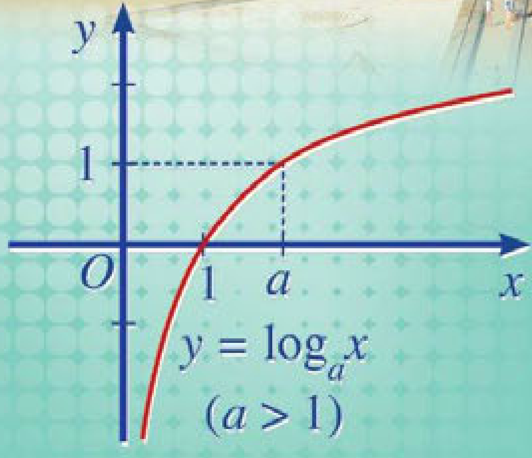
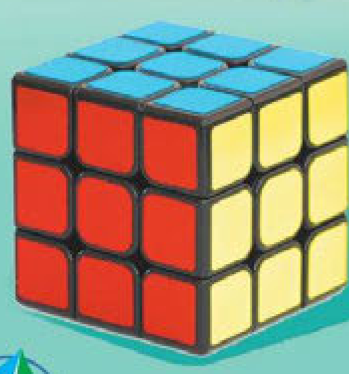
ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

Toán 11

TẬP HAI

BẢN MẪU





NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN - THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA
Môn: Toán – Lớp 11

(Kèm theo Quyết định số 2026/QĐ-BGDĐT ngày 21 tháng 7 năm 2022 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Họ và tên	Chức vụ Hội đồng
Ông Lê Mậu Hải	Chủ tịch
Bà Cao Thị Hà	Phó Chủ tịch
Ông Phạm Đức Tài	Uỷ viên, Thư kí
Ông Phạm Khắc Ban	Uỷ viên
Ông Nguyễn Hắc Hải	Uỷ viên
Ông Nguyễn Doãn Phú	Uỷ viên
Ông Nguyễn Chiến Thắng	Uỷ viên
Bà Nguyễn Thị Vĩnh Thuyên	Uỷ viên
Ông Đinh Cao Thượng	Uỷ viên
Bà Vũ Thị Như Trang	Uỷ viên
Ông Phạm Đình Tùng	Uỷ viên

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

Toán 11

TẬP HAI

(Sách đã được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo phê duyệt sử dụng trong cơ sở giáo dục phổ thông tại Quyết định số 4607/QĐ-BGDĐT ngày 28/12/2022)

BẢN MẪU

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

MỤC LỤC

CHƯƠNG V MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm; biến cố hợp và biến cố giao, biến cố độc lập, các quy tắc tính xác suất; tính được xác suất của biến cố trong một số bài toán đơn giản.

§1 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Một cuộc khảo sát đã tiến hành xác định tuổi (theo năm) của 120 chiếc ô tô. Kết quả điều tra được cho trong *Bảng 1*.

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Nhóm	Tần số
[0 ; 4)	13
[4 ; 8)	29
[8 ; 12)	48
[12 ; 16)	22
[16 ; 20)	8
	$n = 120$

Bảng 1

Tìm các số đặc trưng đo xu thế trung tâm (số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị, mốt) cho mẫu số liệu ghép nhóm đó như thế nào cho thuận lợi?

I. MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Bảng tần số ghép nhóm

1 Trong *Bảng 1* ở phần mở đầu, ta thấy:

Có 13 ô tô có độ tuổi dưới 4;

Có 29 ô tô có độ tuổi từ 4 đến dưới 8.

Hãy xác định số ô tô có độ tuổi:

a) Từ 8 đến dưới 12;

b) Từ 12 đến dưới 16;

c) Từ 16 đến dưới 20.

• *Mẫu số liệu ghép nhóm* là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm.

• Mỗi nhóm số liệu gồm một số giá trị của mẫu số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định có dạng $[a ; b)$, trong đó a là *đầu mút trái*, b là *đầu mút phải*. Độ dài nhóm là $b - a$.

• *Tần số* của một nhóm là số số liệu trong mẫu số liệu thuộc vào nhóm đó. Tần số của nhóm 1, nhóm 2, ..., nhóm m kí hiệu lần lượt là $n_1, n_2, ..., n_m$.

• *Bảng tần số ghép nhóm* được lập như ở *Bảng 2*, trong đó mẫu số liệu gồm n số liệu được chia thành m nhóm ứng với m nửa khoảng $[a_1 ; a_2); [a_2 ; a_3); \ldots; [a_m ; a_{m+1})$, ở đó

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_m < a_{m+1} \text{ và } n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m.$$

Nhóm	Tần số
$[a_1 ; a_2)$	n_1
$[a_2 ; a_3)$	n_2
...	...
$[a_m ; a_{m+1})$	n_m
	n

Bảng 2

Ví dụ 1 *Bảng 3* biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm. Hãy cho biết:

a) Mẫu số liệu đó có bao nhiêu số liệu; bao nhiêu nhóm;

b) Tần số của mỗi nhóm.

Nhóm	Tần số
[0 ; 5)	11
[5 ; 10)	31
[10 ; 15)	45
[15 ; 20)	21
[20 ; 26)	12
	$n = 120$

Bảng 3

Giải

Từ *Bảng 3*, ta thấy:

a) Mẫu số liệu đó gồm 120 số liệu và 5 nhóm.

b) Tần số của các nhóm 1, 2, 3, 4, 5 lần lượt là: 11, 31, 45, 21, 12.

1 Mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 1* có bao nhiêu số liệu? Bao nhiêu nhóm? Tìm tần số của mỗi nhóm.

2. Ghép nhóm mẫu số liệu. Tần số tích luỹ

2 Một trường trung học phổ thông chọn 36 học sinh nam của khối lớp 11, đo chiều cao của các bạn học sinh đó và thu được mẫu số liệu sau (đơn vị: centimét):

160	161	161	162	162	162	163	163	163	164	164	164
164	165	165	165	165	165	166	166	166	166	167	167
168	168	168	168	169	169	170	171	171	172	172	174

Từ mẫu số liệu không ghép nhóm trên, hãy ghép các số liệu thành năm nhóm theo các nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm thành mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện như sau:

- Chia miền giá trị của mẫu số liệu thành một số nhóm theo tiêu chí cho trước.
- Đếm số giá trị của mẫu số liệu thuộc mỗi nhóm (tần số) và lập bảng tần số ghép nhóm.

Chú ý: Khi ghép nhóm số liệu, ta thường phân chia các nhóm có độ dài bằng nhau và đầu mút của các nhóm có thể không phải là giá trị của mẫu số liệu. Nhóm cuối cùng có thể là $[a_m ; a_{m+1}]$

Ví dụ 2 Trong bài toán ở Hoạt động 2, lập bảng tần số ghép nhóm có năm nhóm ứng với năm nửa khoảng:

$$[160 ; 163), [163 ; 166), [166 ; 169), [169 ; 172), [172 ; 175).$$

Giải

Bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	Tần số
[160 ; 163)	6
[163 ; 166)	12
[166 ; 169)	10
[169 ; 172)	5
[172 ; 175)	3
	$n = 36$

Bảng 4

2 Một thư viện thống kê số người đến đọc sách vào buổi tối trong 30 ngày của tháng vừa qua như sau:

85	81	65	58	47	30	51	92	85	42
55	37	31	82	63	33	44	93	77	57
44	74	63	67	46	73	52	53	47	35

Lập bảng tần số ghép nhóm có tám nhóm ứng với tám nửa khoảng sau: [25 ; 34); [34 ; 43); [43 ; 52); [52 ; 61); [61 ; 70); [70 ; 79); [79 ; 88); [88 ; 97).

3 Trong *Bảng 4*, có bao nhiêu số liệu với giá trị không vượt quá giá trị đầu mút phải:

a) 163 của nhóm 1? b) 166 của nhóm 2? c) 169 của nhóm 3?

d) 172 của nhóm 4? e) 175 của nhóm 5?

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho mẫu số liệu gồm n số liệu được ghép nhóm như ở *Bảng 2*.

• *Tần số tích luỹ* của một nhóm là số số liệu trong mẫu số liệu có giá trị nhỏ hơn giá trị đầu mút phải của nhóm đó. Tần số tích luỹ của nhóm 1, nhóm 2, ..., nhóm m kí hiệu lần lượt là $cf_1, cf_2, ..., cf_m$.

• Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ được lập như ở *Bảng 5*.

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
$[a_1 ; a_2)$	n_1	$cf_1 = n_1$
$[a_2 ; a_3)$	n_2	$cf_2 = n_1 + n_2$
...	...	...
$[a_m ; a_{m+1})$	n_m	$cf_m = n_1 + n_2 + ... + n_m$
	n	

Bảng 5

Ví dụ 3 Trong bài toán ở Hoạt động 2, lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ có năm nhóm ứng với năm nửa khoảng: [160 ; 163), [163 ; 166), [166 ; 169), [169 ; 172), [172 ; 175).

Giải

Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ như ở *Bảng 6*:

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[160 ; 162]	6	6
[163 ; 165]	12	18
[166 ; 168]	10	28
[169 ; 171]	5	33
[172 ; 174]	3	36
	$n = 36$	

Bảng 6

3 Trong bài toán ở Luyện tập 2, lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ có tám nhóm ứng với tám nửa khoảng: [25 ; 34), [34 ; 43), [43 ; 52), [52 ; 61), [61 ; 70), [70 ; 79), [79 ; 88), [88 ; 97).

II. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG (SỐ TRUNG BÌNH)

1. Định nghĩa

4 Xét mẫu số liệu trong *Ví dụ 2* được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm (*Bảng 7*).

a) Tìm trung điểm x_1 của nửa khoảng (tính bằng trung bình cộng của hai đầu mút) ứng với nhóm 1. Ta gọi trung điểm x_1 là *giá trị đại diện* của nhóm 1.

b) Bằng cách tương tự, hãy tìm giá trị đại diện của bốn nhóm còn lại. Từ đó, hãy hoàn thiện các số liệu trong *Bảng 7*.

c) Tính giá trị $\overline{x}$ cho bởi công thức sau:

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_5x_5}{n}.$$

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[40 ; 47)	$x_1 = ?$	$n_1 = ?$
[47 ; 54)	$x_2 = ?$	$n_2 = ?$
[54 ; 61)	$x_3 = ?$	$n_3 = ?$
[61 ; 68)	$x_4 = ?$	$n_4 = ?$
[68 ; 75)	$x_5 = ?$	$n_5 = ?$
		$n = ?$

Bảng 7

Giá trị $\overline{x}$ gọi là *số trung bình cộng* của mẫu số liệu đã cho.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 8*.

- Trung điểm x_i của nửa khoảng (tính bằng trung bình cộng của hai đầu mút) ứng với nhóm i là *giá trị đại diện* của nhóm đó.
- *Số trung bình cộng* của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\overline{x}$, được tính theo công thức:

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_mx_m}{n}.$$

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1 ; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2 ; a_3)$	x_2	n_2
...	...	...
$[a_m ; a_{m+1})$	x_m	n_m
		$n = n_1 + n_2 + ... + n_m$

Bảng 8

Ví dụ 4 Một nhà thực vật học đo chiều dài của 74 lá cây (đơn vị: milimét) và thu được bảng tần số như *Bảng 9*.

Tính chiều dài trung bình của 74 lá cây trên theo đơn vị milimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[5,45 ; 5,85)	5,65	5
[5,85 ; 6,25)	6,05	9
[6,25 ; 6,65)	6,45	15
[6,65 ; 7,05)	6,85	19
[7,05 ; 7,45)	7,25	16
[7,45 ; 7,85)	7,65	8
[7,85 ; 8,25)	8,05	2
		$n = 74$

Bảng 9

Giải

Chiều dài trung bình của 74 lá cây mà nhà thực vật học đo xấp xỉ là:

$$\overline{x} = \frac{5 \,.\, 5{,}65 + 9 \,.\, 6{,}05 + 15 \,.\, 6{,}45 + 19 \,.\, 6{,}85 + 16 \,.\, 7{,}25 + 8 \,.\, 7{,}65 + 2 \,.\, 8{,}05}{74}$$

$\approx 6{,}80$ (mm).

4 Xác định số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trong bài toán ở Luyện tập 2.

2. Ý nghĩa

Như ta đã biết, số trung bình cộng của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị trung bình cộng của các số trong mẫu số liệu đó, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình cộng.

Số trung bình cộng của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm *xấp xỉ* với số trung bình cộng của mẫu số liệu không ghép nhóm ban đầu và có thể làm đại diện cho vị trí trung tâm của mẫu số liệu.

III. TRUNG VỊ

1. Định nghĩa

5 Trong phòng thí nghiệm, người ta chia 99 mẫu vật thành năm nhóm căn cứ trên khối lượng của chúng (đơn vị: gam) và lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ như *Bảng 10*.

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[27,5 ; 32,5)	16	16
[32,5 ; 37,5)	24	40
[37,5 ; 42,5)	20	60
[42,5 ; 47,5)	30	90
[47,5 ; 52,5)	9	99
	$n = 99$	

Bảng 10

a) Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng

$$\frac{n}{2} = \frac{99}{2} = 49{,}5 \text{ có đúng không?}$$

b) Tìm đầu mút trái r, độ dài d, tần số n_3 của nhóm 3; tần số tích luỹ cf_2 của nhóm 2.

c) Tính giá trị M_e theo công thức sau: $M_e = r + \left(\frac{49{,}5 - cf_2}{n_3}\right) . d$.

Giá trị M_e được gọi là *trung vị* của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho mẫu số liệu ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ như ở *Bảng 5*.

Giả sử nhóm k là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2}$, tức là $cf_{k-1} < \frac{n}{2}$ nhưng $cf_k \geq \frac{n}{2}$. Ta gọi r, d, n_k lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm k; cf_{k-1} là tần số tích luỹ của nhóm $k - 1$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_e, được tính theo công thức sau:

$$M_e = r + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf_{k-1}}{n_k}\right).\, d.$$

Ví dụ 5 Sau khi điều tra về số học sinh trong 100 lớp học, người ta chia mẫu số liệu đó thành năm nhóm căn cứ vào số lượng học sinh của mỗi lớp (đơn vị: học sinh) và lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ như *Bảng 11*. Tìm trung vị của mẫu số liệu đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[36 ; 38)	9	9
[38 ; 40)	15	24
[40 ; 42)	25	49
[42 ; 44)	30	79
[44 ; 46)	21	100
	$n = 100$	

Bảng 11

Giải

Số phần tử của mẫu là $n = 100$. Ta có:

$$\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

mà $cf_3 = 49 < 50 < cf_4 = 79$. Suy ra nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 50.

Xét nhóm 4 là nhóm [42 ; 44) có $r = 42$; $d = 2$; $n_4 = 30$ và nhóm 3 là nhóm [40 ; 42) có $cf_3 = 49$.

Áp dụng công thức, ta có trung vị của mẫu số liệu là:

$$M_e = 42 + \left(\frac{50 - 49}{30}\right).\, 2 \approx 42 \text{ (học sinh).}$$

5 Xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 1*.

2. Ý nghĩa

Trung vị của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm *xấp xỉ* với trung vị của mẫu số liệu không ghép nhóm ban đầu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu đã cho.

IV. TỨ PHÂN VỊ

1. Định nghĩa

6 Giáo viên chủ nhiệm chia thời gian sử dụng Internet trong một ngày của 40 học sinh thành năm nhóm (đơn vị: phút) và lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ như *Bảng 12*.

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[0 ; 60)	6	6
[60 ; 120)	13	19
[120 ; 180)	13	32
[180 ; 240)	6	38
[240 ; 300)	2	40
	$n = 40$	

Bảng 12

a) Tìm trung vị M_e của mẫu số liệu ghép nhóm đó. Trung vị M_e còn gọi là *tứ phân vị thứ hai* Q_2 của mẫu số liệu trên.

b) • Nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng

$\frac{n}{4} = \frac{40}{4} = 10$ có đúng không?

• Tìm đầu mút trái s, độ dài h, tần số n_2 của nhóm 2; tần số tích luỹ cf_1 của nhóm 1.

Sau đó, hãy tính giá trị Q_1 theo công thức sau: $Q_1 = s + \left(\frac{10 - cf_1}{n_2}\right) . h$.

Giá trị nói trên được gọi là *tứ phân vị thứ nhất* Q_1 của mẫu số liệu đã cho.

c) • Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng

$$\frac{3n}{4} = \frac{3 . 40}{4} = 30 \text{ có đúng không?}$$

• Tìm đầu mút trái t, độ dài l, tần số n_3 của nhóm 3; tần số tích luỹ cf_2 của nhóm 2.

Sau đó, hãy tính giá trị Q_3 theo công thức sau: $Q_3 = t + \left(\frac{30 - cf_2}{n_3}\right) . l$.

Giá trị nói trên được gọi là *tứ phân vị thứ ba* Q_3 của mẫu số liệu đã cho.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho mẫu số liệu ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ như ở *Bảng 5*.

• Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm được xác định như sau:

Tứ phân vị thứ hai Q_2 bằng trung vị M_e.

• Giả sử nhóm p là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4}$, tức là $cf_{p-1} < \frac{n}{4}$ nhưng $cf_p \geq \frac{n}{4}$. Ta gọi s, h, n_p lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm p; cf_{p-1} là tần số tích luỹ của nhóm $p-1$.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 được tính theo công thức sau:

$$Q_1 = s + \left(\frac{\frac{n}{4} - cf_{p-1}}{n_p}\right).h.$$

• Giả sử nhóm q là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4}$, tức là $cf_{q-1} < \frac{3n}{4}$ nhưng $cf_q \geq \frac{3n}{4}$. Ta gọi t, l, n_q lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm q; cf_{q-1} là tần số tích luỹ của nhóm $q-1$.

Tứ phân vị thứ ba Q_3 được tính theo công thức sau:

$$Q_3 = t + \left(\frac{\frac{3n}{4} - cf_{q-1}}{n_q}\right).l.$$

Ví dụ 6 *Bảng 13* cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê cân nặng của 40 học sinh lớp 11A trong một trường trung học phổ thông (đơn vị: kilôgam). Xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[30 ; 40)	2	2
[40 ; 50)	10	12
[50 ; 60)	16	28
[60 ; 70)	8	36
[70 ; 80)	2	38
[80 ; 90)	2	40
	$n = 40$	

Bảng 13

Giải

Số phần tử của mẫu là $n = 40$.

• Ta có: $\frac{n}{4} = \frac{40}{4} = 10$ mà $2 < 10 < 12$. Suy ra nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 10. Xét nhóm 2 là nhóm [40 ; 50) có $s = 40$; $h = 10$; $n_2 = 10$ và nhóm 1 là nhóm [30 ; 40) có $cf_1 = 2$.

Áp dụng công thức, ta có tứ phân vị thứ nhất là:

$$Q_1 = 40 + \left(\frac{10-2}{10}\right).10 = 48 \text{ (kg)}.$$

• Ta có: $\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20$ mà $12 < 20 < 28$. Suy ra nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 20. Xét nhóm 3 là nhóm [50 ; 60) có $r = 50$; $d = 10$; $n_3 = 16$ và nhóm 2 là nhóm [40 ; 50) có $cf_2 = 12$.

Áp dụng công thức, ta có tứ phân vị thứ hai là:

$$Q_2 = M_e = 50 + \left(\frac{20-12}{16}\right).10 = 55 \text{ (kg)}.$$

• Ta có: $\frac{3n}{4} = \frac{3.40}{4} = 30$ mà $28 < 30 < 36$. Suy ra nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 30. Xét nhóm 3 là nhóm [60 ; 70) có $t = 60$; $l = 10$; $n_4 = 8$ và nhóm 3 là nhóm [50 ; 60) có $cf_3 = 28$.

Áp dụng công thức, ta có tứ phân vị thứ ba là:

$$Q_3 = 60 + \left(\frac{30-28}{8}\right).10 = 62,5 \text{ (kg)}.$$

Vậy tứ phân vị của mẫu số liệu trên là:

$Q_1 = 48$ (kg) ; $Q_2 = 55$ (kg); $Q_3 = 62,5$ (kg).

6 Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu trong *Bảng 1* (làm tròn các kết quả đến hàng phần mười).

2. Ý nghĩa

Như ta đã biết, đối với mẫu số liệu không ghép nhóm đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn, các điểm Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đó thành bốn phần, mỗi phần đều chứa 25% giá trị.

Bằng cách ghép nhóm mẫu số liệu và tính toán tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, ta nhận được ba giá trị mới cũng có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu đã cho.

Lưu ý rằng bộ ba giá trị Q_1, Q_2, Q_3 trong tứ phân vị của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm *xấp xỉ* với bộ ba giá trị trong tứ phân vị của mẫu số liệu không ghép nhóm ban đầu.

V. MỐT

1. Định nghĩa

7 Quan sát bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ ở *Ví dụ 6* và cho biết:

a) Nhóm nào có tần số lớn nhất;

b) Đầu mút trái và độ dài của nhóm có tần số lớn nhất bằng bao nhiêu.

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 2*.

Giả sử nhóm i là nhóm có tần số lớn nhất. Ta gọi u, g, n_i lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm i; n_{i-1}, n_{i+1} lần lượt là tần số của nhóm $i - 1$, nhóm $i + 1$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_o, được tính theo công thức sau:

$$M_o = u + \left(\frac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}}\right) . g.$$

Chú ý: • Khi $i = 0$ thì $n_0 = 0$; • Khi $i = m$ thì $n_{m+1} = 0$.

Ví dụ 7 Kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 11D như sau:

5	6	7	5	6	9	10	8	5	5	4	5	4	5	7	4	5	8	9	10
5	3	5	6	5	7	5	8	4	9	5	6	5	6	8	8	7	9	7	9

a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên có bốn nhóm ứng với bốn nửa khoảng: [3 ; 5), [5 ; 7), [7 ; 9), [9 ; 11).

b) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

7 Tìm mốt của mẫu số liệu trong Ví dụ 6 (làm tròn các kết quả đến hàng phần mười).

Giải

a) *Bảng 14* là bảng tần số ghép nhóm cho kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 11D.

Nhóm	Tần số
[3 ; 5)	5
[5 ; 7)	18
[7 ; 9)	10
[9 ; 11)	7
	$n = 40$

Bảng 14

b) Ta thấy: Nhóm 2 ứng với nửa khoảng [5 ; 7) là nhóm có tần số lớn nhất với $u = 5$; $g = 2$; $n_2 = 18$. Nhóm 1 có tần số $n_1 = 5$, nhóm 3 có tần số $n_3 = 10$.

Áp dụng công thức, ta có mốt của mẫu số liệu là:

$$M_o = 5 + \left(\frac{18-5}{2 . 18 - 5 - 10}\right) . 2 \approx 6,2.$$

2. Ý nghĩa

Như ta đã biết, mốt của một mẫu số liệu không ghép nhóm đặc trưng cho số lần lặp đi lặp lại nhiều nhất tại một giá trị của mẫu số liệu đó. Vì thế, có thể dùng mốt để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu khi mẫu số liệu có nhiều giá trị trùng nhau.

Bằng cách ghép nhóm mẫu số liệu và tính toán mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, ta nhận được giá trị mới cũng có thể dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu đã cho.

Mốt của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm *xấp xỉ* với mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm ban đầu. Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều mốt.

BÀI TẬP

1. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h):

48,5	43	50	55	45	60	53	55,5	44	65
51	62,5	41	44,5	57	57	68	49	46,5	53,5
61	49,5	54	62	59	56	47	50	60	61
49,5	52,5	57	47	60	55	45	47,5	48	61,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng:

$$[40 ; 45), [45 ; 50), [50 ; 55), [55 ; 60), [60 ; 65), [65 ; 70).$$

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

2. Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 30 bạn học sinh (đơn vị: kilôgam):

17	40	39	40,5	42	51	41,5	39	41	30
40	42	40,5	39,5	41	40,5	37	39,5	40	41
38,5	39,5	40	41	39	40,5	40	38,5	39,5	41,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có tám nhóm ứng với tám nửa khoảng:

$$[15 ; 20), [20 ; 25), [25 ; 30), [30 ; 35), [35 ; 40), [40 ; 45), [45 ; 50), [50 ; 55).$$

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

3. *Bảng 15* cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét).

a) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[30 ; 40)	4	4
[40 ; 50)	10	14
[50 ; 60)	14	28
[60 ; 70)	6	34
[70 ; 80)	4	38
[80 ; 90)	2	40
	$n = 40$	

Bảng 15

§2 BIẾN CỐ HỢP VÀ BIẾN CỐ GIAO. BIẾN CỐ ĐỘC LẬP. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 1

Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất một lần (*Hình 1*). Xét các biến cố ngẫu nhiên:

A: "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn";

B: "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chia hết cho 3";

C: "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn hoặc chia hết cho 3".

Biến cố C có liên hệ như thế nào với hai biến cố A và B?

Trong mục này, ta luôn giả thiết phép thử T có không gian mẫu là tập hợp Ω gồm hữu hạn phần tử và các kết quả của phép thử là đồng khả năng, các biến cố đều liên quan đến phép thử đó.

I. PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ

1. Biến cố hợp

1 Xét phép thử "Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất một lần". Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử đó. Xét hai biến cố A và B nêu trong bài toán ở phần mở đầu.

a) Viết các tập con A, B của tập hợp Ω tương ứng với các biến cố A, B.

b) Đặt $C = A \cup B$. Phát biểu biến cố C dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

Cho hai biến cố A và B. Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω. Đặt $C = A \cup B$, ta có C là một biến cố và được gọi là *biến cố hợp* của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A \cup B$.

Chú ý: Xét một kết quả thuận lợi α cho biến cố C, tức là $\alpha \in C$. Vì $C = A \cup B$ nên $\alpha \in A$ hoặc $\alpha \in B$. Nói cách khác, α là một kết quả thuận lợi cho biến cố A hoặc biến cố B. Điều đó có nghĩa là biến cố A hoặc biến cố B xảy ra. Vì vậy, biến cố C có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện là "A xảy ra hoặc B xảy ra" hay "Có ít nhất một trong các biến cố A, B xảy ra".

Ví dụ 1 Trong hộp kín có 10 quả bóng màu xanh và 8 quả bóng màu đỏ, các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 quả bóng. Xét các biến cố:

A: "Hai quả bóng lấy ra có màu xanh";

B: "Hai quả bóng lấy ra có màu đỏ".

Chọn phát biểu đúng trong những phát biểu sau đây:

a) Biến cố hợp của hai biến cố A và B là "Hai quả bóng lấy ra cùng có màu đỏ hoặc màu xanh";

b) Biến cố hợp của hai biến cố A và B là "Hai quả bóng lấy ra có màu khác nhau";

c) Biến cố hợp của hai biến cố A và B là "Hai quả bóng lấy ra có cùng màu".

Giải

Phát biểu a) đúng; phát biểu b) sai; phát biểu c) đúng.

1 Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 12; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên 1 chiếc thẻ trong hộp. Xét biến cố A: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3" và biến cố B: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 4". Phát biểu biến cố $A \cup B$ dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

2. Biến cố giao

2 Đối với các tập hợp A, B trong Hoạt động 1, ta đặt $D = A \cap B$. Phát biểu biến cố D dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

Ta có định nghĩa sau:

Cho hai biến cố A và B. Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω. Đặt $D = A \cap B$, ta có D là một biến cố và được gọi là *biến cố giao* của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A \cap B$ hay AB.

Chú ý: Xét một kết quả thuận lợi β cho biến cố D, tức là $\beta \in D$. Vì $D = A \cap B$ nên $\beta \in A$ và $\beta \in B$. Nói cách khác, β là một kết quả thuận lợi cho cả hai biến cố A và B. Điều đó có nghĩa là cả hai biến cố A và B cùng xảy ra. Vì vậy, biến cố D có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện là "Cả A và B cùng xảy ra".

Ví dụ 2 Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 52; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên 1 chiếc thẻ trong hộp. Xét biến cố A: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3" và biến cố B: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 4". Viết các tập con của không gian mẫu tương ứng với các biến cố A, B, $A \cap B$.

2 Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố A: "Số chấm xuất hiện ở lần thứ nhất là số lẻ" và B: "Số chấm xuất hiện ở lần thứ hai là số lẻ". Phát biểu biến cố $A \cap B$ dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

Giải

Ta có $A = \{3; 6; 9; 12; 15; ...; 48; 51\}$; $B = \{4; 8; 12; 16; 20; ...; 48; 52\}$;

$A \cap B = \{12; 24; 36; 48\}$.

3. Biến cố xung khắc

3 Xét phép thử "Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp". Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử đó. Xét các biến cố:

A: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số lẻ";

B: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số chẵn".

a) Viết các tập con A, B của không gian mẫu Ω tương ứng với các biến cố A, B.

b) Tìm tập hợp $A \cap B$.

Ta có định nghĩa sau:

Cho hai biến cố A và B. Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω. Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì A và B gọi là hai biến cố *xung khắc*.

Chú ý: Xét một kết quả thuận lợi γ cho biến cố A, tức là $\gamma \in A$. Vì $A \cap B = \varnothing$ nên $\gamma \notin B$, tức là γ không là một kết quả thuận lợi cho biến cố B. Do đó, hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

Ví dụ 3 Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A: "Đồng xu xuất hiện mặt S ở lần gieo thứ nhất";

B: "Đồng xu xuất hiện mặt N ở lần gieo thứ nhất".

Hai biến cố trên có xung khắc hay không?

Giải

Ta thấy:

$$A = \{SS ; SN\}; B = \{NS ; NN\}.$$

Suy ra $A \cap B = \varnothing$. Do đó, A và B là hai biến cố xung khắc.

3 Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Hai biến cố sau có xung khắc hay không?

A: "Tổng số chấm trong hai lần gieo nhỏ hơn 5";

B: "Tổng số chấm trong hai lần gieo lớn hơn 6".

II. BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

4 Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A: "Đồng xu xuất hiện mặt S ở lần gieo thứ nhất";

B: "Đồng xu xuất hiện mặt N ở lần gieo thứ hai".

Đối với hai biến cố A và B, hãy cho biết một kết quả thuận lợi cho biến cố này có ảnh hưởng gì đến xác suất xảy ra của biến cố kia hay không.

Ta có định nghĩa sau:

Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là *độc lập* nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Chú ý: Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì mỗi cặp biến cố sau cũng độc lập: A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B; $\overline{A}$ và $\overline{B}$.

Ví dụ 4 Một hộp có 3 quả bóng màu xanh, 4 quả bóng màu đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy bóng ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, trong đó mỗi lần lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp, ghi lại màu của quả bóng lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp.

Xét các biến cố:

A: "Quả bóng màu xanh được lấy ra ở lần thứ nhất";

B: "Quả bóng màu đỏ được lấy ra ở lần thứ hai".

a) Hai biến cố A và B có độc lập không? Vì sao?

b) Hai biến cố A và B có xung khắc không? Vì sao?

4 Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố sau:

A: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số nguyên tố";

B: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là hợp số".

Hai biến cố A và B có độc lập không? Có xung khắc không? Vì sao?

Giải

a) Trước hết, biến cố B xảy ra sau biến cố A nên việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố B không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố A.

Mặt khác, ta có: xác suất của biến cố B khi biến cố A xảy ra bằng $\frac{4}{7}$; xác suất của biến cố B khi biến cố A không xảy ra cũng bằng $\frac{4}{7}$. Do đó việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố A không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố B. Vậy hai biến cố A và B là độc lập.

b) Ta thấy kết quả (xanh ; đỏ) là kết quả thuận lợi cho cả hai biến cố A và B. Vì thế A và B không là hai biến cố xung khắc.

III. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

1. Công thức cộng xác suất

5 Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không vượt quá 20. Xét biến cố A: "Số được viết ra là số chia hết cho 2" và biến cố B: "Số được viết ra là số chia hết cho 7".

a) Tính $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ và $P(A \cap B)$.

b) So sánh $P(A \cup B)$ và $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ta có định lí sau:

Cho hai biến cố A và B. Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Nếu hai biến cố A và B là xung khắc thì $A \cap B = \varnothing$, suy ra $P(A \cap B) = 0$. Vì thế, ta có hệ quả sau:

Hệ quả: Nếu hai biến cố A và B là xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ví dụ 5 Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương có hai chữ số. Xét biến cố A: "Số được viết ra là số chia hết cho 8" và biến cố B: "Số được viết ra là số chia hết cho 9". Tính $P(A \cup B)$.

Giải

Trong 90 số có hai chữ số, có 11 số chia hết cho 8, có 10 số chia hết cho 9 và có 1 số chia hết cho cả 8 và 9. Vì thế, ta có: $P(A) = \frac{11}{90}$, $P(B) = \frac{10}{90}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{90}$.

Vậy $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{90} + \frac{10}{90} - \frac{1}{90} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$.

