ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
LÊ TUẤN ANH – ĐỖ TIẾN ĐẠT – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM ĐỨC QUANG

Toán 8

TẬP MỘT

BẢN MẪU

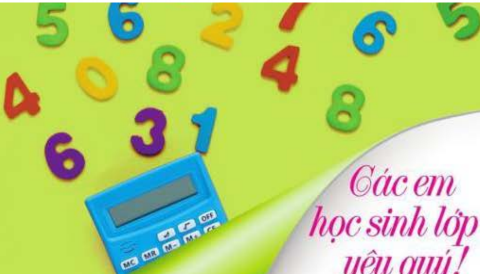
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

BIỂU TƯỢNG DÙNG TRONG SÁCH

Các em giữ gìn sách cẩn thận, không viết vào sách để sử dụng được lâu dài.

BIỂU TƯỢNG DÙNG TRONG SÁCH

Các em giữ gìn sách cẩn thận, không viết vào sách để sử dụng được lâu dài.



Các em học sinh lớp 8 yêu quý!

Năm học này, chúng ta lại vui mừng gặp nhau qua cuốn sách **Toán 8**. Sách **Toán 8** tiếp tục giúp các em có thêm nhiều hiểu biết về biểu thức đại số (đa thức nhiều biến, phân thức đại số), hàm số và đồ thị, hàm số bậc nhất và đồ thị của hàm số bậc nhất, phương trình bậc nhất, một số hình khối trong thực tiễn (hình chóp tam giác đều, hình chóp tứ giác đều). Các em cũng được nghiên cứu định lí Pythagore, các tứ giác đặc biệt, định lí Thalès trong tam giác, tam giác đồng dạng, hình đồng dạng, từ đó các em có thể nhìn lại đặc điểm của một số hình phẳng đã được mô tả trong phần hình học trực quan. Ngoài ra, các em cũng được tiếp tục làm quen với thống kê và xác suất; tiến hành những hoạt động thực hành và trải nghiệm; đặc biệt về những hoạt động tài chính đơn giản; sử dụng phần mềm toán học trong thực hành tính toán và vẽ hình hình học. Qua đó giúp các em hiểu biết thêm những công cụ quan trọng của toán học trong việc giải quyết các vấn đề thực tiễn.

Toàn bộ những điều trên được thể hiện qua những tranh ảnh, hình vẽ, bài tập độc đáo và hấp dẫn; qua những câu chuyện lí thú về khoa học tự nhiên, về văn hoá và nghệ thuật, kiến trúc, thể thao và du lịch. Từ đó, các em được tiến thêm một bước trên con đường khám phá thế giới bí ẩn và đẹp đẽ của toán học, đặc biệt là được "làm giàu" về vốn văn hoá chung và có cơ hội "Mang cuộc sống vào bài học – Đưa bài học vào cuộc sống".

Chịu khó suy nghĩ, trao đổi với các thầy cô giáo và bạn bè, nhất định các em sẽ ngày càng tiến bộ và cảm thấy vui sướng khi nhận ra ý nghĩa: Học Toán rất có ích cho cuộc sống hằng ngày.

Chúc các em học tập thật tốt, say mê học Toán và có thêm nhiều niềm vui.

Các tác giả

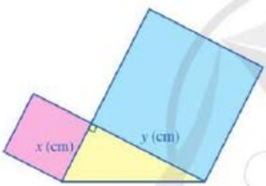
MỤC LỤC

Chương I

ĐA THỨC NHIỀU BIẾN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: đơn thức nhiều biến, đa thức nhiều biến; các phép tính với đa thức nhiều biến; hằng đẳng thức đáng nhớ; vận dụng hằng đẳng thức vào phân tích đa thức thành nhân tử.

§1. ĐƠN THỨC NHIỀU BIẾN. ĐA THỨC NHIỀU BIẾN



Hình 1

Trong giờ học Mĩ thuật, bạn Hạnh dán lên trang vở hai hình vuông và một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông là x (cm), y (cm) như *Hình 1*. Tổng diện tích của hai hình vuông và tam giác vuông đó là:

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2}xy \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Biểu thức đại số $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}xy$ còn được gọi là gì?

I. ĐƠN THỨC NHIỀU BIẾN

1. Khái niệm

1

a) Viết biểu thức biểu thị:

– Diện tích của hình vuông có độ dài cạnh là x (cm);

– Diện tích của hình chữ nhật có độ dài hai cạnh lần lượt là $2x$ (cm), $3y$ (cm);

– Thể tích của hình hộp chữ nhật có ba kích thước lần lượt là x (cm), $2y$ (cm), $3z$ (cm).

b) Cho biết mỗi biểu thức trên gồm những số, biến và phép tính nào.

> *Đơn thức nhiều biến* (hay *đơn thức*) là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.

Ví dụ 1 Trong những biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức?

$$\frac{1}{4};\ x;\ y;\ 2x+y;\ x^2y;\ -3xy^2z^3;\ \frac{1}{2}x^2y^2xz.$$

Giải

Các biểu thức $\frac{1}{4}$; x; y; x^2y; $-3xy^2z^3$; $\frac{1}{2}x^2y^2xz$ là những đơn thức, còn biểu thức $2x + y$ không phải là đơn thức.

1 Trong những biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức?

$$5y;\ y+3z;\ \frac{1}{2}x^3y^2x^2z.$$

2. Đơn thức thu gọn

2 Xét đơn thức $2x^3y^4$. Trong đơn thức này, các biến x, y được viết bao nhiêu lần dưới dạng một luỹ thừa với số mũ nguyên dương?

Ta nói đơn thức $2x^3y^4$ là đơn thức thu gọn; 2 là hệ số và x^3y^4 là phần biến của đơn thức đó.

> *Đơn thức thu gọn* là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến, mà mỗi biến đã được nâng lên luỹ thừa với số mũ nguyên dương và chỉ được viết một lần.
> Số nói trên gọi là *hệ số*, phần còn lại gọi là *phần biến* của đơn thức thu gọn.

Thông thường, khi viết đơn thức thu gọn, ta viết hệ số trước, phần biến sau và các biến được viết theo thứ tự trong bảng chữ cái.

Ví dụ 2

a) Trong những đơn thức sau, đơn thức nào là đơn thức thu gọn?

$$\sqrt{2};\ x;\ y;\ x^2y^3;\ -5x^2y^3z^4;\ \frac{1}{4}x^2y^2xz^3.$$

b) Thu gọn đơn thức: $2x^3y^5z^5z^2$.

Giải

a) Các đơn thức $\sqrt{2}$; x; y; x^2y^3; $-5x^2y^3z^4$ là những đơn thức thu gọn, còn đơn thức $\frac{1}{4}x^2y^2xz^3$ không phải là đơn thức thu gọn.

2 Thu gọn mỗi đơn thức sau:

$$y^3y^2z;\ \frac{1}{3}xy^2x^3z.$$

b) Do $2x^3y^5z^5z^2 = 2x^3y^5z^7$ nên đơn thức $2x^3y^5z^5z^2$ được thu gọn thành đơn thức $2x^3y^5z^7$.

Chú ý

- Ta cũng coi một số là đơn thức thu gọn.
- Từ nay, khi nói đến đơn thức, nếu không nói gì thêm, ta hiểu đó là đơn thức thu gọn.

3. Đơn thức đồng dạng

3 Cho hai đơn thức: $2x^3y^4$ và $-3x^3y^4$.

a) Nêu hệ số của mỗi đơn thức trên.

b) So sánh phần biến của hai đơn thức trên.

Hai đơn thức $2x^3y^4$ và $-3x^3y^4$ có hệ số khác 0 và có cùng phần biến. Ta nói hai đơn thức đó là đồng dạng.

> *Hai đơn thức đồng dạng* là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến.

Ví dụ 3 Chỉ ra các đơn thức đồng dạng trong mỗi trường hợp sau:

a) $-x^2y^3z^4$ và $-\frac{1}{3}x^2y^3z^4$;

b) $0{,}5xy^2$ và $0{,}5x^2y$;

c) $\frac{1}{5}x^3y^5$; $-6x^3y^5$ và $\sqrt{3}x^3y^5$.

Giải

a) Hai đơn thức $-x^2y^3z^4$ và $-\frac{1}{3}x^2y^3z^4$ có hệ số khác 0 và có cùng phần biến nên chúng là hai đơn thức đồng dạng.

b) Hai đơn thức $0{,}5xy^2$ và $0{,}5x^2y$ không có cùng phần biến nên chúng không phải là hai đơn thức đồng dạng.

c) Những đơn thức $\frac{1}{5}x^3y^5$; $-6x^3y^5$ và $\sqrt{3}x^3y^5$ có hệ số khác 0 và có cùng phần biến nên chúng là những đơn thức đồng dạng.

3 Chỉ ra các đơn thức đồng dạng trong mỗi trường hợp sau:

a) x^2y^4; $-3x^2y^4$ và $\sqrt{5}x^2y^4$;

b) $-x^2y^2z^2$ và $-2x^2y^2z^3$.

4. Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng

4

a) Tính tổng: $5x^3 + 8x^3$.

b) Nêu quy tắc cộng (hay trừ) hai đơn thức có cùng số mũ của biến x:

$$ax^k + bx^k;\ ax^k - bx^k\ (k \in \mathbb{N}^*).$$

Tương tự như đơn thức có cùng số mũ của biến, đối với đơn thức (nhiều biến) đồng dạng ta cũng có quy tắc sau:

Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

Ví dụ 4 Thực hiện phép tính:

a) $3x^2y^3 + 4x^2y^3$; b) $4x^3y^2 - 7x^3y^2$; c) $8xy^3 + xy^3$.

Giải

a) $3x^2y^3 + 4x^2y^3 = (3 + 4)x^2y^3 = 7x^2y^3$.

b) $4x^3y^2 - 7x^3y^2 = (4 - 7)x^3y^2 = -3x^3y^2$.

c) $8xy^3 + xy^3 = (8 + 1)xy^3 = 9xy^3$.

4 Thực hiện phép tính:

a) $4x^4y^6 + 2x^4y^6$;

b) $3x^3y^5 - 5x^3y^5$.

II. ĐA THỨC NHIỀU BIẾN

1. Định nghĩa

5 Cho biểu thức $x^2 + 2xy + y^2$.

a) Biểu thức trên có bao nhiêu biến?

b) Mỗi số hạng xuất hiện trong biểu thức có dạng như thế nào?

Đa thức nhiều biến (hay *đa thức*) là một tổng của những đơn thức.

Chẳng hạn: $P = 3xy + 1$ là đa thức của hai biến x, y;

$Q = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ là đa thức của ba biến x, y, z.

Chú ý: Mỗi đơn thức được coi là một đa thức.

Ví dụ 5 Trong những biểu thức sau, biểu thức nào là đa thức?

$$2x + y + x^2y;\ -3xy^2z^3 + \frac{1}{2}x^2y^2z;\ \frac{x+y}{x-y}.$$

Giải

Các biểu thức $2x + y + x^2y$; $-3xy^2z^3 + \frac{1}{2}x^2y^2z$ là đa thức, còn biểu thức $\frac{x+y}{x-y}$ không phải là đa thức.

5 Trong những biểu thức sau, biểu thức nào là đa thức?

$y + 3z + \frac{1}{2}y^2z$; $\frac{x^2+y^2}{x+y}$.

2. Đa thức thu gọn

6 Cho đa thức: $P = x^3 + 2x^2y + x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Thực hiện phép cộng các đơn thức đồng dạng sao cho trong đa thức P không còn hai đơn thức nào đồng dạng.

Thu gọn đa thức nhiều biến là làm cho trong đa thức đó không còn hai đơn thức nào đồng dạng.

Ví dụ 6 Thu gọn đa thức: $Q = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xy + yz + yz + 2zx$.

Giải

Ta có: $Q = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xy + yz + yz + 2zx$

$= x^2 + y^2 + z^2 + (xy + xy) + (yz + yz) + 2zx$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$.

6 Thu gọn đa thức:
$R = x^3 - 2x^2y - x^2y + 3xy^2 - y^3$.

3. Giá trị của đa thức

7 Cho đa thức: $P = x^2 - y^2$. Đa thức P được xác định bằng biểu thức nào? Tính giá trị của P tại $x = 1$; $y = 1$.

Nhận xét: Để tính giá trị của một đa thức tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay những giá trị cho trước đó vào biểu thức xác định đa thức rồi thực hiện các phép tính.

Ví dụ 7 Tính giá trị của đa thức $P = x^2 - 2xy + y^2$ tại $x = 1$; $y = 1$.

Giải

Giá trị của đa thức P tại $x = 1$; $y = 1$ là:

$1^2 - 2 \,.\, 1 \,.\, 1 + 1^2 = 1 - 2 + 1 = 0$.

7 Tính giá trị của đa thức
$Q = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ tại $x = 2$; $y = 1$.

BÀI TẬP

1. a) Trong những biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức?

$$\frac{1}{5}xy^2z^3;\quad 3 - 2x^3y^2z;\quad -\frac{3}{2}x^4yxz^2;\quad \frac{1}{2}x^2(y^3 - z^3).$$

b) Trong những biểu thức sau, biểu thức nào là đa thức?

$$2 - x + y;\quad -5x^2yz^3 + \frac{1}{3}xy^2z + x + 1;\quad \frac{x - y}{xy^2};\quad \frac{1}{x} + 2y - 3z.$$

2. Thu gọn mỗi đơn thức sau:

a) $-\frac{1}{2}x^2yxy^3$; b) $0{,}5x^2yzxy^3$.

3. Chỉ ra các đơn thức đồng dạng trong mỗi trường hợp sau:

a) x^3y^5; $-\frac{1}{6}x^3y^5$ và $\sqrt{3}x^3y^5$; b) x^2y^3 và x^2y^7.

4. Thực hiện phép tính:

a) $9x^3y^6 + 4x^3y^6 + 7x^3y^6$; b) $9x^5y^6 - 14x^5y^6 + 5x^5y^6$.

5. Thu gọn mỗi đa thức sau:

a) $A = 13x^2y + 4 + 8xy - 6x^2y - 9$;

b) $B = 4{,}4x^2y - 40{,}6xy^2 + 3{,}6xy^2 - 1{,}4x^2y - 26$.

6. Tính giá trị của mỗi đa thức sau:

a) $P = x^3y - 14y^3 - 6xy^2 + y + 2$ tại $x = -1$; $y = 0{,}5$;

b) $Q = 15x^2y - 5xy^2 + 7xy - 21$ tại $x = 0{,}2$; $y = -1{,}2$.

TÌM TÒI – MỞ RỘNG

Bậc của đa thức nhiều biến

1. Bậc của đơn thức

Trong đơn thức $2xy^4z^5$, biến x có số mũ là 1; biến y có số mũ là 4; biến z có số mũ là 5. Tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức trên là: $1 + 4 + 5 = 10$. Ta nói bậc của đơn thức đó là 10.

Ta có định nghĩa sau: *Bậc của đơn thức* (thu gọn) có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó.

Ta quy ước: Số thực khác 0 là đơn thức bậc không.

2. Bậc của đa thức

Cho đa thức (thu gọn): $P = 2x^5 + 3x^2y^2 + 3xy^2 + 2y^3$.

Nhận thấy: Bậc cao nhất của các đơn thức trong dạng thu gọn của P là 5. Ta nói bậc của đa thức P là 5.

Ta có định nghĩa sau: *Bậc của đa thức* là bậc cao nhất của các đơn thức trong dạng thu gọn của đa thức đó.

Chú ý

- Khi tìm bậc của một đa thức, trước hết ta phải thu gọn đa thức đó.
- Ta quy ước: Số thực khác 0 là đa thức bậc không. Số 0 là đa thức không có bậc.

§2. CÁC PHÉP TÍNH VỚI ĐA THỨC NHIỀU BIẾN

Ở lớp 7, ta đã học cách thực hiện phép cộng, phép trừ, phép nhân, phép chia các đa thức một biến.

Các phép tính với đa thức nhiều biến được thực hiện như thế nào?

I. CỘNG HAI ĐA THỨC NHIỀU BIẾN

1 Cho hai đa thức: $P = x^2 + 2xy + y^2$ và $Q = x^2 - 2xy + y^2$.

a) Viết tổng $P + Q$ theo hàng ngang.

b) Nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau.

c) Tính tổng $P + Q$ bằng cách thực hiện phép tính trong từng nhóm.

Ta có:

$$\begin{aligned} P + Q &= (x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 \\ &= (x^2 + x^2) + (2xy - 2xy) + (y^2 + y^2) = 2x^2 + 2y^2. \end{aligned}$$

Nhận xét: Để cộng hai đa thức theo hàng ngang, ta có thể làm như sau:

- Viết tổng hai đa thức theo hàng ngang;
- Nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau;
- Thực hiện phép tính trong từng nhóm, ta được tổng cần tìm.

Ví dụ 1 Tính tổng của hai đa thức:

$P = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ và $Q = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

1 Tính tổng của hai đa thức:

$M = x^3 + y^3$ và $N = x^3 - y^3$.

Giải

Ta có: $P + Q = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)$

$$\begin{aligned} &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \\ &= (x^3 + x^3) + (3x^2y - 3x^2y) + (3xy^2 + 3xy^2) + (y^3 - y^3) = 2x^3 + 6xy^2. \end{aligned}$$

Ví dụ 2 Bác Huỳnh muốn sơn bề mặt của hai khối gỗ có dạng hình hộp chữ nhật. Hình hộp chữ nhật thứ nhất có ba kích thước là x (cm), $2y$ (cm), z (cm). Hình hộp chữ nhật thứ hai có ba kích thước là $2x$ (cm), $2y$ (cm), $3z$ (cm). Viết đa thức biểu thị tổng diện tích bề mặt của hai khối gỗ mà bác Huỳnh cần phải sơn.

Giải

Tổng diện tích các mặt của hình hộp chữ nhật thứ nhất là:

$$2(x\,.\,2y + 2y\,.\,z + z\,.\,x) = 4xy + 4yz + 2zx\ (\text{cm}^2).$$

Tổng diện tích các mặt của hình hộp chữ nhật thứ hai là:

$$2(2x\,.\,2y + 2y\,.\,3z + 3z\,.\,2x) = 8xy + 12yz + 12zx\ (\text{cm}^2).$$

Đa thức biểu thị tổng diện tích bề mặt của hai khối gỗ mà bác Huỳnh cần phải sơn là:

$$(4xy + 4yz + 2zx) + (8xy + 12yz + 12zx) = 4xy + 4yz + 2zx + 8xy + 12yz + 12zx$$

$$= (4xy + 8xy) + (4yz + 12yz) + (2zx + 12zx) = 12xy + 16yz + 14zx\ (\text{cm}^2).$$

II. TRỪ HAI ĐA THỨC NHIỀU BIẾN

2 Cho hai đa thức: $P = x^2 + 2xy + y^2$ và $Q = x^2 - 2xy + y^2$.

a) Viết hiệu $P - Q$ theo hàng ngang, trong đó đa thức Q được đặt trong dấu ngoặc.

b) Sau khi bỏ dấu ngoặc và đổi dấu mỗi đơn thức của đa thức Q, nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau.

c) Tính hiệu $P - Q$ bằng cách thực hiện phép tính trong từng nhóm.

Ta có:

$$\begin{aligned} P - Q &= (x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 \\ &= (x^2 - x^2) + (2xy + 2xy) + (y^2 - y^2) = 4xy. \end{aligned}$$

Nhận xét: Để trừ đa thức P cho đa thức Q theo hàng ngang, ta có thể làm như sau:

- Viết hiệu $P - Q$ theo hàng ngang, trong đó đa thức Q được đặt trong dấu ngoặc;
- Sau khi bỏ dấu ngoặc và đổi dấu mỗi đơn thức của đa thức Q, nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau;
- Thực hiện phép tính trong từng nhóm, ta được hiệu cần tìm.

Ví dụ 3 Cho ba đa thức: $A = x^2 - 2xy + y^2$; $B = 2x^2 - y^2$; $C = x^2 - 3xy$. Tính:

a) $A - B$; b) $A - C$.

Giải

a) Ta có:

$$A - B = (x^2 - 2xy + y^2) - (2x^2 - y^2)$$
$$= x^2 - 2xy + y^2 - 2x^2 + y^2$$
$$= (x^2 - 2x^2) - 2xy + (y^2 + y^2) = -x^2 - 2xy + 2y^2.$$

b) Ta có:

$$A - C = (x^2 - 2xy + y^2) - (x^2 - 3xy) = x^2 - 2xy + y^2 - x^2 + 3xy$$
$$= (x^2 - x^2) + (-2xy + 3xy) + y^2 = xy + y^2.$$

2 Với ba đa thức A, B, C trong *Ví dụ 3*, hãy tính:

a) $B - C$;

b) $(B - C) + A$.

III. NHÂN HAI ĐA THỨC NHIỀU BIẾN

1. Nhân hai đơn thức

3

a) Tính tích: $3x^2 . 8x^4$.

b) Nêu quy tắc nhân hai đơn thức một biến.

Nhận xét: Tương tự như đối với đơn thức một biến, để nhân hai đơn thức nhiều biến ta có thể làm như sau:

- Nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau;
- Thu gọn đơn thức nhận được ở tích.

Ví dụ 4 Tính tích:

a) $3x^2y^3 . 8x^4y^6$; b) $3x^2y^3z . 9x^3y^3z^2$.

Giải

a) $3x^2y^3 . 8x^4y^6 = (3 . 8)(x^2y^3x^4y^6) = 24(x^2x^4)(y^3y^6) = 24x^6y^9$.

b) $3x^2y^3z . 9x^3y^3z^2 = (3 . 9)(x^2y^3z\,x^3y^3z^2) = 27(x^2x^3)(y^3y^3)(z\,z^2) = 27x^5y^6z^3$.

3 Tính tích của hai đơn thức: x^3y^7 và $-2x^5y^3$.

2. Nhân đơn thức với đa thức

4

a) Tính tích: $(11x^3)(x^2 - x + 1)$.

b) Nêu quy tắc nhân đơn thức với đa thức trong trường hợp một biến.

Tương tự như trường hợp một biến, ta có quy tắc sau:

> Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức đó với từng đơn thức của đa thức rồi cộng các kết quả với nhau.

Ví dụ 5 Tính tích:

a) $(xy^2)(x + y + xy)$;

b) $\left(-\frac{1}{3}xy\right)(6x^3 - 9xy + 3y^3)$.

