thành: đất chua (pH < 6,5), đất trung tính (pH từ 6,5 đến 7,5) và đất kiềm (pH > 7,5). Cây trồng không thể hấp thụ được dưỡng chất nếu độ pH của đất quá cao hoặc quá thấp. Người ta xác định đất chua, đất kiềm và đất trung tính để có kế hoạch cải tạo và sử dụng.

Hình 2

Ví dụ 2: Màu sắc của một số loài hoa cẩm tú cầu có thể thay đổi tuỳ theo độ pH của đất. Trong đất chua thì hoa có màu xanh, còn trong đất kiềm thì hoa có màu hồng hoặc đỏ.

Hình 3

(*Theo:* Britannica)

Sưu tầm các ứng dụng khác của việc đo độ pH trong cuộc sống.

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

B

Bất phương trình lôgarit
Bất phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

Bất phương trình mũ
Bất phương trình có chứa ẩn số ở số mũ của luỹ thừa.

Biến cố độc lập
Hai biến cố A và B là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Biến cố giao
Biến cố giao của hai biến cố A và B là biến cố "Cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu AB.

Biến cố hợp
Biến cố hợp của hai biến cố A và B là biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu $A \cup B$.

C

Căn bậc *n*
Căn bậc n (n là số nguyên dương) của số thực b là số thực a (nếu có) sao cho $a^n = b$.

Đ

Đạo hàm
Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 cho biết tốc độ thay đổi của hàm số này tại điểm đó, và được xác định bằng công thức

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

khi giới hạn này tồn tại và hữu hạn.

Đạo hàm cấp hai
Đạo hàm cấp hai của một hàm số là đạo hàm của đạo hàm của hàm số đó.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng
Đường thẳng vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

Đường vuông góc chung
Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đường thẳng vừa vuông góc vừa cắt hai đường thẳng đó.

G

Góc giữa hai đường thẳng trong không gian
Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau, lần lượt song song hoặc trùng với hai đường thẳng đó.

Góc giữa hai mặt phẳng
Góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Góc nhị diện
Là phần không gian giới hạn bởi hai nửa mặt phẳng có chung bờ. Hai nửa mặt phẳng gọi là hai mặt, bờ chung gọi là cạnh của góc nhị diện.

H

Hai biến cố xung khắc
Hai biến cố không thể đồng thời xảy ra.

Hai đường thẳng vuông góc trong không gian
Hai đường thẳng có góc giữa chúng bằng 90°.

Hai mặt phẳng vuông góc
Hai mặt phẳng có góc giữa chúng bằng 90°.

Hàm số lôgarit
Hàm số $y = \log_a x$ với cơ số a dương khác 1.

Hàm số mũ
Hàm số $y = a^x$ với cơ số a dương khác 1.

Hình chóp đều
Hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Hình hộp đứng
Hình hộp có cạnh bên vuông góc với đáy.

Hình lăng trụ đứng
Hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy.

Hình lăng trụ đều
Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

L

Lôgarit
Lôgarit cơ số a của b là số thực α thoả mãn $a^\alpha = b$, kí hiệu $\log_a b$, với a, b hai số thực dương và $a \neq 1$.

P

Phép chiếu vuông góc
Phép chiếu song song có phương chiếu vuông góc với mặt phẳng chiếu.

Phương trình lôgarit
Phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

Phương trình mũ
Phương trình có chứa ẩn số ở số mũ của luỹ thừa.

Q

Quy tắc cộng xác suất
Nếu A và B là hai biến cố bất kì thì
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Quy tắc nhân xác suất
Nếu A và B là hai biến cố độc lập với nhau thì
$P(AB) = P(A) \,.\, P(B)$.

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: TRẦN THANH HÀ – ĐẶNG THỊ THUÝ – NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ
Biên tập mĩ thuật: BÙI XUÂN DƯƠNG
Thiết kế sách: BÙI XUÂN DƯƠNG
Trình bày bìa: TỐNG THANH THẢO
Minh hoạ: BÙI XUÂN DƯƠNG
Sửa bản in: TRẦN THANH HÀ – ĐẶNG THỊ THUÝ – NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ
Chế bản: CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

Toán 11, tập hai (Chân trời sáng tạo)
Mã số:
In.........bản, (QĐ in số....) Khổ 19 × 26,5 cm.
Đơn vị in:..........................
Cơ sở in:..........................
Số ĐKXB:
Số QĐXB:......... ngày.... tháng.... năm 20....
In xong và nộp lưu chiểu tháng.... năm 20....
Mã số ISBN: Tập 1:
Tập 2:

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 11 – CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

1. Toán 11, Tập một
2. Toán 11, Tập hai
3. Chuyên đề học tập Toán 11
4. Ngữ văn 11, Tập một
5. Ngữ văn 11, Tập hai
6. Chuyên đề học tập Ngữ văn 11
7. Tiếng Anh 11
   Friends Global - Student Book
8. Lịch sử 11
9. Chuyên đề học tập Lịch sử 11
10. Địa lí 11
11. Chuyên đề học tập Địa lí 11
12. Giáo dục kinh tế và pháp luật 11
13. Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 11
14. Vật lí 11
15. Chuyên đề học tập Vật lí 11
16. Hoá học 11
17. Chuyên đề học tập Hoá học 11
18. Sinh học 11
19. Chuyên đề học tập Sinh học 11
20. Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng
21. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng
22. Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính
23. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính
24. Âm nhạc 11
25. Chuyên đề học tập Âm nhạc 11
26. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11 (1)
27. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11 (2)
28. Giáo dục quốc phòng và an ninh 11

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.