Ví dụ 6 Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 12; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên 1 chiếc thẻ trong hộp. Xét biến cố A: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3" và biến cố B: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 5". Tính $P(A \cup B)$.

Giải

Không gian mẫu của phép thử trên có 12 phần tử, tức là $n(\Omega) = 12$.

Số các kết quả thuận lợi cho các biến cố A, B lần lượt là $n(A) = 4$, $n(B) = 2$. Suy ra

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},\ P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Trong các số 1, 2, 3, ..., 12, không có số nào chia hết cho cả 3 và 5. Vì thế A, B là hai biến cố xung khắc. Suy ra:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

5 Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 52; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên 1 chiếc thẻ trong hộp. Xét biến cố A: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 7" và biến cố B: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 11". Tính $P(A \cup B)$.

2. Công thức nhân xác suất

6 Xét các biến cố độc lập A và B trong *Ví dụ 4*.

a) Tính $P(A)$, $P(B)$ và $P(A \cap B)$.

b) So sánh $P(A \cap B)$ và $P(A) \,.\, P(B)$.

Ta có định lí sau:

> Cho hai biến cố A và B.
> Nếu hai biến cố A và B là độc lập thì $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$.

Chú ý: Nếu $P(A \cap B) \neq P(A) \,.\, P(B)$ thì hai biến cố A và B không độc lập.

Ví dụ 7 Hai bạn Hạnh và Hà cùng chơi trò chơi bắn cung một cách độc lập. Mỗi bạn chỉ bắn một lần. Xác suất để bạn Hạnh và bạn Hà bắn trúng bia lần lượt là 0,6 và 0,7 trong lần bắn của mình. Tính xác suất của biến cố C: "Bạn Hạnh và bạn Hà đều bắn trúng bia".

6 Một xưởng sản xuất có hai máy chạy độc lập với nhau. Xác suất để máy I và máy II chạy tốt lần lượt là 0,8 và 0,9. Tính xác suất của biến cố C: "Cả hai máy của xưởng sản xuất đều chạy tốt".

Giải

Xét biến cố A: "Bạn Hạnh bắn trúng bia", ta có: $P(A) = 0,6$.

Xét biến cố B: "Bạn Hà bắn trúng bia", ta có: $P(B) = 0,7$.

Ta thấy A, B là hai biến cố độc lập và $C = A \cap B$. suy ra:

$$P(C) = P(A) . P(B) = 0,6 . 0,7 = 0,42.$$

Ví dụ 8 Hai bạn Trung và Dũng của lớp 11A tham gia giải bóng bàn đơn nam do nhà trường tổ chức. Hai bạn đó không cùng thuộc một bảng đấu loại và mỗi bảng đấu loại chỉ chọn một người vào vòng chung kết. Xác suất lọt qua vòng loại để vào vòng chung kết của Trung và Dũng lần lượt là 0,8 và 0,6. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Cả hai bạn lọt vào vòng chung kết";

b) B: "Có ít nhất một bạn lọt vào vòng chung kết";

c) C: "Chỉ có bạn Trung lọt vào vòng chung kết".

Giải

Xét các biến cố E: "Bạn Trung lọt vào vòng chung kết" và G: "Bạn Dũng lọt vào vòng chung kết".

Từ giả thiết, ta suy ra E, G là hai biến cố độc lập và $P(E) = 0,8$; $P(G) = 0,6$.

a) Do $A = E \cap G$ nên $P(A) = P(E) . P(G) = 0,8 . 0,6 = 0,48$.

b) Ta thấy $B = E \cup G$, suy ra

$$P(B) = P(E \cup G) = P(E) + P(G) - P(E \cap G) = 0,8 + 0,6 - 0,48 = 0,92.$$

c) Xét biến cố đối $\overline{G}$ của biến cố G. Ta thấy $P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 1 - 0,6 = 0,4$ và E, $\overline{G}$ là hai biến cố độc lập. Vì $C = E \cap \overline{G}$ nên $P(C) = P(E) . P(\overline{G}) = 0,8 . 0,4 = 0,32$.

IV. TÍNH XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN

1. Tính xác suất của biến cố bằng phương pháp tổ hợp

Ví dụ 9 Một đội văn nghệ có 4 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên phụ trách đội muốn chọn ra một đội tốp ca gồm 3 học sinh sao cho có cả nam và nữ cùng tham gia.

a) Giáo viên phụ trách đội có bao nhiêu cách chọn một đội tốp ca như vậy?

b) Tính xác suất của biến cố H: "Trong 3 học sinh chọn ra có cả nam và nữ".

Giải

Xét các biến cố:

H: "Trong 3 học sinh chọn ra có cả nam và nữ";

A: "Trong 3 học sinh chọn ra có 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ";

B: "Trong 3 học sinh chọn ra có 1 học sinh nam và 2 học sinh nữ".

Khi đó $H = A \cup B$ và $A \cap B = \varnothing$.

Do hai biến cố A và B là xung khắc nên

$$n(H) = n(A) + n(B).$$

a) Số các kết quả thuận lợi cho biến cố A là:

$$n(A) = C_4^2 \,.\, C_5^1 = \frac{4!}{2!\,.\,2!} \cdot \frac{5!}{1!\,.\,4!} = 6\,.\,5 = 30.$$

Số các kết quả thuận lợi cho biến cố B là:

$$n(B) = C_4^1 \,.\, C_5^2 = \frac{4!}{1!\,.\,3!} \cdot \frac{5!}{2!\,.\,3!} = 4\,.\,10 = 40.$$

Số các kết quả thuận lợi cho biến cố H là:

$$n(H) = n(A) + n(B) = 30 + 40 = 70.$$

Vậy giáo viên phụ trách có 70 cách chọn một đội tốp ca như dự định.

b) Đội văn nghệ có 9 học sinh. Mỗi cách chọn 3 học sinh trong 9 học sinh đó là một tổ hợp chập 3 của 9 phần tử. Do đó, không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 3 của 9 phần tử và

$$n(\Omega) = C_9^3 = \frac{9!}{3!\,.\,6!} = 84.$$

Vậy xác suất của biến cố H là:

$$P(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)} = \frac{70}{84} = \frac{5}{6}.$$

7 Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm, tính xác suất để các điểm này tạo thành 3 đỉnh của một tam giác.

2. Tính xác suất của biến cố bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây

7 Để trang trí một tờ giấy có dạng hình chữ nhật, bạn Thuỳ chia tờ giấy đó thành bốn hình chữ nhật nhỏ bằng nhau. Mỗi hình chữ nhật nhỏ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc vàng. Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng mà bạn Thuỳ có thể tô màu trang trí cho tờ giấy đó.

Ví dụ 10 Câu lạc bộ nghệ thuật của một trường trung học phổ thông gồm học sinh của cả ba khối 10, 11, 12, mỗi khối có 5 học sinh. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để tham gia biểu diễn. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn chỉ thuộc hai khối.

Giải

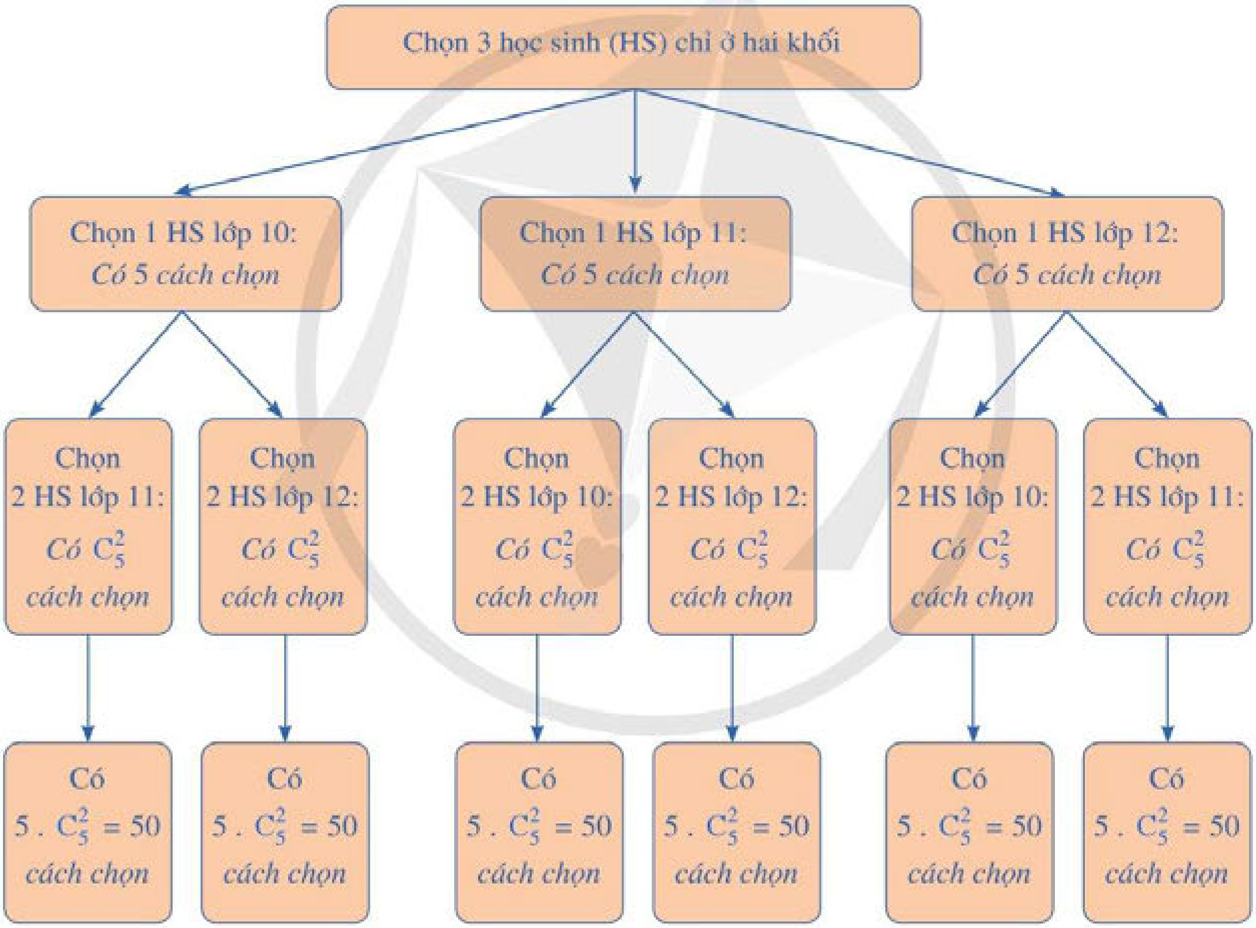
• Mỗi cách chọn ra đồng thời 3 học sinh trong câu lạc bộ cho ta một tổ hợp chập 3 của 15 phần tử. Do đó, không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 3 của 15 phần tử và

$$n(\Omega) = C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!\,.\,12!} = 455.$$

• Xét biến cố A: "Chọn được 3 học sinh chỉ thuộc hai khối".

8 Một hộp có 5 viên bi màu xanh, 6 viên bi màu đỏ và 7 viên bi màu vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp. Tính xác suất để 5 viên bi được chọn có đủ ba màu và số bi màu đỏ bằng số bi màu vàng.

Sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng thuận lợi cho biến cố A (*Hình 2*).



Hình 2

Như vậy, số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $n(A) = 50\,.\,6 = 300$.

Vậy xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{300}{455} = \frac{60}{91}.$$

BÀI TẬP

1. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

   A: "Lần thứ nhất xuất hiện mặt ngửa";

   B: "Lần thứ hai xuất hiện mặt ngửa";

   C: "Cả hai lần đều xuất hiện mặt ngửa";

   D: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa".

   Trong hai biến cố C, D, biến cố nào là biến cố hợp của hai biến cố A, B? Biến cố nào là biến cố giao của hai biến cố A, B?

2. Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

   A: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất lớn hơn 4";

   B: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai nhỏ hơn 4";

   C: "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất nhỏ hơn 4".

   Trong các biến cố trên, hãy:

   a) Tìm cặp biến cố xung khắc;

   b) Tìm cặp biến cố độc lập.

3. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Tính xác suất của biến cố M: "Số tự nhiên có hai chữ số được viết ra chia hết cho 11 hoặc chia hết cho 12".

4. Một hộp có 12 viên bi có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 7 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để trong 5 viên bi được chọn có ít nhất 2 viên bi màu vàng.

5. Hai bạn Việt và Nam cùng tham gia một kì thi trắc nghiệm môn Toán và môn Tiếng Anh một cách độc lập nhau. Đề thi của mỗi môn gồm 6 mã đề khác nhau và các môn khác nhau thì mã đề cũng khác nhau. Đề thi được sắp xếp và phát cho học sinh một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để hai bạn Việt và Nam có chung đúng một mã đề thi trong kì thi đó.

6. Trong một chiếc hộp có 20 viên bi có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 9 viên bi màu đỏ, 6 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi. Tìm xác suất để 3 viên bi lấy ra có đúng hai màu.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

1. Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu áo sơ mi mới. Người điều tra yêu cầu cho điểm mẫu áo đó theo thang điểm là 100. Kết quả được trình bày trong *Bảng 16*.

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
[50 ; 60)	4	4
[60 ; 70)	5	9
[70 ; 80)	23	32
[80 ; 90)	6	38
[90 ; 100)	2	40
	$n = 40$	

Bảng 16

a) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị:

A. 74. B. 75. C. 76. D. 77.

b) Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) là:

A. $Q_1 \approx 71$; $Q_2 \approx 76$; $Q_3 \approx 78$.
B. $Q_1 \approx 71$; $Q_2 \approx 75$; $Q_3 \approx 78$.
C. $Q_1 \approx 70$; $Q_2 \approx 76$; $Q_3 \approx 79$.
D. $Q_1 \approx 70$; $Q_2 \approx 75$; $Q_3 \approx 79$.

c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) là:

A. 73. B. 74. C. 75. D. 76.

2. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng:

A. $\frac{11}{21}$. B. $\frac{221}{441}$. C. $\frac{10}{21}$. D. $\frac{1}{2}$.

3. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại độ dài quãng đường di chuyển trong một tuần (đơn vị: kilômét) của 40 chiếc ô tô:

100	105	115	116	130	135	138	132	135	120
125	128	120	124	140	140	146	145	142	142
145	148	150	150	159	155	151	156	155	151
154	152	153	160	162	175	176	165	188	198

a) Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ với năm nhóm ứng với năm nửa khoảng:

$$[100 ; 120), [120 ; 140), [140 ; 160), [160 ; 180), [180 ; 200).$$

b) Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

c) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

4. Bạn Dũng và bạn Hương tham gia đội văn nghệ của nhà trường. Nhà trường chọn từ đội văn nghệ đó một bạn nam và một bạn nữ để lập tiết mục song ca. Xác suất được nhà trường chọn vào tiết mục song ca của Dũng và Hương lần lượt là 0,7 và 0,9. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Cả hai bạn được chọn vào tiết mục song ca";

b) B: "Có ít nhất một bạn được chọn vào tiết mục song ca";

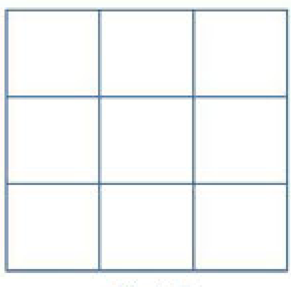
c) C: "Chỉ có bạn Hương được chọn vào tiết mục song ca".

5. Hai bạn Mai và Thi cùng tham gia một kì kiểm tra ngoại ngữ một cách độc lập nhau. Xác suất để bạn Mai và bạn Thi đạt từ điểm 7 trở lên lần lượt là 0,8 và 0,9. Tính xác suất của biến cố C: "Cả hai bạn đều đạt từ điểm 7 trở lên".

6. Một người cho ngẫu nhiên 3 lá thư vào 3 chiếc phong bì đã ghi địa chỉ sao cho mỗi phong bì chỉ chứa một lá thư. Tính xác suất để có ít nhất một lá thư được cho vào đúng phong bì đã ghi địa chỉ theo lá thư đó.

7. Một hộp chứa 9 quả cầu có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 4 quả cầu màu xanh đánh số từ 1 đến 4, có 3 quả cầu màu vàng đánh số từ 1 đến 3, có 2 quả cầu màu đỏ đánh số 1 và 2. Lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu từ hộp. Tính xác suất để 2 quả cầu được lấy vừa khác màu vừa khác số.

8. Bạn An vẽ trên đất một bảng gồm 9 ô vuông như *Hình 3*. Sau đó, bạn An cầm 4 viên bi giống nhau đặt ngẫu nhiên vào 4 ô vuông trong bảng đó. Tính xác suất để bất kì hàng nào và cột nào của bảng cũng có viên bi.



Hình 3

CHƯƠNG VI

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: phép tính luỹ thừa với số mũ thực; phép tính lôgarit; hàm số mũ, hàm số lôgarit; phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit.

§1 PHÉP TÍNH LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

Ở lớp dưới, ta đã làm quen với phép tính luỹ thừa với số mũ tự nhiên của một số thực và các tính chất của phép tính luỹ thừa đó.

Những khái niệm luỹ thừa với số mũ nguyên, số mũ hữu tỉ và số mũ thực của một số thực được xây dựng như thế nào? Những phép tính luỹ thừa đó có tính chất gì?

I. PHÉP TÍNH LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ

1. Phép tính luỹ thừa với số mũ nguyên

1

a) Cho n là một số nguyên dương. Với a là số thực tuỳ ý, nêu định nghĩa luỹ thừa bậc n của a.

b) Với a là số thực tuỳ ý khác 0, nêu quy ước xác định luỹ thừa bậc 0 của a.

Ta có định nghĩa sau:

Cho n là một số nguyên dương. Với a là số thực tuỳ ý khác 0, ta có: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Như vậy, ta đã xác định được a^m, ở đó a là số thực tuỳ ý khác 0 và m là một số nguyên. Trong biểu thức a^m, ta gọi a là *cơ số*, số nguyên m là *số mũ*.

Chú ý

• 0^0 và 0^{-n} (n nguyên dương) không có nghĩa.

• Luỹ thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự của luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Ví dụ 1 Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\left(\frac{1}{2}\right)^{-12}.8^{-3}+(0,2)^{-4}.25^{-2}+243^{-1}.\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}.$$

Giải

Ta có:

$$A=\left(\frac{1}{2}\right)^{-12}.8^{-3}+(0,2)^{-4}.25^{-2}+243^{-1}.\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$$

$$=2^{12}\cdot\frac{1}{8^3}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}\cdot\frac{1}{25^2}+\frac{1}{243^1}\cdot 3^6$$

$$=\frac{2^{12}}{2^9}+\frac{5^4}{5^4}+\frac{3^6}{3^5}=2^3+1+3=12.$$

1 Tính giá trị của biểu thức:

$$M=\left(\frac{1}{3}\right)^{12}.\left(\frac{1}{27}\right)^{-5}+(0,4)^{-4}.25^{-2}.\left(\frac{1}{32}\right)^{-1}.$$

2. Căn bậc n

a) Định nghĩa

2

a) Với a là số thực không âm, nêu định nghĩa căn bậc hai của a.

b) Với a là số thực tuỳ ý, nêu định nghĩa căn bậc ba của a.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho số thực a và số nguyên dương n ($n \geq 2$). Số b được gọi là *căn bậc n* của số a nếu $b^n = a$.

Ví dụ 2

a) Số $-\frac{1}{2}$ có là căn bậc 5 của $-\frac{1}{32}$ hay không?

b) Các số 3 và – 3 có là căn bậc 4 của 81 hay không?

Giải

a) Do $\left(-\frac{1}{2}\right)^5=-\frac{1}{32}$ nên số $-\frac{1}{2}$ là căn bậc 5 của $-\frac{1}{32}$.

b) Ta thấy: $(-3)^4=3^4=81$. Do đó các số 3 và – 3 là căn bậc 4 của 81.

2 Các số 2 và – 2 có là căn bậc 6 của 64 hay không?

Nhận xét

- Với n lẻ và $a \in \mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n của a, kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.
- Với n chẵn, ta xét ba trường hợp sau:

  +) $a < 0$: Không tồn tại căn bậc n của a;

  +) $a = 0$: Có một căn bậc n của a là số 0;

  +) $a > 0$: Có hai căn bậc n của a là hai số đối nhau, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{a}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{a}$.

b) Tính chất

3

a) Với mỗi số thực a, so sánh: $\sqrt{a^2}$ và $|a|$; $\sqrt[3]{a^3}$ và a.

b) Cho a, b là hai số thực dương. So sánh: $\sqrt{a\,.\,b}$ và $\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b}$.

Từ định nghĩa, ta có các tính chất sau:

- $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{nếu } n \text{ chẵn;} \end{cases}$
- $\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$;
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$;
- $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

(Ở mỗi công thức trên, ta giả sử các biểu thức xuất hiện trong đó là có nghĩa).

Ví dụ 3 Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $\sqrt[5]{3}\,.\,\sqrt[5]{-81}$;

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$.

Giải

a) $\sqrt[5]{3}\,.\,\sqrt[5]{-81} = \sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{(-3)^5} = -3$.

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(\sqrt{5})^3} = \sqrt{5}$.

3 Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{64}}\,.\,\sqrt[4]{81}$;

b) $\dfrac{\sqrt[5]{98}\,.\,\sqrt[5]{343}}{\sqrt[5]{64}}$.

3. Phép tính luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

4 Thực hiện các hoạt động sau:

a) So sánh: $2^{\frac{6}{3}}$ và 2^2;

b) So sánh: $2^{\frac{6}{3}}$ và $\sqrt[3]{2^6}$.

Ta có định nghĩa sau:

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Luỹ thừa của a với số mũ r xác định bởi: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Nhận xét

• $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $(a > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.

• Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ của số thực dương có đầy đủ các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên.

Ví dụ 4 Tính: a) $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$; b) $243^{-\frac{2}{5}}$.

Giải

a) $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{4}$.

b) $243^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{243^{-2}} = \sqrt[5]{(3^5)^{-2}} = \sqrt[5]{(3^{-2})^5} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

4 Rút gọn biểu thức:

$$N = \frac{x^{\frac{4}{3}}y + xy^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} \ (x > 0, y > 0).$$

II. PHÉP TÍNH LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

1. Định nghĩa

Ta đã định nghĩa luỹ thừa với số mũ hữu tỉ. Để định nghĩa luỹ thừa với số mũ thực tuỳ ý, ta còn phải định nghĩa luỹ thừa với số mũ vô tỉ.

5 Xét số vô tỉ $\sqrt{2} = 1,414213562...$

Xét dãy số hữu tỉ $r_1 = 1$; $r_2 = 1,4$; $r_3 = 1,41$; $r_4 = 1,414$; $r_5 = 1,4142$; $r_6 = 1,41421$;... và $\lim r_n = \sqrt{2}$. Bằng cách tính 3^{r_n} tương ứng, ta nhận được *Bảng 1* ghi các dãy số (r_n) và (3^{r_n}) với $n = 1, 2, ..., 6$. Người ta chứng minh được rằng khi $n \to +\infty$ thì dãy số (3^{r_n}) dần đến một giới hạn mà ta gọi là $3^{\sqrt{2}}$.

Nêu dự đoán về giá trị của số $3^{\sqrt{2}}$ (đến hàng phần trăm).

n	r_n	3^{r_n}
1	1	3
2	1,4	4,655536722...
3	1,41	4,706965002...
4	1,414	4,727695035...
5	1,4142	4,728733930...
6	1,41421	4,728785881...

Bảng 1

Cho a là số thực dương, α là số vô tỉ. Ta thừa nhận rằng luôn tồn tại dãy số hữu tỉ (r_n) có giới hạn là α và dãy số (a^{r_n}) tương ứng có giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy số (r_n).

Cho a là số thực dương, α là số vô tỉ, (r_n) là dãy số hữu tỉ và $\lim r_n = \alpha$. Giới hạn của dãy số (a^{r_n}) gọi là luỹ thừa của a với số mũ α, kí hiệu a^α, $a^\alpha = \lim a^{r_n}$.

Nhận xét: Từ định nghĩa ta có: $1^\alpha = 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 5 Xét dãy số hữu tỉ $r_1 = 1$; $r_2 = 1,4$; $r_3 = 1,41$; $r_4 = 1,414$; $r_5 = 1,4142$; $r_6 = 1,41421$; ... và lim $r_n = \sqrt{2}$.

Bằng cách tính 10^{r_n} tương ứng, ta nhận được *Bảng 2* ghi các dãy số (r_n) và (10^{r_n}) với $n = 1, 2, ..., 6$.

Nêu dự đoán về giá trị của số $10^{\sqrt{2}}$ (đến hàng phần trăm).

n	r_n	10^{r_n}
1	1	10
2	1,4	25,11886432...
3	1,41	25,70395783...
4	1,414	25,94179362...
5	1,4142	25,95374301...
6	1,41421	25,95434062...

Bảng 2

Giải

Từ *Bảng 2*, ta dự đoán $10^{\sqrt{2}} \approx 25,95$.

5 So sánh $10^{\sqrt{2}}$ và 10.

2. Tính chất

6 Nêu những tính chất của phép tính luỹ thừa với số mũ nguyên của một số thực dương.

Người ta chứng minh được rằng luỹ thừa với số mũ thực của một số thực dương có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên.

- Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực tuỳ ý. Khi đó, ta có:

$$a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \qquad (ab)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha};$$

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}; \qquad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

- Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

  Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Ví dụ 6 Rút gọn biểu thức: $P = \dfrac{a^{\sqrt{5}+1} \,.\, a^{7-\sqrt{5}}}{\left(a^{3-\sqrt{2}}\right)^{3+\sqrt{2}}}$ $(a > 0)$.

Giải

Với $a > 0$, ta có: $P = \dfrac{a^{\sqrt{5}+1} \,.\, a^{7-\sqrt{5}}}{\left(a^{3-\sqrt{2}}\right)^{3+\sqrt{2}}} = \dfrac{a^{\sqrt{5}+1+7-\sqrt{5}}}{a^{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}} = \dfrac{a^8}{a^7} = a.$

Ví dụ 7 Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số: $3^{\sqrt{8}}$ và 3^3.

Giải

Ta có $3 = \sqrt{9}$. Do $8 < 9$ nên $\sqrt{8} < \sqrt{9}$.

Vì cơ số 3 lớn hơn 1 nên $3^{\sqrt{8}} < 3^3$.

6 Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số: $2^{2\sqrt{3}}$ và $2^{3\sqrt{2}}$.

3. Sử dụng máy tính cầm tay để tính luỹ thừa với số mũ thực

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính luỹ thừa với số mũ thực. Cụ thể như sau (lấy kết quả với 4 chữ số ở phần thập phân):

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$(-1{,}2)^{-3}$	(− 1 . 2) $x^{\blacksquare}$ − 3 =	− 0.5787
$6^{2,5}$	6 $x^{\blacksquare}$ 2 . 5 =	88.1816
$\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\blacksquare}$ 3 ▶ $x^{\blacksquare}$ $\sqrt{\blacksquare}$ 2 =	2.1746

Ví dụ 8 Dùng máy tính cầm tay để tính (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm):

a) $0{,}7^{-5}$; b) $1{,}4^{\sqrt{2}-2}$.

Giải

a) $0{,}7^{-5} \approx 5{,}95$. b) $1{,}4^{\sqrt{2}-2} \approx 0{,}82$.

7 Dùng máy tính cầm tay để tính (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm):

a) $(-2{,}7)^{-4}$;

b) $(\sqrt{3}-1)^{\sqrt[3]{4}+1}$.

Ví dụ 9 Trong mẫu của một sinh vật đã chết T năm, tỉ số R của carbon phóng xạ còn lại và carbon không phóng xạ còn lại có thể được ước tính bằng công thức $R = A \,.\, 2{,}7^{-\frac{T}{8\,033}}$. Trong đó A là tỉ số của carbon phóng xạ và carbon không phóng xạ trong cơ thể sống (*Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson*).

Tính đại lượng R theo A trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 2 000 năm; sau 4 000 năm; sau 8 000 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Giải

Đại lượng R trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 2 000 năm là: $R = A \,.\, 2{,}7^{-\frac{2\,000}{8\,033}} \approx 0{,}78 \,.\, A.$

Đại lượng R trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 4 000 năm là: $R = A \,.\, 2{,}7^{-\frac{4\,000}{8\,033}} \approx 0{,}61 \,.\, A.$

Đại lượng R trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 8 000 năm là: $R = A \,.\, 2{,}7^{-\frac{8\,000}{8\,033}} \approx 0{,}37 \,.\, A.$

BÀI TẬP

1. Tính:

a) $\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$; b) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5} - \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

c) $(4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \,.\, 2^{-2\sqrt{3}}$.

2. Cho a, b là những số thực dương. Viết các biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $a^{\frac{1}{3}} \,.\, \sqrt{a}$; b) $b^{\frac{1}{2}} \,.\, b^{\frac{1}{3}} \,.\, \sqrt[6]{b}$; c) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$; d) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$.

3. Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{a^{\frac{5}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$; b) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$ $(a > 0, b > 0)$.

4. Viết các số sau theo thứ tự tăng dần:

a) $1^{1,5}$; 3^{-1}; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; b) $2\,022^0$; $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$; $5^{\frac{1}{2}}$.

5. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số sau:

a) $\sqrt{42}$ và $\sqrt[3]{51}$; b) $16^{\sqrt{3}}$ và $4^{3\sqrt{2}}$; c) $(0{,}2)^{\sqrt{16}}$ và $(0{,}2)^{\sqrt[3]{60}}$.

6. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93 000 000 dặm) (*Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson*). Hỏi Sao Hoả quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là 1,52 AU.

§2 PHÉP TÍNH LÔGARIT

Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: pH = $-\log[H^+]$ với $[H^+]$ là nồng độ ion hydrogen. Người ta đo được nồng độ ion hydrogen của một cốc nước cam là 10^{-4}, nước dừa là 10^{-5} (nồng độ tính bằng mol L^{-1}).

Làm thế nào để tính được độ pH của cốc nước cam, nước dừa đó?

I. KHÁI NIỆM LÔGARIT

1. Định nghĩa

1

a) Tìm x trong mỗi trường hợp sau: $3^x = 9$; $3^x = \frac{1}{9}$.

b) Có bao nhiêu số thực x sao cho $3^x = 5$?

Có đúng một số thực α sao cho $3^\alpha = 5$. Số α gọi là lôgarit cơ số 3 của 5, kí hiệu là $\log_3 5$.

Cho hai số thực dương a, b với a khác 1. Số thực c để $a^c = b$ được gọi là *lôgarit cơ số a của b* và kí hiệu là $\log_a b$, nghĩa là

$$c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b.$$

$\log_a b$ xác định khi và chỉ khi

$a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0$.

Ví dụ 1 Tính:

a) $\log_2 8$; b) $\log_3 \frac{1}{9}$.

Giải

a) $\log_2 8 = 3$ vì $2^3 = 8$.

b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ vì $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

1 Tính:

a) $\log_3 81$; b) $\log_{10} \frac{1}{100}$.

2. Tính chất

2 Cho $a > 0$, $a \neq 1$. Tính:

a) $\log_a 1$; b) $\log_a a$; c) $\log_a a^c$; d) $a^{\log_a b}$ với $b > 0$.

Với số thực dương a khác 1, số thực dương b, ta có:

$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a a^c = c$; $a^{\log_a b} = b$.

Ví dụ 2 Tính:

a) $\log_5 \sqrt[3]{5}$; b) $4^{\log_2 7}$.

Giải

a) $\log_5 \sqrt[3]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.

b) $4^{\log_2 7} = (2^2)^{\log_2 7} = (2^{\log_2 7})^2 = 7^2 = 49$.

2 Tính:

a) $\log_4 \sqrt[5]{16}$; b) $36^{\log_6 8}$.

3. Lôgarit thập phân. Lôgarit tự nhiên

• Lôgarit cơ số 10 của số thực dương b được gọi là *lôgarit thập phân* của b và kí hiệu là $\log b$ hay $\lg b$.

• Lôgarit cơ số e của số thực dương b được gọi là *lôgarit tự nhiên* của b và kí hiệu là $\ln b$.

Ví dụ 3 Tính: a) $\log 0{,}0001$; b) $\ln e^2$.

Giải

Ta có:

a) $\log 0{,}0001 = \log 10^{-4} = -4$. b) $\ln e^2 = 2$.

3 Giải bài toán được nêu ở phần mở đầu.

II. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA PHÉP TÍNH LÔGARIT

1. Lôgarit của một tích, một thương

3 Cho $m = 2^7$, $n = 2^3$.

a) Tính $\log_2(mn)$; $\log_2 m + \log_2 n$ và so sánh các kết quả đó.

b) Tính $\log_2\left(\frac{m}{n}\right)$; $\log_2 m - \log_2 n$ và so sánh các kết quả đó.

Với ba số thực dương a, m, n và $a \neq 1$, ta có:

- $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$;
- $\log_a\left(\dfrac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$.