4 Tính tích:
$\left(-\frac{1}{2}xy\right)(8x^2 - 5xy + 2y^2)$.

Giải

a) $(xy^2)(x + y + xy) = xy^2x + xy^2y + xy^2xy = x^2y^2 + xy^3 + x^2y^3$.

b) $\left(-\frac{1}{3}xy\right)(6x^3 - 9xy + 3y^3) = \left(-\frac{1}{3}xy\right)\cdot 6x^3 - \left(-\frac{1}{3}xy\right)\cdot 9xy + \left(-\frac{1}{3}xy\right)\cdot 3y^3$

$$= \left(-\frac{1}{3}\cdot 6\right)(xyx^3) - \left(-\frac{1}{3}\cdot 9\right)(xyxy) + \left(-\frac{1}{3}\cdot 3\right)(xyy^3)$$

$$= -2x^4y + 3x^2y^2 - xy^4.$$

3. Nhân hai đa thức

5

a) Tính tích: $(x + 1)(x^2 - x + 1)$.

b) Nêu quy tắc nhân hai đa thức trong trường hợp một biến.

Tương tự như trường hợp một biến, ta có quy tắc sau:

> Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi đơn thức của đa thức này với từng đơn thức của đa thức kia rồi cộng các kết quả với nhau.

Ví dụ 6 Tính:

a) $(x + y)^2$;

b) $(x + y)(x - y)$.

5 Tính: $(x - y)^2$.

Giải

a) $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

b) $(x + y)(x - y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$.

Ví dụ 7 Một mảnh vườn có dạng hình chữ nhật với độ dài hai cạnh là $2x + y$ (m) và $2x - y$ (m).

a) Viết đa thức biểu thị diện tích của mảnh vườn trên theo x và y.

b) Tính diện tích của mảnh vườn khi $x = 3$; $y = 2$.

Giải

a) Đa thức biểu thị diện tích của mảnh vườn là:

$$(2x + y)(2x - y) = 4x^2 - 2xy + 2yx - y^2 = 4x^2 - y^2 \text{ (m}^2\text{)}.$$

b) Với $x = 3$ và $y = 2$, diện tích của mảnh vườn là:

$$4 \cdot 3^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32 \text{ (m}^2\text{)}.$$

IV. CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

1. Phép chia hết một đơn thức cho một đơn thức

6 Tính tích: $9x^5y^4 \cdot 2x^4y^2$.

Ta có: $18x^9y^6 = 9x^5y^4 \cdot 2x^4y^2$. Ta nói đơn thức $18x^9y^6$ chia hết cho đơn thức $9x^5y^4$ và $(18x^9y^6) : (9x^5y^4) = 2x^4y^2$.

Tương tự như trường hợp một biến, ta nói đơn thức nhiều biến A là chia hết cho đơn thức nhiều biến B $(B \neq 0)$ nếu tìm được đơn thức Q sao cho $A = B \cdot Q$.

Nhận xét: Đơn thức A chia hết cho đơn thức B $(B \neq 0)$ khi mỗi biến của B đều là biến của A với số mũ không lớn hơn số mũ của nó trong A.

Quy tắc: Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B), ta có thể làm như sau:

- Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B;
- Chia luỹ thừa của từng biến trong A cho luỹ thừa của cùng biến đó trong B;
- Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

Ta có:

$x^m : x^n = x^{m-n}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*, m > n)$;

$x^m : x^m = 1$ $(m \in \mathbb{N}^*)$.

Ví dụ 8 Tìm thương trong phép chia đơn thức $16x^4y^5z^6$ cho đơn thức $8x^3y^2$.

Giải

Ta có:

$(16x^4y^5z^6) : (8x^3y^2) = (16 : 8)(x^4 : x^3)(y^5 : y^2)z^6 = 2xy^3z^6$.

Vậy thương trong phép chia đơn thức $16x^4y^5z^6$ cho đơn thức $8x^3y^2$ là: $2xy^3z^6$.

6 Cho $P = (21x^4y^5) : (7x^3y^3)$. Tính giá trị của biểu thức P tại $x = -0,5$; $y = -2$.

2. Phép chia hết một đa thức cho một đơn thức

7 Tính tích: $(3xy)(x + y)$.

Ta có: $(3xy)(x + y) = (3xy)x + (3xy)y = 3x^2y + 3xy^2$.
Ta nói đa thức $3x^2y + 3xy^2$ *chia hết cho đơn thức* $3xy$ *và*
$(3x^2y + 3xy^2) : (3xy) = x + y$.

Tương tự như trên, ta nói đa thức nhiều biến A là chia hết cho đơn thức nhiều biến B ($B \neq 0$) nếu tìm được đa thức Q sao cho $A = B\,.\,Q$.

Nhận xét: Đa thức A chia hết cho đơn thức B ($B \neq 0$) khi mỗi đơn thức của A chia hết cho B.

Quy tắc: Muốn chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B), ta chia mỗi đơn thức của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.

Ví dụ 9 Tìm thương trong phép chia đa thức
$15x^3y^2 - 20x^2y^3 + 25x^4y^4$ cho đơn thức $5x^2y^2$.

Giải

Ta có: $(15x^3y^2 - 20x^2y^3 + 25x^4y^4) : (5x^2y^2)$

$= (15x^3y^2) : (5x^2y^2) - (20x^2y^3) : (5x^2y^2) + (25x^4y^4) : (5x^2y^2)$

$= 3x - 4y + 5x^2y^2$.

Vậy thương trong phép chia đa thức $15x^3y^2 - 20x^2y^3 + 25x^4y^4$ cho đơn thức $5x^2y^2$ là: $3x - 4y + 5x^2y^2$.

7 Tìm thương trong phép chia đa thức
$12x^3y^3 - 6x^4y^3 + 21x^3y^4$
cho đơn thức $3x^3y^3$.

BÀI TẬP

1. Thực hiện phép tính:

a) $(-xy)(-2x^2y + 3xy - 7x)$;

b) $\left(\frac{1}{6}x^2y^2\right)(-0{,}3x^2y - 0{,}4xy + 1)$;

c) $(x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$;

d) $(x - y)(x^2 - 2xy + y^2)$.

2. Thực hiện phép tính:

a) $(39x^5y^7) : (13x^2y)$;

b) $\left(x^2y^2 + \frac{1}{6}x^3y^2 - x^5y^4\right) : \left(\frac{1}{2}xy^2\right)$.

3. Rút gọn biểu thức:

a) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$;

b) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$;

c) $(4x-1)(6y+1)-3x\left(8y+\dfrac{4}{3}\right)$;

d) $(x+y)(x-y)+(xy^4-x^3y^2):(xy^2)$.

4. a) Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức

$$P=(5x^2-2xy+y^2)-(x^2+y^2)-(4x^2-5xy+1)$$

khi $x=1{,}2$ và $x+y=6{,}2$.

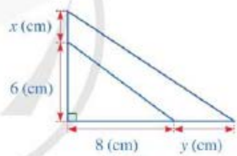
b) Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x:

$$(x^2-5x+4)(2x+3)-(2x^2-x-10)(x-3).$$

5. a) Chứng minh rằng biểu thức $P=5x(2-x)-(x+1)(x+9)$ luôn nhận giá trị âm với mọi giá trị của biến x.

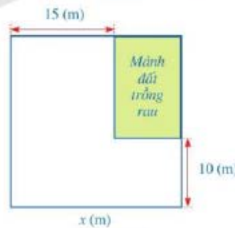
b) Chứng minh rằng biểu thức $Q=3x^2+x(x-4y)-2x(6-2y)+12x+1$ luôn nhận giá trị dương với mọi giá trị của biến x và y.

6. Bạn Hạnh dự định cắt một miếng bìa có dạng tam giác vuông với độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là 6 (cm), 8 (cm). Sau khi xem xét lại, bạn Hạnh quyết định tăng độ dài cạnh góc vuông 6 (cm) thêm x (cm) và tăng độ dài cạnh góc vuông 8 (cm) thêm y (cm) (*Hình 2*). Viết đa thức biểu thị diện tích phần tăng thêm của miếng bìa theo x và y.



Hình 2

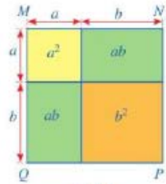
7. Khu vườn của nhà bác Xuân có dạng hình vuông. Bác Xuân muốn dành một mảnh đất có dạng hình chữ nhật ở góc khu vườn để trồng rau (*Hình 3*). Biết diện tích của mảnh đất trồng rau bằng 150 m^2. Tính độ dài cạnh x (m) của khu vườn đó.



Hình 3

§3. HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

Diện tích của hình vuông MNPQ (Hình 4) có thể được tính theo những cách nào?



Hình 4

I. HẰNG ĐẲNG THỨC

1 Xét hai biểu thức: $P = 2(x + y)$ và $Q = 2x + 2y$.

Tính giá trị của mỗi biểu thức P và Q rồi so sánh hai giá trị đó trong mỗi trường hợp sau:

a) Tại $x = 1$; $y = -1$;

b) Tại $x = 2$; $y = -3$.

Nhận xét: Trong mỗi trường hợp trên, giá trị của biểu thức P luôn bằng giá trị của biểu thức Q.

Nếu hai biểu thức P và Q nhận giá trị như nhau với mọi giá trị của biến thì ta nói $P = Q$ là một *đồng nhất thức* hay là một *hằng đẳng thức*.

Chẳng hạn, đẳng thức $2(x + y) = 2x + 2y$ là một hằng đẳng thức.

Ví dụ 1 Chứng minh rằng: $xy(x + y) - xy^2 = x^2y$.

Giải

Ta có: $xy(x + y) - xy^2 = x^2y + xy^2 - xy^2 = x^2y$.

Vậy $xy(x + y) - xy^2 = x^2y$.

1 Chứng minh rằng:
$x(xy^2 + y) - y(x^2y + x) = 0$.

II. HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

1. Bình phương của một tổng, một hiệu

2 Với a, b là hai số thực bất kì, thực hiện phép tính:

a) $(a + b)(a + b)$; b) $(a - b)(a - b)$.

Nhận xét: Ta có: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Với hai biểu thức A, B tuỳ ý, ta có:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2; \qquad (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Ví dụ 2 Tính:

a) $(x+2)^2$; b) $(x-1)^2$; c) $(2x-3y)^2$.

Giải

a) $(x+2)^2 = x^2 + 2 . x . 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$.

b) $(x-1)^2 = x^2 - 2 . x . 1 + 1^2 = x^2 - 2x + 1$.

c) $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2 . (2x) . (3y) + (3y)^2$

$= 4x^2 - 12xy + 9y^2$.

2 Tính:

a) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$; b) $(2x+y)^2$;

c) $(3-x)^2$; d) $(x-4y)^2$.

Ví dụ 3 Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu:

a) $a^2 + 2a + 1$;

b) $4 + 12a + 9a^2$;

c) $a^2 + 4b^2 - 4ab$.

Giải

a) $a^2 + 2a + 1 = a^2 + 2 . a . 1 + 1^2 = (a+1)^2$.

b) $4 + 12a + 9a^2 = 2^2 + 2 . 2 . (3a) + (3a)^2 = (2+3a)^2$.

c) $a^2 + 4b^2 - 4ab = a^2 - 4ab + 4b^2$

$= a^2 - 2 . a . (2b) + (2b)^2 = (a-2b)^2$.

3 Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu:

a) $y^2 + y + \frac{1}{4}$; b) $y^2 + 49 - 14y$.

Ví dụ 4 Tính nhanh: 99^2.

Giải

Ta có: $99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 . 100 . 1 + 1^2$

$= 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$.

4 Tính nhanh: 49^2.

2. Hiệu hai bình phương

3 Với a, b là hai số thực bất kì, thực hiện phép tính: $(a-b)(a+b)$.

Nhận xét: Ta có: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Với hai biểu thức A, B tuỳ ý, ta có:

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Ví dụ 5 Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng tích:

a) $x^2 - 4$; b) $4y^2 - 9$.

Giải

a) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$.

b) $4y^2 - 9 = (2y)^2 - 3^2 = (2y - 3)(2y + 3)$.

5 Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng tích:

a) $9x^2 - 16$; b) $25 - 16y^2$.

Ví dụ 6 Tính:

a) $(x + 1)(x - 1)$; b) $(2a - 3b)(2a + 3b)$.

Giải

a) $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$.

b) $(2a - 3b)(2a + 3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$.

6 Tính:

a) $(a - 3b)(a + 3b)$;

b) $(2x + 5)(2x - 5)$;

c) $(4y - 1)(4y + 1)$.

Ví dụ 7 Tính nhanh: 98 . 102.

Giải

Ta có: $98 \,.\, 102 = (100 - 2)(100 + 2) = 100^2 - 2^2$

$= 10\,000 - 4 = 9\,996.$

7 Tính nhanh: 48 . 52.

3. Lập phương của một tổng, một hiệu

4 Với a, b là hai số thực bất kì, thực hiện phép tính:

a) $(a + b)(a + b)^2$; b) $(a - b)(a - b)^2$.

Nhận xét: Ta có:

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Với hai biểu thức A, B tuỳ ý, ta có:

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3; \qquad (A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3.$$

Ví dụ 8 Tính:

a) $(x+1)^3$; b) $(2x+y)^3$; c) $(x-3y)^3$.

Giải

a) $(x+1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$

b) $(2x+y)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot (2x) \cdot y^2 + y^3$

$= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3.$

c) $(x-3y)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot (3y) + 3 \cdot x \cdot (3y)^2 - (3y)^3$

$= x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3.$

8 Tính:

a) $(3+x)^3$;

b) $(a+2b)^3$;

c) $(2x-y)^3$.

Ví dụ 9 Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc một hiệu:

a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$; b) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$.

Giải

a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = (x+2)^3$.

b) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot (2y) + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 = (x-2y)^3$.

9 Viết biểu thức sau dưới dạng lập phương của một hiệu:

$8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$.

Ví dụ 10 Tính nhanh: $99^3 + 3 \cdot 99^2 + 3 \cdot 99 + 1$.

Giải

Ta có: $99^3 + 3 \cdot 99^2 + 3 \cdot 99 + 1$

$= 99^3 + 3 \cdot 99^2 \cdot 1 + 3 \cdot 99 \cdot 1^2 + 1^3$

$= (99+1)^3 = 100^3 = 1\,000\,000.$

10 Tính nhanh:

$101^3 - 3 \cdot 101^2 + 3 \cdot 101 - 1$.

4. Tổng, hiệu hai lập phương

5 Với a, b là hai số thực bất kì, thực hiện phép tính:

a) $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$; b) $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Nhận xét: Ta có: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Với hai biểu thức A, B tuỳ ý, ta có:

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2); \qquad A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2).$$

Ví dụ 11 Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng tích:

a) $x^3 + 8$; b) $8x^3 - 27y^3$.

Giải

a) $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - x \,.\, 2 + 2^2)$

$= (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

b) $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3$

$= (2x - 3y)[(2x)^2 + (2x) \,.\, (3y) + (3y)^2]$

$= (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$.

11 Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng tích:

a) $27x^3 + 1$; b) $64 - 8y^3$.

Ví dụ 12 Giá trị của biểu thức $E = (x - 1)(x^2 + x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1)$ có phụ thuộc vào giá trị của biến x hay không? Vì sao?

Giải

Ta có: $E = (x - 1)(x^2 + x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1)$

$= (x - 1)(x^2 + x \,.\, 1 + 1^2) - (x + 1)(x^2 - x \,.\, 1 + 1^2)$

$= (x^3 - 1^3) - (x^3 + 1^3) = x^3 - 1 - x^3 - 1 = -2$.

Vậy giá trị của biểu thức E không phụ thuộc vào giá trị của biến x.

Ví dụ 13 Tính nhanh: $(0,76)^3 + (0,24)^3 + 3 \,.\, 0,76 \,.\, 0,24$.

Giải

Ta có: $(0,76)^3 + (0,24)^3 + 3 \,.\, 0,76 \,.\, 0,24$

$= (0,76 + 0,24)[(0,76)^2 - 0,76 \,.\, 0,24 + (0,24)^2] + 3 \,.\, 0,76 \,.\, 0,24$

$= (0,76)^2 - 0,76 \,.\, 0,24 + (0,24)^2 + 3 \,.\, 0,76 \,.\, 0,24$

$= (0,76)^2 + 2 \,.\, 0,76 \,.\, 0,24 + (0,24)^2$

$= (0,76 + 0,24)^2 = 1^2 = 1$.

Ví dụ 14 Bác Ngọc dự định gấp một khối lập phương có cạnh là 5 cm. Sau khi xem xét lại, bác Ngọc quyết định tăng độ dài cạnh của khối lập phương thêm x (cm). Viết đa thức biểu thị phần thể tích tăng thêm của khối lập phương mới so với khối lập phương dự định gấp ban đầu theo x.

Giải

Do cạnh của khối lập phương mới là $x + 5$ (cm) nên thể tích của khối lập phương mới là: $(x + 5)^3$ (cm^3).

Thể tích của khối lập phương dự định gấp ban đầu là: 5^3 (cm^3).

Vậy đa thức biểu thị phần thể tích tăng thêm của khối lập phương mới so với khối lập phương dự định gấp ban đầu là:

$$(x+5)^3 - 5^3 = x^3 + 3 \,.\, x^2 \,.\, 5 + 3 \,.\, x \,.\, 5^2 + 5^3 - 5^3$$
$$= x^3 + 15x^2 + 75x \text{ (cm}^3\text{)}.$$

BÀI TẬP

1. Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu:

a) $4x^2 + 28x + 49$;
b) $4a^2 + 20ab + 25b^2$;
c) $16y^2 - 8y + 1$;
d) $9x^2 - 6xy + y^2$.

2. Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc một hiệu:

a) $a^3 + 12a^2 + 48a + 64$;
b) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$;
c) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$;
d) $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$.

3. Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng tích:

a) $25x^2 - 16$;
b) $16a^2 - 9b^2$;
c) $8x^3 + 1$;
d) $125x^3 + 27y^3$;
e) $8x^3 - 125$;
g) $27x^3 - y^3$.

4. Tính giá trị của mỗi biểu thức:

a) $A = x^2 + 6x + 10$ tại $x = -103$;

b) $B = x^3 + 6x^2 + 12x + 12$ tại $x = 8$.

5. Chứng minh giá trị của mỗi biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x:

a) $C = (3x-1)^2 + (3x+1)^2 - 2(3x-1)(3x+1)$;

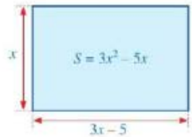
b) $D = (x+2)^3 - (x-2)^3 - 12(x^2+1)$;

c) $E = (x+3)(x^2 - 3x + 9) - (x-2)(x^2 + 2x + 4)$;

d) $G = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1) - 8(x+2)(x^2 - 2x + 4)$.

§4. VẬN DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC VÀO PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Làm thế nào để biến đổi được đa thức $3x^2 - 5x$ dưới dạng tích của hai đa thức?



I. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

1 Viết đa thức $6x^2 - 10x$ thành tích của hai đa thức bậc nhất.

Khi ta biến đổi đa thức $6x^2 - 10x$ thành tích $2x(3x - 5)$ thì ta đã phân tích đa thức $6x^2 - 10x$ thành nhân tử.

Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.

Ví dụ 1 Trong những phép biến đổi sau đây, phép biến đổi nào là phân tích đa thức thành nhân tử?

a) $4x^2 - 9y^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$;

b) $2x^2 + 2x = 2x(x + 1)$;

c) $x + 1 = (2x - 4) - (x - 5)$.

Giải

a) Phép biến đổi $4x^2 - 9y^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$ là phân tích đa thức thành nhân tử vì phép biến đổi đó đã viết đa thức $4x^2 - 9y^2$ thành tích của hai đa thức.

b) Tương tự như trên, phép biến đổi $2x^2 + 2x = 2x(x + 1)$ cũng là phân tích đa thức thành nhân tử.

c) Phép biến đổi $x + 1 = (2x - 4) - (x - 5)$ không phải là phân tích đa thức thành nhân tử vì phép biến đổi đó chỉ viết đa thức $x + 1$ thành tổng của hai đa thức.

II. VẬN DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC VÀO PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

1. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp vận dụng trực tiếp hằng đẳng thức

2 Viết mỗi đa thức sau dưới dạng tích của hai đa thức:

a) $x^2 - y^2$; b) $x^3 - y^3$; c) $x^3 + y^3$.

Ví dụ 2 Phân tích mỗi đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x^2 - 9$; b) $49x^2 - 81y^2$; c) $8y^3 + 1$.

Giải

a) $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3)$.

b) $49x^2 - 81y^2 = (7x)^2 - (9y)^2 = (7x - 9y)(7x + 9y)$.

c) $8y^3 + 1 = (2y)^3 + 1^3$

$= (2y + 1)[(2y)^2 - (2y) . 1 + 1^2]$

$= (2y + 1)(4y^2 - 2y + 1)$.

1 Phân tích mỗi đa thức sau thành nhân tử:

a) $(x + 2y)^2 - (2x - y)^2$;

b) $125 + y^3$;

c) $27x^3 - y^3$.

Nhận xét: Cách làm như ví dụ trên được gọi là phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp vận dụng trực tiếp hằng đẳng thức.

2. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp vận dụng hằng đẳng thức thông qua nhóm số hạng và đặt nhân tử chung

3 Cho đa thức $x^2 - 2xy + y^2 + x - y$.

a) Nhóm ba số hạng đầu và sử dụng hằng đẳng thức để viết nhóm đó thành tích.

b) Phân tích đa thức trên thành nhân tử.

Để phân tích đa thức $x^2 - 2xy + y^2 + x - y$ thành nhân tử, ta có thể làm như sau:

$x^2 - 2xy + y^2 + x - y$

$= (x^2 - 2xy + y^2) + (x - y)$ ← *Nhóm ba số hạng đầu, hai số hạng cuối thành nhóm*

$= (x - y)^2 + (x - y)$ ← *Dùng hằng đẳng thức để viết nhóm thứ nhất thành tích*

$= (x - y)(x - y + 1)$. ← *Đặt nhân tử chung ở hai nhóm ra ngoài để viết thành tích*

Nhận xét: Cách làm như trên được gọi là phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp vận dụng hằng đẳng thức thông qua nhóm số hạng và đặt nhân tử chung.

Ví dụ 3 Phân tích mỗi đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 + y^3 + x + y$;

b) $x^3 + 4x^2y + 4xy^2 - 9x$.

Giải

a) $x^3 + y^3 + x + y = (x^3 + y^3) + (x + y)$

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2) + (x + y)$

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2 + 1)$.

b) $x^3 + 4x^2y + 4xy^2 - 9x = x(x^2 + 4xy + 4y^2 - 9)$

$= x[(x^2 + 4xy + 4y^2) - 9]$

$= x\{[x^2 + 2 . x . (2y) + (2y)^2] - 9\}$

$= x[(x + 2y)^2 - 3^2] = x(x + 2y - 3)(x + 2y + 3)$.

2 Phân tích mỗi đa thức sau thành nhân tử:

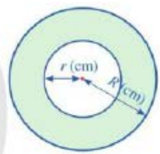
a) $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 5x + 5y$;

b) $2x^2y + 4xy^2 + 2y^3 - 8y$.

Ví dụ 4 Từ một miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính R (cm), bạn Hạnh khoét một hình tròn ở giữa có bán kính r (cm) $(0 < r < R)$ (*Hình 5*).

a) Viết công thức tính diện tích phần còn lại của miếng bìa dưới dạng tích.

b) Tính diện tích phần còn lại của miếng bìa, biết tổng hai bán kính là 8 cm và hiệu hai bán kính là 2,5 cm.



Hình 5

Giải

a) Diện tích của miếng bìa hình tròn có bán kính R là: πR^2 (cm^2).

Diện tích của miếng bìa hình tròn bị khoét đi có bán kính r là: πr^2 (cm^2).

Vì vậy, diện tích phần còn lại của miếng bìa là:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R - r)(R + r) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) Từ câu a, ta thấy diện tích phần còn lại của miếng bìa là

$$\pi(R - r)(R + r) = \pi . 2,5 . 7 = 20\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

BÀI TẬP

1. Phân tích mỗi đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x^2 - 12xy + 9y^2$; b) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$; c) $8y^3 - 12y^2 + 6y - 1$;

d) $(2x + y)^2 - 4y^2$; e) $27y^3 + 8$; g) $64 - 125x^3$.

2. Phân tích mỗi đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 25 - 4xy + 4y^2$; b) $x^3 - y^3 + x^2y - xy^2$; c) $x^4 - y^4 + x^3y - xy^3$.

3. Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a) $A = x^4 - 2x^2y - x^2 + y^2 + y$ biết $x^2 - y = 6$;

b) $B = x^2y^2 + 2xyz + z^2$ biết $xy + z = 0$.

4. Chứng tỏ rằng:

a) $M = 32^{2\,023} - 32^{2\,021}$ chia hết cho 31;

b) $N = 7^6 + 2 \,.\, 7^3 + 8^{2\,022} + 1$ chia hết cho 8.

5. Bác Hoa gửi tiết kiệm a đồng kì hạn 12 tháng ở một ngân hàng với lãi suất $x\%$/năm.

a) Viết công thức tính số tiền bác Hoa có được sau 12 tháng dưới dạng tích, biết bác Hoa không rút tiền ra khỏi ngân hàng trong 12 tháng đó.

b) Sau kì hạn 12 tháng, tiền lãi của kì hạn đó được cộng vào tiền vốn, rồi bác Hoa tiếp tục đem gửi cho kì hạn 12 tháng tiếp theo. Viết công thức tính tổng số tiền mà bác Hoa nhận được sau khi gửi 24 tháng trên dưới dạng tích, biết trong 24 tháng đó, lãi suất ngân hàng không thay đổi và bác Hoa không rút tiền ra khỏi ngân hàng.

TÌM TÒI – MỞ RỘNG

Định lí Bézout

Nhà toán học Étienne Bézout (1730 – 1783, người Pháp) đã chứng minh định lí sau:

Định lí Bézout: Nếu đa thức $P(x)$ có nghiệm $x = a$ thì $P(x) = (x - a)\,.\,Q(x)$, trong đó $Q(x)$ cũng là một đa thức của biến x.

Từ định lí Bézout ta thấy: Nếu đa thức $P(x)$ có nghiệm $x = a$ thì đa thức bậc nhất $x - a$ là một nhân tử trong dạng phân tích thành nhân tử của đa thức $P(x)$.

Ta có thể ứng dụng nhận xét trên để phân tích đa thức $P(x)$ thành nhân tử khi biết một nghiệm của đa thức đó.

Ví dụ. Phân tích đa thức $P(x) = x^2 - 5x + 6$ thành nhân tử.

Giải

Do $P(2) = 2^2 - 5\,.\,2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$ nên $x = 2$ là nghiệm của $P(x)$. Suy ra $P(x) = (x - 2)\,.\,Q(x)$.

Ta có: $P(x) = x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 2x) - (3x - 6) = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3)$.

Vậy $P(x) = (x - 2)(x - 3)$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

1. Cho hai đa thức: $A = 4x^6 - 2x^2y^3 - 5xy + 2$; $B = 3x^2y^3 + 5xy - 7$.

a) Tính giá trị của mỗi đa thức A, B tại $x = -1$; $y = 1$.

b) Tính $A + B$; $A - B$.

2. Thực hiện phép tính:

a) $-\frac{1}{3}a^2b(-6ab^2 - 3a + 9b^3)$;

b) $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$;

c) $(-5x^3y^2z) : \left(\frac{15}{2}xy^2z\right)$;

d) $(8x^4y^2 - 10x^2y^4 + 12x^3y^5) : (-2x^2y^2)$.

3. Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng bình phương, lập phương của một tổng hoặc một hiệu:

a) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$;

b) $25x^2 - 10xy + y^2$;

c) $x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3$;

d) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$.

4. Chứng minh giá trị của mỗi biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến:

a) $A = 0,2(5x - 1) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x + 4\right) + \frac{2}{3}(3 - x)$;

b) $B = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) - (x^3 - 8y^3 + 10)$;

c) $C = 4(x + 1)^2 + (2x - 1)^2 - 8(x - 1)(x + 1) - 4x$.

5. Phân tích mỗi đa thức sau thành nhân tử:

a) $(x + 2y)^2 - (x - y)^2$;

b) $(x + 1)^3 + (x - 1)^3$;

c) $(2y - 3)x + 4y(2y - 3)$;

d) $10x(x - y) - 15x^2(y - x)$;

e) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - y^3$;

g) $x^3 - 2x^2y + xy^2 - 4x$.

6. Một mảnh vườn có dạng hình chữ nhật với chiều rộng là x (m), chiều dài là y (m).

a) Viết đa thức biểu thị diện tích của mảnh vườn.

b) Nếu tăng chiều rộng lên 2 m và giảm chiều dài đi 3 m thì được mảnh vườn mới. Viết đa thức biểu thị diện tích của mảnh vườn mới.

c) Viết đa thức biểu thị phần diện tích lớn hơn của mảnh vườn mới so với mảnh vườn ban đầu.

Chương II
PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: phân thức đại số; các phép tính với phân thức đại số.

§1. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Ta đã biết kết quả của phép chia số nguyên a cho số nguyên b khác 0 được gọi là phân số $\frac{a}{b}$. Kết quả của phép chia đa thức P cho đa thức Q khác đa thức 0 cũng có thể viết dưới dạng $\frac{P}{Q}$.

Khi đó, biểu thức $\frac{P}{Q}$ được gọi là gì?

I. KHÁI NIỆM VỀ PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

1. Định nghĩa

1 Cho biểu thức $\frac{2x+1}{x-2}$.

a) Biểu thức $2x+1$ ở tử có phải là đa thức hay không?

b) Biểu thức $x-2$ ở mẫu có phải là đa thức khác đa thức 0 hay không?

> *Một phân thức đại số* (hay nói gọn là *phân thức*) là một biểu thức có dạng $\frac{P}{Q}$, trong đó, P, Q là những đa thức và Q khác đa thức 0.
>
> P được gọi là tử thức (hay tử), Q được gọi là mẫu thức (hay mẫu).

Chú ý: Mỗi đa thức cũng được coi là một phân thức với mẫu thức bằng 1. Đặc biệt, mỗi số thực cũng là một phân thức đại số.

Ví dụ 1 Trong những biểu thức sau, biểu thức nào là phân thức?

a) $\dfrac{2x+1}{x+4}$.   b) $\dfrac{xy}{x+2y}$.   c) $\dfrac{\frac{1}{x}}{x^2+1}$.

Giải

a) Do $2x + 1$ và $x + 4$ là các đa thức và đa thức $x + 4$ khác đa thức 0 nên biểu thức $\dfrac{2x+1}{x+4}$ là phân thức.

b) Do xy và $x + 2y$ là các đa thức và đa thức $x + 2y$ khác đa thức 0 nên biểu thức $\dfrac{xy}{x+2y}$ là phân thức.

c) Do biểu thức $\dfrac{1}{x}$ không phải là đa thức nên biểu thức $\dfrac{\frac{1}{x}}{x^2+1}$ không phải là phân thức.

1 Trong những biểu thức sau, biểu thức nào là phân thức?

a) $\dfrac{x^2y+xy^2}{x-y}$.   b) $\dfrac{x^2-2}{\frac{1}{x}}$.

2. Hai phân thức bằng nhau

2 Cho hai phân số $\dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{c}{d}$. Nêu quy tắc để hai phân số đó bằng nhau.

Tương tự như phân số, đối với phân thức ta có:

> Cho hai phân thức $\dfrac{A}{B}$ và $\dfrac{C}{D}$.
>
> Hai phân thức $\dfrac{A}{B}$ và $\dfrac{C}{D}$ được gọi là bằng nhau, viết là $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ nếu $A.D = B.C$.

Ví dụ 2 Mỗi cặp phân thức sau có bằng nhau không? Vì sao?

a) $\dfrac{x}{5}$ và $\dfrac{x^2-x}{5x-5}$.   b) $\dfrac{3+x}{3+2x}$ và $\dfrac{1}{2}$.

Giải

a) Ta có: $x(5x-5) = 5x^2 - 5x$ và $5(x^2 - x) = 5x^2 - 5x$

nên $x(5x-5) = 5(x^2-x)$. Vậy $\dfrac{x}{5} = \dfrac{x^2-x}{5x-5}$.

b) Ta có: $(3 + x) . 2 = 6 + 2x$ và $(3 + 2x) . 1 = 3 + 2x$.

Do $6 + 2x \neq 3 + 2x$ nên hai phân thức $\dfrac{3+x}{3+2x}$ và $\dfrac{1}{2}$ không bằng nhau.

2 Mỗi cặp phân thức sau có bằng nhau không? Vì sao?

a) $\dfrac{x+y}{x^2-y^2}$ và $\dfrac{1}{x-y}$.

b) $\dfrac{x}{x^2-1}$ và $\dfrac{1}{x-1}$.

II. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC

1. Tính chất cơ bản

3

a) Tìm số thích hợp cho $\boxed{?}$: $\dfrac{2}{-7} = \dfrac{4}{\boxed{?}}$; $\dfrac{-3}{-9} = \dfrac{\boxed{?}}{3}$.

b) Hãy nhắc lại tính chất cơ bản của phân số.

Tương tự như phân số, đối với phân thức ta cũng có các tính chất sau:

• Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.

$$\frac{P}{Q} = \frac{P.M}{Q.M} \text{ với } M \text{ là một đa thức khác đa thức 0.}$$

• Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức cho một nhân tử chung của chúng thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.

$$\frac{P}{Q} = \frac{P:N}{Q:N} \text{ với } N \text{ là một nhân tử chung của } P \text{ và } Q.$$

Ví dụ 3 Dùng tính chất cơ bản của phân thức, hãy giải thích vì sao có thể viết:

a) $\dfrac{3}{4-x} = \dfrac{-3}{x-4}$; b) $\dfrac{x-y}{xy-x} = \dfrac{y-x}{x-xy}$.

Giải

a) Ta có: $\dfrac{3}{4-x} = \dfrac{3.(-1)}{(4-x).(-1)} = \dfrac{-3}{x-4}$.

Vậy $\dfrac{3}{4-x} = \dfrac{-3}{x-4}$.

b) Ta có: $\dfrac{x-y}{xy-x} = \dfrac{(x-y).(-1)}{(xy-x).(-1)} = \dfrac{y-x}{x-xy}$.

Vậy $\dfrac{x-y}{xy-x} = \dfrac{y-x}{x-xy}$.

Nếu ta đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức thì ta được một phân thức bằng phân thức đã cho:

$$\frac{P}{Q} = \frac{-P}{-Q};\ \frac{P}{-Q} = \frac{-P}{Q}.$$

Ví dụ 4 Bạn Hà viết $\dfrac{3x^2}{3x^2+3} = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ và giải thích bạn đã chia cả tử và mẫu của phân thức $\dfrac{3x^2}{3x^2+3}$ cho 3 để được phân thức $\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Bạn Liên lại viết $\dfrac{3x^2}{3x^2+3} = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$ và giải thích bạn đã chia cả tử và mẫu của phân thức $\dfrac{3x^2}{3x^2+3}$ cho $3x^2$ để được kết quả như vậy. Hỏi bạn nào làm đúng, bạn nào làm chưa đúng? Vì sao?

Giải

• Ta có: $\dfrac{3x^2}{3x^2+3} = \dfrac{3x^2}{3(x^2+1)} = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Vậy bạn Hà làm đúng.

• Bạn Liên làm chưa đúng vì $3x^2$ không phải là nhân tử chung của tử và mẫu của phân thức $\dfrac{3x^2}{3x^2+3}$.

3 Dùng tính chất cơ bản của phân thức, hãy giải thích vì sao có thể viết:

$$\frac{3x+y}{y} = \frac{3xy+y^2}{y^2}.$$

2. Ứng dụng

a) Rút gọn phân thức

4 Cho phân thức $\dfrac{4x^2y}{6xy^2}$.

a) Tìm nhân tử chung của tử và mẫu.

b) Tìm phân thức nhận được sau khi chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung đó.

Khi chia cả tử và mẫu của một phân thức cho một nhân tử chung của chúng để được phân thức mới (đơn giản hơn) thì cách làm đó được gọi là rút gọn phân thức.

Nhận xét: Muốn rút gọn một phân thức, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần)

Bước 2. Tìm nhân tử chung của tử và mẫu rồi chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung đó.

Ví dụ 5 Rút gọn mỗi phân thức sau:

a) $\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$;   b) $\dfrac{x^2y-xy^2}{x^2-y^2}$.

Giải

a) $\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4} = \dfrac{x(x+2)}{(x+2)^2}$ ← *Phân tích tử và mẫu thành nhân tử*

$= \dfrac{x}{x+2}$. ← *Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung x + 2*

b) $\dfrac{x^2y-xy^2}{x^2-y^2} = \dfrac{xy(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \dfrac{xy}{x+y}$.

4 Rút gọn mỗi phân thức sau:

a) $\dfrac{8x^2+4x}{1-4x^2}$;

b) $\dfrac{x^3-xy^2}{2x^2+2xy}$.

b) Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức

5 Cho hai phân thức $\frac{1}{x^2y}$ và $\frac{1}{xy^2}$.

a) Hãy nhân cả tử và mẫu của phân thức thứ nhất với y và nhân cả tử và mẫu của phân thức thứ hai với x.

b) Nhận xét gì về mẫu của hai phân thức thu được.

Khi biến đổi các phân thức đã cho thành các phân thức mới bằng nó và các phân thức mới này có cùng mẫu thức thì cách biến đổi đó được gọi là quy đồng mẫu thức nhiều phân thức.

Nhận xét: Mẫu thức chung (MTC) chia hết cho mẫu thức của mỗi phân thức đã cho.

6 Tìm MTC của hai phân thức $\frac{5}{2x+6}$ và $\frac{3}{x^2-9}$.

Để tìm MTC của hai phân thức trên, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Phân tích mẫu của mỗi phân thức đã cho thành nhân tử

$$2x+6=2(x+3);\ x^2-9=(x-3)(x+3).$$

Bước 2. Chọn MTC là: $2(x-3)(x+3)$.

Có thể mô tả cách tìm mẫu thức chung của hai phân thức trên bởi bảng sau:

	Nhân tử bằng số	Luỹ thừa của $x-3$	Luỹ thừa của $x+3$
Mẫu thức $2x+6=2(x+3)$	2		$x+3$
Mẫu thức $x^2-9=(x-3)(x+3)$	1	$x-3$	$x+3$
MTC $2(x-3)(x+3)$	2 = BCNN(2, 1)	$x-3$	$x+3$

7 Quy đồng mẫu thức hai phân thức $\frac{1}{x^2+x}$ và $\frac{1}{x^2-x}$.

Để quy đồng mẫu thức hai phân thức trên, ta làm như sau:

Bước 1. Tìm mẫu thức chung

Chọn MTC là: $x(x-1)(x+1)$.

Bước 2. Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức (bằng cách chia MTC cho từng mẫu)

$[x(x-1)(x+1)] : [x(x+1)] = x-1$; $[x(x-1)(x+1)] : [x(x-1)] = x+1$.

Bước 3. Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức đã cho với nhân tử phụ tương ứng

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x(x+1)(x-1)}; \quad \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x(x+1)(x-1)}.$$

Nhận xét: Muốn quy đồng mẫu thức nhiều phân thức, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Phân tích mẫu của mỗi phân thức thành nhân tử rồi tìm MTC

Bước 2. Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức (bằng cách chia MTC cho từng mẫu)

Bước 3. Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức đã cho với nhân tử phụ tương ứng.

Ví dụ 6 Quy đồng mẫu thức các phân thức: $\frac{1}{3x-6}$, $\frac{2}{3x+6}$ và $\frac{3}{4-x^2}$.

Giải

Ta có: $\frac{3}{4-x^2} = \frac{-3}{x^2-4}$;

$3x-6 = 3(x-2)$;

$3x+6 = 3(x+2)$;

$x^2-4 = (x-2)(x+2)$.

Chọn MTC là: $3(x-2)(x+2)$.

Nhân tử phụ của các mẫu thức trên lần lượt là: $x+2$; $x-2$; 3.

Vậy: $\frac{1}{3x-6} = \frac{1}{3(x-2)} = \frac{x+2}{3(x-2)(x+2)}$;

$\frac{2}{3x+6} = \frac{2}{3(x+2)} = \frac{2(x-2)}{3(x-2)(x+2)}$;

$\frac{3}{4-x^2} = \frac{-3}{x^2-4} = \frac{-3}{(x-2)(x+2)} = \frac{-9}{3(x-2)(x+2)}$.

5 Quy đồng mẫu thức các phân thức trong mỗi trường hợp sau:

a) $\frac{5}{2x^2y^3}$ và $\frac{3}{xy^4}$;

b) $\frac{3}{2x^2-10x}$ và $\frac{2}{x^2-25}$.

III. ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH VÀ GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC

8 Cho phân thức $\frac{2x^2-x+1}{x-2}$. Tìm giá trị của x sao cho mẫu $x-2 \neq 0$.

Đối với một phân thức, ta có:

Điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0 được gọi là điều kiện để giá trị của phân thức được xác định.

Ví dụ 7 Viết điều kiện của biến để giá trị của mỗi phân thức sau được xác định:

a) $\frac{2x+1}{x+4}$;   b) $\frac{x^2y}{x+2y}$.

Giải

a) Điều kiện để giá trị của phân thức $\frac{2x+1}{x+4}$ được xác định là $x + 4 \neq 0$.

b) Điều kiện để giá trị của phân thức $\frac{x^2y}{x+2y}$ được xác định là $x + 2y \neq 0$.

9 Tính giá trị của biểu thức $\frac{x+2}{x-1}$ tại $x = 2$.

Cho phân thức đại số $\frac{P}{Q}$. Giá trị của biểu thức $\frac{P}{Q}$ tại những giá trị cho trước của các biến để giá trị của mẫu thức khác 0 được gọi là *giá trị* của phân thức $\frac{P}{Q}$ tại những giá trị cho trước của các biến đó.

Ví dụ 8 Cho phân thức $\frac{4x+y}{x+y}$.

a) Viết điều kiện của biến để giá trị của phân thức trên được xác định.

b) Tính giá trị của phân thức trên tại $x = -1$; $y = 2$.

Giải

a) Điều kiện để giá trị của phân thức $\frac{4x+y}{x+y}$ được xác định là $x + y \neq 0$.

b) Giá trị của phân thức đã cho tại $x = -1$; $y = 2$ là: $\frac{4.(-1)+2}{(-1)+2} = \frac{-2}{1} = -2$.

Ví dụ 9 Cho phân thức $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$.

a) Viết điều kiện của x để giá trị của phân thức trên được xác định.

b) Chứng tỏ phân thức rút gọn của phân thức đã cho là $\frac{x+1}{x-1}$.

c) Để tính giá trị của phân thức đã cho tại $x = 2$ và tại $x = -1$, bạn Ngân đã làm như sau:

- Với $x = 2$, phân thức đã cho có giá trị là: $\frac{2+1}{2-1} = 3$.
- Với $x = -1$, phân thức đã cho có giá trị là: $\frac{(-1)+1}{(-1)-1} = \frac{0}{-2} = 0$.

Cách làm của bạn Ngân là đúng hay sai? Vì sao?

d) Với những giá trị nào của biến thì có thể tính được giá trị của phân thức đã cho bằng cách tính giá trị của phân thức rút gọn?

6 Cho phân thức $\frac{x+1}{x^2+x}$.

a) Viết điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định.

b) Tính giá trị của phân thức tại $x = 10$ và tại $x = -1$.

Giải

a) Điều kiện để giá trị của phân thức $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ được xác định là $x^2 - 1 \neq 0$.

b) Ta có: $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$.

c) • Với $x = 2$ thì giá trị của cả hai phân thức $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$, $\frac{x+1}{x-1}$ đều được xác định. Hơn nữa, phân thức đã cho có giá trị là $\frac{2^2+2\,.\,2+1}{2^2-1} = \frac{9}{3} = 3$, trong khi đó phân thức $\frac{x+1}{x-1}$ có giá trị là $\frac{2+1}{2-1} = 3$. Vậy bạn Ngân đã tính đúng giá trị của phân thức đã cho tại $x = 2$.

• Với $x = -1$ ta thấy $x^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$. Vì thế, giá trị của phân thức đã cho không được xác định khi $x = -1$. Vậy bạn Ngân đã sai khi tính giá trị của phân thức đã cho tại $x = -1$.

d) Giá trị của phân thức $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ bằng giá trị của phân thức rút gọn $\frac{x+1}{x-1}$ tại những giá trị của biến mà giá trị của phân thức $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ được xác định. Vậy giá trị của phân thức $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ bằng giá trị của phân thức rút gọn $\frac{x+1}{x-1}$ khi $x^2 - 1 \neq 0$.