Ta có:

$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b$$

$(a > 0, a \neq 1, b > 0)$.

Ví dụ 4 Tính:

a) $\log_6 9 + \log_6 4$; b) $\log_5 100 - \log_5 20$.

Giải

Ta có:

a) $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 (9 \,.\, 4) = \log_6 36 = 2$.

b) $\log_5 100 - \log_5 20 = \log_5 \dfrac{100}{20} = \log_5 5 = 1$.

4 Tính:

a) $\ln(\sqrt{5} + 2) + \ln(\sqrt{5} - 2)$;

b) $\log 400 - \log 4$;

c) $\log_4 8 + \log_4 12 + \log_4 \dfrac{32}{3}$.

Chú ý: Với n số thực dương $b_1, b_2, ..., b_n$:

$$\log_a(b_1 b_2 ... b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ ... \ + \log_a b_n \ (a > 0, a \neq 1).$$

2. Lôgarit của một luỹ thừa

4 Cho $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, α là một số thực.

a) Tính $a^{\log_a b^\alpha}$ và $a^{\alpha \log_a b}$.

b) So sánh $\log_a b^\alpha$ và $\alpha \log_a b$.

Cho $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Với mọi số thực α, ta có:

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b.$$

Cho $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, ta có:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b.$$

Ví dụ 5 Tính:

a) $\log_3 9^2$; b) $\log_5 15 - 2\log_5 \sqrt{3}$.

Giải

Ta có:

a) $\log_3 9^2 = 2\log_3 9 = 2\log_3 3^2 = 2 \,.\, 2 \,.\, \log_3 3 = 4$.

b) $\log_5 15 - 2\log_5 \sqrt{3} = \log_5 15 - \log_5 (\sqrt{3})^2$

$= \log_5 15 - \log_5 3 = \log_5 \dfrac{15}{3} = \log_5 5 = 1$.

5 Tính:

$2\log_3 5 - \log_3 50 + \dfrac{1}{2}\log_3 36$.

3. Đổi cơ số của lôgarit

5 Cho ba số thực dương a, b, c với $a \neq 1$, $c \neq 1$.

a) Bằng cách sử dụng tính chất $b = a^{\log_a b}$, chứng tỏ rằng $\log_c b = \log_a b \, . \, \log_c a$.

b) So sánh $\log_a b$ và $\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Với a, c là hai số thực dương khác 1 và b là số thực dương, ta có:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Nhận xét: Với $a > 0$ và $a \neq 1$, $b > 0$ và $b \neq 1$, $c > 0$, $\alpha \neq 0$, ta có những công thức sau:

- $\log_a b \, . \, \log_b c = \log_a c$;
- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$;
- $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$.

Ví dụ 6 Tính: $\log_9 3$.

Giải

Ta có: $\log_9 3 = \log_{3^2} 3 = \dfrac{1}{2}\log_3 3 = \dfrac{1}{2}$.

6 Tính: $5^{\log_{125} 64}$.

III. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÍNH LÔGARIT

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính lôgarit. Cụ thể như sau (lấy kết quả với 4 chữ số ở phần thập phân):

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
log1,2	[log] [1] [.] [2] [=]	0.0792
ln0,35	[ln] [0] [.] [3] [5] [=]	– 1.0498
$\log_5 3$	[$\log_{\square}\square$] [5] [▶] [3] [=]	0.6826

Chú ý: Với máy tính không có phím [$\log_{\square}\square$] thì để tính $\log_5 3$, ta có thể dùng công thức đổi cơ số để đưa về cơ số 10 hoặc cơ số e.

Ví dụ 7 Sử dụng máy tính cầm tay để tính độ pH trong mỗi trường hợp sau (làm tròn kết quả đến hàng phần mười):

a) Bia có $[H^+] = 0{,}00008$;

b) Rượu có $[H^+] = 0{,}0004$.

(*Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021*)

Giải

a) $pH = -\log[H^+] = -\log(0{,}00008) \approx 4{,}1$.

b) $pH = -\log[H^+] = -\log(0{,}0004) \approx 3{,}4$.

7 Sử dụng máy tính cầm tay để tính: $\log_7 19$; $\log_{11} 26$.

BÀI TẬP

1. Tính:

a) $\log_{12} 12^3$; b) $\log_{0,5} 0{,}25$; c) $\log_a a^{-3} (a > 0, a \neq 1)$.

2. Tính:

a) $8^{\log_2 5}$; b) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 81}$; c) $5^{\log_{25} 16}$.

3. Cho $\log_a b = 2$. Tính:

a) $\log_a(a^2b^3)$; b) $\log_a \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt[3]{b}}$; c) $\log_a(2b) + \log_a\left(\frac{b^2}{2}\right)$.

4. Cho hai số thực dương a, b thoả mãn $a^3b^2 = 100$. Tính giá trị của biểu thức $P = 3\log a + 2\log b$.

5. Trong nuôi trồng thuỷ sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khoẻ và sự phát triển của thuỷ sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$ (*Nguồn: https://nongnghiep.farmvina.com*). Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không?

6. Một vi khuẩn có khối lượng khoảng $5 \cdot 10^{-13}$ gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần (*Nguồn: Câu hỏi và bài tập vi sinh học, NXB ĐHSP, 2008*). Giả sử các vi khuẩn được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại trong ít nhất 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất (lấy khối lượng của Trái Đất là $6 \cdot 10^{27}$ gam) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

§3 HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

Một doanh nghiệp gửi ngân hàng 1 tỉ đồng với kì hạn 1 năm, lãi suất 6,2%/năm. Giả sử trong suốt n năm ($n \in \mathbb{N}^*$), doanh nghiệp đó không rút tiền ra và số tiền lãi sau mỗi năm sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Biết rằng lãi suất không thay đổi trong thời gian này.

Mối liên hệ giữa số tiền doanh nghiệp đó có được (cả gốc và lãi) với số năm gửi ngân hàng gợi nên hàm số nào trong toán học?

I. HÀM SỐ MŨ

1. Định nghĩa

1 Xét bài toán ở phần mở đầu.

a) Tính số tiền doanh nghiệp đó có được sau 1 năm, 2 năm, 3 năm;

b) Dự đoán công thức tính số tiền doanh nghiệp đó có được sau n năm.

Nhận xét: Tương ứng mỗi giá trị x với giá trị $y = (1,062)^x$ xác định một hàm số, hàm số đó gọi là *hàm số mũ* cơ số 1,062.

Cho số thực a ($a > 0$, $a \neq 1$). Hàm số $y = a^x$ được gọi là *hàm số mũ* cơ số a.

Tập xác định của hàm số mũ $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1 Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số mũ?

a) $y = x^2$; b) $y = (\sqrt{3})^x$; c) $y = \frac{1}{x}$; d) $y = x^{\sqrt{5}}$.

Giải

Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = (\sqrt{3})^x$ là có dạng $y = a^x$ với $a = \sqrt{3}$ nên $y = (\sqrt{3})^x$ là hàm số mũ.

1 Cho hai ví dụ về hàm số mũ.

2. Đồ thị và tính chất

2 Cho hàm số mũ $y = 2^x$.

a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	-1	0	1	2	3
y	?	?	?	?	?

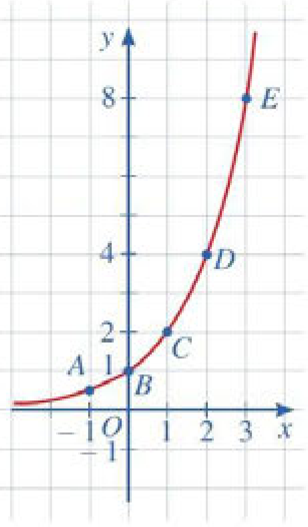
b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy biểu diễn các điểm trong bảng giá trị ở câu a.

Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $(x ; 2^x)$ với $x \in \mathbb{R}$ và nối lại, ta được đồ thị hàm số $y = 2^x$ (*Hình 1*).

c) Cho biết toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2^x$ với trục tung và vị trí của đồ thị hàm số đó so với trục hoành.

d) Quan sát đồ thị hàm số $y = 2^x$, nêu nhận xét về:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$;
- Sự biến thiên của hàm số $y = 2^x$ và lập bảng biến thiên của hàm số đó.



Hình 1

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = 2^x$ là một đường cong liền nét, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1, nằm ở phía trên trục hoành và đi lên kể từ trái sang phải.

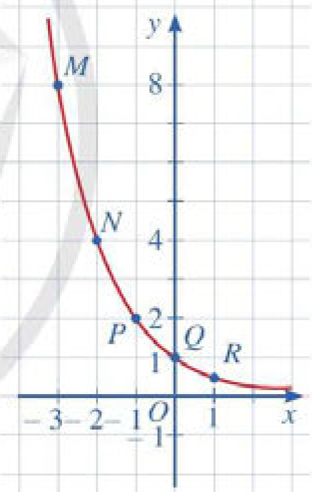
3 Cho hàm số mũ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	-3	-2	-1	0	1
y	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy biểu diễn các điểm $(x ; y)$ trong bảng giá trị ở câu a.

Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $\left(x ; \left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$ với $x \in \mathbb{R}$ và nối lại, ta được đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (*Hình 2*).



Hình 2

c) Cho biết toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ với trục tung và vị trí của đồ thị hàm số đó so với trục hoành.

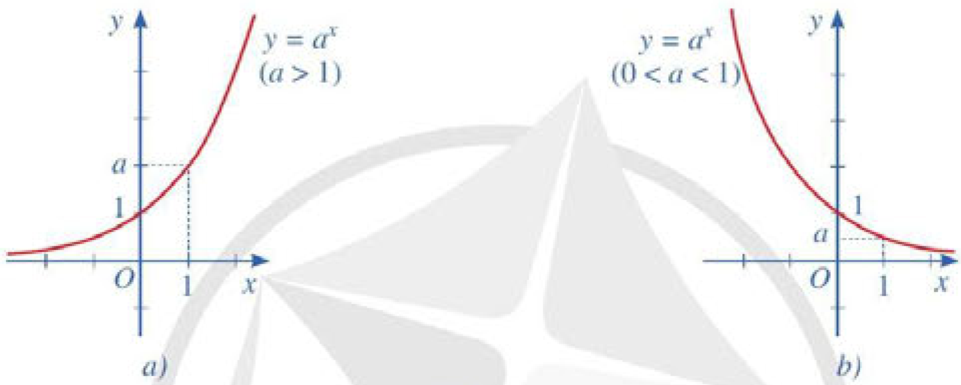
d) Quan sát đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, nêu nhận xét về:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$;
- Sự biến thiên của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ và lập bảng biến thiên của hàm số đó.

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ là một đường cong liền nét, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1, nằm ở phía trên trục hoành và đi xuống kể từ trái sang phải.

Trong trường hợp tổng quát, ta có nhận xét sau (*Hình 3*):

> Đồ thị hàm số $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) là một đường cong liền nét, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1, nằm ở phía trên trục hoành và đi lên nếu $a > 1$, đi xuống nếu $0 < a < 1$.



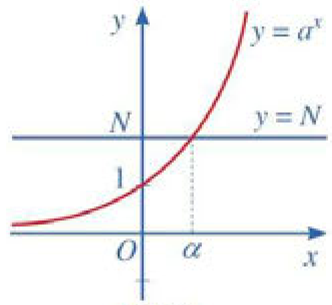
Hình 3

Nhận xét: Cho hàm số mũ $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

<table>
<tr><th>$y = a^x$ ($a > 1$)</th><th>$y = a^x$ ($0 < a < 1$)</th></tr>
<tr>
<td>
• Tập xác định: $\mathbb{R}$; tập giá trị: $(0\,;+\infty)$.
• Tính liên tục
Hàm số $y = a^x$ ($a > 1$) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
• Giới hạn đặc biệt
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.
• Sự biến thiên
Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
• Bảng biến thiên
<table>
<tr><th>x</th><th>$-\infty$</th><th>0</th><th>$+\infty$</th></tr>
<tr><td>$y = a^x$</td><td>0 ↗</td><td>1</td><td>↗ $+\infty$</td></tr>
</table>
</td>
<td>
• Tập xác định: $\mathbb{R}$; tập giá trị: $(0\,;+\infty)$.
• Tính liên tục
Hàm số $y = a^x$ ($0 < a < 1$) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
• Giới hạn đặc biệt
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.
• Sự biến thiên
Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
• Bảng biến thiên
<table>
<tr><th>x</th><th>$-\infty$</th><th>0</th><th>$+\infty$</th></tr>
<tr><td>$y = a^x$</td><td>$+\infty$ ↘</td><td>1</td><td>↘ 0</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Chú ý: Từ tính liên tục và sự biến thiên của hàm số mũ, ta có thể chứng minh được mệnh đề sau:

Với mỗi $N > 0$, đường thẳng $y = N$ cắt đồ thị hàm số mũ $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) tại một và chỉ một điểm (*Hình 4*). Nói cách khác, ta có: Với mỗi $N > 0$, tồn tại duy nhất số thực α sao cho $a^{\alpha} = N$.



Hình 4

Ví dụ 2 Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = 3^x.$$

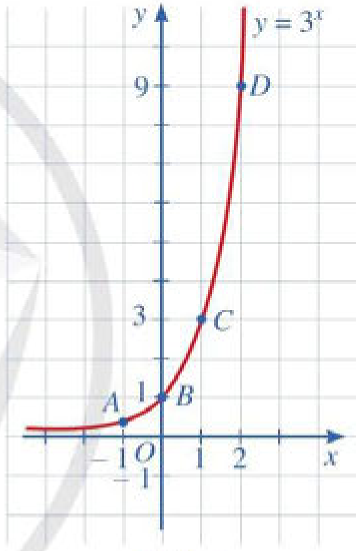
2 Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Giải

Vì hàm số $y = 3^x$ có cơ số $3 > 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = 3^x$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y = 3^x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $A\left(-1 ; \frac{1}{3}\right)$, $B(0 ; 1)$, $C(1 ; 3)$, $D(2 ; 9)$ (*Hình 5*).



Hình 5

Ví dụ 3 Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được cho bởi công thức: $m(t) = m_0.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kì bán rã (*Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021*). Hạt nhân Poloni (Po) là chất phóng xạ α có chu kì bán rã là 138 ngày (*Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021*). Giả sử lúc đầu có 100 gam Poloni. Tính khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày theo đơn vị gam (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Giải

Khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày là :

$$m(100) = 100 . \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{138}} \approx 60,5 \text{ (g)}.$$

II. HÀM SỐ LÔGARIT

1. Định nghĩa

4 Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	?	?	?	?

Nhận xét: Tương ứng mỗi giá trị x dương với giá trị $y = \log_2 x$ xác định một hàm số, hàm số đó gọi là *hàm số lôgarit* cơ số 2.

Ta có định nghĩa sau:

Cho số thực a $(a > 0, a \neq 1)$. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là *hàm số lôgarit* cơ số a.

Tập xác định của hàm số lôgarit $y = \log_a x\,(a > 0, a \neq 1)$ là $(0\,;+\infty)$.

Ví dụ 4 Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lôgarit?

a) $y = \log_x 5$;　　b) $y = \log_x e$;

c) $y = \log_5 x$;　　d) $y = x^5$.

3 Cho hai ví dụ về hàm số lôgarit.

Giải

Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \log_5 x$ là có dạng hàm số lôgarit $y = \log_a x$ (với $a = 5 > 0$ và $a \neq 1$).

Vậy hàm số $y = \log_5 x$ là hàm số lôgarit.

2. Đồ thị và tính chất

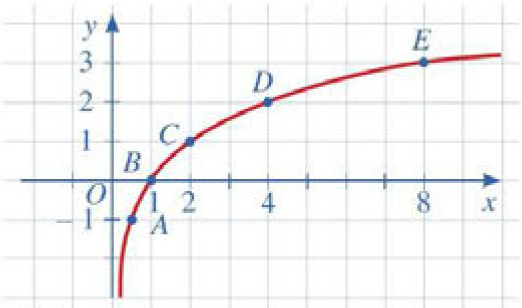
5 Cho hàm số lôgarit $y = \log_2 x$.

a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	0,5	1	2	4	8
y	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, biểu diễn các điểm $(x\ ;\ y)$ trong bảng giá trị ở câu a.

Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $(x\ ;\ \log_2 x)$ với $x \in (0\ ;\ +\infty)$ và nối lại, ta được đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ (*Hình 6*).



Hình 6

c) Cho biết toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ với trục hoành và vị trí của đồ thị hàm số đó so với trục tung.

d) Quan sát đồ thị hàm số $y = \log_2 x$, nêu nhận xét về:

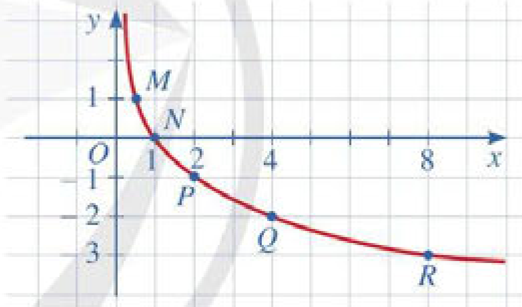
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_2 x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x$;
- Sự biến thiên của hàm số $y = \log_2 x$ và lập bảng biến thiên của hàm số đó.

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ là một đường cong liền nét, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1, nằm ở phía bên phải trục tung và đi lên kể từ trái sang phải.

6 Cho hàm số lôgarit $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	0,5	1	2	4	8
y	?	?	?	?	?



Hình 7

b) Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, hãy biểu diễn các điểm $(x\ ;\ y)$ trong bảng giá trị ở câu a.

Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $\left(x\ ;\ \log_{\frac{1}{2}} x\right)$ với $x \in (0\ ;\ +\infty)$ và nối lại, ta được đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (*Hình 7*).

c) Cho biết toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ với trục hoành và vị trí của đồ thị hàm số đó so với trục tung.

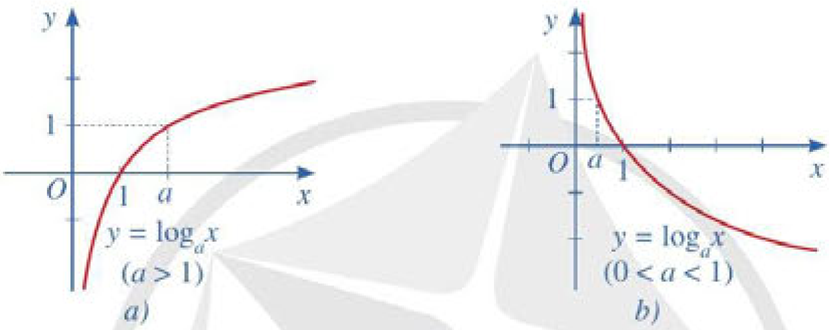
d) Quan sát đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, nêu nhận xét về:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$;
- Sự biến thiên của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ và lập bảng biến thiên của hàm số đó.

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ là một đường cong liền nét, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1, nằm ở phía bên phải trục tung và đi xuống kể từ trái sang phải.

Trong trường hợp tổng quát, ta có nhận xét sau (*Hình 8*):

> Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ là một đường cong liền nét, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1, nằm ở phía bên phải trục tung và đi lên nếu $a > 1$, đi xuống nếu $0 < a < 1$.



Hình 8

Nhận xét: Cho hàm số lôgarit $y = \log_a x$ với $a > 0, a \neq 1$.

$y = \log_a x$ với $a > 1$	$y = \log_a x$ với $0 < a < 1$
• Tập xác định: $(0\,; +\infty)$; tập giá trị: $\mathbb{R}$.	• Tập xác định: $(0\,; +\infty)$; tập giá trị: $\mathbb{R}$.
• Tính liên tục Hàm số $y = \log_a x$ $(a > 1)$ là hàm số liên tục trên khoảng $(0\,; +\infty)$.	• Tính liên tục Hàm số $y = \log_a x$ $(0 < a < 1)$ là hàm số liên tục trên khoảng $(0\,; +\infty)$.
• Giới hạn đặc biệt $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$.	• Giới hạn đặc biệt $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.
• Sự biến thiên Hàm số đồng biến trên $(0\,; +\infty)$.	• Sự biến thiên Hàm số nghịch biến trên $(0\,; +\infty)$.
• Bảng biến thiên	• Bảng biến thiên

Bảng biến thiên ($a > 1$):

x	0	1	$+\infty$
$y = \log_a x$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

Bảng biến thiên ($0 < a < 1$):

x	0	1	$+\infty$
$y = \log_a x$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

Ví dụ 5 Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = \log_3 x.$$

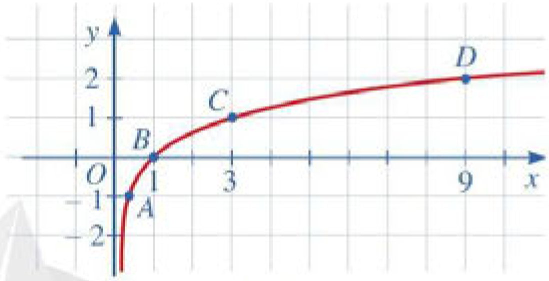
Giải

Vì hàm số $y = \log_3 x$ có cơ số $3 > 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	0 1 $+\infty$
$y = \log_3 x$	$-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$

> **4** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số
>
> $$y = \log_{\frac{1}{3}} x.$$

Đồ thị của hàm số $y = \log_3 x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $A\left(\dfrac{1}{3}\,;-1\right)$, $B(1\,;0)$, $C(3\,;1)$, $D(9\,;2)$ (*Hình 9*).



Hình 9

Ví dụ 6 Lốc xoáy là hiện tượng một luồng không khí xoáy tròn mở rộng ra từ một đám mây dông xuống tới mặt đất (*Hình 10*). Các cơn lốc xoáy thường có sức tàn phá rất lớn. Tốc độ của gió (đơn vị: dặm/giờ) gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức: $S = 93\log d + 65$, (*Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage*) trong đó d (đơn vị: dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy di chuyển được.

Hình 10

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hãy tính tốc độ của gió ở gần tâm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường là:

a) 5 dặm;   b) 10 dặm.

Giải

a) Tốc độ của gió ở gần tâm khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường 5 dặm là:

$$S = 93\log 5 + 65 \approx 130 \text{ (dặm/giờ)}.$$

b) Tốc độ của gió ở gần tâm khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường 10 dặm là:

$$S = 93\log 10 + 65 = 158 \text{ (dặm/giờ)}.$$

BÀI TẬP

1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = 4^x$; b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

2. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = 12^x$; b) $y = \log_5(2x-3)$; c) $y = \log_{\frac{1}{5}}(-x^2+4)$.

3. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên khoảng xác định của hàm số đó? Vì sao?

a) $y = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$; b) $y = \left(\dfrac{\sqrt[3]{26}}{3}\right)^x$; c) $y = \log_\pi x$; d) $y = \log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} x$.

4. Ta coi năm lấy làm mốc để tính dân số của một vùng (hoặc một quốc gia) là năm 0. Khi đó, dân số của quốc gia đó ở năm thứ t là hàm số theo biến t được cho bởi công thức: $S = A.e^{rt}$. Trong đó A là dân số của vùng (hoặc quốc gia) đó ở năm 0 và r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm (*Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021*). Biết rằng dân số Việt Nam năm 2021 ước tính là 98 564 407 người và tỉ lệ tăng dân số 0,93%/năm (*Nguồn: https://danso.org/viet-nam*). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm là như nhau tính từ năm 2021, nêu dự đoán dân số Việt Nam năm 2030 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) .

5. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được (*Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson*). Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0{,}2$. Hỏi em học sinh sẽ nhớ được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày?

6. Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$. Phân tích nồng độ ion hydrogen $[\mathrm{H}^+]$ trong hai mẫu nước sông, ta có kết quả sau:

Mẫu 1: $[\mathrm{H}^+] = 8 \,.\, 10^{-7}$; *Mẫu 2*: $[\mathrm{H}^+] = 2 \,.\, 10^{-9}$.

Không dùng máy tính cầm tay, hãy so sánh độ pH của hai mẫu nước trên.

7. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và người đó không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), người đó sử dụng công thức $y = \log_{1,06}\left(\dfrac{x}{10}\right)$. Hỏi sau bao nhiêu năm thì người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 15 triệu đồng? 20 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

§4 PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm.

Hỏi sau bao nhiêu năm, dân số sẽ gấp đôi dân số của năm lấy làm mốc tính?

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1. Phương trình mũ

1 Trong bài toán ở phần mở đầu, giả sử $r = 1{,}14\%$/năm.

a) Viết phương trình thể hiện dân số sau t năm gấp đôi dân số ban đầu.

b) Phương trình vừa tìm được có ẩn là gì và nằm ở vị trí nào của luỹ thừa?

Phương trình mũ là phương trình có chứa ẩn ở số mũ của luỹ thừa.

Ví dụ 1 Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mũ?

a) $5^{x^2+1} = 25$; b) $2^x = 3^{x+1}$; c) $x^2 = 4$.

Giải

Ta thấy: Hai phương trình $5^{x^2+1} = 25$ và $2^x = 3^{x+1}$ là những phương trình mũ.

1 Cho hai ví dụ về phương trình mũ.

2

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = 3^x$ và đường thẳng $y = 7$.

b) Nhận xét về số giao điểm của hai đồ thị trên. Từ đó, hãy nêu nhận xét về số nghiệm của phương trình $3^x = 7$.

Phương trình mũ cơ bản ẩn x có dạng $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

Nhận xét: Với $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$ thì $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.

Ví dụ 2 Giải mỗi phương trình sau:

a) $4^{2x-3} = 5$; b) $10^{x+1} - 2 . 10^x = 8$.

Giải

Ta có:

a) $4^{2x-3} = 5 \Leftrightarrow 2x - 3 = \log_4 5 \Leftrightarrow 2x = 3 + \log_4 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(3 + \log_4 5)$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{2}(3 + \log_4 5)$.

b) $10^{x+1} - 2 . 10^x = 8 \Leftrightarrow 10 . 10^x - 2 . 10^x = 8 \Leftrightarrow 8 . 10^x = 8 \Leftrightarrow 10^x = 1 \Leftrightarrow x = \log 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$.

Ví dụ 3 Giải phương trình $4^{x-2} = 2^{3x+1}$.

Giải

Ta có: $4^{x-2} = 2^{3x+1} \Leftrightarrow 2^{2(x-2)} = 2^{3x+1}$

$\Leftrightarrow 2(x-2) = 3x + 1$

$\Leftrightarrow 2x - 4 = 3x + 1 \Leftrightarrow x = -5$.

Chú ý

- Với $a > 0$, $a \neq 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
- Cách giải phương trình mũ như trên thường được gọi là phương pháp *đưa về cùng cơ số*.

Ví dụ 4 Giải phương trình đưa ra trong Hoạt động 1 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Giải

Gọi A là dân số ban đầu. Phương trình thể hiện dân số sau t năm gấp đôi dân số ban đầu là:

$$A . e^{0,0114 . t} = 2A \Leftrightarrow e^{0,0114 . t} = 2 \Leftrightarrow 0,0114 . t = \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,0114} \approx 61.$$

Vậy sau 61 năm dân số sẽ gấp đôi dân số ban đầu.

2 Giải mỗi phương trình sau:

a) $9^{16-x} = 27^{x+4}$;

b) $16^{x-2} = 0,25 . 2^{-x+4}$.

2. Phương trình lôgarit

3 Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $pH = -\log[H^+]$ (trong đó $[H^+]$ chỉ nồng độ ion hydrogen). Đo chỉ số pH của một mẫu nước sông, ta có kết quả là $pH = 6,1$.

a) Viết phương trình thể hiện nồng độ x của ion hydrogen $[H^+]$ trong mẫu nước sông đó.

b) Phương trình vừa tìm được có ẩn là gì và nằm ở vị trí nào của lôgarit?

Phương trình lôgarit là phương trình có chứa ẩn trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

Ví dụ 5 Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình lôgarit?

a) $\log_7(x+1)=2$;   b) $\log_2(x^2+x+1)=3$;   c) $\log_x 2=3$.

Giải

Hai phương trình:

$$\log_7(x+1)=2 \text{ và } \log_2(x^2+x+1)=3$$

là những phương trình lôgarit.

3 Cho hai ví dụ về phương trình lôgarit.

4

a) Vẽ đồ thị hàm số $y=\log_4 x$ và đường thẳng $y=5$.

b) Nhận xét về số giao điểm của hai đồ thị trên. Từ đó, hãy nêu nhận xét về số nghiệm của phương trình $\log_4 x=5$.

Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x=b$ $(a>0, a\neq 1)$.

Phương trình đó có một nghiệm là $x=a^b$.

Nhận xét: Với $a>0, a\neq 1$ thì $\log_a f(x)=b \Leftrightarrow f(x)=a^b$.

Ví dụ 6 Giải mỗi phương trình sau:

a) $\log_2 x=5$;   b) $\log_4(5x-4)=2$.

Giải

a) Ta có: $\log_2 x=5 \Leftrightarrow x=2^5 \Leftrightarrow x=32$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=32$.

b) Ta có: $\log_4(5x-4)=2 \Leftrightarrow 5x-4=4^2 \Leftrightarrow 5x=20 \Leftrightarrow x=4$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=4$.

Ví dụ 7 Giải phương trình: $\log_8(3x-6)=-\log_{\frac{1}{8}}(2x-2)$.

Điều kiện xác định là: $\begin{cases}3x-6>0\\2x-2>0,\end{cases}$ tức là $x>2$.

Ta có: $\log_8(3x-6) = -\log_{\frac{1}{8}}(2x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \log_8(3x-6) = \log_8(2x-2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 3x-6 = 2x-2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 4$.

Nhận xét: Cho $a > 0$, $a \neq 1$. Ta có: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

Ví dụ 8 Giải phương trình đưa ra trong Hoạt động 3.

Giải

Phương trình thể hiện nồng độ x của ion hydrogen $[H^+]$ trong mẫu nước sông đó là:

$-\log x = 6{,}1 \Leftrightarrow \log x = -6{,}1 \Leftrightarrow x = 10^{-6{,}1}$.

Vậy nồng độ của ion hydrogen $[H^+]$ trong mẫu nước sông đó là $10^{-6{,}1}$ (mol L^{-1}).

4 Giải mỗi phương trình sau:

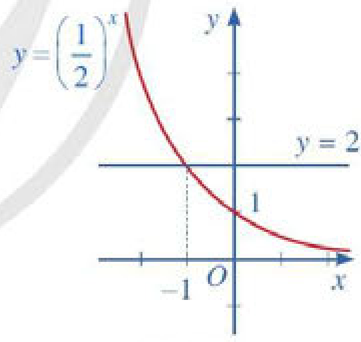
a) $\log_5(2x-4) + \log_{\frac{1}{5}}(x-1) = 0$;

b) $\log_2 x + \log_4 x = 3$.

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1. Bất phương trình mũ

5 Quan sát *Hình 11* và nêu nhận xét về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số mũ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Từ đó, hãy tìm x sao cho $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2$.



Hình 11

- Bất phương trình mũ là bất phương trình có chứa ẩn ở số mũ của luỹ thừa.
- Bất phương trình mũ cơ bản là bất phương trình mũ có một trong những dạng sau:

$a^x > b$; $a^x < b$; $a^x \geq b$; $a^x \leq b$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Ví dụ 9 Bất phương trình nào là bất phương trình mũ cơ bản trong các bất phương trình sau?

a) $3^x > 27$; b) $2^{x+5} > 3^{2x+1}$; c) $7^x \leq 12$.

Giải

Ta thấy: Hai bất phương trình $3^x > 27$ và $7^x \le 12$ là những bất phương trình mũ cơ bản.

5 Cho hai ví dụ về bất phương trình mũ cơ bản.

Sau đây, ta sẽ nêu cách giải bất phương trình mũ cơ bản.

Xét bất phương trình mũ: $a^x > b$ ($a > 0$, $a \ne 1$).

- Nếu $b \le 0$, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\mathbb{R}$ (vì $a^x > 0 \ge b$, $\forall x \in \mathbb{R}$).
- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

  Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

  Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

- Với $a > 1$ thì $a^x > a^\alpha \Leftrightarrow x > \alpha$.
- Với $0 < a < 1$ thì $a^x > a^\alpha \Leftrightarrow x < \alpha$.

Ví dụ 10 Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $5^x > 12$;   b) $(0,3)^{x+1} > 1,7$.

Giải

Ta có:

a) $5^x > 12 \Leftrightarrow x > \log_5 12$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(\log_5 12\ ;+\infty)$.

b) $(0,3)^{x+1} > 1,7 \Leftrightarrow x+1 < \log_{0,3} 1,7 \Leftrightarrow x < -1 + \log_{0,3} 1,7$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty\ ; -1+\log_{0,3} 1,7)$.

6 Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $7^{x+3} < 343$;

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \ge 3$.

Nhận xét: Các bất phương trình mũ cơ bản còn lại được giải tương tự.