Nhận xét: Nếu tại giá trị của biến mà giá trị của một phân thức được xác định thì phân thức đó và phân thức rút gọn của nó có cùng một giá trị.

BÀI TẬP

1. Viết điều kiện xác định của mỗi phân thức sau:

a) $\dfrac{y}{3y+3}$; b) $\dfrac{4x}{x^2+16}$; c) $\dfrac{x+y}{x-y}$.

2. Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau chứng tỏ rằng:

a) $\dfrac{3x}{2}=\dfrac{15xy}{10y}$; b) $\dfrac{3x-3y}{2y-2x}=\dfrac{-3}{2}$; c) $\dfrac{x^2-x+1}{x}=\dfrac{x^3+1}{x(x+1)}$.

3. Rút gọn mỗi phân thức sau:

a) $\dfrac{24x^2y^2}{16xy^3}$; b) $\dfrac{6x-2y}{9x^2-y^2}$.

4. Quy đồng mẫu thức các phân thức trong mỗi trường hợp sau:

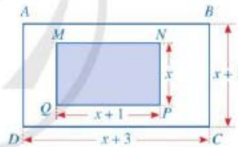
a) $\dfrac{2}{x-3y}$ và $\dfrac{3}{x+3y}$;

b) $\dfrac{7}{4x+24}$ và $\dfrac{13}{x^2-36}$.

5. Cho hình chữ nhật *ABCD* và *MNPQ* như *Hình 1* (các số đo trên hình tính theo đơn vị centimét).

a) Viết phân thức biểu thị tỉ số diện tích của hình chữ nhật *ABCD* và hình chữ nhật *MNPQ*.

b) Tính giá trị của phân thức đó tại $x = 2$ và tại $x = 5$.



Hình 1

6. Chị Hà mở một xưởng thủ công với vốn đầu tư ban đầu (xây dựng nhà xưởng, mua máy móc, ...) là 80 triệu. Biết chi phí để sản xuất (tiền mua vật liệu, lương nhân công) của 1 sản phẩm là 15 nghìn đồng. Gọi x là số sản phẩm mà xưởng của chị Hà làm được.

a) Viết phân thức biểu thị số tiền thực (đơn vị là nghìn đồng) đã bỏ ra để làm được x sản phẩm.

b) Viết phân thức biểu thị chi phí thực (đơn vị là nghìn đồng) để tạo ra 1 sản phẩm theo x.

c) Tính chi phí thực để tạo ra 1 sản phẩm nếu $x = 100$; $x = 1\ 000$. Nhận xét về chi phí thực để tạo ra 1 sản phẩm nếu x ngày càng tăng.

§2. PHÉP CỘNG, PHÉP TRỪ PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Ở lớp 6, ta đã biết cách cộng, trừ các phân số.

I. PHÉP CỘNG CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

1. Cộng hai phân thức cùng mẫu thức

1 Thực hiện phép tính: $\frac{-3}{5}+\frac{23}{5}$.

Tương tự như cộng hai phân số cùng mẫu, ta có quy tắc cộng hai phân thức cùng mẫu như sau:

Muốn cộng hai phân thức cùng mẫu, ta cộng các tử và giữ nguyên mẫu:

$$\frac{A}{M}+\frac{B}{M}=\frac{A+B}{M}.$$

Chú ý: Kết quả của phép cộng hai phân thức được gọi là tổng. Ta thường viết tổng này dưới dạng rút gọn.

Ví dụ 1 Thực hiện phép tính:

$$\frac{x-7}{x^2y}+\frac{y+7}{x^2y}.$$

Giải

$$\frac{x-7}{x^2y}+\frac{y+7}{x^2y}=\frac{(x-7)+(y+7)}{x^2y}=\frac{x-7+y+7}{x^2y}=\frac{x+y}{x^2y}.$$

1 Thực hiện phép tính:

$$\frac{x-2y}{x^2+xy}+\frac{x+2y}{x^2+xy}.$$

2. Cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau

2 Cho hai phân thức: $\frac{1}{x+1}$; $\frac{1}{x-1}$.

a) Quy đồng mẫu thức hai phân thức trên.

b) Từ câu a, hãy thực hiện phép tính: $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$.

Để tính $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$, ta thường làm như sau:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$$

$$=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}+\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$ ← *Lấy mẫu thức chung là $(x+1)(x-1)$, quy đồng mẫu thức các phân thức*

$$=\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}$$ ← *Cộng các tử và giữ nguyên mẫu*

$$=\frac{2x}{(x+1)(x-1)}.$$ ← *Thu gọn tử thức*

Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

Ví dụ 2 Thực hiện phép tính:

$$\frac{1-x}{xy+x^2}+\frac{1}{x+y}.$$

Giải

$$\frac{1-x}{xy+x^2}+\frac{1}{x+y}=\frac{1-x}{x(y+x)}+\frac{1}{x+y}=\frac{1-x}{x(x+y)}+\frac{x}{x(x+y)}=\frac{1-x+x}{x(x+y)}=\frac{1}{x(x+y)}.$$

2 Thực hiện phép tính:

$$\frac{1}{x^2+xy}+\frac{1}{xy+y^2}.$$

3. Tính chất của phép cộng phân thức

3 Hãy nêu các tính chất của phép cộng phân số.

Giống như phép cộng phân số, phép cộng phân thức cũng có các tính chất sau: giao hoán, kết hợp, cộng với số 0.

Ví dụ 3 Chứng tỏ giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x:

$$P=\frac{2x}{x^2+4x+4}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{2-x}{x^2+4x+4}.$$

Giải

$$P=\frac{2x}{x^2+4x+4}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{2-x}{x^2+4x+4}$$

$$=\left(\frac{2x}{x^2+4x+4}+\frac{2-x}{x^2+4x+4}\right)+\frac{x+1}{x+2}$$

$$=\frac{2x+2-x}{x^2+4x+4}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{x+2}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{x+2}$$

$$=\frac{1}{x+2}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{1+x+1}{x+2}=\frac{x+2}{x+2}=1.$$

Nhờ tính chất kết hợp nên trong một dãy phép cộng nhiều phân thức, ta có thể không cần đặt dấu ngoặc.

3 Tính một cách hợp lí:

$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+2xy+y^2}+\frac{2y}{x+y}+\frac{1-2y^2}{x^2+2xy+y^2}.$$

Ví dụ 4 Một đoàn tàu chở khách đi một quãng đường 500 km, trong đó có 50 km đường qua thành phố và 450 km đường qua vùng rừng núi. Biết tốc độ tàu khi chạy qua thành phố kém 30 km/h so với tốc độ tàu khi chạy qua vùng rừng núi. Gọi x (km/h) là tốc độ tàu chạy qua vùng rừng núi. Viết phân thức biểu thị theo x:

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

a) Thời gian tàu chạy qua vùng rừng núi;

b) Thời gian tàu chạy qua thành phố;

c) Thời gian tàu chạy trên cả quãng đường.

Giải

a) Phân thức biểu thị thời gian tàu chạy qua vùng rừng núi là: $\dfrac{450}{x}$ (giờ).

b) Tốc độ tàu chạy qua thành phố là: $x - 30$ (km/h).

Phân thức biểu thị thời gian tàu chạy qua thành phố là: $\dfrac{50}{x-30}$ (giờ).

c) Thời gian tàu chạy trên cả quãng đường là:

$$\frac{450}{x}+\frac{50}{x-30}=\frac{450(x-30)+50x}{x(x-30)}=\frac{500x-13\,500}{x(x-30)} \text{ (giờ).}$$

Vậy phân thức biểu thị thời gian tàu chạy trên cả quãng đường là: $\dfrac{500x-13\,500}{x(x-30)}$ (giờ).

II. PHÉP TRỪ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

1. Quy tắc trừ hai phân thức

Ở lớp 6, ta đã biết trừ hai phân số cùng mẫu và không cùng mẫu. Cách làm đó vẫn đúng khi trừ hai phân thức có cùng mẫu thức và không cùng mẫu thức.

- Muốn trừ hai phân thức cùng mẫu, ta trừ tử của phân thức bị trừ cho tử của phân thức trừ và giữ nguyên mẫu:

$$\frac{A}{M}-\frac{B}{M}=\frac{A-B}{M}.$$

- Muốn trừ hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi trừ các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

Chú ý: Kết quả của phép trừ hai phân thức được gọi là hiệu. Ta thường viết hiệu này dưới dạng rút gọn.

Ví dụ 5 Thực hiện phép tính:

a) $\dfrac{3x-2y}{x+y}-\dfrac{2x-3y}{x+y}$;

b) $\dfrac{xy+5}{x^2+xy}-\dfrac{y}{x+y}$.

Giải

a) $\dfrac{3x-2y}{x+y}-\dfrac{2x-3y}{x+y}=\dfrac{(3x-2y)-(2x-3y)}{x+y}$

$=\dfrac{3x-2y-2x+3y}{x+y}=\dfrac{x+y}{x+y}=1.$

b) $\dfrac{xy+5}{x^2+xy}-\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{xy+5}{x(x+y)}-\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{xy+5}{x(x+y)}-\dfrac{xy}{x(x+y)}$

$=\dfrac{xy+5-xy}{x(x+y)}=\dfrac{5}{x(x+y)}.$

4 Thực hiện phép tính:

a) $\dfrac{4x+3y}{x^2-y^2}-\dfrac{3x+4y}{x^2-y^2}$;

b) $\dfrac{2xy-3y^2}{x^2-3xy}-\dfrac{x}{3x-9y}$.

2. Phân thức đối

Cũng như phân số, mỗi phân thức đều có phân thức đối sao cho tổng của hai phân thức bằng 0.

Nhận xét

- Phân thức đối của phân thức $\dfrac{A}{B}$ kí hiệu là $-\dfrac{A}{B}$. Ta có: $\dfrac{A}{B}+\left(-\dfrac{A}{B}\right)=0$.
- Ta có: $-\dfrac{A}{B}=\dfrac{-A}{B}=\dfrac{A}{-B}$.
- Phân thức đối của $-\dfrac{A}{B}$ là $\dfrac{A}{B}$, tức là $-\left(-\dfrac{A}{B}\right)=\dfrac{A}{B}$.

Chẳng hạn, $\dfrac{-3xy}{x^2+y^2}$ là phân thức đối của phân thức $\dfrac{3xy}{x^2+y^2}$. Ngược lại, $\dfrac{3xy}{x^2+y^2}$ là phân thức đối của phân thức $\dfrac{-3xy}{x^2+y^2}$.

Nhận xét: Muốn trừ phân thức $\dfrac{A}{B}$ cho phân thức $\dfrac{C}{D}$, ta có thể cộng $\dfrac{A}{B}$ với phân thức đối của phân thức $\dfrac{C}{D}$, tức là: $\dfrac{A}{B}-\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}+\left(-\dfrac{C}{D}\right)$.

Ví dụ 6 Thực hiện phép tính:

a) $\frac{x-2y}{x-y}-\frac{y}{y-x}$; b) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{2xy}{y^2-x^2}$.

Giải

a) $\frac{x-2y}{x-y}-\frac{y}{y-x}=\frac{x-2y}{x-y}+\left(-\frac{y}{y-x}\right)$

$=\frac{x-2y}{x-y}+\frac{y}{x-y}=\frac{x-2y+y}{x-y}=\frac{x-y}{x-y}=1.$

b) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{2xy}{y^2-x^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\left(-\frac{2xy}{y^2-x^2}\right)=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{2xy}{x^2-y^2}$

$=\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x+y)^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{x+y}{x-y}.$

5 Tính một cách hợp lí:

$\frac{x-5y}{2x-3y}-\frac{24xy}{4x^2-9y^2}-\frac{x+8y}{3y-2x}$.

BÀI TẬP

Thực hiện phép tính (từ Bài 1 đến Bài 3):

1. a) $\frac{5x-4}{9}+\frac{4x+4}{9}$; b) $\frac{x^2y-6}{2x^2y}+\frac{6-xy^2}{2x^2y}$;

c) $\frac{x+1}{x^2-5x}+\frac{x-18}{x^2-5x}+\frac{x+2}{x^2-5x}$; d) $\frac{7y}{3}-\frac{7y-5}{3}$;

e) $\frac{4x-1}{3xy^2}-\frac{7x-1}{3xy^2}$; g) $\frac{3y-2x}{x-2y}-\frac{x-y}{2y-x}$.

2. a) $\frac{4x+2}{4x-4}+\frac{3-6x}{6x-6}$; b) $\frac{y}{2x^2-xy}+\frac{4x}{y^2-2xy}$;

c) $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2-y^2}$; d) $\frac{x^2+2}{x^3-1}+\frac{x}{x^2+x+1}+\frac{1}{1-x}$.

3. a) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}$; b) $\frac{12}{x^2-9}-\frac{2}{x-3}$;

c) $\frac{1}{xy-x^2}-\frac{1}{y^2-xy}$; d) $\frac{2x}{x^2-1}-\frac{3}{2+2x}+\frac{1}{2-2x}$.

4. a) Rút gọn biểu thức: $A = \dfrac{2x^2+1}{x^3+1} + \dfrac{1-x}{x^2-x+1} - \dfrac{1}{x+1}$.

b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -3$.

5. Một xí nghiệp dự định sản xuất 10 000 sản phẩm trong x ngày. Khi thực hiện, xí nghiệp đã làm xong sớm hơn 1 ngày so với dự định và còn làm thêm được 80 sản phẩm. Viết phân thức biểu thị theo x:

a) Số sản phẩm xí nghiệp làm trong 1 ngày theo dự định;

b) Số sản phẩm xí nghiệp làm trong 1 ngày trên thực tế;

c) Số sản phẩm xí nghiệp làm trong 1 ngày trên thực tế nhiều hơn số sản phẩm xí nghiệp làm trong 1 ngày theo dự định.

6. Người ta mở hai vòi nước cùng chảy vào một bể không chứa nước. Thời gian để vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể ít hơn thời gian để vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là 2 giờ. Gọi x (giờ) là thời gian vòi thứ nhất chảy một mình để đầy bể. Viết phân thức biểu thị theo x:

a) Thời gian vòi thứ hai chảy một mình để đầy bể;

b) Phần bể mà mỗi vòi chảy được trong 1 giờ;

c) Phần bể mà cả hai vòi chảy được trong 1 giờ.

7. Để hưởng ứng phong trào Tết trồng cây, chi đoàn thanh niên dự định trồng 120 cây xanh. Khi bắt đầu thực hiện, chi đoàn được tăng cường thêm 3 đoàn viên. Gọi x là số đoàn viên ban đầu của chi đoàn và giả sử số cây mỗi đoàn viên trồng là như nhau. Viết phân thức biểu thị theo x:

a) Số cây mỗi đoàn viên trồng theo dự định;

b) Số cây mỗi đoàn viên trồng theo thực tế;

c) Số cây mỗi đoàn viên trồng theo dự định nhiều hơn số cây mỗi đoàn viên trồng theo thực tế.

8. Gia đình cô Lương nuôi ba con lợn. Cả ba con lợn đều ăn cùng một loại thức ăn gia súc. Biểu đồ cột ở *Hình 2* biểu diễn số ngày mà mỗi con lợn ăn hết một bao thức ăn. Hỏi cả ba con lợn ăn trong x ngày ($x \in \mathbb{N}^*$) thì cần bao nhiêu bao thức ăn?

Hình 2

§3. PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Ở lớp 6, ta đã biết cách nhân, chia các phân số.

Làm thế nào để nhân, chia được các phân thức đại số?

I. PHÉP NHÂN CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

1. Quy tắc nhân hai phân thức đại số

1 Nêu quy tắc nhân hai phân số.

Tương tự như quy tắc nhân hai phân số, ta có quy tắc nhân hai phân thức như sau:

Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử với nhau và nhân các mẫu với nhau:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \,.\, C}{B \,.\, D}.$$

Chú ý: Kết quả của phép nhân hai phân thức được gọi là tích. Ta thường viết tích này dưới dạng rút gọn.

Ví dụ 1 Thực hiện phép tính:

a) $\dfrac{x^2y^2}{x^2 + xy} \cdot \dfrac{x + y}{xy}$;

b) $\dfrac{3x - 2y}{x^2 + 2xy + y^2} \cdot (x + y)$.

Giải

a) $\dfrac{x^2y^2}{x^2 + xy} \cdot \dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{x^2y^2(x + y)}{(x^2 + xy)xy} = \dfrac{x^2y^2(x + y)}{x(x + y)xy} = y$.

b) $\dfrac{3x - 2y}{x^2 + 2xy + y^2} \cdot (x + y) = \dfrac{3x - 2y}{x^2 + 2xy + y^2} \cdot \dfrac{x + y}{1} = \dfrac{(3x - 2y)(x + y)}{x^2 + 2xy + y^2}$

$= \dfrac{(3x - 2y)(x + y)}{(x + y)^2} = \dfrac{3x - 2y}{x + y}$.

1 Thực hiện phép tính:

a) $\dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 1} \cdot \dfrac{x - 1}{x^2 - x + 1}$;

b) $(x^2 - 4x + 4) \cdot \dfrac{2}{3x^2 - 6x}$.

2. Tính chất của phép nhân phân thức

2 Hãy nêu các tính chất của phép nhân phân số.

Phép nhân phân thức cũng có các tính chất sau:

• Giao hoán: $\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{C}{D} = \dfrac{C}{D} \cdot \dfrac{A}{B}$;

• Kết hợp: $\left(\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{C}{D}\right) \cdot \dfrac{M}{N} = \dfrac{A}{B} \cdot \left(\dfrac{C}{D} \cdot \dfrac{M}{N}\right)$;

• Phân phối đối với phép cộng:

$$\dfrac{A}{B} \cdot \left(\dfrac{C}{D} + \dfrac{M}{N}\right) = \dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{C}{D} + \dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{M}{N};$$

• Nhân với số 1: $\dfrac{A}{B} \cdot 1 = 1 \cdot \dfrac{A}{B} = \dfrac{A}{B}$.

Nhờ tính chất kết hợp nên trong một dãy phép nhân nhiều phân thức, ta có thể không cần đặt dấu ngoặc.

Ví dụ 2 Tính một cách hợp lí: $\dfrac{x}{y-3} \cdot \dfrac{x^2-25}{2x+1} \cdot \dfrac{y-3}{x-5}$.

Giải

$$\dfrac{x}{y-3} \cdot \dfrac{x^2-25}{2x+1} \cdot \dfrac{y-3}{x-5} = \left(\dfrac{x}{y-3} \cdot \dfrac{y-3}{x-5}\right) \cdot \dfrac{x^2-25}{2x+1} = \dfrac{x(y-3)}{(y-3)(x-5)} \cdot \dfrac{x^2-25}{2x+1}$$

$$= \dfrac{x}{x-5} \cdot \dfrac{(x-5)(x+5)}{2x+1} = \dfrac{x(x-5)(x+5)}{(x-5)(2x+1)} = \dfrac{x(x+5)}{2x+1}.$$

Ví dụ 3 Thực hiện phép tính:

$$\dfrac{2x}{x+23} \cdot \dfrac{3x}{x-1} + \dfrac{2x}{x+23} \cdot \dfrac{23-2x}{x-1}.$$

Giải

$$\dfrac{2x}{x+23} \cdot \dfrac{3x}{x-1} + \dfrac{2x}{x+23} \cdot \dfrac{23-2x}{x-1}$$

$$= \dfrac{2x}{x+23} \cdot \left(\dfrac{3x}{x-1} + \dfrac{23-2x}{x-1}\right) = \dfrac{2x}{x+23} \cdot \dfrac{3x+23-2x}{x-1}$$

$$= \dfrac{2x}{x+23} \cdot \dfrac{x+23}{x-1} = \dfrac{2x(x+23)}{(x+23)(x-1)} = \dfrac{2x}{x-1}.$$

2 Tính một cách hợp lí:

a) $\dfrac{y+6}{x^2-4x+4} \cdot \dfrac{x^2-4}{x+1} \cdot \dfrac{x-2}{y+6}$;

b) $\left(\dfrac{1}{x-4} + \dfrac{2x+1}{x^2-8x+16}\right) \cdot \dfrac{x-4}{2x+1}$.

II. PHÉP CHIA CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

1. Phân thức nghịch đảo

Cũng như phân số, mỗi phân thức với tử và mẫu là các đa thức khác đa thức 0 đều có phân thức nghịch đảo sao cho tích của hai phân thức bằng 1.

Nhận xét: Phân thức $\frac{B}{A}$ được gọi là phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{A}{B}$ với A, B là các đa thức khác đa thức 0.

Ví dụ 4 Tìm phân thức nghịch đảo của mỗi phân thức sau:

a) $\frac{x^2+2x+3}{x+1}$; b) $\frac{1}{y^2+2}$; c) $3x-5$.

Giải

a) Phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{x^2+2x+3}{x+1}$ là phân thức $\frac{x+1}{x^2+2x+3}$.

b) Phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{1}{y^2+2}$ là phân thức y^2+2.

c) Phân thức nghịch đảo của phân thức $3x-5$ là phân thức $\frac{1}{3x-5}$.

2. Phép chia phân thức đại số

3 Nêu quy tắc chia hai phân số.

Tương tự như quy tắc chia hai phân số, ta có:

Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$ khác 0, ta nhân $\frac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo của $\frac{C}{D}$.

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C} \text{ với } \frac{C}{D} \text{ khác 0.}$$

Ví dụ 5 Thực hiện phép tính:

a) $\frac{x^2-y^2}{6x^2y}:\frac{x+y}{3xy}$;

b) $\frac{2a-b}{a^2+ab+b^2}:\frac{2a-b}{a^3-b^3}$.

3 Thực hiện phép tính:

a) $\frac{x+y}{y-x}:\frac{x^2+xy}{3x^2-3y^2}$;

b) $\frac{x^3+y^3}{x-y}:(x^2-xy+y^2)$.