Ví dụ 11 Dân số nước ta năm 2021 ước tính là 98 564 407 người.

(Nguồn: https://danso.org/viet-nam)

Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm của nước ta là $r = 0,93\%$. Biết rằng sau t năm, dân số Việt Nam (tính từ mốc năm 2021) ước tính theo công thức: $S = A \,.\, e^{rt}$. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số nước ta vượt 110 triệu người?

Giải

Xét bất phương trình:

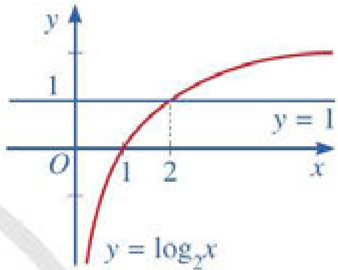
$98\ 564\ 407.\ e^{0,0093t} > 110\ 000\ 000 \Leftrightarrow e^{0,0093t} > 110\ 000\ 000 : 98\ 564\ 407$

$$\Leftrightarrow 0,0093t > \ln\frac{110\ 000\ 000}{98\ 564\ 407} \Leftrightarrow t > 11,803.$$

Vậy từ năm 2033 trở đi thì dân số nước ta vượt quá 110 triệu người.

2. Bất phương trình lôgarit

6 Quan sát *Hình 12* và nêu nhận xét về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số lôgarit $y = \log_2 x$. Từ đó, hãy tìm x sao cho $\log_2 x > 1$.



Hình 12

• Bất phương trình lôgarit là bất phương trình có chứa ẩn trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

• Bất phương trình lôgarit cơ bản là bất phương trình lôgarit có một trong những dạng sau:

$\log_a x > b$; $\log_a x < b$; $\log_a x \geq b$; $\log_a x \leq b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Ví dụ 12 Bất phương trình nào là bất phương trình lôgarit cơ bản trong các bất phương trình sau?

a) $\log_2 x > 3$; b) $\log_5 x > \log_9(x+1)$; c) $\log_8 x \leq 2$.

Giải

Ta thấy: Hai bất phương trình $\log_2 x > 3$ và $\log_8 x \leq 2$ là những bất phương trình lôgarit cơ bản.

7 Cho hai ví dụ về bất phương trình lôgarit cơ bản.

Sau đây, ta sẽ nêu cách giải bất phương trình lôgarit cơ bản.

Xét bất phương trình $\log_a x > b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Bất phương trình tương đương với $\log_a x > \log_a a^b$.

• Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.

• Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

Ví dụ 13 Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{2}} x > -2$;   b) $\log_2(x+1) > 3$.

Giải

Ta có:

a) $\log_{\frac{1}{2}} x > -2 \Leftrightarrow 0 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow 0 < x < 2^2$

$\Leftrightarrow 0 < x < 4.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(0 ; 4)$.

b) $\log_2(x+1) > 3 \Leftrightarrow x+1 > 2^3 \Leftrightarrow x > 7$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(7 ; +\infty)$.

Nhận xét: Các bất phương trình lôgarit cơ bản còn lại được giải tương tự.

8 Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $\log_3 x < 2$;

b) $\log_{\frac{1}{4}}(x-5) \geq -2$.

Ví dụ 14 Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức $L = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (đơn vị: W/m^2) là cường độ âm (*Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021*). Mức cường độ âm ở một khu dân cư được quy định là dưới 60 dB. Hỏi cường độ âm ở khu vực đó phải dưới bao nhiêu W/m^2?

Giải

Ta có: $L < 60 \Leftrightarrow 10\log\frac{I}{10^{-12}} < 60 \Leftrightarrow \log\frac{I}{10^{-12}} < 6 \Leftrightarrow \log I - \log 10^{-12} < 6$

$\Leftrightarrow \log I + 12 < 6 \Leftrightarrow \log I < -6 \Leftrightarrow I < 10^{-6}$.

Vậy cường độ âm ở khu vực đó phải dưới 10^{-6} (W/m^2).

BÀI TẬP

1. Giải mỗi phương trình sau:

a) $(0,3)^{x-3} = 1$;   b) $5^{3x-2} = 25$;

c) $9^{x-2} = 243^{x+1}$;   d) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3$;

e) $\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1)$;   g) $\log_{\frac{1}{7}}(x+9) = \log_{\frac{1}{7}}(2x-1)$.

2. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $3^x > \frac{1}{243}$;

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \le \frac{3}{2}$;

c) $4^{x+3} \ge 32^x$;

d) $\log(x-1) < 0$;

e) $\log_{\frac{1}{5}}(2x-1) \ge \log_{\frac{1}{5}}(x+3)$;

g) $\ln(x+3) \ge \ln(2x-8)$.

3. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất là $x\%$/năm ($x > 0$). Sau 3 năm, người đó rút được cả gốc và lãi là 119,1016 triệu đồng. Tìm x, biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

4. Sử dụng công thức tính mức cường độ âm L ở *Ví dụ 14*, hãy tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được, biết rằng tai người có thể nghe được âm với cường độ âm từ 10^{-12} W/m^2 đến 10 W/m^2.

TÌM TÒI - MỞ RỘNG

Hàm số luỹ thừa

Cho số thực α. Hàm số $y = x^\alpha$ được gọi là *hàm số luỹ thừa*.

Chẳng hạn, các hàm số $y = x^2$; $y = x^{-4}$; $y = x^{\frac{1}{3}}$; $y = x^{\sqrt{2}}$ là những hàm số luỹ thừa.

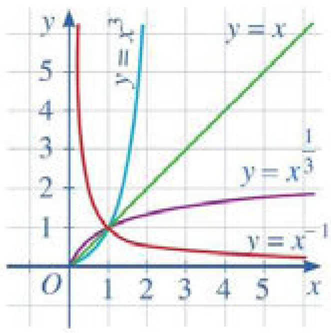
Tập xác định của hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$ tuỳ thuộc vào giá trị của α. Cụ thể như sau:

- Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$;
- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- Với α không nguyên, tập xác định là $(0 ; +\infty)$.

Người ta chứng minh được rằng hàm số luỹ thừa liên tục trên tập xác định của hàm số đó.

Dưới đây, ta chỉ xét các hàm số luỹ thừa có dạng $y = x^\alpha$ với $\alpha \ne 0$ và với tập xác định là $(0 ; +\infty)$.

- Hàm số $y = x^\alpha$ đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$ nếu $\alpha > 0$ và nghịch biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$ nếu $\alpha < 0$.
- *Hình 13* thể hiện đồ thị của một số hàm số luỹ thừa trên khoảng $(0 ; +\infty)$.



Hình 13

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

1. Điều kiện xác định của x^{-3} là:

A. $x \in \mathbb{R}$. B. $x \geq 0$. C. $x \neq 0$. D. $x > 0$.

2. Điều kiện xác định của $x^{\frac{3}{5}}$ là:

A. $x \in \mathbb{R}$. B. $x \geq 0$. C. $x \neq 0$. D. $x > 0$.

3. Tập xác định của hàm số $y = \log_{0,5}(x^2 - 2x + 1)$ là:

A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. C. $(0 ; +\infty)$. D. $(1 ; +\infty)$.

4. Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = (0,5)^x$. B. $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. C. $y = (\sqrt{2})^x$. D. $y = \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$.

5. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \log_3 x$. B. $y = \log_{\sqrt{3}} x$. C. $y = \log_{\frac{1}{e}} x$. D. $y = \log_\pi x$.

6. Nếu $3^x = 5$ thì 3^{2x} bằng:

A. 15. B. 125. C. 10. D. 25.

7. Cho $A = 4^{\log_2 3}$. Khi đó giá trị của A bằng:

A. 9. B. 6. C. $\sqrt{3}$. D. 81.

8. Nếu $\log_a b = 3$ thì $\log_a b^2$ bằng:

A. 9. B. 5. C. 6. D. 8.

9. Nghiệm của phương trình $3^{2x-5} = 27$ là:

A. 1. B. 4. C. 6. D. 7.

10. Nghiệm của phương trình $\log_{0,5}(2 - x) = -1$ là:

A. 0. B. 2,5. C. 1,5. D. 2.

11. Tập nghiệm của bất phương trình $(0,2)^x > 1$ là:

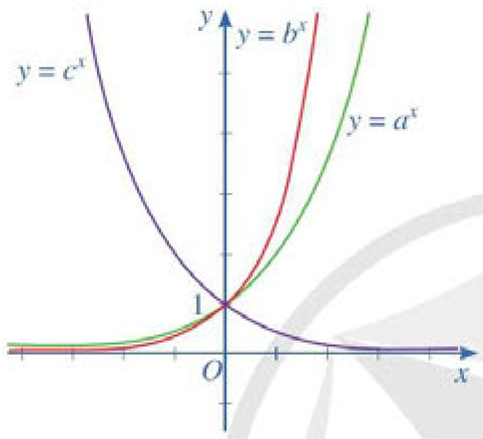
A. $(-\infty ; 0,2)$. B. $(0,2 ; +\infty)$. C. $(0 ; +\infty)$. D. $(-\infty ; 0)$.

12. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{4}} x > -2$ là:

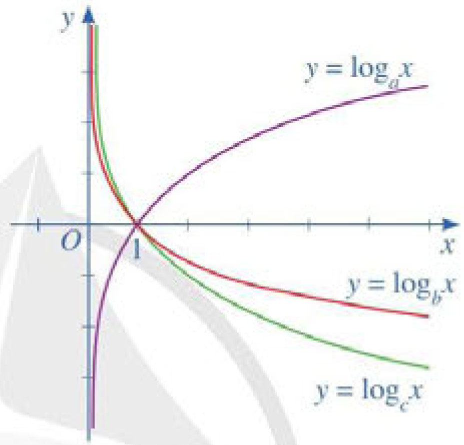
A. $(-\infty ; 16)$. B. $(16 ; +\infty)$. C. $(0 ; 16)$. D. $(-\infty ; 0)$.

13. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1 và đồ thị của ba hàm số mũ $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho bởi *Hình 14*. Kết luận nào sau đây là đúng đối với ba số a, b, c?

A. $c < a < b$. B. $c < b < a$. C. $a < b < c$. D. $b < c < a$.



Hình 14



Hình 15

14. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1 và đồ thị của ba hàm số lôgarit $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được cho bởi *Hình 15*. Kết luận nào sau đây là đúng đối với ba số a, b, c?

A. $c < a < b$. B. $c < b < a$. C. $a < b < c$. D. $b < c < a$.

15. Viết các biểu thức sau về luỹ thừa cơ số a:

a) $A = \sqrt[3]{5\sqrt{\frac{1}{5}}}$ với $a = 5$;

b) $B = \dfrac{4\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{4}}$ với $a = \sqrt{2}$.

16. Cho x, y là các số thực dương. Rút gọn mỗi biểu thức sau:

$$A = \frac{x^{\frac{5}{4}}.y + x.y^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}};$$

$$B = \left(\sqrt[7]{\frac{x}{y}\sqrt[5]{\frac{y}{x}}}\right)^{\frac{35}{4}}.$$

17. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{5}{2^x - 3}$;

b) $y = \sqrt{25 - 5^x}$;

c) $y = \dfrac{x}{1 - \ln x}$;

d) $y = \sqrt{1 - \log_3 x}$.

18. Cho $a > 0$, $a \neq 1$ và $a^{\frac{3}{5}} = b$.

a) Viết a^6; a^3b; $\dfrac{a^9}{b^9}$ theo luỹ thừa cơ số b.

b) Tính: $\log_a b$; $\log_a(a^2b^5)$; $\log_{\sqrt[5]{a}}\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

19. Giải mỗi phương trình sau:

a) $3^{x^2-4x+5} = 9$;

b) $0{,}5^{2x-4} = 4$;

c) $\log_3(2x-1) = 3$;

d) $\log x + \log(x-3) = 1$.

20. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $5^x < 0{,}125$;

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq 3$;

c) $\log_{0,3} x > 0$;

d) $\ln(x+4) > \ln(2x-3)$.

21. Trong một trận động đất, năng lượng giải toả E (đơn vị: Jun, kí hiệu J) tại tâm địa chấn ở M độ Richter được xác định xấp xỉ bởi công thức: $\log E \approx 11{,}4 + 1{,}5M$.

(*Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021*)

a) Tính xấp xỉ năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter.

b) Năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter gấp khoảng bao nhiêu lần năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter?

22. Trong cây cối có chất phóng xạ ${}^{14}_{6}C$. Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được độ phóng xạ của nó bằng 86% độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó. Biết chu kì bán rã của ${}^{14}_{6}C$ là $T = 5\,730$ năm, độ phóng xạ của chất phóng xạ tại thời điểm t được cho bởi công thức $H = H_0e^{-\lambda t}$ với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ (*Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021*).

CHƯƠNG VII

ĐẠO HÀM

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những vấn đề sau: định nghĩa đạo hàm, ý nghĩa hình học của đạo hàm; các quy tắc tính đạo hàm; đạo hàm bậc hai.

§1 ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

Hệ thống khởi động không gian SLS
(Nguồn: https://shutterstock.com)
Hình 1

Tên lửa vũ trụ là phương tiện được chế tạo đặc biệt giúp con người thực hiện các sứ mệnh trong không gian như: tiếp cận đến các hành tinh ngoài Trái Đất, vận chuyển con người và thiết bị lên vũ trụ,... (*Hình 1*).

Nếu quỹ đạo chuyển động của tên lửa được miêu tả bằng hàm số theo thời gian thì đại lượng nào biểu thị độ nhanh chậm của chuyển động tại một thời điểm?

I. ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

1. Các bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm

a) Bài toán tìm vận tốc tức thời

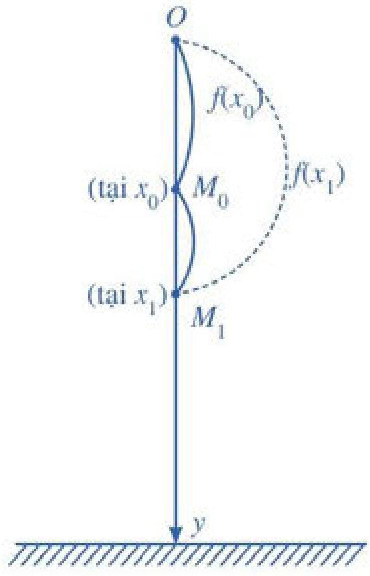
Từ vị trí O (ở một độ cao nhất định nào đó), ta thả một viên bi cho rơi tự do xuống đất và nghiên cứu chuyển động của viên bi. Bằng việc chọn trục Oy theo phương thẳng đứng, chiều dương hướng xuống đất, gốc O là vị trí ban đầu của viên bi, tức là tại thời điểm 0 giây, và bỏ qua sức cản không khí, ta nhận được phương trình chuyển động của viên bi là $y = f(x) = \frac{1}{2}gx^2$ (g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9,8$ m/s^2).

Giả sử tại thời điểm x_0, viên bi ở vị trí M_0 có $y_0 = f(x_0)$; tại thời điểm x_1, viên bi ở vị trí M_1 có $y_1 = f(x_1)$. Khi đó, trong khoảng thời gian từ x_0 đến x_1, quãng đường viên bi đi được là $M_0M_1 = f(x_1) - f(x_0)$ (*Hình 2*). Vậy vận tốc trung bình của viên bi trong khoảng thời gian đó là

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

Nếu $x_1 - x_0$ càng nhỏ thì tỉ số trên càng phản ánh chính xác hơn sự nhanh chậm của viên bi tại thời điểm x_0. Từ đó, người ta xem giới hạn của tỉ số $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ khi x_1 dần đến x_0 là *vận tốc tức thời* tại thời điểm x_0 của viên bi, kí hiệu là $v(x_0)$. Nói cách khác, $v(x_0)=\lim\limits_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

Giá trị $v(x_0)$ gọi là *đạo hàm* của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}gx^2$ tại điểm x_0.



Hình 2

b) Bài toán tìm cường độ tức thời

Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian t, $Q = Q(t)$. Cường độ trung bình trong khoảng thời gian $|t-t_0|$ được xác định bởi công thức $\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}$.

Nếu $|t-t_0|$ càng nhỏ thì tỉ số này càng biểu thị chính xác hơn cường độ dòng điện tại thời điểm t_0. Người ta đưa ra định nghĩa sau đây:

Giới hạn hữu hạn (nếu có) $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}$ được gọi là *cường độ tức thời* của dòng điện tại thời điểm t_0.

2. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

1 Tính vận tốc tức thời của viên bi tại thời điểm $x_0 = 1$ s trong bài toán tìm vận tốc tức thời.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

> Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;b)$ và điểm $x_0 \in (a\,;b)$.
>
> Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm của hàm số* $y = f(x)$ tại x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc y'_{x_0}.

Nhận xét: Trong định nghĩa trên, ta đặt:

$\Delta x = x - x_0$ và gọi Δx là *số gia của biến số tại điểm* x_0;

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ và gọi Δy là *số gia của hàm số ứng với số gia* Δx *tại điểm* x_0.

Khi đó, ta có: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó.

Để tính đạo hàm $f'(x_0)$ của hàm số $y = f(x)$ tại x_0, ta lần lượt thực hiện ba bước sau:

Bước 1. Xét Δx là số gia của biến số tại điểm x_0. Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Bước 2. Rút gọn tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3. Tính $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Kết luận: Nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a$ thì $f'(x_0) = a$.

Ví dụ 1 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2x$ tại $x_0 = 3$ bằng định nghĩa.

Giải

• Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = 3$.

Ta có: $\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = 2(3 + \Delta x) - 6 = 2\ .\ \Delta x$.

Suy ra: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2\ .\ \Delta x}{\Delta x} = 2$.

• Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2 = 2$.

Vậy $f'(3) = 2$.

1 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$ bằng định nghĩa.

Ví dụ 2 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2$ tại điểm x bất kì bằng định nghĩa.

Giải

• Xét Δx là số gia của biến số tại điểm x.

Ta có: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x)$.

Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

• Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

Vậy $f'(x) = 2x$.

2 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$ tại điểm x bất kì bằng định nghĩa.

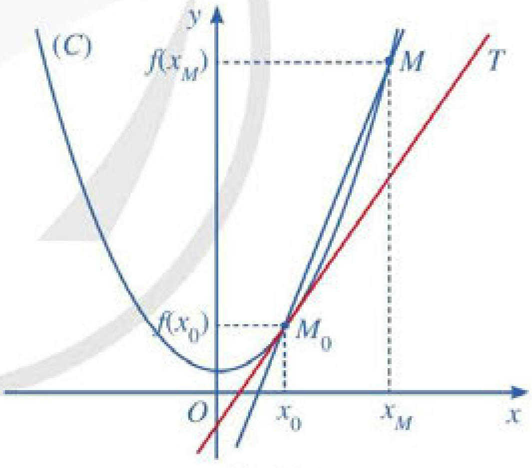
Nhận xét: Hàm số $f(x) = x^2$ có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$. Ta nói hàm số đó có đạo hàm trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$. Một cách tổng quát: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

4. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

Đạo hàm xuất hiện trong nhiều khái niệm vật lí. Chẳng hạn: Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$, với $s = s(t)$ là một hàm số có đạo hàm. Như đã thấy trong bài toán mở đầu, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số tại t_0: $v(t_0) = s'(t_0)$.

II. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

2 Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), một điểm M_0 cố định thuộc (C) có hoành độ x_0. Với mỗi điểm M thuộc (C) khác M_0, kí hiệu x_M là hoành độ của điểm M và k_M là hệ số góc của cát tuyến M_0M. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn $k_0 = \lim\limits_{x_M \to x_0} k_M$. Khi đó, ta coi đường thẳng M_0T đi qua M_0 và có hệ số góc k_0 là *vị trí giới hạn* của cát tuyến M_0M khi điểm M di chuyển dọc theo (C) dần tới M_0.



Hình 3

Đường thẳng M_0T được gọi là *tiếp tuyến* của (C) tại điểm M_0, còn M_0 được gọi là *tiếp điểm* (*Hình 3*).

a) Xác định hệ số góc k_0 của tiếp tuyến M_0T theo x_0.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M_0.

Ta có: $k_0 = \lim\limits_{x_M \to x_0} k_M = \lim\limits_{x_M \to x_0} \frac{f(x_M) - f(x_0)}{x_M - x_0} = f'(x_0)$.

Như vậy, ta có kết luận sau:

• Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0\ ;\ f(x_0))$.

• Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0\ ;\ f(x_0))$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Ví dụ 3 Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (C).

a) Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 3.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3\ ;\ -9)$.

3 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ tại điểm $N(1\ ;\ 1)$.

Giải

a) Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 3 có hệ số góc là:

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-x^2 - (-3^2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3}(-x - 3) = -6.$$

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3\ ;\ -9)$ là: $y = -6(x - 3) + (-9)$ hay $y = -6x + 9$.

BÀI TẬP

1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 3x^3 - 1$ tại điểm $x_0 = 1$ bằng định nghĩa.

2. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 0$.

3. Cho hàm số $y = -2x^2 + x$ có đồ thị (C).

a) Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2\ ;\ -6)$.

4. Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là $C(Q) = Q^2 + 80Q + 3\,500$.

a) Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q + 1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.

c) Hãy tính chi phí sản xuất máy vô tuyến thứ 100.

§2 CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Ta có thể tính đạo hàm của hàm số bằng cách sử dụng định nghĩa. Tuy nhiên, cách làm đó là không thuận lợi khi hàm số được cho bằng những công thức phức tạp. Trong thực tiễn, để tính đạo hàm của một hàm số ta thường sử dụng các quy tắc tính đạo hàm để đưa việc tính toán đó về tính đạo hàm của những hàm số sơ cấp cơ bản.

Đạo hàm của những hàm số sơ cấp cơ bản là gì?
Làm thế nào để thực hiện được các quy tắc tính đạo hàm?

I. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SƠ CẤP CƠ BẢN

1. Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$

1

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2$ tại điểm x_0 bất kì bằng định nghĩa.

b) Dự đoán đạo hàm của hàm số $y = x^n$ tại điểm x bất kì.

Hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Nhận xét: Bằng định nghĩa, ta chứng minh được:

- Đạo hàm của hàm hằng bằng 0: $(c)' = 0$ với c là hằng số;
- Đạo hàm của hàm số $y = x$ bằng 1: $(x)' = 1$.

Ví dụ 1 Cho hàm số $f(x) = x^{10}$.

a) Tính đạo hàm của hàm số trên tại điểm x bất kì.

b) Tính đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 1$.

Giải

a) Ta có: $f'(x) = (x^{10})' = 10x^9$.

b) Đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0 = 1$ là: $f'(1) = 10 \,.\, 1^9 = 10$.

1 Cho hàm số $y = x^{22}$.

a) Tính đạo hàm của hàm số trên tại điểm x bất kì.

b) Tính đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = -1$.

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

2 Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 1$ bằng định nghĩa.

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ và $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ví dụ 2 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 4$.

Giải

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

Vậy đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 4$ là: $f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$.

2 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 9$.

3. Đạo hàm của hàm số lượng giác

3 Sử dụng kết quả $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x$ tại điểm x bất kì bằng định nghĩa.

Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.

Ví dụ 3 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

Giải

Ta có: $f'(x) = \cos x$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ là:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

3 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

4 Bằng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$ tại điểm x bất kì.

Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.

Ví dụ 4 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

Giải

Ta có: $f'(x) = -\sin x$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{6}$ là:

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

4 Một vật dao động theo phương trình $f(x) = \cos x$, trong đó x là thời gian tính theo giây. Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $x_0 = 2$ (s).

5 Bằng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ tại điểm x bất kì, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Ví dụ 5 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Giải

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{4}$ là:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2.$$

5 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ tại điểm $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

6 Bằng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = \cot x$ tại điểm x bất kì, $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Ví dụ 6 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cot x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Giải

Ta có: $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1$.

6 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cot x$ tại điểm $x_0 = -\frac{\pi}{3}$.

4. Đạo hàm của hàm số mũ

7 Sử dụng kết quả $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, tính đạo hàm của hàm số $y = e^x$ tại điểm x bất kì bằng định nghĩa.

Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(e^x)' = e^x$.

Một cách tổng quát, ta có định lí sau:

Hàm số $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \ln a$.

Ví dụ 7 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2^x$ tại điểm $x_0 = 1$.

Giải

Ta có: $f'(x) = 2^x \ln 2$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 1$ là:

$$f'(1) = 2^1 \ln 2 = 2 \ln 2.$$

7 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 10^x$ tại điểm $x_0 = -1$.

5. Đạo hàm của hàm số lôgarit

8 Sử dụng kết quả $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, tính đạo hàm của hàm số $y = \ln x$ tại điểm x dương bất kì bằng định nghĩa.

Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm tại mọi x dương và $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Một cách tổng quát, ta có định lí sau:

Hàm số $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi x dương và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Ví dụ 8 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ tại điểm $x_0 = 1$.

Giải

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 1$ là: $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

8 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \log x$ tại điểm $x_0 = \frac{1}{2}$.

II. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG VÀ ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

9 Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$, cùng có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a ; b)$.

a) Xét hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in (a ; b)$. So sánh:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} \text{ và } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}.$$

b) Nêu nhận xét về $h'(x_0)$ và $f'(x_0) + g'(x_0)$.

Nhận xét: Ta có: $h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, tức là đạo hàm của tổng thì bằng tổng các đạo hàm.

Tương tự, ta cũng có các quy tắc tính đạo hàm của hiệu, tích, thương.

Cụ thể, ta có định lí sau:

Giả sử $f = f(x)$, $g = g(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

$(f + g)' = f' + g'$; $\quad (f - g)' = f' - g'$;

$(fg)' = f'g + fg'$; $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ $(g = g(x) \neq 0)$.

Hệ quả: Cho $f = f(x)$ là hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định.

- Nếu c là một hằng số thì $(cf)' = cf'$.
- $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$ $(f = f(x) \neq 0)$.

Ví dụ 9 Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = x^3 + x$;

b) $g(x) = x^4 - x^2$.

Giải

a) $f'(x) = (x^3)' + (x)' = 3x^2 + 1$.

b) $g'(x) = (x^4)' - (x^2)' = 4x^3 - 2x$.

9 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{x}$ tại điểm x dương bất kì.

Ví dụ 10 Tính đạo hàm của hàm số: $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Giải

Ta có: $\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)' = \dfrac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$.

10 Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \tan x + \cot x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

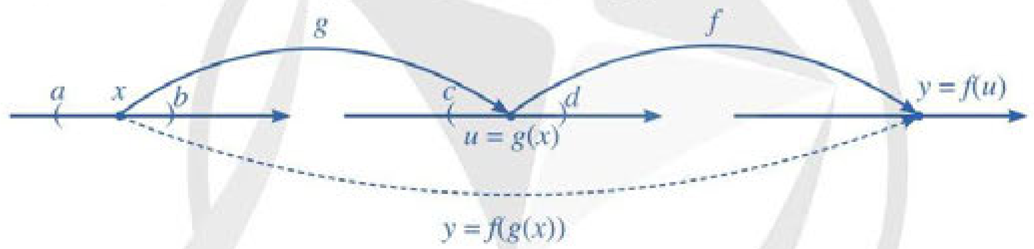
2. Đạo hàm của hàm hợp

10 Cho hàm số $y = f(u) = \sin u$; $u = g(x) = x^2$.

a) Bằng cách thay u bởi x^2 trong biểu thức $\sin u$, hãy biểu thị giá trị của y theo biến số x.

b) Xác định hàm số $y = f(g(x))$.

Giả sử hàm số $u = g(x)$ xác định trên $(a ; b)$ và lấy giá trị trên $(c ; d)$; $y = f(u)$ là hàm số của u, xác định trên $(c ; d)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$. Khi đó, ta có thể lập được một hàm số mới xác định trên $(a ; b)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ theo quy tắc như *Hình 4*.



Hình 4

Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là *hàm hợp* của hai hàm số $y = f(u)$, $u = g(x)$.

Ví dụ 11 Cho hàm số $y = f(u) = \sqrt{u}$ và $u = g(x) = x - 2$. Tìm hàm hợp $y = f(g(x))$ và tập xác định của nó.

Giải

Ta có: $y = f(g(x)) = f(x-2) = \sqrt{x-2}$.

Hàm số trên xác định khi và chỉ khi $x - 2 \geq 0$ hay $x \geq 2$. Tập xác định của hàm số đó là $[2 ; +\infty)$.

Ví dụ 12 Mỗi hàm số sau đây là hàm hợp của hai hàm số nào?

a) $y = \sin(2x + 3)$; b) $y = 2\sin x + 3$.

Giải

a) Đặt $u = 2x + 3$, ta có: $y = \sin u$. Vậy $y = \sin(2x + 3)$ là hàm hợp của hai hàm số $y = \sin u$, $u = 2x + 3$.

11 Hàm số $y = \log_2(3x+1)$ là hàm hợp của hai hàm số nào?

b) Đặt $u = \sin x$, ta có: $y = 2u + 3$. Vậy $y = 2\sin x + 3$ là hàm hợp của hai hàm số $y = 2u + 3$, $u = \sin x$.

Cho hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x_0 và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại $u_0 = g(x_0)$. Xét hàm hợp $y = f(g(x))$.

Ta có quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp như sau:

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \,.\, u'_x$.

Nhận xét: Bảng đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản và hàm hợp:

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp	**Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u = u(x)$)**
$(x^n)' = n \,.\, x^{n-1}$	$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \,.\, \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \,.\, \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \,.\, e^u$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = u' \,.\, a^u \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

Ví dụ 13 Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = (3 - 2x)^4$;

b) $y = \cos(4x + 5)$.

Giải

a) Đặt $u = 3 - 2x$, ta có: $y = u^4$. Khi đó: $y'_u = 4u^3$; $u'_x = -2$.

Theo công thức tính đạo hàm của hàm hợp, ta có:

$$y'_x = y'_u \,.\, u'_x = 4u^3 \,.\, (-2) = -8u^3 = -8(3-2x)^3.$$

b) Đặt $u = 4x + 5$, ta có $y = \cos u$. Khi đó: $y'_u = -\sin u$; $u'_x = 4$.

Theo công thức tính đạo hàm của hàm hợp, ta có:

$$y'_x = y'_u \,.\, u'_x = -\sin u \,.\, 4 = -4\sin u = -4\sin(4x+5).$$

12 Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = e^{3x+1}$;

b) $y = \log_3(2x - 3)$.

BÀI TẬP

1. Cho $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Phát biểu nào sau đây là đúng?

a) $(u + v + w)' = u' + v' + w'$;

b) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;

c) $(uv)' = u'v'$;

d) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'}{v'}$ với $v = v(x) \neq 0$, $v' = v'(x) \neq 0$.

2. Cho $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định.

Chứng minh rằng $(u \,.\, v \,.\, w)' = u' \,.\, v \,.\, w + u \,.\, v' \,.\, w + u \,.\, v \,.\, w'$.

3. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 10$;

b) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$;

c) $y = -2x\sqrt{x}$;

d) $y = 3\sin x + 4\cos x - \tan x$;

e) $y = 4^x + 2e^x$;

g) $y = x\ln x$.

4. Cho hàm số $f(x) = 2^{3x+2}$.

a) Hàm số $f(x)$ là hàm hợp của các hàm số nào?

b) Tìm đạo hàm của $f(x)$.

5. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = \sin 3x + \sin^2 x$;

b) $y = \log_2(2x + 1) + 3^{-2x+1}$.

6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị mỗi hàm số sau:

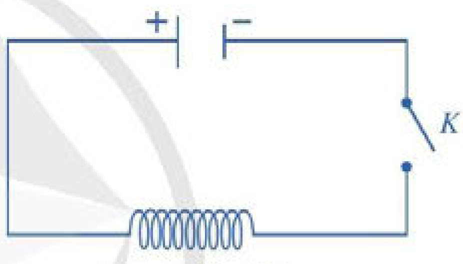
a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$;

b) $y = \ln x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = e$;

c) $y = e^x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

7. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196$ m/s (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét (lấy $g = 9,8$ m/s^2)?

8. Cho mạch điện như *Hình 5*. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0. Khi đóng khoá K, tụ điện phóng điện qua cuộn dây; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức $q(t) = Q_0 \sin \omega t$, trong đó ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ $I(t)$ của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức $I(t) = q'(t)$. Cho biết $Q_0 = 10^{-8}$ (C) và $\omega = 10^6\pi$ (rad/s). Tính cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6$ (s) (tính chính xác đến 10^{-5} (mA)).



Hình 5

TÌM TÒI - MỞ RỘNG

Đạo hàm của hàm số luỹ thừa

Người ta chứng minh được hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Ví dụ:

a) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $(x > 0)$.

b) $\left(x^{-\frac{3}{5}}\right)' = -\frac{3}{5}x^{-\frac{3}{5}-1} = -\frac{3}{5}x^{-\frac{8}{5}} = -\frac{3}{5\sqrt[5]{x^8}}$ $(x > 0)$.