Giải

a) $\frac{x^2-y^2}{6x^2y}:\frac{x+y}{3xy}=\frac{x^2-y^2}{6x^2y}\cdot\frac{3xy}{x+y}$

$$=\frac{(x-y)(x+y)\,.\,3xy}{6x^2y(x+y)}=\frac{x-y}{2x}.$$

b) $\frac{2a-b}{a^2+ab+b^2}:\frac{2a-b}{a^3-b^3}=\frac{2a-b}{a^2+ab+b^2}\cdot\frac{a^3-b^3}{2a-b}$

$$=\frac{(2a-b)(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)(2a-b)}=a-b.$$

Ví dụ 6 Một ca nô đi xuôi dòng trên một khúc sông từ A đến B dài 20 km rồi lại đi ngược dòng từ B về A. Biết tốc độ dòng nước là 3 km/h. Gọi x (km/h) là tốc độ của ca nô. Viết phân thức biểu thị theo x:

a) Thời gian ca nô đi xuôi dòng từ A đến B;

b) Thời gian ca nô đi ngược dòng từ B về A;

c) Tỉ số của thời gian ca nô đi xuôi dòng từ A đến B và thời gian ca nô đi ngược dòng từ B về A.

Giải

a) Do tốc độ ca nô đi xuôi dòng là $x + 3$ (km/h) nên phân thức biểu thị thời gian ca nô đi xuôi dòng từ A đến B là: $\frac{20}{x+3}$ (giờ).

b) Do tốc độ ca nô đi ngược dòng là $x - 3$ (km/h) nên phân thức biểu thị thời gian ca nô đi ngược dòng từ B về A là: $\frac{20}{x-3}$ (giờ).

c) Tỉ số của thời gian ca nô đi xuôi dòng từ A đến B và thời gian ca nô đi ngược dòng từ B về A là:

$$\frac{20}{x+3}:\frac{20}{x-3}=\frac{20}{x+3}\cdot\frac{x-3}{20}=\frac{x-3}{x+3}.$$

Vậy phân thức biểu thị tỉ số thời gian ca nô đi xuôi dòng từ A đến B và thời gian ca nô đi ngược dòng từ B về A là: $\frac{x-3}{x+3}$.

BÀI TẬP

1. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{3x+6}{4x-8}\cdot\frac{2x-4}{x+2}$;

b) $\frac{x^2-36}{2x+10}\cdot\frac{x+5}{6-x}$;

c) $\frac{1-y^3}{y+1}\cdot\frac{5y+5}{y^2+y+1}$;

d) $\frac{x+2y}{4x^2-4xy+y^2}\cdot(2x-y)$.

2. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{20x}{3y^2} : \left(-\frac{15x^2}{6y}\right)$;

b) $\frac{9x^2 - y^2}{x + y} : \frac{3x + y}{2x + 2y}$;

c) $\frac{x^3 + y^3}{y - x} : \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - 2xy + y^2}$;

d) $\frac{9 - x^2}{x} : (x - 3)$.

3. Tính một cách hợp lí:

a) $\frac{x^2 - 49}{x^2 + 5} \cdot \left(\frac{x^2 + 5}{x - 7} - \frac{x^2 + 5}{x + 7}\right)$;

b) $\frac{19x + 8}{x + 1\,975} \cdot \frac{2\,000 - x}{x + 1\,945} + \frac{19x + 8}{x + 1\,975} \cdot \frac{2x - 25}{x + 1\,945}$.

4. Chứng minh giá trị của mỗi biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến:

a) $A = \left(\frac{x}{xy - y^2} + \frac{2x - y}{xy - x^2}\right) \cdot \frac{x^2y - xy^2}{(x - y)^2}$;

b) $B = \left(\frac{1}{x^2 + 4x + 4} - \frac{1}{x^2 - 4x + 4}\right) : \left(\frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x - 2}\right) \cdot (x^2 - 4)$.

5. Một xí nghiệp theo kế hoạch cần phải sản xuất 120 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do cải tiến kĩ thuật nên xí nghiệp đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và làm thêm được 5 tấn hàng. Gọi x là số ngày xí nghiệp cần làm theo dự định. Viết phân thức biểu thị theo x:

a) Số tấn hàng xí nghiệp làm trong 1 ngày theo dự định;

b) Số tấn hàng xí nghiệp làm trong 1 ngày trên thực tế;

c) Tỉ số của số tấn hàng xí nghiệp làm trong 1 ngày trên thực tế và số tấn hàng xí nghiệp làm trong 1 ngày theo dự định.

6. Một xe ô tô chở hàng đi từ địa điểm A đến địa điểm B hết x giờ. Sau khi trả hàng tại địa điểm B, xe quay ngược trở lại địa điểm A nhưng thời gian xe chạy về đến A chỉ là $x - 1$ giờ. Biết quãng đường AB dài 160 km, viết phân thức biểu thị theo x:

a) Tốc độ xe ô tô khi chạy từ A đến B;

b) Tốc độ xe ô tô khi chạy từ B về A;

c) Tỉ số của tốc độ xe ô tô khi chạy từ A đến B và tốc độ xe ô tô khi chạy từ B về A.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

1. Thực hiện phép tính:

a) $\dfrac{x}{xy+y^2}-\dfrac{y}{x^2+xy}$;

b) $\dfrac{x^2+4}{x^2-4}-\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{x}{2-x}$;

c) $\dfrac{a^2+ab}{b-a}:\dfrac{a+b}{2a^2-2b^2}$;

d) $\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{2x-1}{2x+1}\right):\dfrac{4x}{10x-5}$.

2. Cho biểu thức:

$$A=\left(\frac{x+1}{2x-2}+\frac{3}{x^2-1}-\frac{x+3}{2x+2}\right)\cdot\frac{4x^2-4}{5}.$$

a) Viết điều kiện xác định của biểu thức A.

b) Chứng minh giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến.

3. Cho biểu thức:

$$B=\left(\frac{5x+2}{x^2-10x}+\frac{5x-2}{x^2+10x}\right)\cdot\frac{x^2-100}{x^2+4}.$$

a) Viết điều kiện xác định của biểu thức B.

b) Rút gọn B và tính giá trị của biểu thức B tại $x=0,1$.

c) Tìm số nguyên x để biểu thức B nhận giá trị nguyên.

4. Hai người thợ cùng sơn một bức tường. Nếu một mình sơn xong bức tường thì người thứ nhất làm xong lâu hơn người thứ hai là 2 giờ. Gọi x là số giờ mà người thứ nhất một mình sơn xong bức tường. Viết phân thức biểu thị tổng số phần của bức tường sơn được mà người thứ nhất sơn trong 3 giờ và người thứ hai sơn trong 4 giờ theo x.

5. Số tiền hằng năm A (triệu đô la Mỹ) mà người Mỹ chi cho việc mua đồ ăn, đồ uống khi ra khỏi nhà và dân số P (triệu người) hằng năm của Mỹ từ năm 2000 đến năm 2006 lần lượt được cho bởi công thức sau:

$$A=\frac{-8\,242,58t+348\,299,6}{-0,06t+1} \text{ với } 0\le t\le 6;\quad P=2,71t+282,7 \text{ với } 0\le t\le 6.$$

Trong đó, t là số năm tính từ năm 2000, $t=0$ tương ứng với năm 2000.

(Nguồn: U.S. Bureau of Economic Analysis and U.S. Census Bureau)

Viết phân thức biểu thị (theo t) số tiền bình quân hằng năm mà mỗi người Mỹ đã chi cho việc mua đồ ăn, đồ uống khi ra khỏi nhà.

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Chủ đề 1
QUẢN LÍ TÀI CHÍNH CÁ NHÂN

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Giới thiệu về kế hoạch và quản lí tài chính cá nhân

Tài chính ảnh hưởng một phần quan trọng đến cuộc sống của mỗi người. Xã hội ngày càng phát triển đòi hỏi mỗi người càng cần được làm quen, được trang bị từ sớm những kiến thức tài chính, đặc biệt hiểu được bản chất, vai trò và giá trị của đồng tiền, từ đó có thái độ đúng đắn với tài chính và tiền tệ, biết trân trọng tiền và chi tiêu một cách hợp lí.

Tài chính cá nhân là một thuật ngữ được sử dụng để chỉ các vấn đề về tài chính của một cá nhân, trong đó có cách thức sử dụng và quản lí tiền, kế hoạch chi tiêu, tích luỹ, đầu tư tiền phù hợp với hoàn cảnh sống của cá nhân.

Quản lí tài chính cá nhân là một thuật ngữ được sử dụng để chỉ các vấn đề về quản lí tài chính của một cá nhân trên cơ sở bản kế hoạch tài chính cá nhân đã được lập ra. Quản lí tài chính cá nhân giúp mỗi người tránh được việc chi tiêu thiếu kiểm soát, không có kế hoạch khiến người đó luôn ở trong tình trạng bị thiếu hụt tài chính hay không có tích luỹ. Vì thế, quản lí tài chính cá nhân luôn là một trong những vấn đề quan trọng mà bất cứ ai cũng cần biết để định hướng thật tốt cho tương lai của mình.

Có hai vấn đề chính trong quản lí tài chính cá nhân, đó là quản lí thu nhập và quản lí chi tiêu.

Quản lí thu nhập cá nhân chủ yếu là duy trì ổn định nguồn thu nhập của cá nhân và tìm cách tăng thêm nguồn thu nhập đó.

Quản lí chi tiêu cá nhân chủ yếu là quản lí việc chi tiêu của bản thân (hoặc của gia đình) và quản lí việc vay nợ (ví dụ: vay nợ các tổ chức tín dụng, mua trả góp, ...).

2. Nội dung chính của quản lí tài chính cá nhân

2.1. Chi tiêu của bản thân (hoặc của gia đình)

Ví dụ 1 Kế hoạch chi tiêu hằng tháng của gia đình chị Hạnh được cho bởi *Bảng 1*.

Khoản chi tiêu	Tỉ lệ (%)
Cho học tập của các con, dịch vụ y tế và chăm sóc sức khoẻ	16
Cho các nhu cầu thiết yếu	50
Cho mua sắm cá nhân	14
Cho tiết kiệm	20

Bảng 1

Hãy cho biết gia đình chị Hạnh đã quản lí chi tiêu hằng tháng theo các khoản mục chi phí nào.

Giải

Nhìn vào *Bảng 1* ta thấy gia đình chị Hạnh đã quản lí chi tiêu hằng tháng theo các khoản mục chi phí sau:

– Cho học tập của các con, dịch vụ y tế và chăm sóc sức khoẻ. Ví dụ: tiền học cho các con, tiền khám chữa bệnh và chăm sóc sức khoẻ, ...

– Cho các nhu cầu thiết yếu. Ví dụ: thuê nhà, điện nước, ăn uống, ...

– Cho mua sắm cá nhân. Ví dụ: mua dụng cụ sinh hoạt cá nhân và gia đình.

– Cho tiết kiệm. Khoản tiền tiết kiệm đó có thể gửi tiết kiệm ở ngân hàng hoặc đầu tư sinh lời.

Nhận xét: Để quản lí chi tiêu của bản thân hoặc của gia đình trong một khoảng thời gian nhất định (hằng tuần hay hằng tháng), ta có thể làm như sau:

• Căn cứ vào điều kiện thực tế của bản thân (hoặc của gia đình), lập danh sách các khoản mục chi tiêu;

• Căn cứ vào tổng thu nhập của bản thân (hoặc của gia đình), phân phối tiền chi tiêu cho mỗi khoản mục đó.

2.2. Vay nợ và thanh toán khoản vay nợ

Trong thực tế cuộc sống, vay nợ ngân hàng hoặc mua sản phẩm theo hình thức trả góp ngày càng phổ biến đối với chi tiêu cá nhân.

Ví dụ 2 Gia đình bác Châu quyết định vay nợ ngân hàng để mua nhà trả góp. Hợp đồng tín dụng giữa đại diện ngân hàng (bên cho vay) và gia đình bác Châu (bên vay) nêu rõ những điều khoản sau:

• Tổng số tiền ngân hàng cho vay một lần là 900 triệu đồng.

• Thời hạn cho vay là 48 tháng tính từ ngày gia đình bác Châu nhận được khoản tiền vay trên. Lãi suất cho vay là 9,75%/năm và không thay đổi trong suốt thời hạn hợp đồng (48 tháng) và tính lãi theo dư nợ ban đầu.

Theo đó:

• Lãi trả hằng tháng là 0,8125% của số tiền vay 900 triệu đồng;

• Trả nợ gốc hằng tháng là $\frac{1}{48}$ của số tiền vay 900 triệu đồng.

Hỏi gia đình bác Châu mỗi tháng phải trả cho ngân hàng tổng cộng bao nhiêu tiền?

Giải

Số tiền mà gia đình bác Châu phải trả lãi mỗi tháng là:

$$900\,000\,000 \,.\, 0{,}8125\% = 7\,312\,500 \text{ (đồng)}.$$

Số tiền mà gia đình bác Châu phải trả nợ gốc mỗi tháng là:

$$900\,000\,000 \cdot \frac{1}{48} = 18\,750\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vậy tổng số tiền mà gia đình bác Châu mỗi tháng phải trả cho ngân hàng là:

$$7\,312\,500 + 18\,750\,000 = 26\,062\,500 \text{ (đồng)}.$$

Nhận xét: Trước khi vay nợ, ta phải cân nhắc kĩ lưỡng khả năng thanh toán khoản vay nợ đó, bởi lẽ việc thanh toán khoản vay nợ có thể dẫn đến không quản lí được chi tiêu của bản thân (hoặc của gia đình) và gây thiếu hụt tài chính.

3. Ý nghĩa của quản lí tài chính cá nhân

Quản lí tài chính cá nhân hợp lí và hiệu quả sẽ giúp cho mỗi cá nhân:

• Quản lí được tiền hằng ngày; tạo dựng được khả năng quản lí tiền cá nhân trong một tình huống thực tế, bao gồm cả các tình huống chưa bao giờ trải nghiệm;

• Thiết lập được cách thức sử dụng tiền, kế hoạch chi tiêu và tiết kiệm tiền phù hợp với hoàn cảnh sống của cá nhân ở hiện tại và trong tương lai;

• Đưa ra và thực hiện được những quyết định về quản lí tài chính cá nhân bằng cách sử dụng các công cụ tài chính.

II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

Tiến trình tổ chức các hoạt động bao gồm: phần chuẩn bị; phần thực hiện; phần tổng kết.

1. Phần chuẩn bị

1 Giáo viên thực hiện nhiệm vụ sau:

a) Giả sử một gia đình có 5 triệu đồng để chi tiêu trong vòng một tuần. Yêu cầu mỗi học sinh lập kế hoạch chi tiêu cho gia đình đó theo mẫu như ở *Bảng 2*.

Khoản chi tiêu	Số tiền (đồng)	Tỉ lệ (%)
Cho học tập của các con, dịch vụ y tế và chăm sóc sức khoẻ	?	?
Cho các nhu cầu thiết yếu	?	?
Cho mua sắm cá nhân	?	?
Cho tiết kiệm	?	?

Bảng 2

b) Yêu cầu mỗi học sinh tìm hiểu, nghiên cứu một số hình thức vay nợ ngân hàng (hoặc mua sản phẩm theo hình thức trả góp) của một số ngân hàng (hoặc doanh nghiệp) cụ thể qua trang web của những tổ chức đó.

2. Phần thực hiện

Chia lớp thành các nhóm, mỗi nhóm có từ 3 đến 5 học sinh. Sau đó, thực hiện các hoạt động sau đây.

2 Từng nhóm trao đổi, thảo luận để xác định rõ: Mỗi khoản mục chi tiêu của gia đình ở *Hoạt động 1* nên chiếm tỉ lệ bao nhiêu phần trăm là hợp lí?

a) Căn cứ vào bảng thống kê của mỗi thành viên trong nhóm và những ý kiến thống nhất sau khi thảo luận, mỗi nhóm chọn lấy một bảng thống kê hợp lí nhất.

b) Căn cứ vào bảng thống kê đã được chọn, mỗi nhóm học sinh tiến hành lập bảng thống kê các khoản chi tiêu của gia đình trên trong vòng một tuần theo mẫu như ở *Bảng 3*.

Khoản chi tiêu	Số tiền (đồng)	Tỉ lệ (%)	Tỉ lệ (%) theo ý kiến thống nhất của nhóm
Cho học tập của các con, dịch vụ y tế và chăm sóc sức khoẻ	?	?	?
Cho các nhu cầu thiết yếu	?	?	?
Cho mua sắm cá nhân	?	?	?
Cho tiết kiệm	?	?	?

Bảng 3

3 Mỗi nhóm học sinh tiến hành lập kế hoạch giả định về vay nợ ngân hàng. Cụ thể như sau:

– Xác định số tiền vay nợ và thời gian vay;

– Xác định ngân hàng cần vay.

Sau đó, báo cáo kết quả kế hoạch giả định về vay nợ ngân hàng của nhóm theo mẫu sau:

1. Tên ngân hàng:

2. Tổng số tiền ngân hàng cho vay một lần:

3. Thời hạn cho vay (tính từ ngày nhận được khoản tiền vay trên):

4. Lãi suất cho vay (không thay đổi trong suốt thời hạn hợp đồng):

5. Số tiền phải trả lãi mỗi tháng:

6. Số tiền phải trả nợ gốc mỗi tháng:

7. Tổng số tiền mỗi tháng phải trả cho ngân hàng:

3. Phần tổng kết

4 Làm việc chung cả lớp để thực hiện các nhiệm vụ sau:

– Các nhóm báo cáo kết quả của nhóm. Từ đó, cả lớp góp ý cho phương án của mỗi nhóm.

– Tổng kết và rút kinh nghiệm.

III. ĐÁNH GIÁ

Hình thức đánh giá: đánh giá trong dạy học dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

– Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.

– Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

– Nhóm tự đánh giá và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.

– Giáo viên và các nhóm đánh giá, rồi cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

Chương III

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: hàm số; mặt phẳng toạ độ; đồ thị của hàm số; hàm số bậc nhất; đồ thị của hàm số bậc nhất.

§1. HÀM SỐ

Thanh long là một loại cây chịu hạn, không kén đất, rất thích hợp với điều kiện khí hậu và thổ nhưỡng của tỉnh Bình Thuận. Giá bán 1 kg thanh long ruột đỏ loại I là 32 000 đồng. Với mỗi lượng thanh long loại I được bán ra, người bán sẽ thu được một số tiền tương ứng.

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Mối liên quan giữa hai đại lượng số kilôgam thanh long được bán ra và số tiền người bán thu được thể hiện khái niệm nào trong toán học?

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Chu vi y (cm) của hình vuông có độ dài cạnh x (cm) được tính theo công thức $y = 4x$. Với mỗi giá trị của x, xác định được bao nhiêu giá trị tương ứng của y?

2 Trong tình huống ở phần mở đầu, hãy cho biết:

a) Số tiền người bán thu được khi lần lượt bán 2 kg thanh long; 3 kg thanh long.

b) Gọi y (đồng) là số tiền người bán thu được khi bán x (kg) thanh long. Với mỗi giá trị của x, ta xác định được bao nhiêu giá trị tương ứng của y?

Ta có định nghĩa:

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng x (x thay đổi) sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là *hàm số* của x và x gọi là *biến số*.

Ví dụ 1 Viết công thức tính thể tích V (cm^3) của hình lập phương có độ dài cạnh là x (cm). Hỏi V có phải là hàm số của x hay không? Vì sao?

Giải

Ta có: $V = x^3$ (cm^3).

Nhận thấy mỗi giá trị của x chỉ xác định đúng một giá trị của V. Vậy V là hàm số của x.

1 Cho hai ví dụ về hàm số.

Ví dụ 2 Để xem dự báo nhiệt độ T (^{o}C) tại một số thời điểm t (h) trong cùng một ngày, chúng ta có thể truy cập trang *https://accuweather.com*. *Hình 1* là nhiệt độ dự báo ở Thành phố Hồ Chí Minh tại một số thời điểm trong ngày 15/3/2022. Khi biểu diễn các dữ liệu lên bảng, ta có bảng giá trị sau:

t (h)	10	11	12	13	14
T (^{o}C)	30	32	33	34	34

(*Nguồn: https://accuweather.com*)
Hình 1

a) Nhiệt độ T có phải là hàm số của thời điểm t không? Vì sao?

b) Thời điểm t có phải là hàm số của nhiệt độ T không? Vì sao?

Giải

a) Nhiệt độ T là hàm số của thời điểm t vì mỗi giá trị của t chỉ xác định đúng một giá trị của T.

b) Thời điểm t không phải là hàm số của nhiệt độ T. Lí do: Nhiệt độ $T = 34$ (^{o}C) tương ứng với hai thời điểm khác nhau là $t = 13$ (h) và $t = 14$ (h).

Ví dụ 3 Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x hay không nếu bảng giá trị tương ứng của chúng được cho bởi bảng sau?

x	1	2	3	4	5
y	6	6	6	6	6

Giải

Đại lượng y là hàm số của đại lượng x vì mỗi giá trị của x chỉ xác định đúng một giá trị của y.

Chú ý:

- Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y được gọi là *hàm hằng*.
- Hàm số có thể cho bằng công thức, bằng bảng.
- Khi y là hàm số của x, ta có thể viết $y = f(x)$, $y = g(x)$, ...

II. GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

3 Một xe ô tô chạy với tốc độ 60 km/h trong thời gian t (h).

a) Viết hàm số biểu thị quãng đường $S(t)$ (km) mà ô tô đi được trong thời gian t (h).

b) Tính quãng đường $S(t)$ (km) mà ô tô đi được trong thời gian $t = 2$ (h); $t = 3$ (h).

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định tại $x = a$. Giá trị tương ứng của hàm số $f(x)$ khi $x = a$ được gọi là *giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại $x = a$*, kí hiệu là $f(a)$.

Ví dụ 4 Cho hàm số $f(x) = x + 5$. Tính $f(-2)$; $f(0)$.

Giải

Ta có: $f(-2) = (-2) + 5 = 3$; $f(0) = 0 + 5 = 5$.

2 Cho hàm số

$$f(x) = -5x + 3.$$

Tính $f(0)$; $f(-1)$; $f(1)$.

Ví dụ 5 Nhà bác học Galileo Galilei (1564 – 1642) là người đầu tiên phát hiện ra quan hệ giữa quãng đường chuyển động y (m) và thời gian chuyển động x (giây) của một vật được biểu diễn gần đúng bởi hàm số $y = 5x^2$. Tính quãng đường mà vật đó chuyển động được sau 2 giây.

Giải

Xét hàm số $y = f(x) = 5x^2$.

Quãng đường mà vật đó chuyển động được sau 2 giây là:

$$f(2) = 5 \cdot 2^2 = 20 \text{ (m)}.$$

BÀI TẬP

1. Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x hay không nếu bảng giá trị tương ứng của chúng được cho bởi mỗi trường hợp sau:

a)

x	1	2	3	4	5	6
y	-2	-2	-2	-2	-2	-2

b)

x	1	2	3	4	1	5
y	-2	-3	-4	-5	-6	-7

2. a) Cho hàm số $y = 2x + 10$. Tìm giá trị của y tương ứng với mỗi giá trị sau của x:

$$x = -5; x = 0; x = \frac{1}{2}.$$

b) Cho hàm số $y = -2x^2 + 1$. Tìm giá trị của y tương ứng với mỗi giá trị sau của x:

$$x = -1; x = 0; x = 1; x = \frac{1}{3}.$$

3. Cho một thanh kim loại đồng chất có khối lượng riêng là 7,8 g/cm^3.

a) Viết công thức tính khối lượng m (g) theo thể tích V (cm^3). Hỏi m có phải là hàm số của V hay không? Vì sao?

b) Tính khối lượng của thanh kim loại đó khi biết thể tích của thanh kim loại đó là $V = 1\,000$ cm^3.

4. Dừa sáp là một trong những đặc sản lạ, quý hiếm và có giá trị dinh dưỡng cao, thường được trồng ở Bến Tre hoặc Trà Vinh. Giá bán mỗi quả dừa sáp là 200 000 đồng.

a) Viết công thức biểu thị số tiền y (đồng) mà người mua phải trả khi mua x (quả) dừa sáp. Hỏi y có phải là hàm số của x hay không? Vì sao?

b) Hãy tính số tiền mà người mua phải trả khi mua 10 quả dừa sáp.

(Nguồn: https://shutterstock.com)

5. Bác Ninh gửi tiết kiệm 10 triệu đồng ở ngân hàng với kì hạn 12 tháng và không rút tiền trước kì hạn. Lãi suất ngân hàng quy định cho kì hạn 12 tháng là $r\%$/năm.

a) Viết công thức biểu thị số tiền lãi y (đồng) theo lãi suất $r\%$/năm mà bác Ninh nhận được khi hết kì hạn 12 tháng. Hỏi y có phải là hàm số của r hay không? Vì sao?

b) Tính số tiền lãi mà bác Ninh nhận được khi hết kì hạn 12 tháng, biết $r = 5,6$.

CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

Đôi nét về lịch sử ra đời khái niệm hàm số

Leonhard Euler
(Nguồn: https://commons.wikimedia.org)

Khái niệm sơ khai về hàm số đã có từ khoảng 2000 năm trước Công nguyên khi những nhà toán học Babylon và Hy Lạp cổ đại đã sử dụng rộng rãi các bảng bình phương, bảng căn bậc hai, bảng lượng giác, ... để giải quyết các vấn đề toán học và thực tiễn. Nhưng thời kì này khái niệm hàm số chỉ xuất hiện như một "công cụ ngầm" để nghiên cứu sự phụ thuộc lẫn nhau giữa hai đại lượng. Mãi đến thế kỉ XVII khái niệm này mới được hình thành rõ ràng và có hệ thống trong toán học nhờ các công trình của Descartes (René Descartes, 1596 – 1650, người Pháp) và Fermat (Pierre de Fermat, 1607 – 1665, người Pháp). Đặc biệt, Descartes đã nêu lên rõ ràng khái niệm về sự phụ thuộc lẫn nhau giữa hai đại lượng biến thiên. Tuy nhiên, các thuật ngữ "hàm số", "phụ thuộc", "biến thiên" vẫn chưa xuất hiện. Từ "hàm số" (tiếng Latin là *functiō*, tiếng Anh là *function*) xuất hiện lần đầu tiên vào tháng 8/1673 trong các bản thảo của Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 – 1716, người Đức). Khái niệm hàm số được hoàn thiện dần qua các công trình của nhiều nhà toán học khác như: D'Alembert (Jean le Rond d'Alembert, 1717 – 1783, người Pháp), Lagrange (Joseph Louis Lagrange, 1736 – 1813, người Pháp), ... Đặc biệt, đến năm 1755, nhà toán học Euler (Leonhard Euler, 1707 – 1783, người Thuỵ Sĩ) đã đưa ra định nghĩa:

"Khi một đại lượng phụ thuộc vào các đại lượng khác sao cho sự thay đổi của các đại lượng thứ hai kéo theo sự thay đổi của đại lượng thứ nhất được gọi là hàm số của các đại lượng thứ hai".

Về kí hiệu hàm số, Bernoulli (Johann Bernoulli, 1667 – 1748, người Thuỵ Sĩ) đã dùng kí hiệu φx, ở đó φ là chữ Hy Lạp. Euler trong công trình công bố vào năm 1740 là người đầu tiên viết $f(x)$ để kí hiệu hàm số f của biến số x, ở đó kí hiệu f bắt đầu chữ cái đầu tiên trong từ functiō của tiếng Latin, có nghĩa là phụ thuộc.

(Nguồn: David M. Burton, The history of mathematics: An introduction, Seventh edition, McGraw Hill)

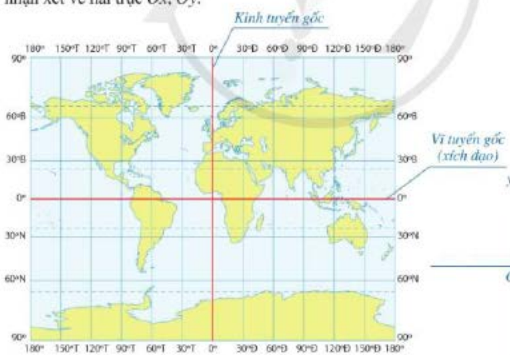
§2. MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Ở lớp 6, ta đã biết rằng mỗi điểm trên bản đồ địa lí được xác định bởi một cặp gồm hai con số (toạ độ địa lí) là kinh độ và vĩ độ. Chẳng hạn, toạ độ địa lí của hồ Hoàn Kiếm ở Thủ đô Hà Nội là: (21°01'B; 105°51'Đ).

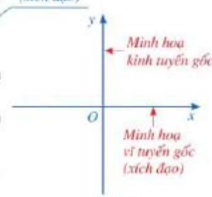
Tháp Rùa – Hồ Hoàn Kiếm
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

I. MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

1 *Hình 2* là một dạng phép chiếu bản đồ có các đường kinh tuyến và vĩ tuyến đều là các đường thẳng, trong đó kinh tuyến gốc và vĩ tuyến gốc được minh hoạ bằng hai đường thẳng màu đỏ. Chúng được biểu diễn bởi hai trục Ox, Oy trên mặt phẳng ở *Hình 3*. Nêu nhận xét về hai trục Ox, Oy.



(*Nguồn: Lịch sử và Địa lí 6, NXB Đại học Sư phạm, năm 2021*)
Hình 2



Hình 3

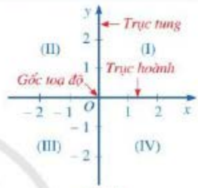
Ta có định nghĩa:

Trên mặt phẳng, ta vẽ hai trục số Ox, Oy vuông góc với nhau và cắt nhau tại gốc O của mỗi trục. Khi đó ta có hệ trục toạ độ Oxy.

Trục Ox, Oy gọi là các *trục toạ độ*. Ox gọi là *trục hoành*, Oy gọi là *trục tung*. O gọi là *gốc toạ độ*.

Mặt phẳng có hệ trục toạ độ Oxy gọi là *mặt phẳng toạ độ Oxy*.

Hai trục toạ độ chia mặt phẳng thành bốn góc: góc phần tư thứ I, góc phần tư thứ II, góc phần tư thứ III, góc phần tư thứ IV theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ (*Hình 4*).



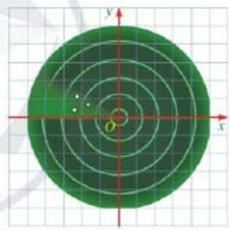
Hình 4

Chú ý: Các đơn vị độ dài trên hai trục toạ độ được chọn bằng nhau (nếu không có lưu ý gì thêm).

Ví dụ 1 Màn hình ra đa gợi lên hình ảnh một mặt phẳng toạ độ. Ba chấm sáng trên màn hình ra đa của đài kiểm soát không lưu (*Hình 5*) nằm ở góc phần tư nào của mặt phẳng toạ độ?

Giải

Cả ba chấm sáng trên màn hình ra đa của đài kiểm soát không lưu đều nằm ở góc phần tư thứ II của mặt phẳng toạ độ.



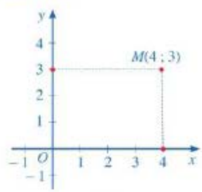
Hình 5. Màn hình ra đa

II. TOẠ ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

2 Cho điểm M trong mặt phẳng toạ độ Oxy (*Hình 6*).

a) Hình chiếu của điểm M trên trục hoành Ox là điểm nào trên trục số Ox?

b) Hình chiếu của điểm M trên trục tung Oy là điểm nào trên trục số Oy?



Hình 6

Nhận xét: Cặp số $(4 ; 3)$ gọi là *toạ độ* của điểm M trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

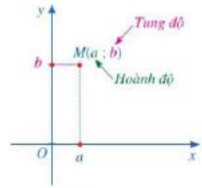
Ta có định nghĩa:

Cho điểm M trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

Giả sử hình chiếu của điểm M lên trục hoành Ox là điểm a trên trục số Ox, hình chiếu của điểm M lên trục tung Oy là điểm b trên trục số Oy (*Hình 7*).

Cặp số $(a ; b)$ gọi là *toạ độ* của điểm M, a là *hoành độ* và b là *tung độ* của điểm M.

Điểm M có toạ độ $(a ; b)$ được kí hiệu là $M(a ; b)$.



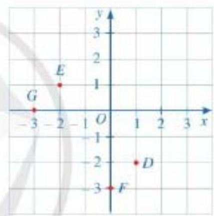
Hình 7

Chú ý: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, mỗi điểm M xác định một cặp số $(a ; b)$. Ngược lại, mỗi cặp số $(a ; b)$ xác định một điểm M.

Ví dụ 2 Cho mặt phẳng toạ độ Oxy như *Hình 8*. Xác định toạ độ các điểm D, E, F, G, O.

Giải

Toạ độ các điểm D, E, F, G, O lần lượt là: $D(1 ; -2)$; $E(-2 ; 1)$; $F(0 ; -3)$; $G(-3 ; 0)$; $O(0 ; 0)$.



Hình 8

Nhận xét

- Điểm nằm trên trục hoành có tung độ bằng 0.
- Điểm nằm trên trục tung có hoành độ bằng 0.

Ví dụ 3 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy nêu cách xác định điểm $A(3 ; -2)$.

Giải

Qua điểm 3 trên trục Ox, ta kẻ đường thẳng vuông góc với trục Ox.

Qua điểm -2 trên trục Oy, ta kẻ đường thẳng vuông góc với trục Oy.

Hai đường thẳng trên cắt nhau tại điểm $A(3 ; -2)$.

1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy nêu cách xác định các điểm $A(-1 ; 2)$; $B(2 ; 2)$; $C(2 ; 0)$; $D(0 ; -2)$.

III. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

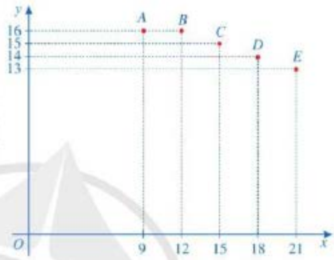
3 Nhiệt độ dự báo thấp nhất y (°C) ở thành phố Đà Lạt là một hàm số theo thời điểm x (h) trong ngày 14/4/2022. Hàm số này được biểu thị dưới dạng *Bảng 1*.

x (h)	9	12	15	18	21
y (°C)	16	16	15	14	13

(*Nguồn: https://weather.com*)

Bảng 1

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, biểu diễn các điểm có toạ độ là các cặp số $(x ; y)$ tương ứng ở *Bảng 1*.



Hình 9

Nhận xét: Tập hợp năm điểm $A(9 ; 16)$; $B(12 ; 16)$; $C(15 ; 15)$; $D(18 ; 14)$; $E(21 ; 13)$ như ở *Hình 9* gọi là đồ thị của hàm số cho bởi *Bảng 1*.

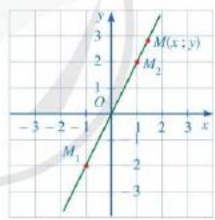
4 Xét hàm số $y = 2x$.

a) Tính các giá trị y_1, y_2 tương ứng với các giá trị $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

b) Biểu diễn trong mặt phẳng toạ độ Oxy các điểm $M_1(x_1 ; y_1)$, $M_2(x_2 ; y_2)$.

Nhận xét: Với mỗi giá trị của biến số x, ta có thể xác định được một điểm $M(x ; y)$ với $y = 2x$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

Khi biến số x thay đổi, điểm $M(x ; y)$ sẽ thay đổi theo trong mặt phẳng toạ độ Oxy và tạo nên *đồ thị của hàm số* $y = 2x$ (*Hình 10*).



Hình 10

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x ; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ.

Ví dụ 4 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đồ thị của hàm số $y = x + 2$ (*Hình 11*).

a) Quan sát đồ thị của hàm số và cho biết trong ba điểm: $A(0 ; 2)$, $B(-2 ; 0)$, $C(2 ; 3)$, điểm nào thuộc đồ thị của hàm số, điểm nào không thuộc đồ thị của hàm số.

b) Điểm $D(2\,022 ; 2\,023)$ có thuộc đồ thị của hàm số hay không? Vì sao?

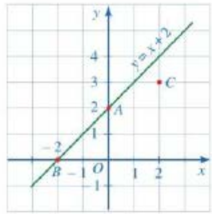
Giải

a) Quan sát đồ thị của hàm số $y = x + 2$ (*Hình 11*), ta thấy hai điểm $A(0 ; 2)$, $B(-2 ; 0)$ thuộc đồ thị của hàm số, điểm $C(2 ; 3)$ không thuộc đồ thị của hàm số.

b) Đối với hàm số $y = x + 2$, giá trị của y tương ứng với giá trị $x = 2\,022$ là

$$y = 2\,022 + 2 = 2\,024 \neq 2\,023.$$

Vì vậy, điểm $D(2\,022 ; 2\,023)$ không thuộc đồ thị của hàm số.



Hình 11

2 Số lượng sản phẩm bán được y (nghìn sản phẩm) là một hàm số theo thời gian x (tháng). Hàm số này được biểu thị dưới dạng *Bảng 2*.

x (tháng)	1	2	3	4	5
y (nghìn sản phẩm)	1	3	5	6	7

Bảng 2

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hai điểm $A(2 ; 3)$, $B(5 ; 6)$ có thuộc đồ thị của hàm số hay không? Vì sao?

BÀI TẬP

1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) Điểm thuộc trục hoành có tung độ bằng 0.

b) Điểm thuộc trục hoành có hoành độ bằng 0.

c) Điểm thuộc trục tung có tung độ bằng 0.

d) Điểm thuộc trục tung có hoành độ bằng 0.

2. Điểm $M(a ; b)$ thuộc góc phần tư nào trong mỗi trường hợp sau?

a) $a > 0, b > 0$.　　b) $a > 0, b < 0$.

c) $a < 0, b > 0$.　　d) $a < 0, b < 0$.

3. Xác định toạ độ điểm A trong mỗi trường hợp sau:

a) Hoành độ bằng -3 và tung độ bằng 5;

b) Hoành độ bằng -2 và nằm trên trục hoành;

c) Tung độ bằng -4 và nằm trên trục tung.

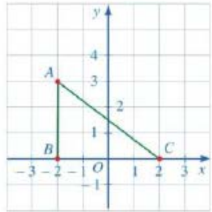
4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, nêu cách xác định điểm $A(-3\ ;-5)$.

5. Cho tam giác ABC như *Hình 12*.

a) Xác định toạ độ các điểm A, B, C.

b) Tam giác ABC có là tam giác vuông hay không?

c) Xác định toạ độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.



Hình 12

6. Nhập địa điểm "chợ Bến Thành" trên trang *https://google.com/maps*, sau đó nháy chuột phải vào địa điểm đó trên bản đồ ta được thông tin về kinh độ, vĩ độ như *Hình 13*. Hãy viết toạ độ địa lí của chợ Bến Thành thuộc Thành phố Hồ Chí Minh.

Hình 13

7. Nhiệt độ dự báo tại một số thời điểm trong ngày 25/5/2022 ở Thành phố Hồ Chí Minh được cho bởi *Hình 14*.

a) Viết hàm số dạng bảng biểu thị nhiệt độ dự báo y (^{o}C) tại thời điểm x (h) ở Thành phố Hồ Chí Minh.

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, biểu diễn các điểm có toạ độ là các cặp số $(x\ ;y)$ tương ứng ở bảng trên.

c) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, điểm $M(15\ ;24)$ có thuộc đồ thị của hàm số cho bởi bảng trên hay không? Vì sao?

(*Nguồn: https://weather.com*)

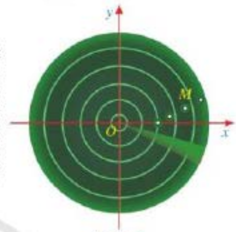
Hình 14

CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

Ứng dụng của toạ độ điểm trên mặt phẳng

1. Ứng dụng trong hàng không

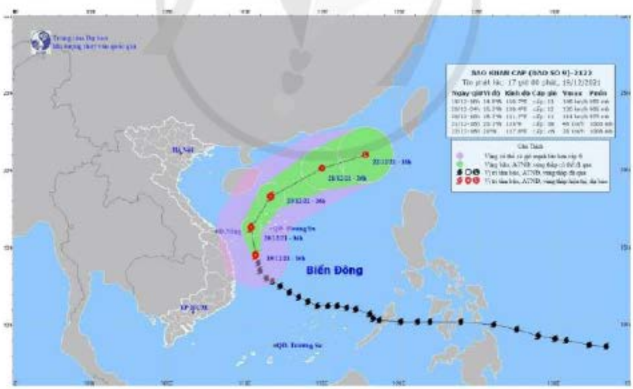
Màn hình ra đa trong *Hình 15* gợi lên hình ảnh một mặt phẳng toạ độ, trong đó điểm O là gốc toạ độ và Ox, Oy là hai trục toạ độ. Máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa bởi một chấm sáng, kí hiệu là M. Căn cứ vào toạ độ của điểm M trong mặt phẳng toạ độ Oxy, trạm kiểm soát không lưu của sân bay có thể xác định được vị trí của máy bay. Cũng như vậy, dựa trên sự thay đổi của toạ độ điểm M, trạm kiểm soát đó có thể xác định được đường bay của máy bay.



Hình 15

2. GPS

Để theo dõi và dự đoán đường đi của một cơn bão, ngày nay các nhà khoa học sử dụng Hệ thống Định vị Toàn cầu (GPS). Trong hệ thống GPS, kinh độ gốc và vĩ độ gốc xác định một hệ trục toạ độ trên mặt phẳng (bản đồ dự báo), kinh độ và vĩ độ của một địa điểm trên Trái Đất là toạ độ của điểm đó trên bản đồ dự báo. Chẳng hạn, *Hình 16* mô tả dự báo đường đi của cơn bão số 9 Rai sau 16 giờ ngày 19/12/2021 ở Việt Nam.



(Nguồn: Trung tâm Dự báo khí tượng thuỷ văn quốc gia)

Hình 16

§3. HÀM SỐ BẬC NHẤT $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

Cánh đồng lúa đang thu hoạch
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Một doanh nghiệp xuất khẩu gạo thu mua lúa với giá 7 triệu đồng/tấn, phí vận chuyển từ nơi thu mua đến kho là 2 triệu đồng/chuyến. Doanh nghiệp mua được x tấn lúa và chỉ sử dụng ba chuyến vận chuyển số lúa đó về kho. Gọi y (triệu đồng) là tổng chi phí mà doanh nghiệp đã trả để mua x tấn lúa và phí vận chuyển. Viết công thức tính y theo x.

Hàm số cho bằng công thức tính y theo x ở trên gợi lên khái niệm nào trong toán học?

I. HÀM SỐ BẬC NHẤT

Trong bài toán ở phần mở đầu, y có phải là đa thức bậc nhất của biến x hay không?

Do $y = 7x + 6$ nên y là một đa thức bậc nhất của biến x.
Hàm số $y = 7x + 6$ là hàm số bậc nhất.

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$, trong đó a, b là các số cho trước và a khác 0.

Chú ý: Khi $b = 0$, ta có hàm số $y = ax$.

Ví dụ 1 Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Đối với những hàm số bậc nhất đó, xác định a, b lần lượt là hệ số của x, hệ số tự do.

a) $y = 2x - 3$. b) $y = x + 4$.

c) $y = 0x - 1$. d) $y = 4x$.

Giải

a) Hàm số $y = 2x - 3$ là hàm số bậc nhất và có $a = 2, b = -3$.

1 Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Đối với những hàm số bậc nhất đó, xác định a, b lần lượt là hệ số của x, hệ số tự do.

a) $y = -3x + 6$. b) $y = -x + 4$.

c) $y = \dfrac{3}{x} + 2$. d) $y = 2$.

b) Hàm số $y = x + 4$ là hàm số bậc nhất và có $a = 1$, $b = 4$.

c) Hàm số $y = 0x - 1$ không phải là hàm số bậc nhất.

d) Hàm số $y = 4x$ là hàm số bậc nhất và có $a = 4$, $b = 0$.

Ví dụ 2 Cho hàm số $y = 3x + 9$. Tìm giá trị của y tương ứng với mỗi giá trị sau của x:

$$x = -3; x = 0; x = 1.$$

2 Cho hàm số $y = -2x + 4$. Tìm giá trị của y tương ứng với mỗi giá trị sau của x: $x = 0$; $x = 2$; $x = 4$.

Giải

Thay lần lượt $x = -3$; $x = 0$; $x = 1$ vào công thức $y = 3x + 9$ ta tính được giá trị của y tương ứng trong bảng sau:

x	-3	0	1
y	0	9	12

II. ỨNG DỤNG

Ví dụ 3 Giá bán 1 kg vải thiều loại I là 35 000 đồng.

a) Viết công thức biểu thị số tiền y (đồng) thu được khi bán x kg vải thiều loại I. Hỏi y có phải là hàm số bậc nhất của x hay không?

b) Tính số tiền thu được khi bán 15 kg vải thiều loại I.

c) Cần bán bao nhiêu kilôgam vải thiều loại I để thu được số tiền 1 400 000 đồng?