§3 ĐẠO HÀM CẤP HAI

(*Nguồn: https://www.shutterstock.com*)
Hình 6

Khi tham gia giao thông, một ô tô đang chạy với vận tốc 54 km/h (*Hình 6*) thì tài xế nhìn thấy một vật cản phía trước. Để tránh va chạm vật cản, người tài xế hãm phanh, ô tô giảm vận tốc cho đến khi dừng hẳn.

Đại lượng đặc trưng cho sự giảm vận tốc thể hiện kiến thức gì trong toán học?

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Xét hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

a) Tìm y'.

b) Tìm đạo hàm của hàm số y'.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi điểm $x \in (a\ ;\ b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ tiếp tục có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' tại x là *đạo hàm cấp hai* của hàm số $y = f(x)$ tại x, kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Ví dụ 1 Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm x bất kì.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0 = -1$.

Giải

a) Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 8x$ và $f''(x) = 12x^2 - 8$.

b) Ta có: $f''(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 8 = 4$.

Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 3x$.

Ví dụ 2 Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x \neq -2$.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0 = 2$.

Giải

a) Với $x \neq -2$, ta có:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x+2}\right)' = -\frac{(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2};$$

$$f''(x) = \left[\frac{-1}{(x+2)^2}\right]' = \frac{[(x+2)^2]'}{(x+4)^4} = \frac{2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{2}{(x+2)^3}.$$

b) Ta có: $f''(2) = \dfrac{2}{(2+2)^3} = \dfrac{1}{32}$.

II. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

2 Một vật rơi tự do theo phương thẳng đứng có phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9,8$ m/s^2.

a) Tính vận tốc tức thời $v(t)$ tại thời điểm $t_0 = 4$ (s); $t_1 = 4,1$ (s).

b) Tính tỉ số $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ trong khoảng thời gian $\Delta t = t_1 - t_0$.

• Tỉ số $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ gọi là *gia tốc trung bình* của chuyển động trong khoảng thời gian Δt.

• $v'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = a(t)$ gọi là *gia tốc tức thời* của chuyển động tại thời điểm t.

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Đạo hàm cấp hai $s''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t.

Ví dụ 3 Xét dao động điều hoà có phương trình chuyển động $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó A, ω, φ là các hằng số. Tìm gia tốc tức thời tại thời điểm t của chuyển động đó.

Giải

Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t, ta có:

$$v(t) = s'(t) = [A\cos(\omega t + \varphi)]' = -A\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là:

$$s''(t) = v'(t) = [-A\omega\sin(\omega t + \varphi)]' = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi).$$

BÀI TẬP

1. Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{2x+3}$;   b) $y = \log_3 x$;   c) $y = 2^x$.

2. Tính đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3x^2 - 4x + 5$ tại điểm $x_0 = -2$;

b) $y = \log_3(2x+1)$ tại điểm $x_0 = 3$;

c) $y = e^{4x+3}$ tại điểm $x_0 = 1$;

d) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;

e) $y = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ tại điểm $x_0 = 0$.

3. Một vật rơi tự do theo phương thẳng đứng có phương trình $s = \dfrac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9{,}8$ m/s^2.

a) Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2$ (s).

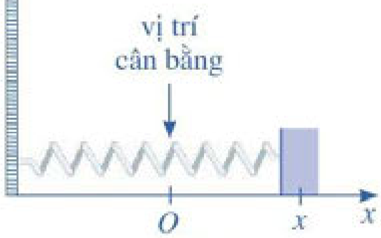
b) Tính gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2$ (s).

4. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tìm vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 3$ (s);

b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được 7 (m).

5. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như *Hình 7*, có phương trình chuyển động $x = 4\sin t$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimét.



Hình 7

a) Tìm vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm t (s).

b) Tìm vị trí, vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t = \dfrac{2\pi}{3}$ (s).

Tại thời điểm đó, con lắc di chuyển theo hướng nào?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

1. Cho $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $(uv)' = u'v'$.

B. $(uv)' = uv'$.

C. $(uv)' = u'v$.

D. $(uv)' = u'v + uv'$.

2. Cho $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'}{v'}$ với $v = v(x) \neq 0$, $v' = v'(x) \neq 0$.

B. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v}$ với $v = v(x) \neq 0$.

C. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ với $v = v(x) \neq 0$.

D. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v'}$ với $v = v(x) \neq 0$, $v' = v'(x) \neq 0$.

3. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = (x^2 + 2x)(x^3 - 3x)$;

b) $y = \dfrac{1}{-2x + 5}$;

c) $y = \sqrt{4x + 5}$;

d) $y = \sin x \cos x$;

e) $y = xe^x$;

g) $y = \ln^2 x$.

4. Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2$;

b) $y = \dfrac{2}{3 - x}$;

c) $y = \sin 2x \cos x$;

d) $y = e^{-2x + 3}$;

e) $y = \ln(x + 1)$;

g) $y = \ln(e^x + 1)$.

5. Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 2t + t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng m/s. Tìm gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 3$ (s);

b) Tại thời điểm mà vận tốc của chất điểm bằng 8 m/s.

6. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4\cos\left(\pi t - \dfrac{2\pi}{3}\right) + 3$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimét.

a) Tìm vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm t (s).

b) Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0.

CHƯƠNG VIII
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những vấn đề sau: hai đường thẳng vuông góc; đường thẳng vuông góc với mặt phẳng; góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc nhị diện; hai mặt phẳng vuông góc; khoảng cách trong không gian; một số hình khối đặc biệt trong không gian.

§1 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Hình 1

Trong *Hình 1*, hai đường thẳng *a*, *b* gợi nên hình ảnh hai đường thẳng vuông góc trong không gian.

Trong không gian, thế nào là hai đường thẳng vuông góc với nhau?

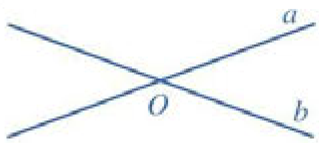
I. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1 Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng *a*, *b*.

a) Nếu *a* và *b* cắt nhau tại *O* (*Hình 2*) thì góc giữa hai đường thẳng *a*, *b* được xác định như thế nào?

b) Nếu $a \parallel b$ thì góc giữa *a* và *b* bằng bao nhiêu độ?

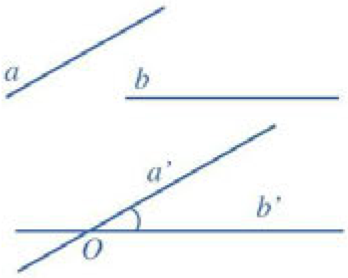
c) Nếu *a* và *b* trùng nhau thì góc giữa *a* và *b* bằng bao nhiêu độ?



Hình 2

Dựa trên góc giữa hai đường thẳng trong mặt phẳng, ta có thể định nghĩa góc giữa hai đường thẳng trong không gian như sau:

> Góc giữa hai đường thẳng *a* và *b* trong không gian là góc giữa hai đường thẳng *a'* và *b'* cùng đi qua một điểm *O* và lần lượt song song (hoặc trùng) với *a* và *b*, kí hiệu (a, b) hoặc $\widehat{(a, b)}$.



Hình 3

Nhận xét

• Góc giữa hai đường thẳng a, b không phụ thuộc vào vị trí điểm O (*Hình 3*). Thông thường, khi tìm góc giữa hai đường thẳng a, b, ta chọn O thuộc a hoặc O thuộc b.

• Góc giữa hai đường thẳng a, b bằng góc giữa hai đường thẳng b, a, tức là $(a, b) = (b, a)$.

• Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá 90^o.

• Nếu $a // b$ thì $(a, c) = (b, c)$ với mọi đường thẳng c trong không gian.

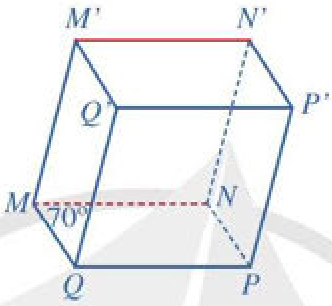
Ví dụ 1 Cho hình hộp $MNPQ.M'N'P'Q'$ có góc giữa hai đường thẳng MN và MQ bằng 70^o (*Hình 4*).

a) Góc giữa hai đường thẳng $M'N'$ và NP bằng góc giữa hai đường thẳng:

A. MN và MP. B. MN và MQ.

C. MP và NP. D. NN' và NP.

b) Tính góc giữa hai đường thẳng $M'N'$ và NP.



Hình 4

1 Cho tứ diện $ABCD$ có M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, DA. Biết tam giác MNP đều. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và BD.

Giải

a) Vì $M'N' // MN$, $NP // MQ$ nên góc giữa hai đường thẳng $M'N'$ và NP bằng góc giữa hai đường thẳng MN và MQ. Chọn phương án B.

b) Vì góc giữa hai đường thẳng MN và MQ bằng 70^o nên góc giữa hai đường thẳng $M'N'$ và NP bằng 70^o.

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

2 Trong *Hình 1* ở phần mở đầu, hai đường thẳng a, b gợi nên hình ảnh hai đường thẳng vuông góc. Góc giữa a và b bằng bao nhiêu độ?

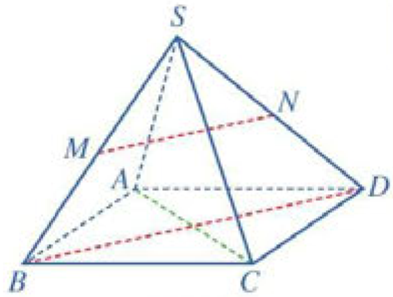
Hai đường thẳng được gọi là *vuông góc* với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^o.

Khi hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, ta kí hiệu $a \perp b$.

Nhận xét: Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó vuông góc với đường còn lại.

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SD (*Hình 5*).

Chứng minh rằng $AC \perp MN$.



Hình 5

> **2** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $AH \perp B'C'$.

Giải

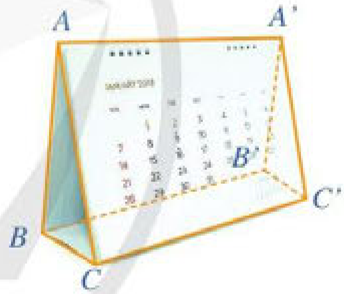
Vì M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD nên $MN \parallel BD$.

Do tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Từ các kết quả trên, ta có $AC \perp MN$.

BÀI TẬP

1. *Hình 6* gợi nên hình ảnh 5 cặp đường thẳng vuông góc. Hãy chỉ ra 5 cặp đường thẳng đó.

Hình 6



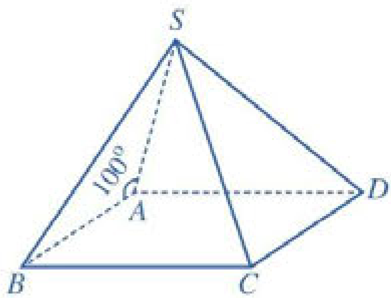
Hình 7
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

2. Trong *Hình 7* cho $ABB'A'$, $BCC'B'$, $ACC'A'$ là các hình chữ nhật.

Chứng minh rằng $AB \perp CC'$, $AA' \perp BC$.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $\widehat{SAB} = 100^\circ$ (*Hình 8*). Tính góc giữa hai đường thẳng:

a) SA và AB; b) SA và CD.



Hình 8

4. Bạn Hoa nói rằng: "Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b vuông góc với nhau". Bạn Hoa nói đúng hay sai? Vì sao?

§2 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Trong *Hình 9*, cột gỗ thẳng đứng và sàn nhà nằm ngang gợi nên hình ảnh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

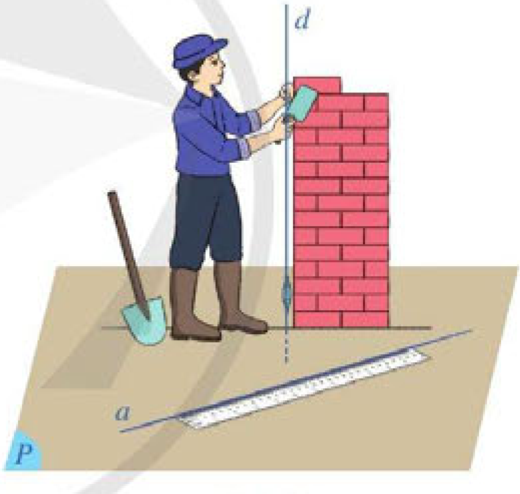
Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng được hiểu như thế nào?

(Nguồn: https://www.shutterstock.com)

Hình 9

I. ĐỊNH NGHĨA

1 *Hình 10* mô tả một người thợ xây đang thả dây dọi vuông góc với nền nhà. Coi dây dọi như đường thẳng d và nền nhà như mặt phẳng (P), khi đó *Hình 10* gợi nên hình ảnh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P). Người thợ xây đặt chiếc thước thẳng ở một vị trí tuỳ ý trên nền nhà. Coi chiếc thước thẳng đó là đường thẳng a trong mặt phẳng (P), nêu dự đoán về mối liên hệ giữa đường thẳng d và đường thẳng a.

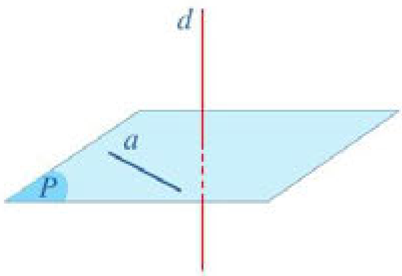


Hình 10

Đường thẳng d vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P).

Ta có định nghĩa sau (*Hình 11*:

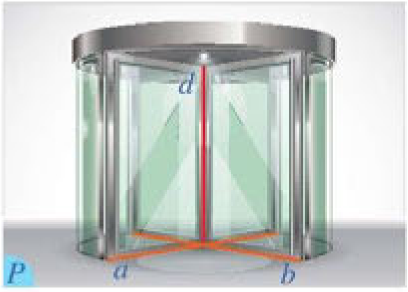
Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu đường thẳng d vuông góc với mọi đường thẳng a trong mặt phẳng (P), kí hiệu $d \perp (P)$ hoặc $(P) \perp d$.



Hình 11

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

2 *Hình 12* mô tả cửa tròn xoay, ở đó trục cửa và hai mép cửa gợi nên hình ảnh các đường thẳng d, a, b; sàn nhà coi như mặt phẳng (P) chứa a và b. Hỏi đường thẳng d có vuông góc với mặt phẳng (P) hay không?



Hình 12

Ta thừa nhận định lí sau:

> Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

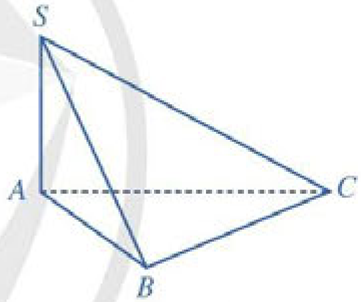
Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp AB$, $SA \perp AC$. Chứng minh rằng $SA \perp (ABC)$ và $SA \perp BC$.

Giải. (*Hình 13*)

Ta có AB và AC là hai đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng (ABC) và $SA \perp AB$, $SA \perp AC$.

Suy ra $SA \perp (ABC)$.

Mà $BC \subset (ABC)$ nên $SA \perp BC$.



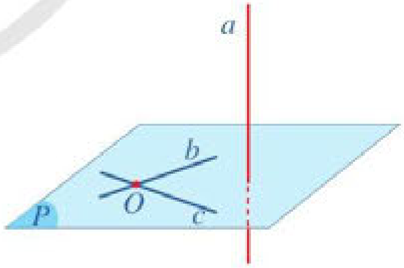
Hình 13

III. TÍNH CHẤT

3 Cho điểm O và đường thẳng a. Gọi b, c là hai đường thẳng phân biệt cùng đi qua điểm O và cùng vuông góc với đường thẳng a (*Hình 14*).

a) Mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng b, c có vuông góc với đường thẳng a hay không?

b) Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a?

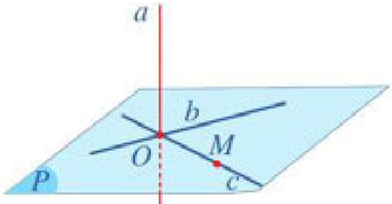


Hình 14

Tính chất 1

> Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Ví dụ 2 Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng a cắt (P) tại O sao cho $a \perp (P)$. Giả sử b là đường thẳng đi qua điểm O và $b \perp a$. Chứng minh rằng $b \subset (P)$.



Hình 15

Giải

Ta lấy điểm M trong mặt phẳng (P), M khác O (*Hình 15*). Nếu $M \in b$ thì $b \subset (P)$. Xét $M \notin b$. Gọi c là đường thẳng đi qua O, M và (Q) là mặt phẳng đi qua b, c. Do $a \perp b$, $a \perp c$ nên $a \perp (Q)$. Qua điểm O có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với đường thẳng a, suy ra hai mặt phẳng đó trùng nhau theo Tính chất 1. Vậy $b \subset (P)$.

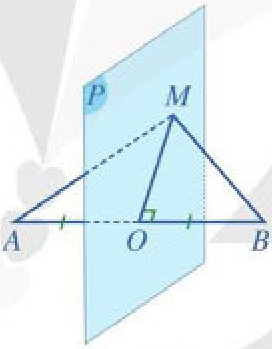
Ví dụ 3 Cho đoạn thẳng AB cố định. Mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB nếu (P) đi qua trung điểm O của đoạn thẳng AB và $(P) \perp AB$. Chứng minh rằng nếu điểm M trong không gian thoả mãn $MA = MB$ thì M thuộc (P).

Giải. (*Hình 16*)

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Nếu M trùng O thì M thuộc (P).

Nếu M khác O thì tam giác MAB cân tại M, suy ra $OM \perp AB$. Theo Ví dụ 2, ta có $OM \subset (P)$, suy ra M thuộc (P).



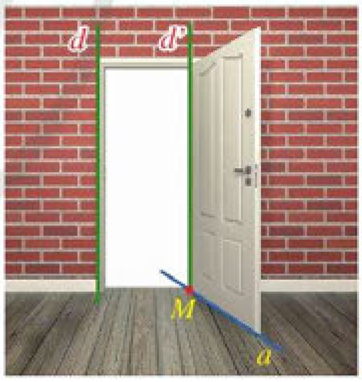
Hình 16

4 Cho mặt phẳng (P) và điểm O. Gọi a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (P) sao cho a và b không đi qua O. Lấy hai mặt phẳng (Q), (R) lần lượt đi qua O và vuông góc với a, b (*Hình 18*).

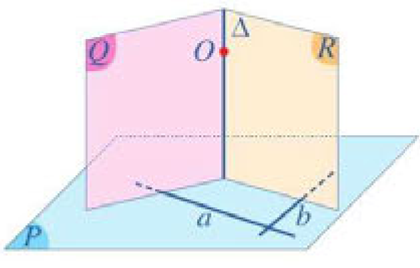
a) Giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (Q), (R) có vuông góc với mặt phẳng (P) hay không?

b) Có bao nhiêu đường thẳng đi qua O và vuông góc với (P)?

2 *Hình 17* mô tả một cửa gỗ có dạng hình chữ nhật, ở đó nẹp cửa và mép dưới cửa lần lượt gợi nên hình ảnh hai đường thẳng d và a. Điểm M là vị trí giao giữa mép gắn bản lề và mép dưới của cửa. Hãy giải thích tại sao khi quay cánh cửa, mép dưới cửa là những đường thẳng a luôn nằm trên mặt phẳng đi qua điểm M cố định và vuông góc với đường thẳng d.



Hình 17



Hình 18

Tính chất 2

Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Ví dụ 4 Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A, B, C thoả mãn $(P) \perp AB$ và $(P) \perp BC$. Chứng minh rằng $(P) \perp AC$.

Giải

Vì hai đường thẳng AB và BC cùng đi qua điểm B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên hai đường thẳng này trùng nhau. Suy ra A, B, C là ba điểm thẳng hàng và $(P) \perp AC$.

3 Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng a cắt nhau tại điểm O, $a \perp (P)$. Giả sử điểm M thoả mãn $OM \perp (P)$. Chứng minh rằng $M \in a$.

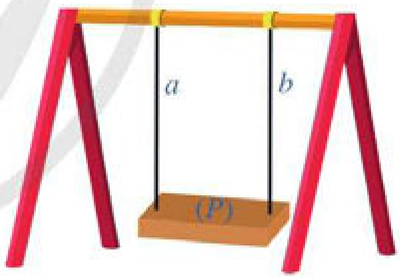
IV. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

5 Trong *Hình 19*, hai thanh sắt và bản phẳng để ngồi gợi nên hình ảnh hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P).

Quan sát *Hình 19* và cho biết:

a) Nếu hai đường thẳng a và b song song với nhau và mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a thì mặt phẳng (P) có vuông góc với đường thẳng b hay không;

b) Nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với mặt phẳng (P) thì chúng có song song với nhau hay không.

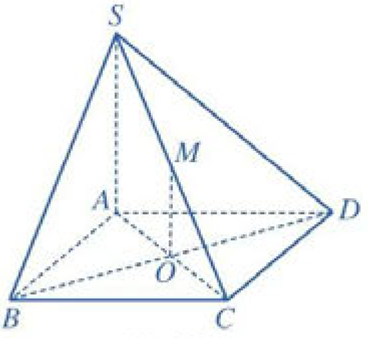


Hình 19

Tính chất 3

- Cho hai đường thẳng song song. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Ví dụ 5 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có AC cắt BD tại O. Gọi M là trung điểm của SC (*Hình 20*). Chứng minh rằng $OM \perp (ABCD)$.



Hình 20

4 Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau tại điểm O. Lấy các điểm A, B thuộc d và khác O; các điểm A', B' thuộc (P) thoả mãn $AA' \perp (P)$, $BB' \perp (P)$. Chứng minh rằng

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB}.$$

Giải

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $OA = OC$. Ta có OM là đường trung bình của tam giác SAC nên $OM // SA$. Mà $SA \perp (ABCD)$ nên $OM \perp (ABCD)$.

6 Trong *Hình 21*, hai mặt sàn của nhà cao tầng và cột trụ bê tông gợi nên hình ảnh hai mặt phẳng (P), (Q) phân biệt và đường thẳng a.

Hình 21

Quan sát *Hình 21* và cho biết:

a) Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng a có vuông góc với mặt phẳng (Q) hay không;

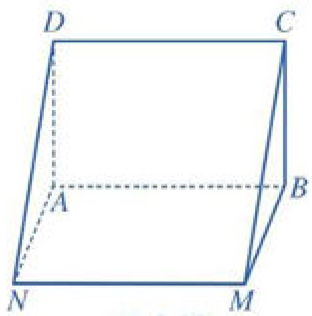
b) Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với đường thẳng a thì chúng có song song với nhau hay không.

Tính chất 4

- Cho hai mặt phẳng song song. Một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Ví dụ 6 Giả sử $ABCD$ và $ABMN$ là hai hình chữ nhật không cùng nằm trong một mặt phẳng (*Hình 22*).

Chứng minh rằng $(ADN) // (BCM)$.



Hình 22

Giải

Vì hai đường thẳng AD, AN cắt nhau trong mặt phẳng (ADN), $AB \perp AD$, $AB \perp AN$ nên $AB \perp (ADN)$. Do hai đường thẳng BC, BM cắt nhau trong mặt phẳng (BCM), $AB \perp BC$, $AB \perp BM$ nên $AB \perp (BCM)$.

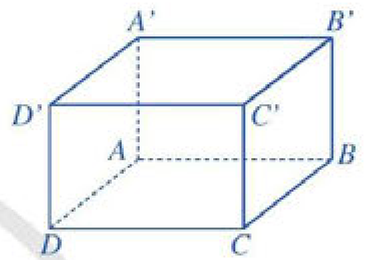
Vì hai mặt phẳng (ADN) và (BCM) cùng vuông góc với AB nên $(ADN) // (BCM)$.

5 Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (P) khác mặt phẳng (ABC), vuông góc với đường thẳng SA và lần lượt cắt các đường thẳng SB, SC tại B', C'. Chứng minh rằng $B'C' // BC$.

Ví dụ 7 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng: $AA' \perp (A'B'C'D')$.

Giải. (*Hình 23*)

Ta có: $AA' \perp (ABCD)$ và $(A'B'C'D') // (ABCD)$ nên $AA' \perp (A'B'C'D')$.



Hình 23

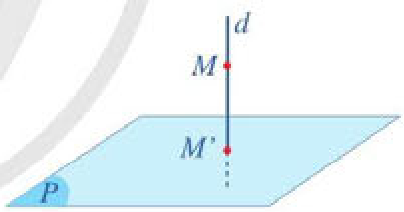
V. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

7 Cho mặt phẳng (P). Xét một điểm M tuỳ ý trong không gian.

a) Có bao nhiêu đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P)?

b) Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại bao nhiêu giao điểm?

Gọi M' là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) (*Hình 24*). Điểm M' được gọi là *hình chiếu vuông góc* (hay *hình chiếu*) của điểm M trên mặt phẳng (P).



Hình 24

Cho mặt phẳng (P). Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu vuông góc M' của điểm đó lên mặt phẳng (P) được gọi là *phép chiếu vuông góc* lên mặt phẳng (P).

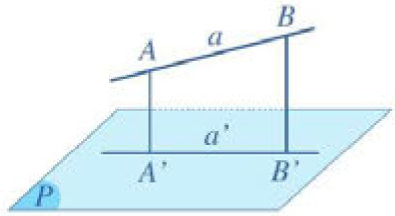
Nhận xét: Vì phép chiếu vuông góc là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song (khi phương chiếu vuông góc với mặt phẳng chiếu) nên phép chiếu vuông góc có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song.

Ví dụ 8 Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng a. Xác định hình chiếu của đường thẳng a trên mặt phẳng (P).

Giải

• Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì hình chiếu của a trên (P) là một điểm, điểm đó là giao điểm của a và (P).

• Để tìm hình chiếu a' của đường thẳng a trên mặt phẳng (P) trong trường hợp đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P), ta có thể làm như sau (*Hình 25*):



Hình 25

Bước 1. Chọn hai điểm thích hợp A, B trên đường thẳng a.

Bước 2. Xác định lần lượt hình chiếu A', B' của hai điểm A, B trên mặt phẳng (P).

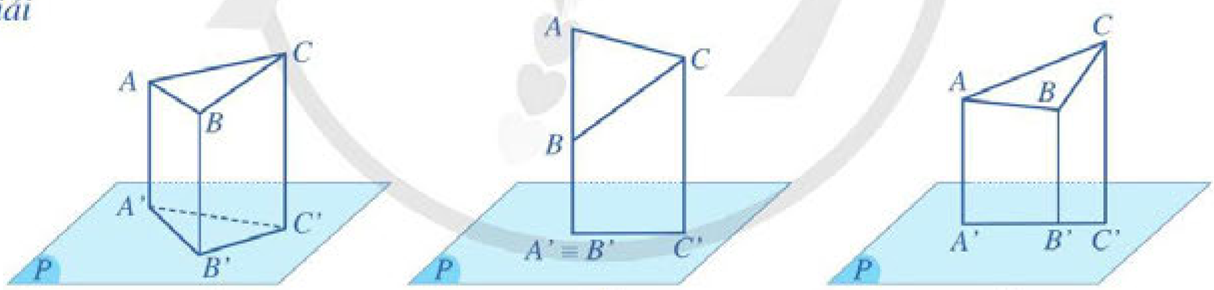
Khi đó, đường thẳng a' đi qua hai điểm A', B' chính là hình chiếu của a trên mặt phẳng (P).

Lưu ý rằng khi đường thẳng a cắt mặt phẳng (P) thì ta thường chọn điểm A là giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P).

6 Cho mặt phẳng (P) và đoạn thẳng AB. Xác định hình chiếu của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P).

Ví dụ 9 Cho mặt phẳng (P) và tam giác ABC. Xác định hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P).

Giải



Hình 26

Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của ba điểm A, B, C trên mặt phẳng (P).

Khi đó xảy ra các trường hợp sau:

a) *Trường hợp 1:* Ba điểm A', B', C' không thẳng hàng.
Khi đó, hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là tam giác $A'B'C'$ (*Hình 26a*).

b) *Trường hợp 2:* Trong ba điểm A', B', C', có hai điểm trùng nhau.
Chẳng hạn, điểm A' trùng với điểm B'. Khi đó, hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là đoạn thẳng $A'C'$ (*Hình 26b*).

c) *Trường hợp 3:* Ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

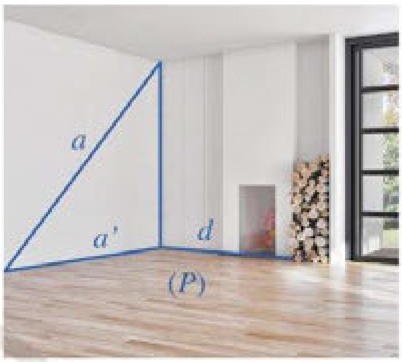
Trong ba điểm A', B', C' thẳng hàng, có một điểm nằm giữa hai điểm còn lại. Chẳng hạn, điểm B' nằm giữa hai điểm A' và C'. Khi đó, hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là đoạn thẳng $A'C'$ (*Hình 26c*).

VI. ĐỊNH LÍ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC

8 Trong *Hình 27*, mặt sàn gợi nên hình ảnh mặt phẳng (P), đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P), đường thẳng a' là hình chiếu của đường thẳng a trên mặt phẳng (P), đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P). Quan sát *Hình 27* và cho biết:

a) Nếu đường thẳng d vuông góc với hình chiếu a' thì đường thẳng d có vuông góc với a hay không;

b) Ngược lại, nếu đường thẳng d vuông góc với a thì đường thẳng d có vuông góc với hình chiếu a' hay không.



Hình 27

Ta có định lí sau, thường được gọi là *Định lí ba đường vuông góc*:

> Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P). Khi đó, d vuông góc với a khi và chỉ khi d vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

Chứng minh

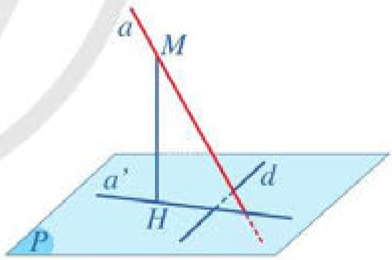
• Nếu a nằm trong (P) thì kết quả là hiển nhiên.

• Ta xét trường hợp a không nằm trong (P) (*Hình 28*).

Lấy điểm $M \in a$. Gọi H là hình chiếu của M trên (P) thì a' đi qua H. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng a và MH. Do $MH \perp (P)$ mà $d \subset (P)$ nên $MH \perp d$.

Giả sử $d \perp a'$. Khi đó, d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng (Q) là a' và MH. Suy ra $d \perp (Q)$, mà $a \subset (Q)$ nên $d \perp a$.

Giả sử $d \perp a$. Khi đó, bằng cách chứng minh tương tự như trên, ta có: $d \perp a'$.



Hình 28

Ví dụ 10 Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại C. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại A, ta lấy điểm S (S khác A).

a) Chứng minh rằng tam giác SBC vuông tại C.

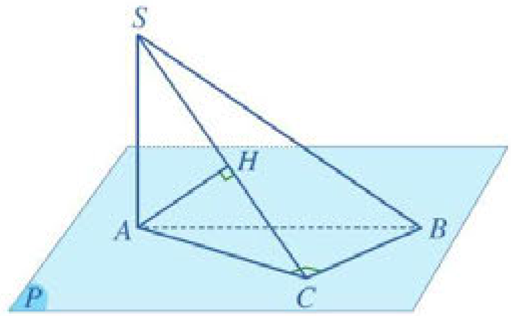
b) Gọi AH là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh rằng $AH \perp (SBC)$.

> **7** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Chứng minh rằng các tam giác SBC và SCD là các tam giác vuông.

Giải. (*Hình 29*)

a) Vì $SA \perp (ABC)$ nên AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABC). Mà $BC \perp AC$ nên theo định lí ba đường vuông góc ta có $BC \perp SC$. Vậy tam giác SBC vuông tại C.

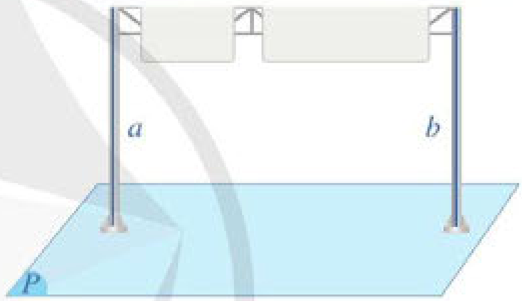
b) Ta có BC vuông góc với hai đường thẳng SA và AC cắt nhau trong mặt phẳng (SAC) nên $BC \perp (SAC)$, mà AH nằm trong mặt phẳng (SAC) nên BC vuông góc với AH. Vì AH vuông góc với hai đường thẳng SC và BC cắt nhau trong mặt phẳng (SBC) nên AH vuông góc với mặt phẳng (SBC).