Vải thiều

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Giải

a) Công thức biểu thị số tiền y (đồng) thu được khi bán x kg vải thiều loại I là: $y = 35\,000x$. Vậy y là hàm số bậc nhất của x.

b) Số tiền thu được khi bán 15 kg vải thiều loại I là: $35\,000 \cdot 15 = 525\,000$ (đồng).

c) Số kilôgam vải thiều loại I cần bán để thu được số tiền 1 400 000 đồng là:

$$1\,400\,000 : 35\,000 = 40 \text{ (kg)}.$$

Ví dụ 4 Để đổi từ độ Fahrenheit (độ F) sang độ Celsius (độ C), người ta dùng công thức sau:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

a) C có phải là hàm số bậc nhất của F không? Vì sao?

b) F có phải là hàm số bậc nhất của C không? Vì sao?

c) Hãy tính nhiệt độ theo độ F khi biết nhiệt độ C là 100 °C.

Nhiệt kế
(Nguồn: https://shutterstock.com)

Giải

a) Ta có: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, tức là $C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$.

Vậy C là hàm số bậc nhất của F với hệ số của F, hệ số tự do lần lượt là $\frac{5}{9}; -\frac{160}{9}$.

b) Vì $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ nên $F = \frac{9}{5}C + 32$.

Vậy F là hàm số bậc nhất của C với hệ số của C, hệ số tự do lần lượt là $\frac{9}{5}$; 32.

c) Khi $C = 100$ (°C) thì $F = \frac{9}{5} \cdot 100 + 32 = 212$ (°F). Vậy nhiệt độ theo độ F là 212 °F.

Ví dụ 5 Ở dưới mặt biển, khi độ sâu tăng thêm 1 m thì áp suất nước tăng thêm xấp xỉ 10 300 N/m^2 (*Nguồn: Theo Bài tập Vật lí 8, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2011*).

a) Viết công thức biểu thị áp suất nước p (N/m^2) theo độ sâu x (m). Hỏi p có phải là hàm số bậc nhất của x hay không?

b) Một người thợ lặn ở độ sâu 40 m dưới mực nước biển. Tính áp suất nước tại vị trí của người thợ lặn đó.

c) Một người thợ lặn chịu được áp suất tối đa là 505 000 N/m^2. Hỏi người thợ lặn đó chỉ có thể lặn tới độ sâu tối đa là bao nhiêu mét để đảm bảo an toàn?

Thợ lặn
(Nguồn: https://shutterstock.com)

3 Nếu hiện tại nước Anh là mùa đông thì London ở múi giờ + 0, Hà Nội ở múi giờ + 7. Giả sử vào thời điểm mùa đông của nước Anh, giờ London là x (giờ), giờ Hà Nội là y (giờ). Viết công thức biểu thị y theo x. Hỏi y có phải là hàm số bậc nhất của x hay không?

Giải

a) Công thức biểu thị áp suất nước p (N/m^2) theo độ sâu x (m) là: $p = 10\,300x$. Vậy p là hàm số bậc nhất của x.

b) Áp suất nước tại vị trí của người thợ lặn đó là: $10\,300 \cdot 40 = 412\,000$ (N/m^2).

c) Với $p = 505\,000$ (N/m^2), ta có: $505\,000 = 10\,300x$. Do đó $x = \frac{505\,000}{10\,300} \approx 49$ (m).

Vậy người thợ lặn đó chỉ có thể lặn tới độ sâu tối đa là 49 m để đảm bảo an toàn.

BÀI TẬP

1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) Hàm số bậc nhất có dạng $y = ax + b$, trong đó a, b là các số cho trước.

b) Hàm số bậc nhất có dạng $y = ax + b$, trong đó a, b là các số cho trước và a khác 0.

c) Hàm số bậc nhất có dạng $y = ax + b$, trong đó a, b là các số cho trước và b khác 0.

2. Xác định các hệ số của x, hệ số tự do trong mỗi hàm số bậc nhất sau:

a) $y = 6x + 8$; b) $y = -x - 5$; c) $y = \frac{x}{3}$.

3. Cho hàm số bậc nhất $f(x) = 3x + 2$. Tính $f(1)$; $f(0)$; $f(-2)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(-\frac{2}{3}\right)$.

4. Hiện tại, bạn Nam đã để dành được 300 000 đồng. Bạn Nam đang có ý định mua một chiếc xe đạp trị giá 2 000 000 đồng. Để thực hiện được điều trên, bạn Nam đã lên kế hoạch hằng ngày đều tiết kiệm 5 000 đồng. Gọi m (đồng) là số tiền bạn Nam tiết kiệm được sau t ngày.

a) Viết công thức biểu thị m theo t. Hỏi m có phải là hàm số bậc nhất của t hay không?

b) Hỏi sau bao nhiêu ngày kể từ ngày bắt đầu tiết kiệm thì bạn Nam có thể mua được chiếc xe đạp đó?

5. Một người đang sử dụng Internet, mỗi phút tốn dung lượng 1 MB. Giả sử gói cước Internet của người đó cho phép sử dụng dung lượng 4 GB.

a) Viết hàm số $f(x)$ biểu thị dung lượng tiêu tốn (MB) theo thời gian sử dụng Internet x (giây).

b) Viết hàm số $g(x)$ biểu thị dung lượng còn lại (MB) sau khi sử dụng Internet được x (giây).

c) Sau khi sử dụng Internet 2 phút thì dung lượng cho phép còn lại là bao nhiêu Megabyte?

6. Bạn Dương mang theo 100 000 đồng và đạp xe đi nhà sách để mua vở. Biết giá mỗi quyển vở là 7 000 đồng, phí gửi xe đạp là 3 000 đồng.

a) Viết công thức biểu thị tổng số tiền y (đồng) bạn Dương cần trả cho việc gửi xe đạp và mua x quyển vở. Hỏi y có phải là hàm số bậc nhất của x hay không?

b) Tính số tiền bạn Dương phải trả khi gửi xe và mua 12 quyển vở.

c) Viết công thức biểu thị số tiền còn lại t (đồng) bạn Dương còn lại sau khi gửi xe và mua x quyển vở. Hàm số cho bởi công thức đó có phải là hàm số bậc nhất hay không?

d) Với số tiền trên, bạn Dương có thể mua 15 quyển vở hay không? Vì sao?

§4. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

Ở bài học trước, ta đã học đồ thị của một hàm số trên mặt phẳng toạ độ. Trong bài học này, ta sẽ tìm hiểu một trường hợp riêng trong đồ thị của hàm số, đó là đồ thị của hàm số bậc nhất.

Đồ thị của hàm số bậc nhất $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ có tính chất gì?

I. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT

1 Xét hàm số $y = x - 2$.

a) Tìm giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	0	2	3
y	?	?	?

b) Vẽ các điểm $A(0 ; -2)$, $B(2 ; 0)$, $C(3 ; 1)$ của đồ thị hàm số $y = x - 2$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Dùng thước thẳng để kiểm tra ba điểm A, B, C có thẳng hàng hay không.

Nhận xét: Người ta chứng tỏ được rằng đồ thị của hàm số $y = x - 2$ là một đường thẳng.

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng.

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ còn gọi là đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

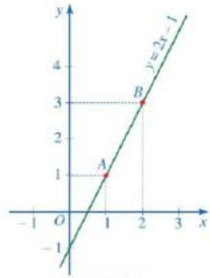
Ví dụ 1 Cho hàm số $y = 2x - 1$.

a) Tìm giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	1	2
y	?	?

b) Vẽ các điểm $A(1 ; 1)$, $B(2 ; 3)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = 2x - 1$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

c) Dựa vào hai điểm $A(1 ; 1)$ và $B(2 ; 3)$, vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x - 1$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy.



Hình 17

Giải

a) Ta có bảng sau:

x	1	2
y	1	3

b) Các điểm $A(1 ; 1)$, $B(2 ; 3)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = 2x - 1$ được vẽ như trong *Hình 17*.

c) Vì đồ thị của hàm số $y = 2x - 1$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(1 ; 1)$, $B(2 ; 3)$ nên đồ thị của hàm số đó là đường thẳng AB.

Ví dụ 2 Cho hàm số $y = 3x - 4$. Tìm điểm thuộc đồ thị của hàm số có hoành độ bằng 0.

Giải

Với $x = 0$ thì $y = 3 . 0 - 4 = -4$.

Vậy điểm có hoành độ bằng 0 thuộc đồ thị của hàm số $y = 3x - 4$ là $(0 ; -4)$.

1 Cho hàm số $y = 4x + 3$. Tìm điểm thuộc đồ thị của hàm số có hoành độ bằng 0.

Nhận xét: Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b.

II. VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT

Ta đã biết đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng. Do đó, để vẽ đồ thị của hàm số $y = ax + b$, ta chỉ cần xác định được hai điểm phân biệt bất kì thuộc đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Trong thực hành, ta thường xác định hai điểm đặc biệt thuộc đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ trong hai trường hợp sau đây.

a) Trường hợp 1: Xét hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$

Với $x = 0$ thì $y = 0$; với $x = 1$ thì $y = a$ nên hai điểm $O(0 ; 0)$ và $A(1 ; a)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$.

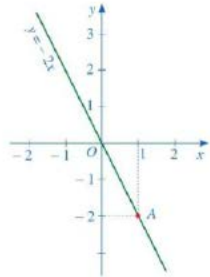
Để vẽ đồ thị của hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$, ta có thể xác định điểm $A(1 ; a)$ rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm O và A.

Ví dụ 3 Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x$.

Giải

Với $x = 1$ thì $y = -2$, ta được điểm $A(1 ; -2)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = -2x$.

Vậy đồ thị của hàm số $y = -2x$ là đường thẳng đi qua hai điểm $O(0 ; 0)$ và $A(1 ; -2)$ (*Hình 18*).



Hình 18

b) *Trường hợp 2:* Xét hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$)

• Với $x = 0$ thì $y = b$, ta được điểm $P(0 ; b)$ thuộc trục tung Oy.

• Với $y = 0$ thì $x = -\frac{b}{a}$, ta được điểm $Q\left(-\frac{b}{a} ; 0\right)$ thuộc trục hoành Ox.

Do đó, đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) đi qua hai điểm $P(0 ; b)$ và $Q\left(-\frac{b}{a} ; 0\right)$.

Để vẽ đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$), ta có thể xác định hai điểm $P(0 ; b)$ và $Q\left(-\frac{b}{a} ; 0\right)$ rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.

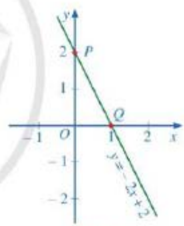
Ví dụ 4 Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x + 2$.

Giải

Với $x = 0$ thì $y = 2$, ta được điểm $P(0 ; 2)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = -2x + 2$.

Với $y = 0$ thì $x = 1$, ta được điểm $Q(1 ; 0)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = -2x + 2$.

Vậy đồ thị của hàm số $y = -2x + 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm $P(0 ; 2)$, $Q(1 ; 0)$ (*Hình 19*).



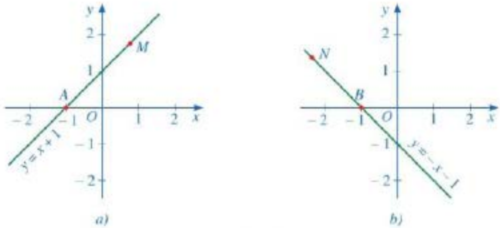
Hình 19

2 Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:
a) $y = 3x$;　　b) $y = 2x + 2$.

III. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

1. Góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và trục Ox

2 Quan sát các đường thẳng $y = x + 1$ và $y = -x - 1$ (*Hình 20*).



Hình 20

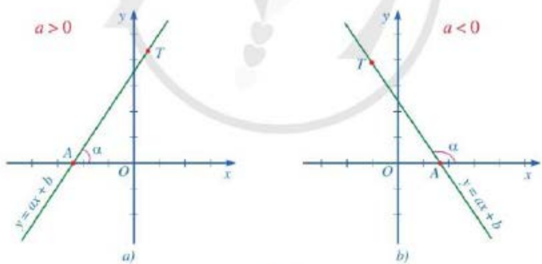
a) Có nhận xét gì về dấu của tung độ các điểm M, N?

b) Tìm góc tạo bởi hai tia Ax và AM ở *Hình 20a*.

c) Tìm góc tạo bởi hai tia Bx và BN ở *Hình 20b*.

Nhận xét: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Gọi A là giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox, T là một điểm thuộc đường thẳng $y = ax + b$ và có tung độ dương.

Góc α tạo bởi hai tia Ax và AT gọi là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox (hoặc nói đường thẳng $y = ax + b$ tạo với trục Ox một góc α) (*Hình 21*).



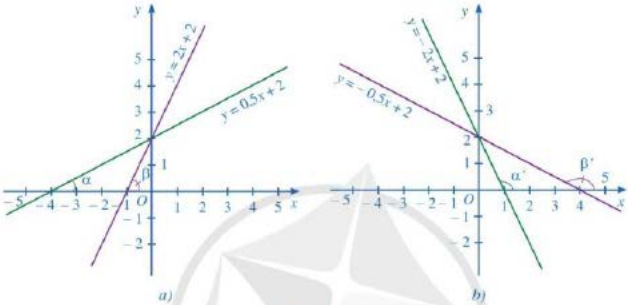
Hình 21

2. Hệ số góc

3 *Hình 22a* biểu diễn đồ thị của các hàm số bậc nhất: $y = 0{,}5x + 2$; $y = 2x + 2$. *Hình 22b* biểu diễn đồ thị của các hàm số bậc nhất: $y = -2x + 2$; $y = -0{,}5x + 2$.

a) Quan sát *Hình 22a*, so sánh các góc α, β và so sánh các giá trị tương ứng của hệ số của x trong các hàm số bậc nhất rồi rút ra nhận xét.

b) Quan sát *Hình 22b*, so sánh các góc α', β' và so sánh các giá trị tương ứng của hệ số của x trong các hàm số bậc nhất rồi rút ra nhận xét.



Hình 22

Nhận xét

• Khi hệ số $a > 0$ thì góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và trục Ox là góc nhọn. Hệ số a càng lớn thì góc càng lớn.

• Khi hệ số $a < 0$ thì góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và trục Ox là góc tù. Hệ số a càng lớn thì góc càng lớn.

Như vậy, có những mối liên hệ giữa hệ số a với góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và trục Ox. Ta có định nghĩa:

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Hệ số a gọi là *hệ số góc* của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

Ví dụ 5 Tìm hệ số góc của đường thẳng

$$y = 6x + 21.$$

Giải

Hệ số góc của đường thẳng $y = 6x + 21$ là 6.

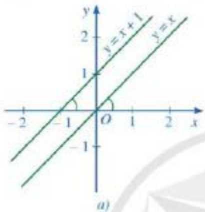
3 Tìm hệ số góc của đường thẳng $y = -5x + 11$.

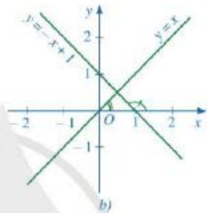
3. Ứng dụng của hệ số góc

4

a) Quan sát *Hình 23a*, tìm hệ số góc của hai đường thẳng $y = x$ và $y = x + 1$ và nêu vị trí tương đối của hai đường thẳng đó.

b) Quan sát *Hình 23b*, tìm hệ số góc của hai đường thẳng $y = x$ và $y = -x + 1$ và nêu vị trí tương đối của hai đường thẳng đó.





Hình 23

Định lí sau cho ta cách nhận biết vị trí tương đối của hai đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*:

Cho hai đường thẳng d: $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và d': $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$.

a) Nếu d song song với d' thì $a = a'$, $b \neq b'$. Ngược lại, nếu $a = a'$, $b \neq b'$ thì d song song với d'.

b) Nếu d trùng với d' thì $a = a'$, $b = b'$. Ngược lại, nếu $a = a'$, $b = b'$ thì d trùng với d'.

c) Nếu d và d' cắt nhau thì $a \neq a'$. Ngược lại, nếu $a \neq a'$ thì d và d' cắt nhau.

Ví dụ 6 Chỉ ra các cặp đường thẳng cắt nhau và các cặp đường thẳng song song trong ba đường thẳng sau: $y = 2x + 1$; $y = 2x + 3$; $y = 3x - 1$.

4 Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $y = -5x$ và $y = -5x + 2$.

Giải

• Hai đường thẳng $y = 2x + 1$; $y = 2x + 3$ có hệ số góc bằng nhau và hệ số tự do khác nhau nên hai đường thẳng đó song song.

• Hai đường thẳng $y = 2x + 1$; $y = 3x - 1$ có hệ số góc khác nhau nên hai đường thẳng đó cắt nhau.

• Hai đường thẳng $y = 2x + 3$; $y = 3x - 1$ có hệ số góc khác nhau nên hai đường thẳng đó cắt nhau.

BÀI TẬP

1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai về đường thẳng d là đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$?

a) Đường thẳng d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\dfrac{b}{a}$.

b) Đường thẳng d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng b.

c) Đường thẳng d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b.

d) Đường thẳng d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $-\dfrac{b}{a}$.

2. Chỉ ra các cặp đường thẳng cắt nhau và các cặp đường thẳng song song trong số các đường thẳng sau: $y = -2x + 5$; $y = -2x$; $y = 4x - 1$.

3. Vẽ đồ thị của các hàm số $y = 3x$; $y = 3x + 4$; $y = -\dfrac{1}{2}x$; $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

4. Xác định đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ có hệ số góc bằng -1 và đi qua điểm $M(1\ ;2)$. Sau đó vẽ đường thẳng tìm được trên mặt phẳng toạ độ.

5. a) Vẽ đường thẳng $y = 2x - 1$ trong mặt phẳng toạ độ.

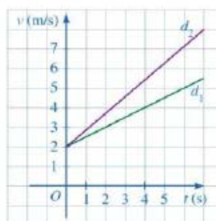
b) Xác định đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ đi qua điểm $M(1\ ;3)$ và song song với đường thẳng $y = 2x - 1$. Sau đó vẽ đường thẳng tìm được trên mặt phẳng toạ độ.

6. Một phần đường thẳng d_1, d_2 ở *Hình 24* lần lượt biểu thị tốc độ (đơn vị: m/s) của vật thứ nhất, vật thứ hai theo thời gian t (s).

a) Nêu nhận xét về tung độ giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2. Từ đó, nêu nhận xét về tốc độ ban đầu của hai chuyển động.

b) Trong hai đường thẳng d_1, d_2, đường thẳng nào có hệ số góc lớn hơn?

c) Từ giây thứ nhất trở đi, vật nào có tốc độ lớn hơn? Vì sao?



Hình 24

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai về hai đường thẳng

$$d: y = ax + b\ (a \neq 0) \text{ và } d': y = a'x + b'\ (a' \neq 0)?$$

a) Nếu hai đường thẳng d và d' song song với nhau thì $a = a'$, $b \neq b'$.

b) Nếu hai đường thẳng d và d' song song với nhau thì $a = a'$, $b = b'$.

c) Nếu hai đường thẳng d và d' cắt nhau thì $a \neq a'$.

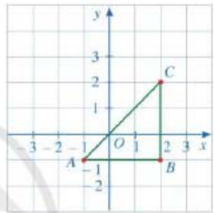
d) Nếu hai đường thẳng d và d' cắt nhau thì $a \neq a'$, $b \neq b'$.

2. Cho tam giác ABC như *Hình 25*.

a) Xác định toạ độ các điểm A, B, C.

b) Tam giác ABC có là tam giác vuông cân hay không?

c) Gọi D là điểm để tứ giác $ABCD$ là hình vuông. Xác định toạ độ điểm D.



Hình 25

3. Càng lên cao không khí càng loãng nên áp suất khí quyển càng giảm. Chẳng hạn, các khu vực của Thành phố Hồ Chí Minh đều có độ cao sát mực nước biển nên có áp suất khí quyển là $p = 760$ mmHg; thành phố Puebla (Mexico) có độ cao $h = 2\,200$ m so với mực nước biển nên có áp suất khí quyển là $p = 550{,}4$ mmHg. Người ta ước lượng được áp suất khí quyển p (mmHg) tương ứng với độ cao h (m) so với mực nước biển là một hàm số bậc nhất có dạng $p = ah + b$ $(a \neq 0)$.

a) Xác định hàm số bậc nhất đó.

b) Cao nguyên Lâm Đồng có độ cao 650 m so với mực nước biển thì áp suất khí quyển là bao nhiêu mmHg (làm tròn đến hàng phần mười)?

4. Cho hai hàm số $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$; $y = 2x - 2$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số đó trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của hai đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$; $y = 2x - 2$ với trục hoành và C là giao điểm của hai đường thẳng đó. Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC (đơn vị đo trên các trục toạ độ là centimét).

5. a) Biết rằng với $x = 3$ thì hàm số $y = 2x + b$ có giá trị là 11. Tìm b và vẽ đồ thị của hàm số với giá trị b vừa tìm được.

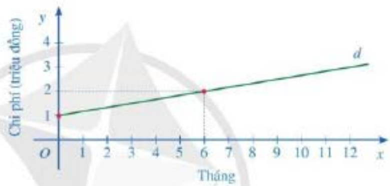
b) Biết rằng đồ thị của hàm số $y = ax + 6$ đi qua điểm $A(-2; 2)$. Tìm a và vẽ đồ thị của hàm số với giá trị a vừa tìm được.

6. Tìm hàm số bậc nhất $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đồ thị của hàm số đó đi qua điểm $M(1; 3)$ và có hệ số góc bằng -2;

b) Đồ thị của hàm số đó đi qua điểm $N(-1; 4)$ và song song với đường thẳng $y = -3x - 1$.

7. Để sử dụng dịch vụ truyền hình cáp, người dùng phải trả một khoản phí ban đầu và phí thuê bao hằng tháng. Một phần đường thẳng d ở *Hình 26* biểu thị tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) để sử dụng dịch vụ truyền hình cáp theo thời gian sử dụng của một gia đình (đơn vị: tháng).



Hình 26

a) Tìm hàm số bậc nhất sao cho đồ thị của hàm số là đường thẳng d.

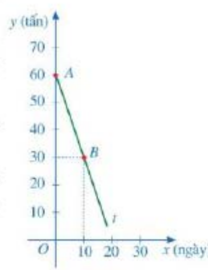
b) Giao điểm của đường thẳng d với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì?

c) Tính tổng chi phí mà gia đình đó phải trả khi sử dụng dịch vụ truyền hình cáp với thời gian 12 tháng.