Hình 29

BÀI TẬP

1. Quan sát *Hình 30* (hai cột của biển báo, mặt đường), cho biết hình đó gợi nên tính chất nào về quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.



Hình 30

2. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).

a) Xác định hình chiếu của các đường thẳng SA, SB, SC trên mặt phẳng (ABC).

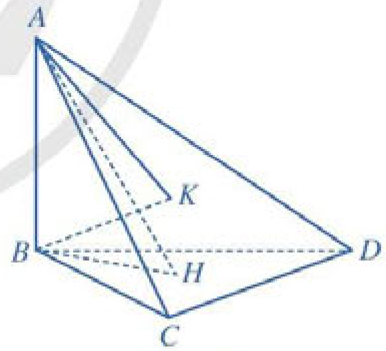
b) Giả sử $BC \perp SA$, $CA \perp SB$. Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác ABC và $AB \perp SC$.

3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD (*Hình 31*). Chứng minh rằng:

a) $CD \perp (ABH)$;

b) $CD \perp (ABK)$;

c) Ba đường thẳng AK, BH, CD cùng đi qua một điểm.



Hình 31

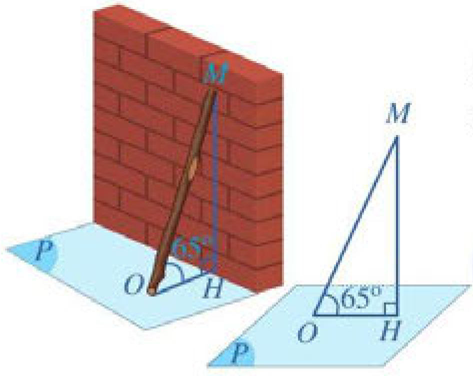
4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, $BC \perp CD$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên AC và AD. Chứng minh rằng:

a) $CD \perp BM$; b) $BM \perp MN$.

5. Cho hình chóp $O.ABC$ có $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 90^\circ$. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp OA$; b) $CA \perp OB$; c) $AB \perp OC$.

§3 GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. GÓC NHỊ DIỆN



Hình 32

Hình 32 biểu diễn một chiếc gậy dựa vào tường. Bạn Hoa nói góc nghiêng giữa chiếc gậy và mặt đất bằng 65°.

Góc nghiêng giữa chiếc gậy và mặt đất được hiểu như thế nào?

I. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1 Quan sát *Hình 32* và cho biết:

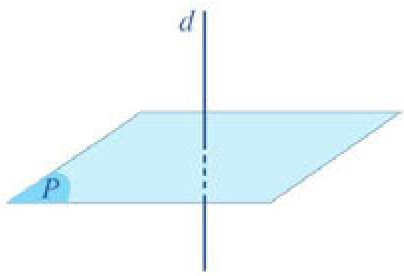
a) Hình chiếu của đường thẳng MO trên mặt phẳng (P) là đường thẳng nào;

b) Góc giữa đường thẳng MO và hình chiếu của đường thẳng đó trên mặt phẳng (P) là góc nào.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P), ta có định nghĩa sau:

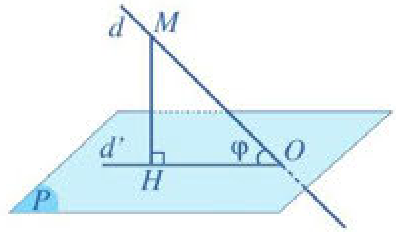
- Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa d và (P) bằng 90°.
- Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu d' của đường thẳng d trên (P).

d vuông góc với (P)



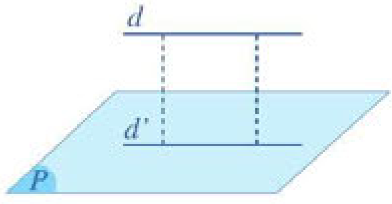
Góc giữa d và (P) bằng 90°.

d cắt (P) nhưng không vuông góc với (P)

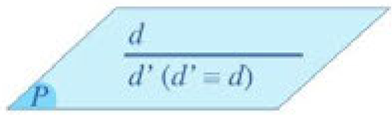


Góc giữa d và (P) bằng góc MOH.

d song song với (P) | d nằm trong (P)



Góc giữa d và (P) bằng 0^o.



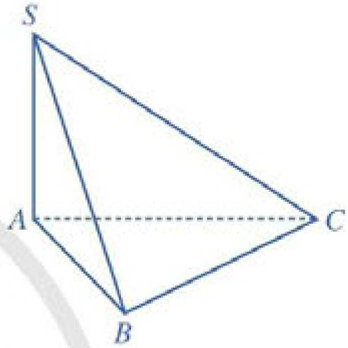
Góc giữa d và (P) bằng 0^o.

Nhận xét: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng có số đo từ 0^o đến 90^o.

Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ (*Hình 33*).

a) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) theo đơn vị độ.

b) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) theo đơn vị độ, biết $SA = \sqrt{3}AB$.



Hình 33

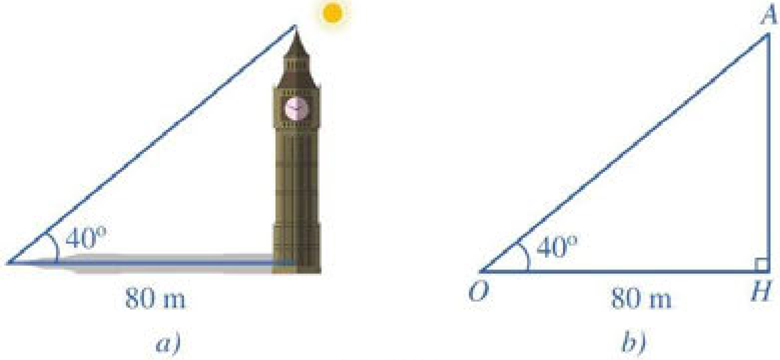
Giải

a) Vì $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 90^o.

b) Vì $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SB trên (ABC). Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $\widehat{SBA}$. Xét tam giác vuông SBA. Vì $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3}$ nên $\widehat{SBA} = 60^o$. Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o.

Ví dụ 2 ***Bài toán đo chiều cao của tháp khi không thể lên tới đỉnh tháp.***

Để ước lượng chiều cao của tháp khi không thể lên tới đỉnh tháp, người ta đo góc giữa tia nắng chiếu qua đỉnh tháp và mặt đất, đo chiều dài của bóng tháp trên mặt đất, từ đó ước lượng được chiều cao của tháp. Giả sử khi tia nắng tạo với mặt đất một góc 40^o, chiều dài của bóng tháp là 80 m (*Hình 34a*). Tính chiều cao của tháp theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 34

> **1** Giả sử ở những giây đầu tiên sau khi cất cánh, máy bay chuyển động theo một đường thẳng tạo với mặt đất một góc 20^o và có vận tốc 200 km/h. Tính độ cao của máy bay so với mặt đất theo đơn vị mét sau khi máy bay rời khỏi mặt đất 2 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Giải

Xét *Hình 34b*, độ dài *AH* chỉ chiều cao của tháp, độ dài *OH* chỉ chiều dài của bóng tháp, độ lớn của góc *AOH* chỉ số đo góc giữa tia nắng và mặt đất. Vì tam giác *OAH* vuông tại *H* nên

$$AH = OH \cdot \tan\widehat{AOH} = 80 \cdot \tan 40^{\circ} \approx 67{,}1 \text{ (m)}.$$

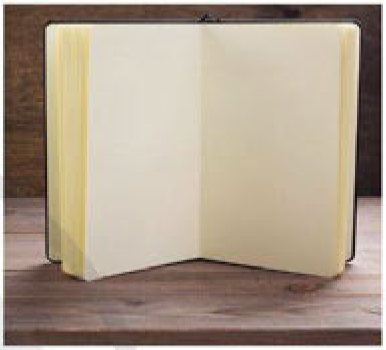
II. GÓC NHỊ DIỆN

1. Khái niệm

Một đường thẳng nằm trong một mặt phẳng chia mặt phẳng đó thành hai phần, mỗi phần được gọi là một *nửa mặt phẳng* và đường thẳng đó được gọi là *bờ* của mỗi nửa mặt phẳng này.

2 Quan sát hình ảnh một quyển sổ được mở ra (*Hình 35*), mỗi trang sổ gợi nên hình ảnh của một nửa mặt phẳng. Nêu đặc điểm của hai nửa mặt phẳng đó.

Hai nửa mặt phẳng đó có chung bờ là đường thẳng đi qua gáy sổ. Hình tạo bởi hai nửa mặt phẳng có chung bờ đó là góc nhị diện.

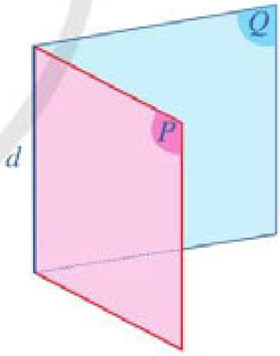


Hình 35

Ta có khái niệm sau:

> *Góc nhị diện* là hình gồm hai nửa mặt phẳng có chung bờ.

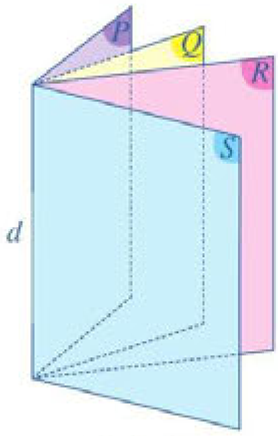
Trong *Hình 36*, ta có góc nhị diện gồm hai nửa mặt phẳng (*P*) và (*Q*) có chung bờ là đường thẳng *d*, kí hiệu là [*P*, *d*, *Q*]. Đường thẳng *d* gọi là *cạnh* của góc nhị diện, mỗi nửa mặt phẳng (*P*) và (*Q*) gọi là một *mặt* của góc nhị diện.



Hình 36

Chú ý: Góc nhị diện còn được kí hiệu là [*M*, *d*, *N*] với *M*, *N* lần lượt là các điểm thuộc các nửa mặt phẳng (*P*), (*Q*) nhưng không thuộc đường thẳng *d*.

Ví dụ 3 Trong không gian cho bốn nửa mặt phẳng (*P*), (*Q*), (*R*), (*S*) cắt nhau theo giao tuyến *d* (*Hình 37*). Hãy chỉ ra ba góc nhị diện có cạnh của góc nhị diện là đường thẳng *d*.



Hình 37

2 Trong không gian cho hai mặt phẳng (α), (β) cắt nhau theo giao tuyến *d*. Hai mặt phẳng (α), (β) tạo nên bao nhiêu góc nhị diện có cạnh của góc nhị diện là đường thẳng *d*?

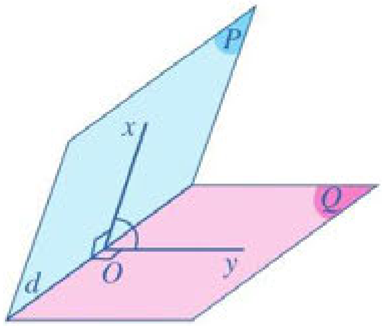
Giải

Ba góc nhị diện có cạnh của góc nhị diện là đường thẳng d, hai mặt lần lượt là: (P) và (Q); (Q) và (R); (R) và (S).

2. Số đo của góc nhị diện

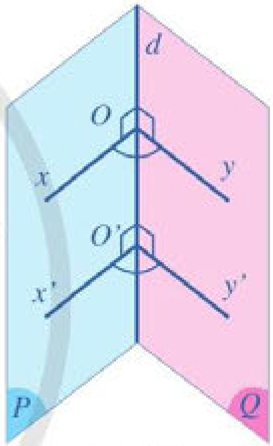
3 Cho góc nhị diện có hai mặt là hai nửa mặt phẳng (P), (Q) và cạnh của góc nhị diện là đường thẳng d.

Qua một điểm O trên đường thẳng d, ta kẻ hai tia Ox, Oy lần lượt thuộc hai nửa mặt phẳng (P), (Q) và cùng vuông góc với đường thẳng d. Góc xOy gọi là *góc phẳng nhị diện* của góc nhị diện đã cho (*Hình 38*).



Hình 38

Giả sử góc $x'O'y'$ cũng là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện đã cho với O' khác O (*Hình 39*).



Hình 39

Hãy so sánh số đo của hai góc xOy và $x'O'y'$.

Nhận xét:

• Số đo góc phẳng nhị diện xOy không phụ thuộc vào vị trí của điểm O trên cạnh nhị diện và được gọi là *số đo* của góc nhị diện đã cho.

• Số đo của góc nhị diện từ 0^o đến 180^o.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Trong không gian, cho góc nhị diện.

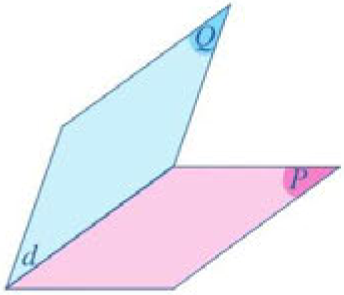
• Một góc có đỉnh thuộc cạnh của góc nhị diện, hai cạnh của góc đó lần lượt thuộc hai mặt nhị diện và cùng vuông góc với cạnh của góc nhị diện, được gọi là *góc phẳng nhị diện* của góc nhị diện đã cho.

• Số đo của một góc phẳng nhị diện được gọi là *số đo của góc nhị diện* đó.

• Nếu số đo góc phẳng nhị diện bằng 90^o thì góc nhị diện đó gọi là *góc nhị diện vuông*.

Ví dụ 4 Trong các công trình xây dựng nhà ở, độ dốc mái được hiểu là độ nghiêng của mái khi hoàn thiện so với mặt phẳng nằm ngang. Khi thi công, mái nhà cần một độ nghiêng nhất định để đảm bảo thoát nước tốt tránh gây ra tình trạng đọng nước hay thấm dột. Quan sát *Hình 40* và cho biết góc nhị diện nào phản ánh độ dốc của mái.

a)



b)

Hình 40

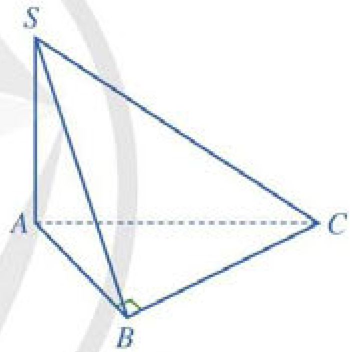
Giải

Giả sử nửa mặt phẳng (P) (minh hoạ mặt phẳng nằm ngang) và nửa mặt phẳng (Q) (minh hoạ mái nhà) cắt nhau theo giao tuyến d (*Hình 40b*). Khi đó góc nhị diện có cạnh là đường thẳng d, hai mặt lần lượt là (P) và (Q) phản ánh độ dốc của mái. Độ dốc đó cũng được phản ánh bởi góc phẳng nhị diện xOy của góc nhị diện trên (*Hình 40a*).

Ví dụ 5 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$ (*Hình 41*). Tính số đo theo đơn vị độ của mỗi góc nhị diện sau:

a) $[B, SA, C]$;

b) $[A, BC, S]$.



Hình 41

Giải

a) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$, $SA \perp AC$. Do đó, góc BAC là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[B, SA, C]$. Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $\widehat{BAC} = 45^{\circ}$. Vậy số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$ bằng 45°.

b) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. Như vậy BC vuông góc với hai đường thẳng AB và SB, suy ra góc SBA là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, BC, S]$.

Trong tam giác vuông SAB, ta có:

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

Suy ra $\widehat{SBA} = 60^{\circ}$. Vậy số đo của góc nhị diện $[A, BC, S]$ bằng 60°.

3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Tính số đo theo đơn vị độ của góc nhị diện:

a) $[B, SA, D]$;

b) $[B, SA, C]$.

BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$.

a) Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$.

b) Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$.

c) Biết $SA = a$, tính số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại O, $SO \perp (ABCD)$, tam giác SAC là tam giác đều.

a) Tính số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $AC \perp (SBD)$. Tính số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD).

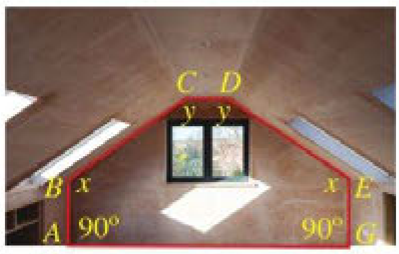
c) Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính số đo của góc nhị diện $[M, SO, D]$.

3. Dốc là đoạn đường thẳng nối hai khu vực hay hai vùng có độ cao khác nhau. Độ dốc được xác định bằng góc giữa dốc và mặt phẳng nằm ngang, ở đó độ dốc lớn nhất là 100%, tương ứng với góc 90^o (độ dốc 10% tương ứng với góc 9^o). Giả sử có hai điểm A, B nằm ở độ cao lần lượt là 200 m, 220 m so với mực nước biển và đoạn dốc AB dài 120 m. Độ dốc đó bằng bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

4. Trong *Hình 42*, máy tính xách tay đang mở gợi nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của màn hình máy tính. Tính độ mở của màn hình máy tính theo đơn vị độ, biết tam giác ABC có độ dài các cạnh là $AB = AC = 30$ cm và $BC = 30\sqrt{3}$ cm.

Hình 42

5. Trong *Hình 43*, xét các góc nhị diện có góc phẳng nhị diện tương ứng là $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, $\widehat{E}$ trong cùng mặt phẳng. Lục giác $ABCDEG$ nằm trong mặt phẳng đó có $AB = GE = 2$ m, $BC = DE$, $\widehat{A} = \widehat{G} = 90^o$, $\widehat{B} = \widehat{E} = x$, $\widehat{C} = \widehat{D} = y$. Biết rằng khoảng cách từ C và D đến AG là 4 m, $AG = 12$ m, $CD = 1$ m. Tìm x, y (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Hình 43

6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi α là số đo của góc nhị diện $[A, BC, S]$. Chứng minh rằng tỉ số diện tích của hai tam giác ABC và SBC bằng $\cos\alpha$.

§4 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

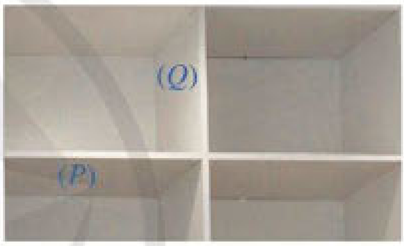
Hình 44

Để công trình xây dựng được an toàn và bền vững, người ta thường xây tường nhà vuông góc với nền nhà (*Hình 44*).

Hình ảnh tường nhà vuông góc với nền nhà gợi nên khái niệm nào trong hình học?

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Hai vách ngăn tủ trong *Hình 45* gợi nên hình ảnh hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện. Các góc nhị diện đó có phải là những góc nhị diện vuông hay không?

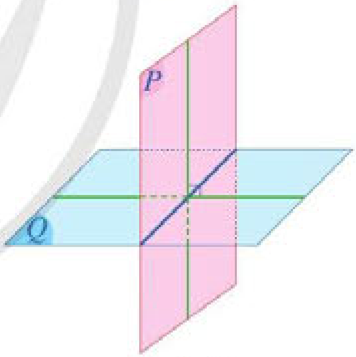


Hình 45

Nhận xét: Hai mặt phẳng cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng vuông.

Ta có định nghĩa sau:

> Hai mặt phẳng cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện. Nếu một trong các góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì hai mặt phẳng đã cho gọi là *vuông góc với nhau*.



Hình 46

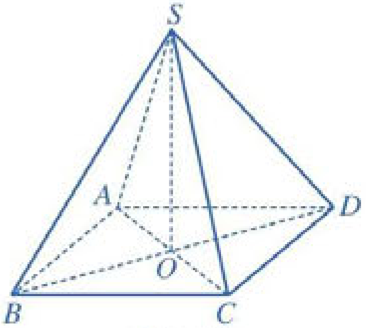
Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, ta kí hiệu $(P) \perp (Q)$ hoặc $(Q) \perp (P)$ (*Hình 46*).

> **1** Nêu ví dụ trong thực tiễn minh hoạ hình ảnh hai mặt phẳng vuông góc.

Ví dụ 1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi, AC cắt BD tại O và $SO \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$.

Giải. (*Hình 47*)

Ta thấy: Góc AOB là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, SO, B]$. Do $OA \perp OB$ nên $\widehat{AOB} = 90^o$. Vì vậy góc nhị diện $[A, SO, B]$ là góc nhị diện vuông. Hai mặt phẳng (SAC), (SBD) cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện, trong đó góc nhị diện $[A, SO, B]$ là góc nhị diện vuông nên $(SAC) \perp (SBD)$.



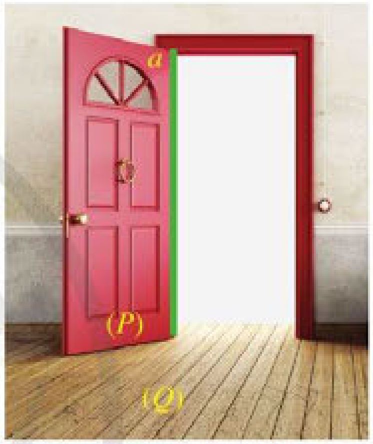
Hình 47

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

2 Nền nhà, cánh cửa và mép cánh cửa ở *Hình 48* gợi nên hình ảnh mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q) và đường thẳng a nằm trên mặt phẳng (P). Quan sát *Hình 48* và cho biết:

a) Vị trí tương đối của đường thẳng a và mặt phẳng (Q);

b) Hai mặt phẳng (P) và (Q) có vuông góc với nhau không.



Hình 48

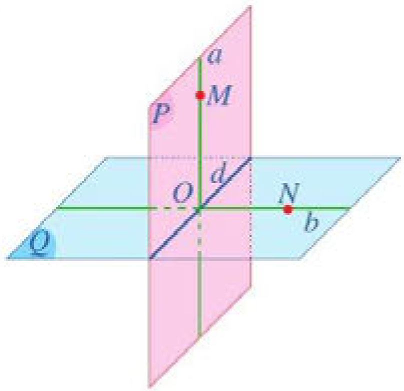
Định lí 1

Nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng mà đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

Chứng minh

Giả sử có hai mặt phẳng (P) và (Q) thoả mãn $a \subset (P)$ và $a \perp (Q)$. Gọi O là giao điểm của a và (Q).

Do hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng chứa O nên hai mặt phẳng đó cắt nhau theo giao tuyến d đi qua O. Trong mặt phẳng (Q), qua O kẻ đường thẳng b vuông góc với d. Lấy hai điểm M, N lần lượt thuộc đường thẳng a, b (*Hình 49*). Ta thấy đường thẳng d vuông góc với hai tia OM, ON, suy ra góc MON là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[M, d, N]$. Do $a \perp (Q)$, $ON \subset (Q)$ nên $a \perp ON$, suy ra $\widehat{MON} = 90^o$. Vì thế, góc nhị diện $[M, d, N]$ là góc nhị diện vuông hay $(P) \perp (Q)$.



Hình 49

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (*Hình 50*). Chứng minh rằng:

a) $(SAB) \perp (ABCD)$; b) $(SAB) \perp (SAD)$.

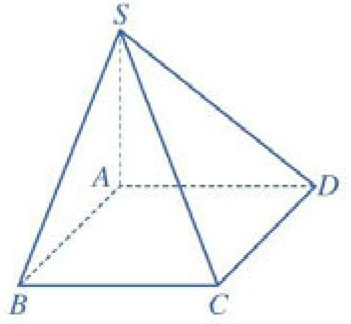
Giải

a) Do $SA \perp (ABCD)$, $SA \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABCD)$.

b) Vì $SA \perp (ABCD)$, $AB \subset (ABCD)$ nên $SA \perp AB$.

Do AB vuông góc với hai đường thẳng SA và AD cắt nhau trong mặt phẳng (SAD) nên $AB \perp (SAD)$.

Ta có: $AB \perp (SAD)$, $AB \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (SAD)$.



Hình 50

2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$.

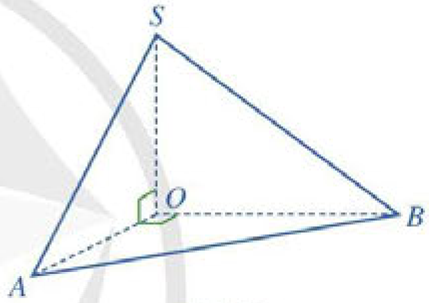
III. TÍNH CHẤT

3 Cho hình chóp $S.OAB$ thoả mãn $(AOS) \perp (AOB)$, $\widehat{AOS} = \widehat{AOB} = 90^\circ$ (*Hình 51*).

a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (AOS) và (AOB) là đường thẳng nào?

b) SO có vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng (AOS) và (AOB) hay không?

c) SO có vuông góc với mặt phẳng (AOB) hay không?



Hình 51

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

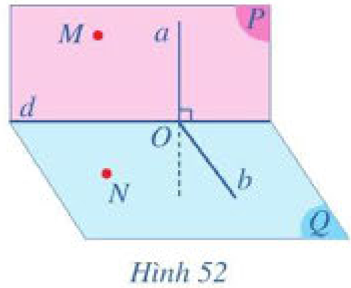
Định lí 2

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

Chứng minh

Cho hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Cho đường thẳng $a \subset (P)$ sao cho $a \perp d$. Gọi O là giao điểm của a và d.

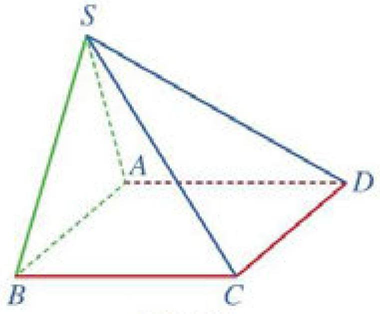
Lấy hai điểm M, N lần lượt trên hai mặt phẳng (P), (Q) sao cho M, N không thuộc đường thẳng d. Gọi góc aOb là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[M, d, N]$ (*Hình 52*). Do góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông nên $\widehat{aOb} = 90^\circ$, tức là $a \perp Ob$. Đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng (Q) là d và Ob nên $a \perp (Q)$.



Hình 52

3 Cho tứ diện $ABCD$ có $(ABD) \perp (BCD)$ và $CD \perp BD$. Chứng minh rằng tam giác ACD vuông.

Ví dụ 3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (*Hình 53*). Chứng minh rằng: $(SBC) \perp (SAB)$.



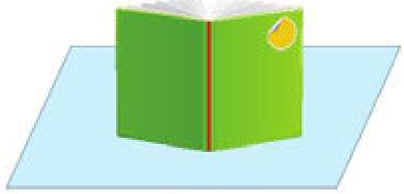
Hình 53

Giải

Do $(SAB) \perp (ABCD)$, $(SAB) \cap (ABCD) = AB$, $BC \subset (ABCD)$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$.

Ta có $BC \subset (SBC)$ và $BC \perp (SAB)$, suy ra $(SBC) \perp (SAB)$.

4 Trong *Hình 54*, hai bìa của cuốn sách gợi nên hình ảnh hai mặt phẳng vuông góc với mặt bàn. Hãy dự đoán xem gáy sách có vuông góc với mặt bàn hay không.

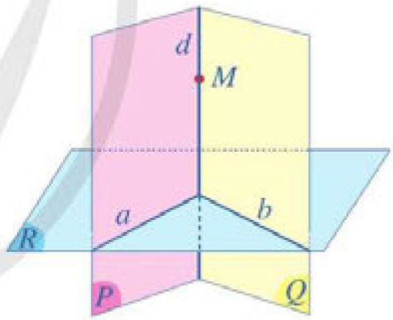

Hình 54

Định lí 3

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

Chứng minh

Giả sử hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau theo giao tuyến d; (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R). Gọi a, b lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (R) với hai mặt phẳng (P), (Q). Xét điểm M thuộc đường thẳng d (*Hình 55*).

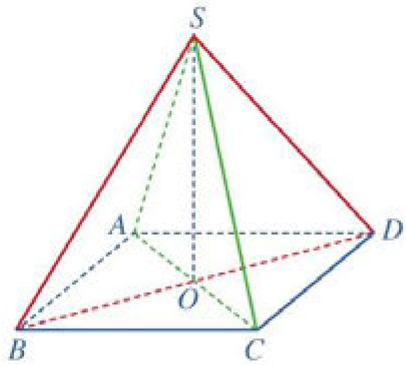


Hình 55

Trong mặt phẳng (P), gọi d_1 là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a. Theo Định lí 2, ta có: $d_1 \perp (R)$.

Trong mặt phẳng (Q), gọi d_2 là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng b. Theo Định lí 2, ta có: $d_2 \perp (R)$. Suy ra d_1 trùng d_2 nên hai đường thẳng đó cùng nằm trên cả hai mặt phẳng (P) và (Q). Cho nên d_1, d_2 và d trùng nhau. Vậy $d \perp (R)$.

Ví dụ 4 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a với tâm O, $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ (*Hình 56*).



Hình 56

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

Giải

a) Ta có $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SBD) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \cap (SBD) = SO$. Suy ra $SO \perp (ABCD)$.

b) Do $SO \perp (ABCD)$ nên góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SAO.

Vì tam giác SAO vuông tại O có $SO = AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên tam giác SAO vuông cân tại O.

Suy ra $\widehat{SAO} = 45^{\circ}$. Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là 45°.

4 Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp SB$, $SB \perp SC$, $SC \perp SA$. Chứng minh rằng:

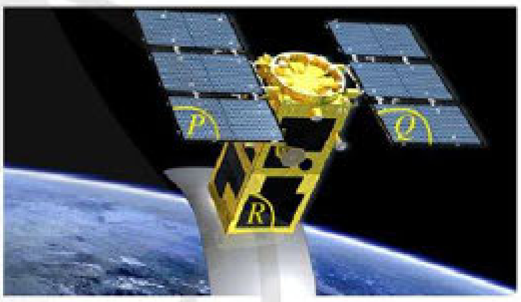
a) $(SAB) \perp (SBC)$;

b) $(SBC) \perp (SCA)$;

c) $(SCA) \perp (SAB)$.

BÀI TẬP

1. Quan sát ba mặt phẳng (P), (Q), (R) ở *Hình 57*, chỉ ra hai cặp mặt phẳng mà mỗi cặp gồm hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Hãy sử dụng kí hiệu để viết những kết quả đó.



Hình ảnh mô phỏng vệ tinh LOTUSat-1
(*Nguồn: JICA Việt Nam*)
Hình 57

2. Chứng minh định lí sau: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

3. Chứng minh các định lí sau:

a) Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng đó thì vuông góc với mặt phẳng còn lại;

b) Nếu hai mặt phẳng (phân biệt) cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau theo một giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

4. Cho một đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng cho trước. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng đó và vuông góc với mặt phẳng đã cho.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy, tam giác SAB vuông cân tại S. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:

a) $SM \perp (ABCD)$; b) $AD \perp (SAB)$; c) $(SAD) \perp (SBC)$.

6. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh cùng bằng a, hai mặt phẳng $(A'AB)$ và $(A'AC)$ cùng vuông góc với (ABC).

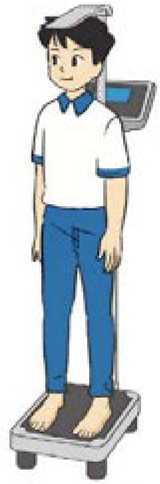
a) Chứng minh rằng $AA' \perp (ABC)$.

b) Tính số đo góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC).

§5 KHOẢNG CÁCH

Hình 58 mô tả cách đo chiều cao của một người khi kiểm tra sức khoẻ. Coi mặt bản sắt người đó đứng lên là mặt phẳng (P), mặt bản sắt áp vào đầu người đó là mặt phẳng (Q) song song với (P).

Chiều cao của người đó gợi nên khái niệm nào trong hình học liên quan đến hai mặt phẳng song song (P) và (Q)?

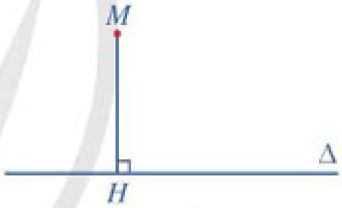


Hình 58

I. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Ta đã biết khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong mặt phẳng. Trong không gian, khái niệm khoảng cách đó được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

Cho đường thẳng Δ và điểm M không thuộc Δ. Gọi H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng Δ. Độ dài đoạn thẳng MH gọi là *khoảng cách* từ điểm M đến đường thẳng Δ, kí hiệu $d(M, \Delta)$.

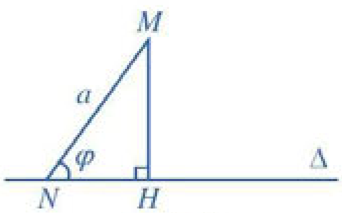


Hình 59

Trong *Hình 59*, ta có $d(M, \Delta) = MH$.

Chú ý: Khi điểm M thuộc đường thẳng Δ thì $d(M, \Delta) = 0$.

Ví dụ 1 Cho đoạn thẳng MN có độ dài a và đường thẳng Δ đi qua N thoả mãn góc giữa hai đường thẳng MN và Δ là φ $(0^\circ < \varphi < 90^\circ)$. Tính khoảng cách từ M đến Δ theo a, φ.



Hình 60

Giải. (*Hình 60*)

Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng Δ. Khi đó $d(M, \Delta) = MH$. Vì góc giữa hai đường thẳng MN và Δ là φ nên $\widehat{MNH} = \varphi$.

Suy ra $MH = MN \,.\, \sin\varphi = a\sin\varphi$. Vậy $d(M, \Delta) = a\sin\varphi$.

II. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

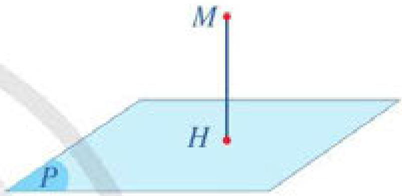
1 Khi lắp thiết bị cho nhà bạn Nam, bác thợ khoan tường tại vị trí M trên tường có độ cao so với nền nhà là $MH = 80$ cm. Quan sát *Hình 61*, nền nhà gợi nên mặt phẳng (P), cho biết độ dài đoạn thẳng MH gợi nên khái niệm gì trong hình học liên quan đến điểm M và mặt phẳng (P).

Hình 61

Nhận xét: Độ dài đoạn thẳng MH gợi nên khái niệm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Ta có định nghĩa sau (*Hình 62*):

> Cho mặt phẳng (P) và điểm M không thuộc mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (P). Độ dài đoạn thẳng MH gọi là *khoảng cách* từ điểm M đến mặt phẳng (P), kí hiệu $d(M, (P))$.



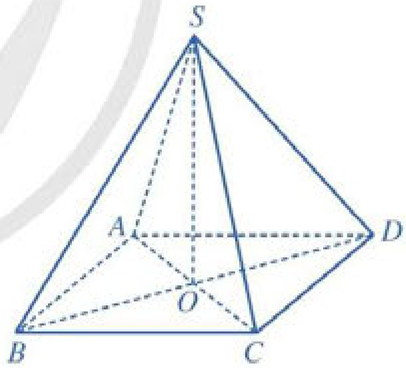
Hình 62

Chú ý: Khi điểm M thuộc mặt phẳng (P) thì $d(M, (P)) = 0$.

Ví dụ 2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, O là giao điểm của AC và BD, $SO \perp (ABCD)$, $SO = a$. Tính:

a) Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).



Hình 63

Giải. (*Hình 63*)

a) Ta có: $O \in (ABCD)$, $SO \perp (ABCD)$.

Suy ra khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là $SO = a$.

b) Do $SO \perp (ABCD)$, $BO \subset (ABCD)$ nên $SO \perp BO$.

Vì BO vuông góc với hai đường thẳng AC và SO cắt nhau trong (SAC) nên $BO \perp (SAC)$. Do $O \in (SAC)$, $BO \perp (SAC)$ nên khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) là $BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

> **1** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AI \perp BC$ $(I \in BC)$, $AH \perp SI$ $(H \in SI)$. Chứng minh rằng khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng AH.

III. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

2 Trong *Hình 64*, hai mép của con đường gợi nên hình ảnh hai đường thẳng song song Δ và Δ'. Xét điểm A trên đường thẳng Δ.

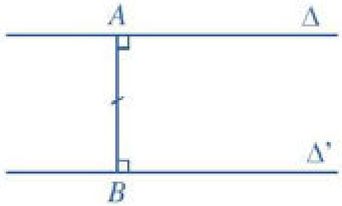
a) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ' có phụ thuộc vào vị trí của điểm A trên đường thẳng Δ hay không? Vì sao?

b) Khoảng cách đó gợi nên khái niệm gì trong hình học liên quan đến hai đường thẳng song song Δ và Δ'?

Hình 64

Ta có định nghĩa sau:

> *Khoảng cách* giữa hai đường thẳng song song Δ, Δ' là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia, kí hiệu $d(\Delta, \Delta')$.



Hình 65

Trong *Hình 65*, ta có $d(\Delta, \Delta') = AB$ với $A \in \Delta$, $B \in \Delta'$, $AB \perp \Delta$, $AB \perp \Delta'$ và $\Delta // \Delta'$.

Ví dụ 3 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a$, góc giữa hai đường thẳng AB và DD' bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'B'$.

Giải. (*Hình 66*)

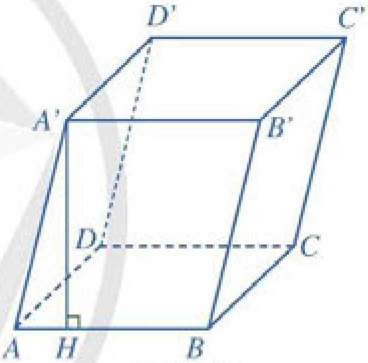
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên AB. Do $AB // A'B'$ nên $d(AB, A'B') = A'H$.

Vì $AA' // DD'$ nên góc giữa đường thẳng AB và AA' bằng góc giữa đường thẳng AB và DD'. Suy ra $\widehat{A'AH} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông HAA' có

$$A'H = AA' . \sin\widehat{A'AH} = a\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $d(AB, A'B') = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Hình 66

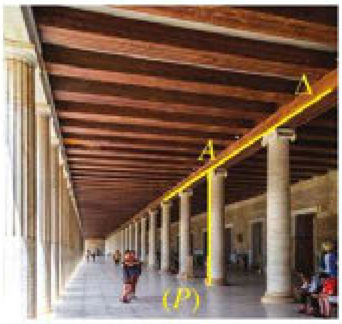
2 Người ta dựng các cột đèn vuông góc với mặt đường, trong đó mỗi cột đèn gợi nên hình ảnh một đường thẳng. Khoảng cách giữa hai chân cột đèn liên tiếp đo được là 5 m. Tại sao có thể nói khoảng cách giữa hai cột đèn đó là 5 m?

IV. KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

3 Trong *Hình 67*, thanh gỗ dọc phía trên các cột và mặt đường hành lang gợi nên hình ảnh đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) song song với nhau, chiều cao của chiếc cột có đỉnh cột A là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P).

a) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) có phụ thuộc vào vị trí của điểm A trên đường thẳng Δ hay không? Vì sao?

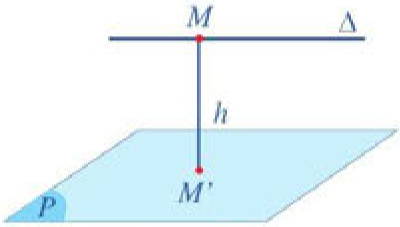
b) Khoảng cách đó gợi nên khái niệm nào trong hình học liên quan đến đường thẳng Δ và mặt phẳng (P)?



Hình 67

Ta có định nghĩa sau:

> Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P). *Khoảng cách* giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng Δ đến mặt phẳng (P), kí hiệu $d(\Delta, (P))$.



Hình 68

Trong *Hình 68*, ta có: $d(\Delta, (P)) = MM' = h$, trong đó $M \in \Delta$, $M' \in (P)$, $MM' \perp (P)$ và $\Delta \parallel (P)$.

Ví dụ 4 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh $CD \parallel (SAB)$ và tính khoảng cách giữa CD và mặt phẳng (SAB).

Giải. (*Hình 69*)

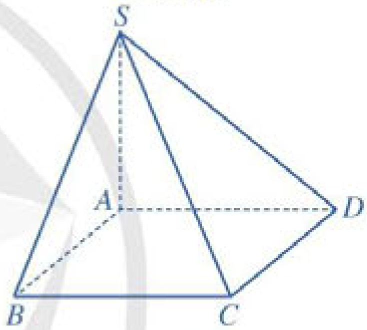
Do $CD \parallel AB$, $AB \subset (SAB)$, $CD \not\subset (SAB)$ nên $CD \parallel (SAB)$.

Vì $D \in CD$ nên $d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB))$.

Do $SA \perp (ABCD)$, $DA \subset (ABCD)$ nên $SA \perp DA$.

Vì DA vuông góc với hai đường thẳng AB, SA cắt nhau trong (SAB) nên $DA \perp (SAB)$.

Do đó $d(D, (SAB)) = DA = a$. Vậy $d(CD, (SAB)) = a$.



Hình 69

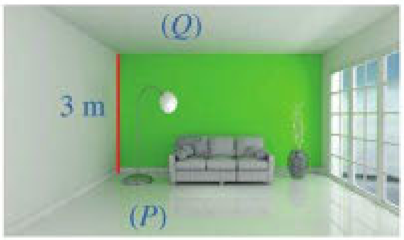
> **3** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, góc giữa SA và mp(ABC) là 60°. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SA và SB. Chứng minh $MN \parallel (ABC)$ và tính $d(MN, (ABC))$.

V. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

4

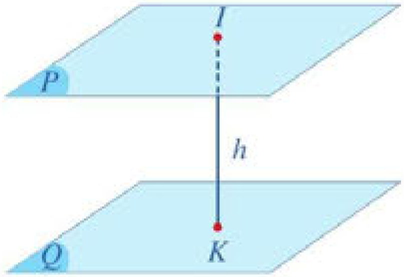
a) Trong *Hình 70*, sàn nhà và trần nhà của căn phòng gợi nên hình ảnh hai mặt phẳng song song (P), (Q). Chiều cao của căn phòng là 3 m.

Chiều cao đó gợi nên khái niệm gì trong hình học liên quan đến hai mặt phẳng song song (P), (Q)?



Hình 70

b) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Xét điểm I tuỳ ý trong mặt phẳng (P), lấy K là hình chiếu của I trên (Q) (*Hình 71*). Khoảng cách IK từ điểm I đến mặt phẳng (Q) có phụ thuộc vào vị trí của điểm I trong mặt phẳng (P) hay không? Vì sao?



Hình 71

Ta có định nghĩa sau:

> *Khoảng cách* giữa hai mặt phẳng song song (P), (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia, kí kiệu $d((P), (Q))$.

Trong *Hình 71*, ta có: $d((P),(Q)) = IK = h$ với $I \in (P)$, $K \in (Q)$, $IK \perp (P)$, $IK \perp (Q)$ và $(P) // (Q)$.

Ví dụ 5 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và đáy là hình vuông. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là giao điểm H của AC và BD. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.

Giải. (*Hình 72*)

Vì H là trung điểm của AC nên $AH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do $A'H \perp (ABCD)$ và $AH \subset (ABCD)$ nên $A'H \perp AH$.

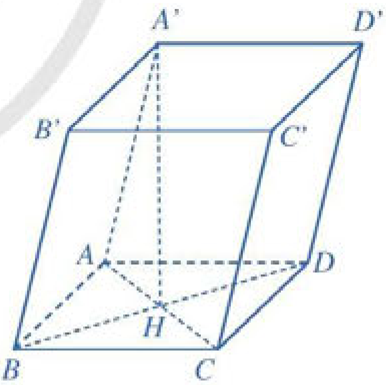
Xét tam giác $AA'H$ vuông tại H có:

$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Suy ra $A'H = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng $A'H = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

> **4** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng a, góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$.



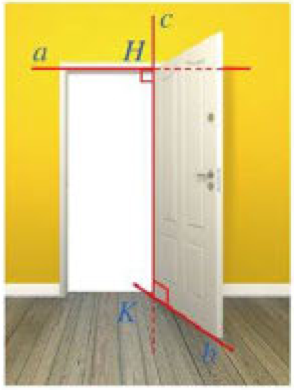
Hình 72

VI. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

5 Trong *Hình 73*, khuôn cửa phía trên và mép cánh cửa phía dưới gợi nên hình ảnh hai đường thẳng a và b chéo nhau, hai bản lề của cánh cửa nằm trên đường thẳng c.

Quan sát *Hình 73* và cho biết đường thẳng c có vừa cắt, vừa vuông góc với cả hai đường thẳng a và b hay không.

Ta thừa nhận kết quả sau: Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Khi đó, có và chỉ có một đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt cả hai đường thẳng a và b.



Hình 73

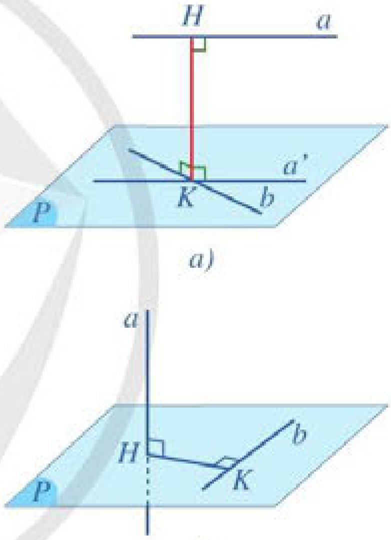
Từ đó, ta có định nghĩa sau:

Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau.

- Đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt cả hai đường thẳng a và b được gọi là *đường vuông góc chung* của hai đường thẳng đó.
- Đoạn thẳng có hai đầu mút là giao điểm của đường thẳng c với hai đường thẳng a, b được gọi là *đoạn vuông góc chung* của hai đường thẳng đó.
- Độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a, b gọi là *khoảng cách* giữa hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.

Nhận xét: Gọi mặt phẳng chứa b và song song với a là (P), hình chiếu của a trên (P) là a', giao điểm của a' và b là K. Khi đó, HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a, b (*Hình 74a*). Ngoài ra, ta cũng có $d(a, b) = d(a, (P))$.

Khi $a \perp b$, ta có thể làm như sau: Gọi mặt phẳng đi qua b và vuông góc với a là (P), giao điểm của a và (P) là H, hình chiếu của H trên b là K. Khi đó HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a, b (*Hình 74b*).



b)
Hình 74

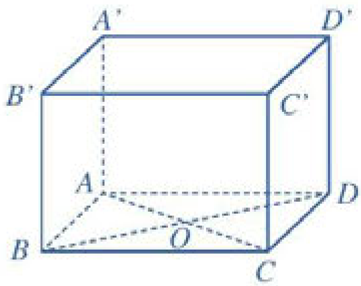
Ví dụ 6 Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, O là giao điểm của AC và BD, $AA' = a$, AA' vuông góc với mặt phẳng chứa đáy. Tính:

a) $d(AC, A'B')$; b) $d(CC', BD)$.

Giải. (*Hình 75*)

a) Vì AA' vuông góc với cả hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ nên $AA' \perp AC$, $AA' \perp A'B'$. Suy ra đoạn thẳng AA' là đoạn vuông góc chung của AC và $A'B'$.

Vậy $d(AC, A'B') = AA' = a$.



Hình 75

b) Vì CC' vuông góc với $(ABCD)$ nên $CC' \perp OC$. Do đáy $ABCD$ là hình vuông có O là giao điểm của AC và BD nên $BD \perp OC$. Suy ra đoạn thẳng OC là đoạn vuông góc chung của CC' và BD.

Vậy $d(CC', BD) = OC = a\sqrt{2}$.

5 Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$. Tính $d(SA, BC)$.

BÀI TẬP

1. *Hình 76* gợi nên hình ảnh hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Cột gỗ cao 4,2 m. Khoảng cách giữa (P) và (Q) là bao nhiêu mét?

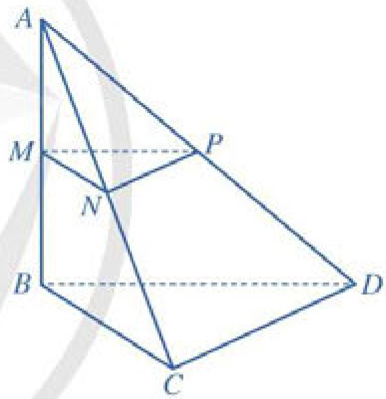
Hình 76

2. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$, $BD = c$, $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD (*Hình 77*).

a) Tính khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AB.

b) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC).

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.



Hình 77

3. Với giả thiết ở Bài tập 2, hãy:

a) Chứng minh rằng MN // BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BC.

b) Chứng minh rằng MP // (BCD). Tính khoảng cách từ đường thẳng MP đến mặt phẳng (BCD).

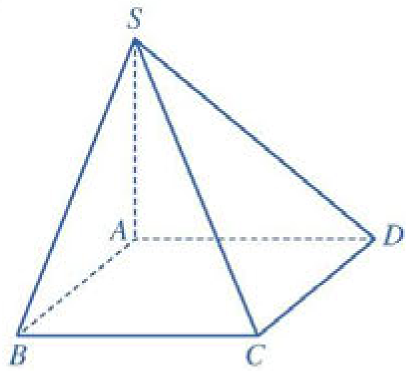
c) Chứng minh rằng (MNP) // (BCD). Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (BCD).

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a$ (*Hình 78*).

a) Tính khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng CD.

b) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAB).

c) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).



Hình 78

5. Với giả thiết ở Bài tập 4, hãy:

a) Chứng minh rằng BC // (SAD) và tính khoảng cách giữa BC và mặt phẳng (SAD).

b) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

§6 HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH CHÓP ĐỀU. THỂ TÍCH CỦA MỘT SỐ HÌNH KHỐI

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

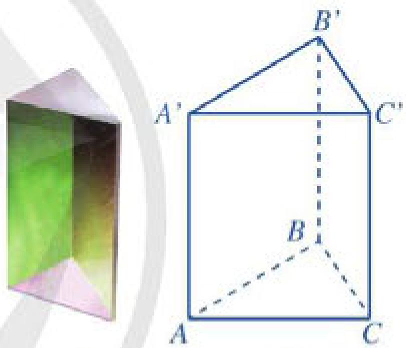
Hình 79

Ở lớp 7, ta đã làm quen với hình lăng trụ đứng tam giác và hình lăng trụ đứng tứ giác, tức là những hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác hoặc tứ giác.

Hình lăng trụ đứng với đáy là đa giác, đặc biệt là đa giác đều, có tính chất gì (Hình 79)?

I. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỀU

1 Cho hình lăng trụ tam giác có các mặt bên là hình chữ nhật ở *Hình 80a*, *80b*. Hãy cho biết mỗi cạnh bên của lăng trụ đó có vuông góc với các mặt đáy hay không.



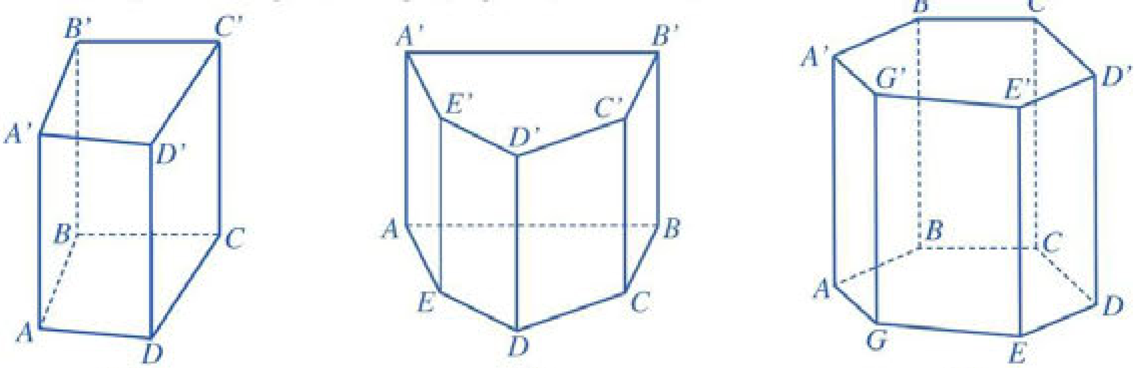
a) b)

Hình 80

Ta có các định nghĩa sau:

- Hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy được gọi là *hình lăng trụ đứng*.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều gọi là *hình lăng trụ đều*.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp đứng*.

Chú ý: Khi đáy của hình lăng trụ đứng lần lượt là tứ giác, ngũ giác, lục giác, ta gọi hình lăng trụ đứng đó lần lượt là hình lăng trụ đứng tứ giác (*Hình 81a*), hình lăng trụ đứng ngũ giác (*Hình 81b*), hình lăng trụ đứng lục giác (*Hình 81c*).



a) b) c)

Hình 81

Nhận xét

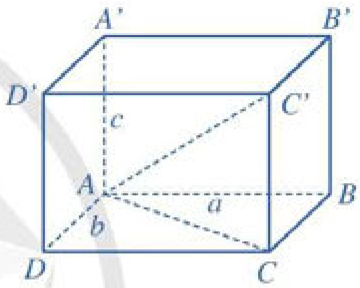
- Mỗi mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật, mặt phẳng chứa nó vuông góc với mặt đáy.
- Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

  Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là hình chữ nhật.

  Nếu mỗi mặt của hình hộp là hình chữ nhật thì hình hộp đó là hình hộp chữ nhật.

  Độ dài các đường chéo của hình hộp chữ nhật là bằng nhau.
- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các mặt là hình vuông.

Ví dụ 1 Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$ (*Hình 82*). Tính độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật đó.



Hình 82

Giải

Do $C'C \perp (ABCD)$ nên $C'C \perp AC$. Theo định lí Pythagore, trong tam giác vuông ACC' ta có:

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = AC^2 + c^2.$$

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông ABC, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2.$$

Vậy độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$$d = AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

1 Cho hình lập phương có cạnh bằng a. Tính độ dài đường chéo của hình lập phương đó.

II. HÌNH CHÓP ĐỀU. HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

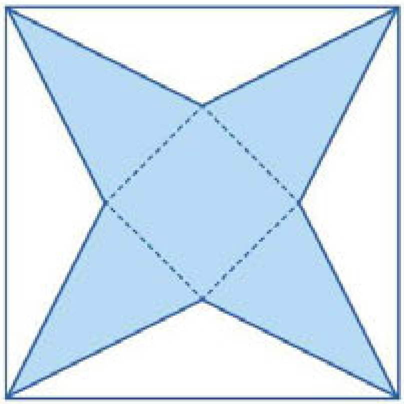
2 Để tạo mô hình một tháp chuông ở *Hình 83a* từ một tấm bìa hình vuông, bạn Dũng cắt bỏ phần màu trắng gồm bốn tam giác cân bằng nhau có đáy là các cạnh của tấm bìa (*Hình 83b*) rồi gấp lại phần màu xanh để tạo thành một hình chóp tứ giác. Quan sát *Hình 83a*, *83b* và cho biết:

a) Đáy của hình chóp mà bạn Dũng tạo ra là tứ giác có tính chất gì;

b) Các cạnh bên của hình chóp đó có bằng nhau hay không.

(Nguồn: https://www.shutterstock.com)

a)



b)

Hình 83

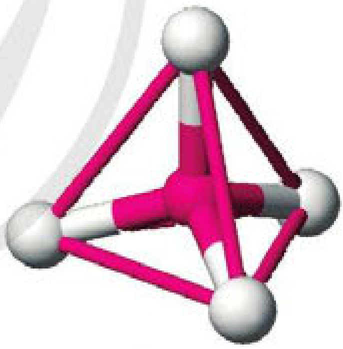
Nhận xét: Hình chóp tứ giác có đáy là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau là *hình chóp tứ giác đều*.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Chú ý

- Khi đáy của hình chóp đều lần lượt là tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều, lục giác đều, ta gọi hình chóp đều đó lần lượt là hình chóp tam giác đều, hình chóp tứ giác đều, hình chóp ngũ giác đều, hình chóp lục giác đều.
- Hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy là tứ diện đều.



Hình 84

Có nhiều vật thể trong thực tiễn, trong khoa học – kĩ thuật xuất hiện ở dạng tứ diện đều. Chẳng hạn: Trong hoá học có mô hình tứ diện đều về lai hoá orbital. Bốn orbital lai hoá sp^3 có các trục đối xứng tạo với nhau một góc khoảng $109^o28'$ và hướng về bốn đỉnh của một hình tứ diện đều. Sự lai hoá này được gọi là lai hoá sp^3 hay lai hoá tứ diện (*Hình 84*).

Bảo tàng Louvre ở thủ đô Paris (Pháp) là một trong những bảo tàng nổi tiếng nhất thế giới. *Hình 85* là ảnh chụp kim tự tháp kính ở bảo tàng Louvre, kim tự tháp kính đó có dạng hình chóp tứ giác đều.

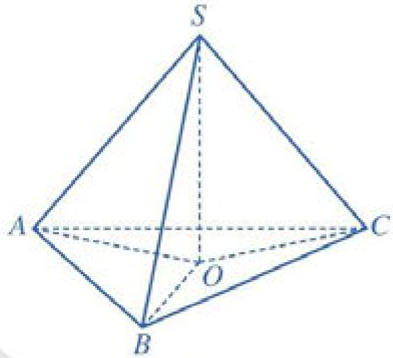
(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 85

Ta đã biết rằng đối với một hình chóp bất kì, đoạn thẳng nối đỉnh với hình chiếu của đỉnh trên mặt đáy được gọi là *đường cao* của hình chóp đó; hình chiếu của đỉnh trên mặt đáy gọi là *chân đường cao* của hình chóp đó; độ dài đường cao được gọi là *chiều cao* của hình chóp đó.

2 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Chứng minh rằng các cạnh bên tạo với mặt phẳng chứa đáy các góc bằng nhau.

Ví dụ 2 Gọi điểm O là chân đường cao của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ (*Hình 86*). Chứng minh rằng điểm O cách đều ba điểm A, B, C.



Hình 86

Giải

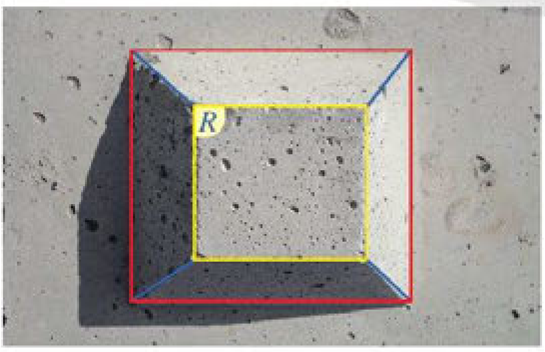
Do $SO \perp (ABC)$ nên $SO \perp OA$, $SO \perp OB$, $SO \perp OC$. Xét ba tam giác vuông SOA, SOB, SOC, ta có: SO chung, $SA = SB = SC$, suy ra các tam giác vuông đó bằng nhau. Do đó $OA = OB = OC$.

Vậy điểm O cách đều ba điểm A, B, C, tức là chân đường cao của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy ABC.

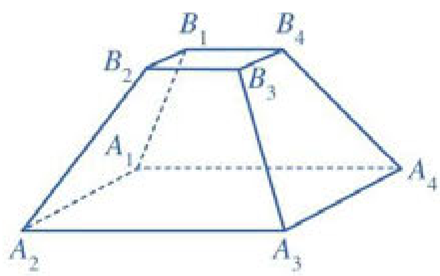
Trong trường hợp tổng quát, ta có tính chất sau:

Chân đường cao của hình chóp đều là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy.

3 Khối bê tông ở *Hình 87a* gợi nên hình ảnh một hình chóp bị cắt đi bởi mặt phẳng (R) song song với đáy. *Hình 87b* là hình biểu diễn của khối bê tông ở *Hình 87a*. Hãy dự đoán về mối quan hệ giữa các đường thẳng chứa các cạnh A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4.



a)



b)

Hình 87

Nhận xét: *Hình 87b* gợi nên hình ảnh của *hình chóp cụt tứ giác đều*.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

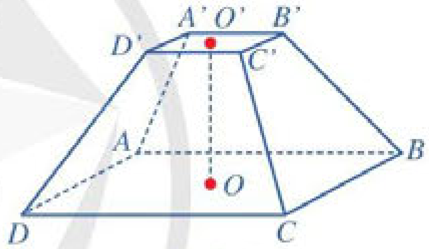
Cho hình chóp đều $S.A_1A_2A_3\ldots A_n$. Mặt phẳng (P) song song với đáy của hình chóp và cắt các cạnh SA_1, SA_2, …, SA_n lần lượt tại B_1, B_2, ..., B_n.

Phần của hình chóp đã cho giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và $(A_1A_2A_3\ldots A_n)$ được gọi là *hình chóp cụt đều* $A_1A_2\ldots A_n.B_1B_2...B_n$.

Trong hình chóp cụt đều $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$, ta gọi:

- Các đa giác $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ lần lượt là *đáy lớn*, *đáy nhỏ*;
- Các tứ giác $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ là các *mặt bên*;
- Các đoạn thẳng A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n là các *cạnh bên*;
- Các cạnh của hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ là các *cạnh đáy*;
- Đoạn thẳng nối tâm của hai đáy là *đường cao*; độ dài đường cao là *chiều cao*.

Tuỳ theo đáy là tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều, ..., ta có hình chóp cụt tam giác đều, hình chóp cụt tứ giác đều, hình chóp cụt ngũ giác đều, ...



Hình 88

Nhận xét

- Hai đáy của hình chóp cụt đều nằm trên hai mặt phẳng song song và có các cạnh tương ứng song song; đồng thời hai đáy đó là các đa giác đều có cùng số cạnh;
- Mỗi mặt bên của hình chóp cụt đều là một hình thang cân;
- Các đường thẳng chứa cạnh bên của hình chóp cụt đều cùng đi qua một điểm;
- Đường cao của hình chóp cụt đều thì vuông góc với hai đáy của hình chóp cụt đều đó (chẳng hạn, đoạn thẳng OO' trong *Hình 88*).

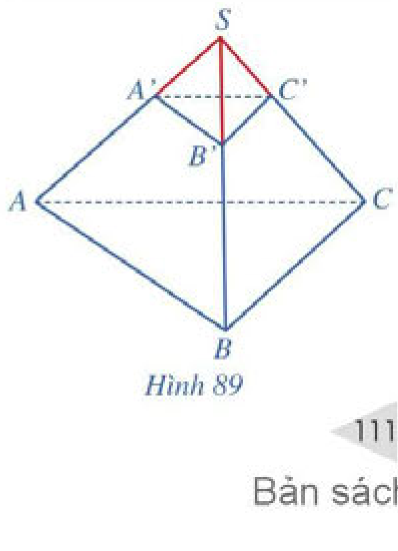
3 Cho hình chóp đều $S.ABC$. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SB, SC. Chứng minh rằng phần hình chóp đã cho giới hạn bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ là hình chóp cụt đều.

Ví dụ 3 Cho hình chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ trong đó tam giác $A'B'C'$ là đáy nhỏ và $\widehat{A'AB} = 60^o$. Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BB'.

Giải. (*Hình 89*)

Gọi S là giao điểm của ba đường thẳng AA', BB', CC'.

Vì hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SA = SB$. Tam giác SAB cân tại S và $\widehat{SAB} = 60^o$ nên là tam giác đều, suy ra $\widehat{ASB} = 60^o$. Vậy góc giữa hai đường thẳng AA' và BB' bằng 60^o.



Hình 89

III. THỂ TÍCH CỦA MỘT SỐ HÌNH KHỐI

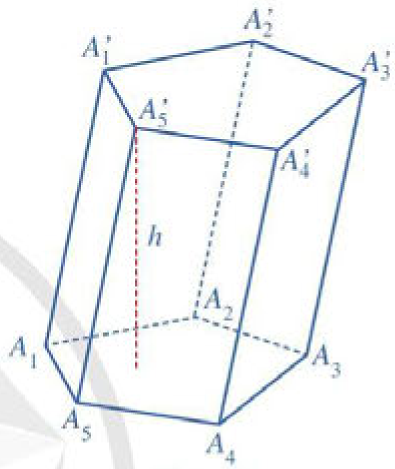
Phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ (kể cả hình lăng trụ ấy) được gọi là *khối lăng trụ*. Ta định nghĩa tương tự các khối sau: khối hộp, khối chóp, khối chóp cụt đều.

Đỉnh, cạnh, mặt của các khối lăng trụ, khối hộp, khối chóp, khối chóp cụt đều là đỉnh, cạnh, mặt của các hình lăng trụ, hình hộp, hình chóp, hình chóp cụt đều tương ứng.

1. Thể tích của khối lăng trụ

4 Hãy nêu lại công thức tính thể tích của khối lăng trụ đứng tam giác, khối lăng trụ đứng tứ giác.

Cho hình lăng trụ $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$ (*Hình 90*). Ta gọi chiều cao của hình lăng trụ đó là khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(A_1A_2...A_n)$ và $(A_1'A_2'...A_n')$.

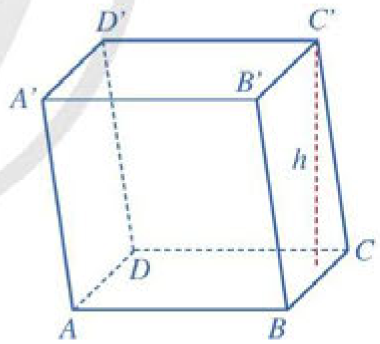


Hình 90

Người ta có thể chứng minh được định lí sau:

> Thể tích của khối lăng trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.

Cụ thể, ta có: $V = S \,.\, h$, trong đó V là thể tích của khối lăng trụ, S là diện tích của đáy và h là chiều cao của khối lăng trụ.



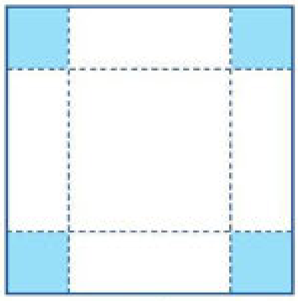
Hình 91

Nhận xét

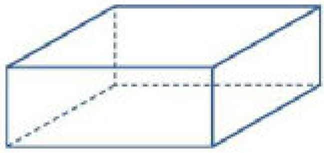
- Do chiều cao của khối lăng trụ đứng bằng độ dài cạnh bên nên thể tích của khối lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với độ dài cạnh bên.
- Vì khối hộp là khối lăng trụ có đáy là hình bình hành nên thể tích của khối hộp bằng diện tích đáy nhân với chiều cao (*Hình 91*).
- Thể tích của khối hộp chữ nhật với ba kích thước: chiều dài a, chiều rộng b, chiều cao c, là: $V = abc$.
- Thể tích của khối lập phương cạnh a là: $V = a^3$.

4 Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết tất cả các cạnh bằng a và hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB.

Ví dụ 4 Từ một tấm bìa hình vuông (*Hình 92a*), người ta cắt ở bốn góc của tấm bìa đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng 6 cm, rồi gập tấm bìa lại để được một chiếc hộp không nắp có dạng hình hộp chữ nhật (*Hình 92b*). Tính cạnh của tấm bìa ban đầu, biết rằng thể tích của chiếc hộp bằng 600 cm^3.



a)



b)

Hình 92

Giải

Giả sử tấm bìa ban đầu có cạnh x (cm) ($x > 12$). Khi đó:

Đáy của chiếc hộp là hình vuông cạnh $x - 12$ (cm) nên diện tích của đáy chiếc hộp là $(x - 12)^2$ (cm^2).

Mà chiều cao của chiếc hộp là 6 cm, suy ra thể tích của chiếc hộp bằng $(x - 12)^2 . 6$ (cm^3).

Theo đề bài, thể tích của chiếc hộp bằng 600 cm^3 nên

$$(x - 12)^2 . 6 = 600 \Leftrightarrow (x - 12)^2 = 100.$$

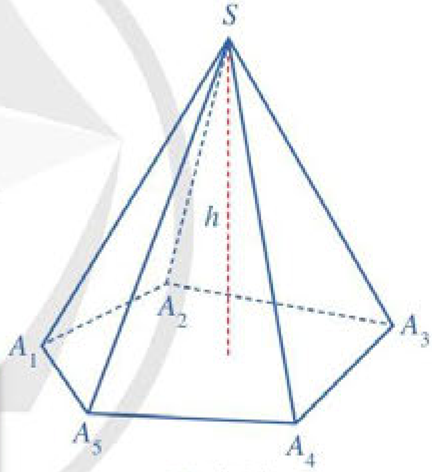
Với $x > 12$ ta có: $x - 12 = 10 \Leftrightarrow x = 22$ (cm).

Vậy độ dài cạnh của tấm bìa ban đầu là 22 cm.

2. Thể tích của khối chóp và khối chóp cụt đều

a) Thể tích của khối chóp

Ta gọi chiều cao của khối chóp là chiều cao của hình chóp tương ứng (*Hình 93*).



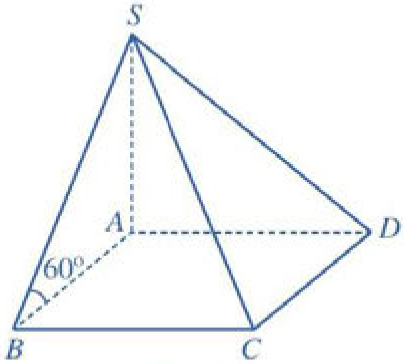
Hình 93

Người ta có thể chứng minh được định lí sau:

> Thể tích của khối chóp bằng một phần ba diện tích đáy nhân với chiều cao.

Cụ thể, ta có: $V = \dfrac{1}{3}S . h$, trong đó V là thể tích của khối chóp, S là diện tích của đáy và h là chiều cao của khối chóp.

Ví dụ 5 Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$. Biết đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° (*Hình 94*).



Hình 94

Giải

Do $SA \perp (ABCD)$ và BA chứa trong $(ABCD)$ nên $SA \perp AB$, suy ra $SA = AB . \tan \widehat{SBA}$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{SBA}$. Suy ra $\widehat{SBA} = 60^o$.

Từ đó, ta có $SA = a \cdot \tan 60^o = a\sqrt{3}$. Mặt khác, do diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$ nên thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

5 Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Chứng minh rằng thể tích của khối tứ diện đó bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

b) Thể tích của khối chóp cụt đều

Ta gọi chiều cao của khối chóp cụt đều là chiều cao của hình chóp cụt đều tương ứng.

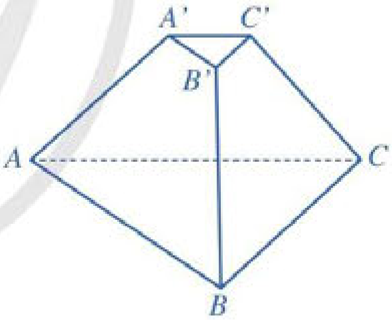
Người ta có thể chứng minh được định lí sau:

Thể tích của khối chóp cụt đều được tính theo công thức:

$$V = \frac{1}{3} h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2),$$

trong đó h là chiều cao và S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai đáy của khối chóp cụt đều.

Ví dụ 6 Cho khối chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $3a$, $AB = 4a$, $A'B' = a$ (*Hình 95*). Tính thể tích của khối chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$.



Hình 95

Giải

Diện tích tam giác đều ABC là:

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 4a \cdot \sin 60^o = 4\sqrt{3}a^2.$$

Diện tích tam giác đều $A'B'C'$ là:

$$S_2 = \frac{1}{2} A'B' \cdot A'C' \cdot \sin\widehat{B'A'C'} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Thể tích khối chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \left(4\sqrt{3}a^2 + \sqrt{4\sqrt{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4}} + \frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right)$$
$$= \frac{21\sqrt{3}a^3}{4}.$$

6 Một thùng đựng rác có dạng khối chóp cụt tứ giác đều với hai cạnh đáy lần lượt dài 2 dm và 3 dm, chiều cao bằng 4 dm. Tính thể tích của thùng đựng rác.

BÀI TẬP

1. Quan sát và cho biết chiếc đèn treo ở *Hình 96a*, trạm khảo sát trắc địa ở *Hình 96b* có dạng hình gì.

a)

b)

Hình 96

2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a.

a) Chứng minh rằng các tam giác ASC và BSD là tam giác vuông cân.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD, chứng minh rằng đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Chứng minh rằng góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°.

3. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ vuông góc với nhau.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $C'D'$.

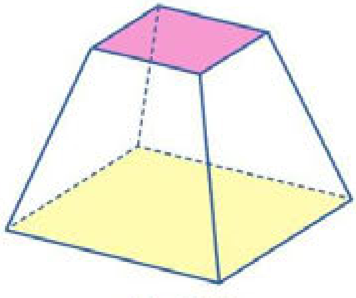
4. Một chiếc bánh chưng có dạng khối hộp chữ nhật với kích thước ba cạnh là 15 cm, 15 cm và 6 cm. Tính thể tích của chiếc bánh chưng đó.

5. Một miếng pho mát có dạng khối lăng trụ đứng với chiều cao 10 cm và đáy là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 12 cm. Tính khối lượng của miếng pho mát theo đơn vị gam, biết khối lượng riêng của loại pho mát đó là 3 g/cm^3.

Hình 97

6. Một loại đèn đá muối có dạng khối chóp tứ giác đều (*Hình 97*). Tính theo a thể tích của đèn đá muối đó, giả sử các cạnh đáy và các cạnh bên đều bằng a.

7. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (*Hình 98*). Cạnh đáy dưới dài 5 m, cạnh đáy trên dài 2 m, cạnh bên dài 3 m. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1 470 000 đồng/m^3. Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng.



Hình 98

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

1. Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$ có cạnh bằng a.

a) Góc giữa hai đường thẳng MN và $M'P'$ bằng:

A. 30^o. B. 45^o. C. 60^o. D. 90^o.

b) Gọi α là số đo góc giữa đường thẳng $M'P$ và mặt phẳng $(MNPQ)$. Giá trị $\tan\alpha$ bằng:

A. 1. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Số đo của góc nhị diện $[N, MM', P]$ bằng:

A. 30^o. B. 45^o. C. 60^o. D. 90^o.

d) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(NQQ'N')$ bằng:

A. a. B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $\frac{a}{2}$.

2. Cho hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$ có $MN = 2a$, $MQ = 3a$, $MM' = 4a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng NP và $M'N'$ bằng:

A. $2a$. B. $3a$. C. $4a$. D. $5a$.

3. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng a^2 và chiều cao bằng $3a$. Thể tích của khối lăng trụ đó bằng:

A. a^3. B. $3a^3$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $9a^3$.

4. Cho khối chóp có diện tích đáy là a^2 và chiều cao là $3a$. Thể tích của khối chóp bằng:

A. a^3. B. $3a^3$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $9a^3$.

5. Cho tứ diện $OABC$ thoả mãn $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 90^o$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ bằng:

A. abc. B. $\frac{abc}{2}$. C. $\frac{abc}{3}$. D. $\frac{abc}{6}$.

6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AC \perp BC$, $SA = BC = a\sqrt{3}$, $AC = a$ (*Hình 99*).

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

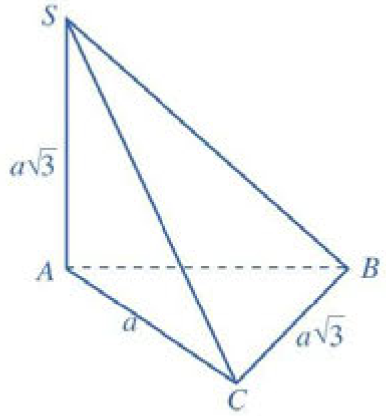
b) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC).

c) Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$.

d) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

e) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

g) Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.



Hình 99

7. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AB (*Hình 100*).

a) Tính góc giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$.

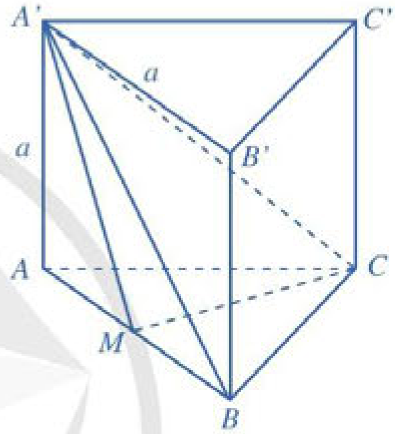
b) Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC).

c) Tính số đo của góc nhị diện $[B, CC', M]$.

d) Chứng minh rằng $CC' // (ABB'A')$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng CC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.

e) Chứng minh rằng $CM \perp (ABB'A')$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và $A'M$.

g) Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ và thể tích khối chóp $A'.MBC$.



Hình 100

8. *Hình 101* là hình chụp đền Kukulcan, là một kim tự tháp Trung Mỹ nằm ở khu di tích Chichen Itza, Mexico, được người Maya xây vào khoảng từ thế kỉ IX đến thế kỉ XII. Phần thân của đền, không bao gồm ngôi đền nằm phía trên, có dạng một khối chóp cụt tứ giác đều (không tính cầu thang và coi các mặt bên là phẳng) với độ dài đáy dưới là 55,3 m, chiều cao là 24 m, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy là khoảng 47°.

(*Nguồn: https://vi.wikipedia.org*)

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 101

Tính thể tích phần thân ngôi đền có dạng khối chóp cụt tứ giác đều đó theo đơn vị mét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

CHỦ ĐỀ 2: TÍNH THỂ TÍCH MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Nhắc lại công thức tính thể tích khối lăng trụ, khối hộp, khối chóp và khối chóp cụt đều

– Công thức tính thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}S\ .\ h.$

Trong đó V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy, chiều cao của khối chóp.

– Công thức tính thể tích khối lăng trụ: $V = S\ .\ h.$

Trong đó V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy, chiều cao của khối lăng trụ.

– Công thức tính thể tích khối hộp: $V = S\ .\ h.$

Trong đó V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy, chiều cao của khối hộp.

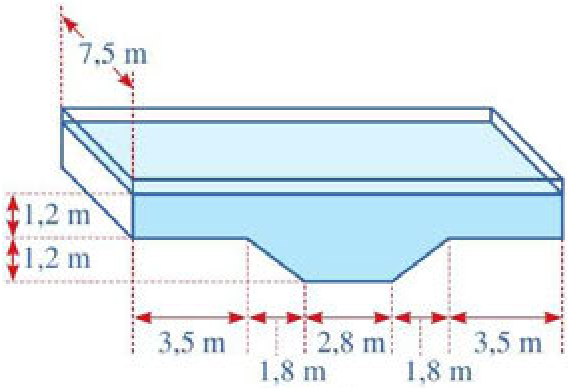
– Công thức tính thể tích khối chóp cụt đều: $V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2).$

Trong đó V, h, S_1, S_2 lần lượt là thể tích, chiều cao, diện tích hai đáy của khối chóp cụt đều.

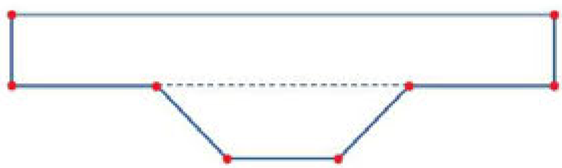
2. Ví dụ tính thể tích trong thực tiễn

Ví dụ ***Bài toán bể bơi***

Trong khuôn viên của một khách sạn, người ta muốn xây một bể bơi có kích thước và hình dáng như trong *Hình 1*. Tính thể tích nước tối đa mà bể bơi có thể chứa được.



Hình 1



Hình 2

Giải

Xem bể bơi là một khối lăng trụ đứng có chiều cao bằng 7,5 m và mặt đáy là một đa giác 8 cạnh.

Chia mặt đáy của khối lăng trụ thành 2 phần: một phần là hình chữ nhật và một phần là hình thang cân (*Hình 2*).

Từ *Hình 1* và *Hình 2*, ta thấy hình chữ nhật có các kích thước là: chiều dài 13,4 m và chiều rộng 1,2 m; hình thang cân có: đáy lớn 6,4 m, đáy bé 2,8 m và chiều cao 1,2 m.

Diện tích mặt đáy của khối lăng trụ là:

$$S = 1,2\ .\ 13,4 + \frac{1}{2}(6,4 + 2,8)\ .\ 1,2 = 21,6\ (\text{m}^2).$$

Thể tích nước tối đa mà bể bơi có thể chứa được bằng thể tích của khối lăng trụ đó:

$$V = S\ .\ h = 21,6\ .\ 7,5 = 162\ (\text{m}^3).$$

II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Tiến trình tổ chức các hoạt động bao gồm: phần chuẩn bị; phần thực hiện; phần tổng kết.

1. Phần chuẩn bị

1 Giáo viên thực hiện những nhiệm vụ sau:

– Chia lớp thành những nhóm học sinh;

– Giao nhiệm vụ các nhóm tính toán chi phí vật liệu làm bao bì chứa cùng một loại sản phẩm và lựa chọn kiểu bao bì có chi phí thấp nhất.

2 Mỗi nhóm học sinh trao đổi, thảo luận để xác định rõ: Nhiệm vụ của nhóm và thời gian hoàn thành nhiệm vụ đó; nhiệm vụ của từng thành viên trong nhóm và thời gian hoàn thành nhiệm vụ đó.

3 Mỗi nhóm học sinh tiến hành lập kế hoạch thực hiện nhiệm vụ. Cụ thể như sau:

– Sưu tầm các sản phẩm cùng loại nhưng có hình dạng bao bì khác nhau (như: có dạng khối hộp chữ nhật, khối trụ, khối chóp, khối chóp cụt đều, ...). Chẳng hạn, sản phẩm sữa đặc với khối lượng tịnh 380 g có hai dạng bao bì khác nhau như ở *Hình 3*.

Hình 3

– Lựa chọn loại sản phẩm và những hình dạng bao bì của loại sản phẩm đó. Tiến hành đo các kích thước và tính thể tích, diện tích toàn phần của các bao bì sản phẩm.

– Tìm hiểu về giá thành sản phẩm bao bì, dự đoán chi phí bao bì.

2. Phần thực hiện

– Báo cáo tìm hiểu về sản phẩm và bao bì sản phẩm.

Chẳng hạn, đối với sản phẩm trong vật đựng ở *Hình 3*, báo cáo theo mẫu sau:

Tên sản phẩm: Bao bì của sản phẩm sữa đặc

STT	Hình dạng bao bì	Chiều dài (cm)	Chiều rộng (cm)	Chiều cao (cm)	Thể tích (cm^3)	Diện tích toàn phần (cm^2)
1	Khối hộp chữ nhật	?	?	?	?	?
		Đường kính đáy (cm)				
2	Khối trụ	?		?	?	?

– Báo cáo tìm hiểu về giá thành sản phẩm bao bì, tính toán chi phí bao bì theo mẫu sau:

STT	Hình dạng bao bì	Chất liệu bao bì	Giá thành sản phẩm bao bì (nghìn đồng/m^2)	Chi phí bao bì tính vào giá bán sản phẩm (nghìn đồng/cm^3 nếu sản phẩm tính theo dung tích hoặc nghìn đồng/g nếu sản phẩm tính theo khối lượng)
1				
2				
3				

– Dựa trên báo cáo, mỗi nhóm lựa chọn kiểu bao bì có chi phí sản xuất thấp nhất cho loại sản phẩm mà nhóm đã chọn.

3. Phần tổng kết

4 Làm việc chung cả lớp.

– Các nhóm báo cáo kết quả và giải thích cách làm của nhóm, cả lớp góp ý cho từng nhóm.

– Tổng kết và rút kinh nghiệm.

III. ĐÁNH GIÁ

Giáo viên tiến hành tổng kết, rút kinh nghiệm và đánh giá.

Hình thức đánh giá: Theo hình thức đánh giá của học tập dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

• Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.

• Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

• Nhóm tự đánh giá lại hoạt động của nhóm và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.

• Giáo viên và các nhóm đánh giá và cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

THỰC HÀNH PHẦN MỀM GEOGEBRA
(NẾU NHÀ TRƯỜNG CÓ ĐIỀU KIỆN THỰC HIỆN)

I. GIỚI THIỆU VỀ GEOGEBRA 3D

GeoGebra có nhiều ứng dụng phù hợp với những nhu cầu sử dụng riêng biệt, việc thực hành vẽ các mô hình hình học không gian có thể được thực hiện trên trang web hoặc phần mềm ứng dụng sau: 3D Calculator (*https://www.geogebra.org/3d*); GeoGebra Classic – Hiển thị dạng 3D.

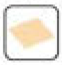
Sau đây khi thực hiện vẽ hình 3D, ta có thể sử dụng một trong các cách trên.

II. THỰC HÀNH PHẦN MỀM GEOGEBRA

1. Thực hành vẽ hình

a) Vẽ mặt phẳng

CÁCH 1. Tạo ba điểm phân biệt rồi sử dụng công cụ  để vẽ mặt phẳng qua ba điểm đó.

CÁCH 2. Sử dụng công cụ  để vẽ mặt phẳng qua một đa giác, mặt phẳng qua một đường conic, mặt phẳng qua một điểm và song song với một mặt phẳng, mặt phẳng qua hai đường thẳng không chéo nhau, mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt.

b) Vẽ đường thẳng song song với mặt phẳng

a) *b)*

Hình 1

Bước 1. Vẽ một mặt phẳng p.

Bước 2. Vẽ một điểm nằm ngoài mặt phẳng p và một đường thẳng nằm trong mặt phẳng p.

Bước 3. Vẽ một đường thẳng đi qua điểm D và song song với đường thẳng nằm trong mặt phẳng p vừa tạo (*Hình 1a*).

Bước 4. Ẩn các đối tượng phụ, ta được hình ảnh đường thẳng song song với mặt phẳng (*Hình 1b*).

c) Vẽ mặt phẳng song song với mặt phẳng

Sử dụng công cụ để vẽ một mặt phẳng đi qua một điểm và song song với mặt phẳng cho trước.

d) Vẽ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Sử dụng công cụ để vẽ một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

e) Vẽ hai mặt phẳng vuông góc

Bước 1. Vẽ một mặt phẳng p.

Bước 2. Vẽ một đường thẳng nằm trong mặt phẳng p.

Bước 3. Sử dụng công cụ vẽ một mặt phẳng qua một điểm và vuông góc với đường thẳng vừa tạo.

Bước 4. Ẩn các đối tượng phụ, ta được hình ảnh hai mặt phẳng vuông góc (*Hình 2*).

Hình 2

1 Thực hành vẽ hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng khác.

2. Tạo mô hình hình không gian sử dụng công nghệ thực tế ảo tăng cường trên GeoGebra

a) Công nghệ thực tế ảo tăng cường (Augmented Reality)

Công nghệ Augmented Reality (viết tắt là AR) hay còn gọi là công nghệ thực tế ảo tăng cường. Thuật ngữ thực tế tăng cường (AR) xuất hiện lần đầu tiên vào những năm 1960 và ban đầu hệ thống được thiết kế dùng cho AR và VR (Virtual reality). Công nghệ AR cung cấp cho người dùng khả năng nhìn thấy và tương tác với những vật thể ảo (khối lăng trụ, hình hộp, ...) một cách chân thật và sống động nhất. Và sự khác biệt, cũng là lợi thế của AR so với các phần mềm 3D thông dụng khác là người sử dụng có thể di chuyển trong không gian trong lúc cầm chiếc điện thoại và quan sát được những hình ảnh ảo trong không gian lớp học. Công nghệ AR cũng không khó để tiếp cận, chỉ cần một chiếc điện thoại thông minh hoặc máy tính bảng, chúng ta đã có thể sử dụng được thông qua các phần mềm hỗ trợ AR một cách dễ dàng.

b) Thực hành tạo mô hình sử dụng công nghệ thực tế ảo tăng cường trên GeoGebra

Trước hết, ta cần tải phần mềm GeoGebra 3D Calculator trên điện thoại thông minh hoặc máy tính bảng.

Ví dụ 1 Tạo mô hình tứ diện.

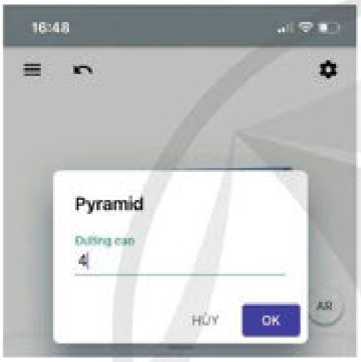
Bước 1. Vào phần mềm GeoGebra 3D Calculator. Giao diện của phần mềm tương tự như sử dụng trên máy tính.

Bước 2. Sử dụng công cụ 

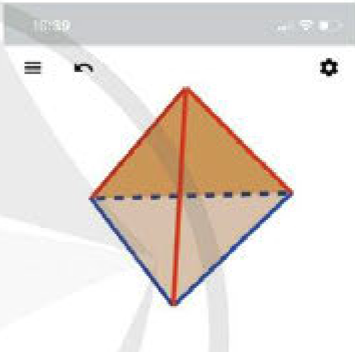
và tạo một tam giác bất kì trong mặt phẳng.

Bước 3. Sử dụng công cụ 

và chọn vào tam giác vừa tạo, sau đó nhập độ cao bất kì (*Hình 3*), ta được tứ diện như *Hình 4*.

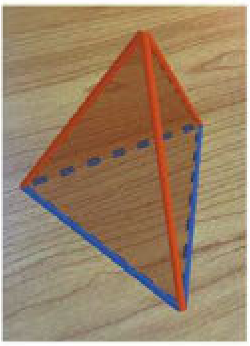


Hình 3

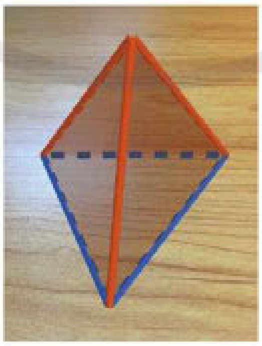


Hình 4

Bước 4. Nhấn vào biểu tượng AR ở góc phải giao diện. Sau đó chọn vị trí đặt tứ diện trên màn hình thiết bị và di chuyển xung quanh để quan sát tứ diện từ các hướng khác nhau (lưu ý vẫn hướng camera của thiết bị vào vị trí đặt tứ diện ban đầu) (*Hình 5* và *Hình 6*).



Hình 5



Hình 6

2 Thực hành vẽ hình chóp tứ giác trên phần mềm GeoGebra 3D Calculator và chuyển sang chế độ AR.

3. Thực hành tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 2 Tìm tứ phân vị cho mẫu số liệu ghép nhóm trong *Ví dụ 6* trang 11.

Hướng dẫn

– Nhấp vào Hiển thị Spreadsheet để hiển thị bảng tính. Tại ô A1, nhập tên là "Giá trị đầu mút". Tại ô A2 nhập "30". Tại ô B1 ta đặt tên là "Độ dài". Tại ô B2 nhập "10". Nhập công thức cho ô A3 "=A2 + B$2". Sao chép công thức cho các ô A4:A8.

– Tại ô C1, nhập tên là "Nhóm". Nhập công thức cho ô C2 ""[" + A2 + ";" + A3 + ")"" rồi bấm phím Enter. Sao chép công thức cho các ô C3:C7. Tại ô D1, nhập tên là "Tần số". Nhập các giá trị tần số của từng nhóm cho các ô D2:D7. Ô D8 ghi kích thước mẫu.

– Tại ô E1, nhập tên là "Tần số tích luỹ. Tại ô E2, nhập "= D2". Tại ô E3, nhập "= E2+D3".

Chọn ô E3 và tiến hành sao chép công thức cho các ô E4:E7 (*Hình 7*).

	A	B	C	D	E
1	Giá trị đầu mút	Độ dài	Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
2	30	10	[30;40)	2	2
3	40		[40;50)	10	12
4	50		[50;60)	16	28
5	60		[60;70)	8	36
6	70		[70;80)	2	38
7	80		[80;90)	2	40
8	90			40	

Hình 7

– Tại ô B10, nhập "=D8 / 2"; E10 nhập "=D8/4"; H10 nhập "= 3*D8/4". Tạo danh sách: chọn các ô A2:A7, bấm vào {1,2} và {1,2} Tạo danh sách ; đặt tên "bdau"; chọn Tạo . Tương tự cho D2:D7 và đặt tên "ts"; E2:E7 đặt tên "tl".

– Tại khung nhập lệnh, nhập từng lệnh

Nhập lệnh: tach = DãySố[B10] ; Nhập lệnh: bo=BỏRa[tl, tach] ; Nhập lệnh: hang=ChiSo[GTNN[bo], tl] .

Tương tự cho các lệnh:

Nhập lệnh: tach1=DãySố[E10] ; Nhập lệnh: bo1=BỏRa[tl, tach1] ; Nhập lệnh: hang1=ChiSo[GTNN[bo1], tl] ;

Nhập lệnh: tach2=DãySố[H10] ; Nhập lệnh: bo2=BỏRa[tl, tach2] ; Nhập lệnh: hang2=ChiSo[GTNN[bo2], tl] .

– Tại ô B12; E12; H12 lần lượt nhập "=B2".

Tại ô B13, nhập "=GTNN[Lay[tl, hang - 1, hang -1]]".

Tại ô E13, nhập "=GTNN[Lay[tl, hang1 - 1, hang1 -1]]".

Tại ô H13, nhập "=GTNN[Lay[tl, hang2 - 1, hang2 -1]]".

Tại ô B14, nhập "=GTNN[Lay[ts, hang, hang]]".

Tại ô E14, nhập "=GTNN[Lay[ts, hang1, hang1]]".

Tại ô H14, nhập "=GTNN[Lay[ts, hang2, hang2]]".

	A	B	C	D	E	F	G	H
10	n/2	20		n/4	10		3n/4	30
11	r	50		s	40		t	60
12	d	10		h	10		l	10
13	cfk-1	12		cfk-1	2		cfk-1	28
14	nk	16		nk	10		nk	8
15	Q2	55		Q1	48		Q3	62.5

Hình 8

– Tại ô B15 (tính Q_2), nhập "=B11 + ((B10 - B13)/B14)B12".

Tại ô E15 (tính Q_1), nhập "=E11 + ((E10 - E13)/E14)E12".

Tại ô H15 (tính Q_3), nhập "=H11 + ((H10 - H13)/H14)H12".

Ta được kết quả $Q_1 = 48$, $Q_2 = 55$, $Q_3 = 62,5$ (*Hình 8*).

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
biến cố độc lập	hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất của biến cố kia	18
biến cố giao	giao của tập hợp các kết quả thuận lợi của biến cố A và biến cố B	16
biến cố hợp	hợp của tập hợp các kết quả thuận lợi của biến cố A hoặc biến cố B	15
biến cố xung khắc	nếu tập hợp các kết quả thuận lợi của biến cố A và B giao nhau bằng rỗng thì A và B gọi là hai biến cố xung khắc	17
đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x	đạo hàm của y' tại x (nếu có) với y' là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x	73
đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0	giới hạn hữu hạn (nếu có) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;\,b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó.	60
đường thẳng vuông góc với mặt phẳng	đường thẳng vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng	80
góc nhị diện	hình gồm hai nửa mặt phẳng có chung bờ	91
hàm số lôgarit	hàm số có biểu thức $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$	43
hàm số mũ	hàm số có biểu thức $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$	39
hình chóp cụt đều	phần của hình chóp đều bị giới hạn bởi mặt đáy và mặt phẳng (P) song song với đáy cắt hình chóp đều đó	111
hình chóp đều	hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau	109
hình lăng trụ đều	hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều	107
phương trình lôgarit	phương trình có chứa ẩn trong biểu thức dưới dấu lôgarit	50
phương trình mũ	phương trình có chứa ẩn ở số mũ của luỹ thừa	48
số đo của góc nhị diện	số đo của góc phẳng nhị diện tương ứng với góc nhị diện đó	92

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
Địa chỉ: Tầng 6, Toà nhà số 128 đường Xuân Thuỷ, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.37547735
Email: nxb@hnue.edu.vn | **Website:** www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc – Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

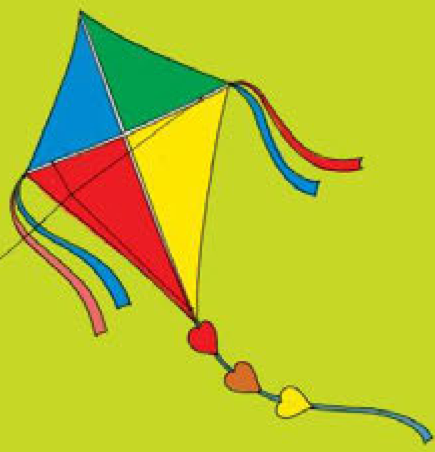
Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
LÊ HUY ĐAN – NGUYỄN THỊ NGÂN – ĐÀO ANH TIẾN – PHẠM THỊ DIỆU THUÝ
Thiết kế sách:
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG YẾN
Trình bày bìa:
NGUYỄN MẠNH HÙNG
Sửa bản in:
LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

Trong sách có sử dụng một số hình ảnh trên internet. Trân trọng cảm ơn các tác giả.

TOÁN 11 - TẬP HAI

Mã số:
ISBN: ....
In .... cuốn, khổ 19 x 26,5cm, tại ......
Địa chỉ: ....
Số xác nhận đăng kí xuất bản: ...-.../... /...-.../...
Quyết định xuất bản số: .... /....-... ngày ... /... /....
In xong và nộp lưu chiểu



Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống

Toán 11 là cuốn sách giáo khoa dành cho học sinh lớp 11, thuộc bộ sách giáo khoa "Cánh Diều", thực hiện theo "Chương trình Giáo dục phổ thông 2018".

Sách gồm hai tập và chuyên đề học tập được biên soạn đáp ứng yêu cầu phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh. Các hoạt động học tập được tổ chức theo tiến trình từ dễ đến khó, hướng đến việc khám phá, phát hiện, thực hành, vận dụng giải quyết vấn đề trong thực tiễn, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh. Sách được trình bày hấp dẫn, khơi gợi sự tò mò, kích thích hứng thú, tạo dựng niềm tin trong học tập môn Toán ở học sinh.

Sách là sản phẩm tâm huyết của tập thể tác giả – những nhà giáo, nhà khoa học giàu kinh nghiệm trong giáo dục phổ thông.