8. Một kho chứa 60 tấn xi măng, mỗi ngày đều xuất đi m (tấn) với $0 < m < 60$. Gọi y (tấn) là khối lượng xi măng còn lại trong kho sau x ngày xuất hàng.

a) Chứng tỏ rằng y là hàm số bậc nhất của biến x, tức là $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

b) Trong *Hình 27*, tia At là một phần đường thẳng $y = ax + b$. Tìm a, b. Từ đó hãy cho biết trong kho còn lại bao nhiêu tấn xi măng sau 15 ngày.



Hình 27

Chương IV

HÌNH HỌC TRỰC QUAN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: hình chóp tam giác đều; hình chóp tứ giác đều.

§1. HÌNH CHÓP TAM GIÁC ĐỀU

Trong thực tiễn, ta thường gặp những vật thể có dạng như ở *Hình 1*.

a) Khung gỗ *b) Rubik* *c) Bộ nam châm xếp hình* *d) Chóp inox trên đỉnh núi Fansipan (Việt Nam)*
(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 1

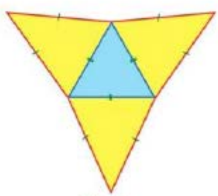
Những hình khối có dạng như ở Hình 1 thường được gọi là hình gì?

I. HÌNH CHÓP TAM GIÁC ĐỀU

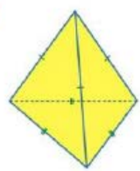
1 Thực hiện các hoạt động sau:

a) Vẽ trên giấy (hay bìa mỏng) 4 hình tam giác với các cạnh và vị trí như ở *Hình 2*;

b) Cắt rời theo đường viền (màu đỏ), của hình vừa vẽ (phần tô màu) và gấp lại để được *hình chóp tam giác đều* như ở *Hình 3*;



Hình 2

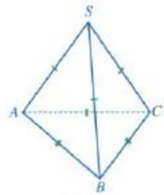


Hình 3

c) Quan sát hình chóp tam giác đều ở *Hình 3* và nêu số mặt, số cạnh của hình chóp tam giác đều đó.

Nhận xét: Hình chóp tam giác đều có 4 mặt, 6 cạnh.

2 Quan sát hình chóp tam giác đều ở *Hình 4* và đọc tên các mặt, các cạnh, đỉnh của hình chóp tam giác đều đó.



Hình 4

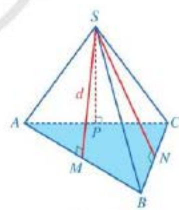
Nhận xét: Ở *Hình 4*, ta có:

- Hình chóp tam giác đều $S.ABC$;
- Mặt đáy ABC là một tam giác đều;
- Các mặt bên SAB, SBC, SCA là những tam giác cân tại S;
- Các cạnh đáy AB, BC, CA bằng nhau;
- Các cạnh bên SA, SB, SC bằng nhau;
- S gọi là *đỉnh* của hình chóp tam giác đều $S.ABC$.

II. DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH CHÓP TAM GIÁC ĐỀU

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Tổng diện tích của các tam giác (mặt bên) SAB, SBC, SCA gọi là diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều $S.ABC$.

Gọi SM, SN, SP lần lượt là đường cao của các tam giác SAB, SBC, SCA (*Hình 5*). Mỗi đoạn thẳng SM, SN, SP đều được gọi là trung đoạn của hình chóp tam giác đều $S.ABC$.



Hình 5

> Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều bằng nửa tích của chu vi đáy với độ dài trung đoạn.

Tức là:

$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \,.\, d$, trong đó S_{xq} là diện tích xung quanh, C là chu vi đáy, d là độ dài trung đoạn của hình chóp tam giác đều.

Ví dụ 1 Cho một hình chóp tam giác đều có độ dài cạnh đáy bằng 5 cm và độ dài trung đoạn bằng 8 cm. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều đó.

Giải

Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều đó là:

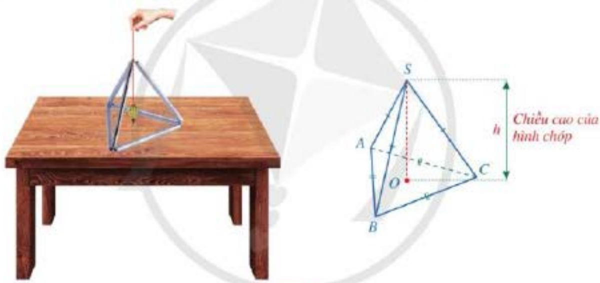
$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot (5 . 3) . 8 = 60 \ (\text{cm}^2).$$

Cho một hình chóp tam giác đều có độ dài cạnh đáy bằng 8 cm và độ dài trung đoạn bằng 10 cm. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều đó.

III. THỂ TÍCH CỦA HÌNH CHÓP TAM GIÁC ĐỀU

Xét mô hình của hình chóp tam giác đều *S.ABC* như ở *Hình 6*. Thả dây dọi từ đỉnh *S* của hình chóp đó sao cho quả dọi chạm mặt đáy của hình chóp tại điểm *O*.

Ta gọi độ dài đoạn thẳng *SO* là chiều cao của hình chóp tam giác đều *S.ABC*.



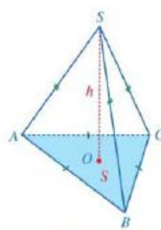
Hình 6

Ta có thể tính được thể tích của hình chóp tam giác đều khi biết diện tích đáy và chiều cao.

Thể tích của hình chóp tam giác đều bằng một phần ba tích của diện tích đáy với chiều cao.

Tức là:

$V = \frac{1}{3} \cdot S . h$, trong đó V là thể tích, S là diện tích đáy, h là chiều cao của hình chóp tam giác đều (*Hình 7*).



Hình 7

Ví dụ 2 Một khối rubik có dạng hình chóp tam giác đều với diện tích đáy khoảng 22,45 cm^2 và chiều cao khoảng 5,88 cm (*Hình 8*). Tính thể tích của khối rubik đó.

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 8

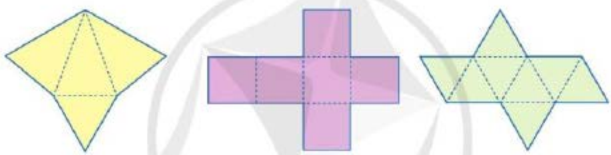
Giải

Thể tích của khối rubik đó là:

$$V \approx \frac{1}{3} \cdot 22,45 \,.\, 5,88 = 44,002 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

BÀI TẬP

1. Trong các miếng bìa ở hình *9a*, *9b*, *9c*, miếng bìa nào có thể gấp lại (theo các nét đứt) để được hình chóp tam giác đều?



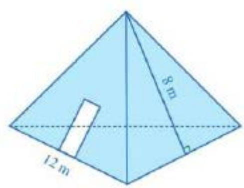
a) *b)* *c)*

Hình 9

2. Cho hình chóp tam giác đều *P.QRS* có độ dài cạnh đáy bằng 4 cm và độ dài trung đoạn bằng 10 cm. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều đó.

3. Cho một hình chóp tam giác đều có diện tích đáy là 15 cm^2 và chiều cao là 8 cm. Tính thể tích của hình chóp tam giác đều đó.

4. Một kho chứa có dạng hình chóp tam giác đều với độ dài cạnh đáy khoảng 12 m và độ dài trung đoạn khoảng 8 m (*Hình 10*). Người ta muốn sơn phủ bên ngoài cả ba mặt xung quanh của kho chứa đó và không sơn phủ phần làm cửa có diện tích là 5 m^2. Biết rằng cứ mỗi mét vuông sơn cần trả 30 000 đồng. Cần phải trả bao nhiêu tiền để hoàn thành việc sơn phủ đó?



Hình 10

§2. HÌNH CHÓP TỨ GIÁC ĐỀU

Trong thực tiễn ta thường gặp những vật thể có dạng như ở *Hình 11*.

a) Kim tự tháp Ai Cập *b) Kim tự tháp kính Louvre* *c) Hộp đựng bánh ít*
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 11

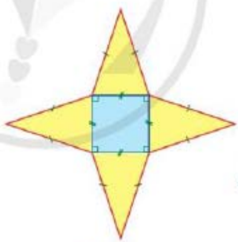
Những hình khối có dạng như ở Hình 11 được gọi là hình gì?

I. HÌNH CHÓP TỨ GIÁC ĐỀU

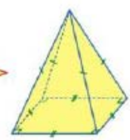
1 Thực hiện các hoạt động sau:

a) Vẽ trên giấy (hay bìa mỏng) 1 hình vuông và 4 hình tam giác với các cạnh và vị trí như ở *Hình 12*;

b) Cắt rời theo đường viền (màu đỏ) của hình vừa vẽ (phần tô màu) và gấp lại để được *hình chóp tứ giác đều* như ở *Hình 13*;



Hình 12



Hình 13

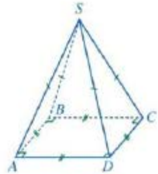
c) Quan sát hình chóp tứ giác đều ở *Hình 13* và nêu số mặt, số cạnh của hình chóp tứ giác đều đó.

Nhận xét: Hình chóp tứ giác đều có 5 mặt, 8 cạnh.

2 Quan sát hình chóp tứ giác đều ở *Hình 14* và đọc tên các mặt, các cạnh, đỉnh của hình chóp tứ giác đều đó.

Nhận xét: Ở *Hình 14*, ta có:

- Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$;
- Mặt đáy $ABCD$ là một hình vuông;
- Các mặt bên SAB, SBC, SCD, SDA là những tam giác cân tại S;
- Các cạnh đáy AB, BC, CD, DA bằng nhau;
- Các cạnh bên SA, SB, SC, SD bằng nhau;
- S gọi là *đỉnh* của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

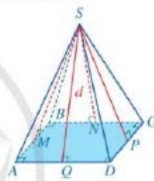


Hình 14

II. DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH CHÓP TỨ GIÁC ĐỀU

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tổng diện tích của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA gọi là diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

Gọi SM, SN, SP, SQ lần lượt là đường cao của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA (*Hình 15*). Mỗi đoạn thẳng SM, SN, SP, SQ đều được gọi là trung đoạn của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.



Hình 15

Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều bằng nửa tích của chu vi đáy với độ dài trung đoạn.

Tức là:

$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \,.\, d$, trong đó S_{xq} là diện tích xung quanh, C là chu vi đáy, d là độ dài trung đoạn của hình chóp tứ giác đều.

Ví dụ 1 Cho một hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng 6 cm và độ dài trung đoạn bằng 7 cm. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều đó.

Giải

Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều đó là:

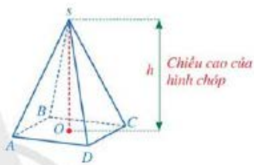
$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot (6 \,.\, 4) \,.\, 7 = 84 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Cho một hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng 10 cm và độ dài trung đoạn bằng 15 cm. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều đó.

III. THỂ TÍCH CỦA HÌNH CHÓP TỨ GIÁC ĐỀU

Xét mô hình của hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* như ở *Hình 16*. Thả dây dọi từ đỉnh *S* của hình chóp đó sao cho quả dọi chạm mặt đáy của hình chóp tại điểm *O*.

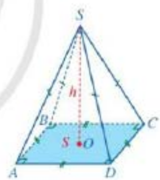
Ta gọi độ dài đoạn thẳng *SO* là chiều cao của hình chóp tứ giác đều *S.ABCD*.

Hình 16

Ta có thể tính được thể tích của hình chóp tứ giác đều khi biết diện tích đáy và chiều cao.

> Thể tích của hình chóp tứ giác đều bằng một phần ba tích của diện tích đáy với chiều cao.



Hình 17

Tức là:

$V = \frac{1}{3} \cdot S \, . \, h$, trong đó V là thể tích, S là diện tích đáy, h là chiều cao của hình chóp tứ giác đều (*Hình 17*).

Ví dụ 2 Một hộp quà lưu niệm có dạng hình chóp tứ giác đều, với độ dài cạnh đáy là 8 cm và chiều cao 9 cm (*Hình 18*). Tính thể tích của hộp quà lưu niệm đó.

(Nguồn: https://shutterstock.com)
Hình 18

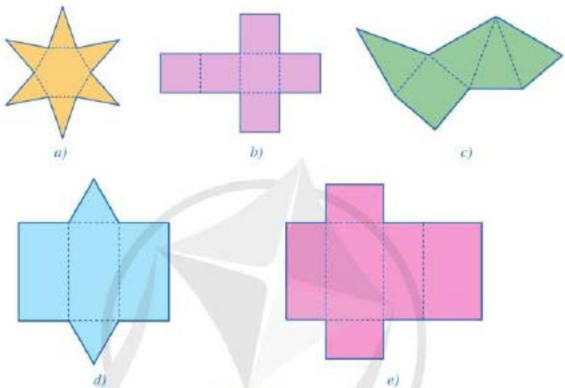
Giải

Thể tích của hộp quà lưu niệm đó là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \, . \, 9 = 192 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

BÀI TẬP

1. Trong các miếng bìa ở hình *19a*, *19b*, *19c*, *19d*, *19e*, miếng bìa nào có thể gấp lại (theo các nét đứt) để được hình chóp tứ giác đều?



Hình 19

2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng 7 cm và độ dài trung đoạn bằng 10 cm. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều đó.

3. Cho một hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy là 15 cm và chiều cao là 8 cm. Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều đó.

4. Một mái che giếng trời có dạng hình chóp tứ giác đều với độ dài cạnh đáy khoảng 2,2 m và độ dài trung đoạn khoảng 2,8 m (*Hình 20*). Cần phải trả bao nhiêu tiền để làm mái che giếng trời đó? Biết rằng giá để làm mỗi mét vuông mái che được tính là 1 800 000 đồng (bao gồm tiền vật liệu và tiền công).

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

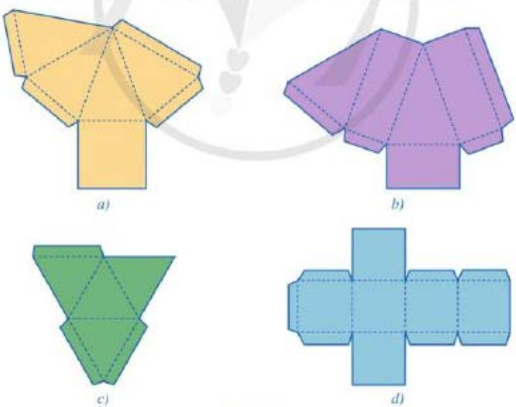
Hình 20

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

1. Quan sát các *Hình 4, Hình 14* và tìm số thích hợp cho ? trong bảng sau:

	Hình chóp tam giác đều	Hình chóp tứ giác đều
Số mặt	?	?
Số cạnh	?	?
Số mặt bên	?	?
Số mặt đáy	?	?
Số cạnh bên	?	?
Số cạnh đáy	?	?

2. Trong các miếng bìa ở hình *21a*, *21b*, 21*c*, *21d*, miếng bìa nào có thể gấp (theo các nét đứt) và dán lại để được hình chóp tam giác đều? Hình chóp tứ giác đều?

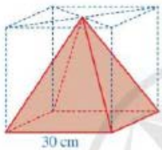


Hình 21

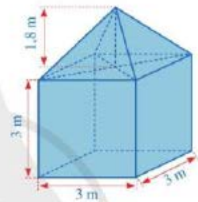
3. Cho một hình chóp tam giác đều có độ dài cạnh đáy là 20 cm và độ dài trung đoạn là 30 cm. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều đó.

4. Cho một hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy là 10 cm và độ dài trung đoạn là 13 cm. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều đó.

5. *Hình 22* mô tả một vật thể có dạng hình chóp tứ giác đều được tạo ra sau khi cắt bỏ một phần từ một khúc gỗ có dạng hình lập phương với cạnh là 30 cm. Tính thể tích của phần khúc gỗ đã bị cắt bỏ.



Hình 22



Hình 23

6. *Hình 23* mô tả một lều trại gồm hai phần: phần dưới có dạng hình lập phương với cạnh là 3 m; phần trên có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là 1,8 m. Tính thể tích của lều trại đó.

CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

Kim tự tháp

Kim tự tháp là các công trình cổ đại có dạng hình chóp tứ giác đều bằng đá ở Ai Cập (*Hình 24*). Hầu hết các kim tự tháp đóng vai trò là lăng mộ cho các Pharaon và hoàng hậu trong hai thời kì Cổ vương quốc và Trung vương quốc. Đến nay có khoảng 138 kim tự tháp đã được khám phá ở Ai Cập. Những kim tự tháp Ai Cập nổi tiếng nhất nằm ở Giza, ngoại ô Cairo. Trong đó, Djoser là kim tự tháp lâu đời nhất, được xây dựng khoảng năm 2630 – 2611 trước Công nguyên; Khufu là kim tự tháp Ai Cập lớn nhất ở Giza và là kì quan thế giới cổ đại duy nhất còn đến ngày nay.

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 24

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Chủ đề 2
THỰC HÀNH TẠO DỰNG HOLOGRAM

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Giới thiệu về mô hình Hologram

Hologram (hay *Holography* trong tiếng Anh) là một sản phẩm của kĩ thuật ghi lại hình ảnh vật thể trong không gian 3 chiều (3D) lên môi trường không gian 2 chiều (2D) và từ môi trường 2D này có thể phát lại hình ảnh 3D của vật thể đó.

Từ "Holography" có nguồn gốc từ hai từ "holos" và "graph" trong tiếng Hy Lạp, trong đó "holos" có ý nghĩa là toàn bộ (hay toàn cục) còn "graph" có nghĩa là sự ghi lại.

Ta có thể hiểu Hologram là việc bố trí vị trí của các chi tiết trong một bức ảnh phẳng (2D) để khi có ánh sáng chiếu vào một cách thích hợp, bức ảnh sẽ nổi lên như một ảnh 3 chiều (3D) có chiều sâu. Ưu điểm nổi bật của Hologram là ta có thể nhìn được hình ảnh phản chiếu của một vật thể ở mọi góc độ, cảm giác như vật thể đang thực sự hiện hữu mặc dù ta không thể chạm, cầm, nắm được nó.

Ta có thể thấy rõ điều đó qua quan sát một số hình ảnh ở *Hình 1*.

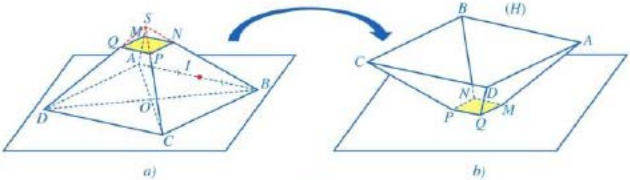
(Ảnh: Phạm Sỹ Nam)

Hình 1

2. Một mô hình 3 chiều mô tả nguyên lí hoạt động của hologram

Giả sử ta có một hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ làm bằng vật liệu trong suốt (như thuỷ tinh, nhựa trong suốt, ...) sao cho $SO = OI$, trong đó O là tâm của mặt đáy $ABCD$ và I là trung điểm của cạnh đáy AB. Trên các cạnh bên SA, SB, SC, SD, ta lần lượt lấy các điểm

M, N, P, Q sao cho $SM = SN = SP = SQ$. Cắt đi phần hình chóp $S.MNPQ$ (*Hình 2a*) và lật ngược phần còn lại của hình chóp để được vật thể kí hiệu là (H). Mỗi mặt $ABNM$, $BCPN$, $CDQP$, $DAMQ$ của vật thể (H) là một hình thang cân (*Hình 2b*).



Hình 2

Ta đặt màn hình tinh thể lỏng LCD (Liquid Crystal Display) của điện thoại di động hoặc ti vi phía dưới vật thể (H) đó.

Khi hình ảnh (2D) xuất hiện trên màn hình LCD, ánh sáng từ màn hình LCD chiếu tới vật thể (H) và bị vật thể (H) phản xạ lại theo một góc đúng bằng góc mà tia sáng đi tới (nguyên lí phản xạ ánh sáng). Ngoài bị phản xạ, ánh sáng còn bị "bẻ gãy" đi vào trong vật thể (H) và tạo nên ảnh ảo. Mắt của chúng ta thực chất "nhìn thấy" ảnh ảo đó (hiện tượng khúc xạ ánh sáng) (*Hình 3*).

Hình 3

Hình ảnh xuất hiện trên màn hình LCD là hình ảnh (2D), nhưng ảnh ảo mà mắt ta cảm nhận được lại là hình ảnh (3D). Đây chính là nguyên lí tạo ra Hologram dựa trên vật thể 3 chiều.

3. Ứng dụng mô hình Hologram trong dạy học

Vận dụng mô hình Hologram vào dạy học hình học sẽ giúp học sinh: tiếp cận được kiến thức về các hình hình học một cách "tự nhiên" hơn; hiểu rõ hơn về bản chất của các hình

hình học; tạo cơ hội để học sinh phát triển kĩ năng quan sát, nhận biết các tính chất hình học; tạo hứng thú trong học tập môn Toán.

Chẳng hạn, ta có thể thấy hình ảnh sau đây về hình hộp chữ nhật (*Hình 4a*), hình lập phương (*Hình 4b*), hình lăng trụ đứng tam giác (*Hình 4c*).

a) Hình ảnh hình hộp chữ nhật

b) Hình ảnh hình lập phương

c) Hình ảnh lăng trụ đứng tam giác

Hình 4

II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG HỌC TẬP

1 Tạo dựng mô hình Hologram.

a) Phần chuẩn bị

– Giáo viên chia lớp thành các nhóm học sinh (mỗi nhóm khoảng 4 – 6 học sinh) và cử nhóm trưởng của mỗi nhóm.

– Mỗi nhóm học sinh chuẩn bị bìa nhựa hoặc tấm mica trong suốt, kéo, thước kẻ, giấy A4, băng keo trong hoặc keo dán.

b) Phần thực hiện

Bước 1. Vẽ một hình thang cân trên tờ giấy A4 với đáy lớn 6 cm, đáy nhỏ 1 cm, đường cao 3,5 cm (nếu sử dụng điện thoại) hoặc đáy lớn 18 cm, đáy nhỏ 3 cm, đường cao 10,5 cm (nếu sử dụng máy tính bảng) rồi dùng kéo cắt hình thang cân đó

Bước 2. Đặt hình thang cân vừa cắt ra lên miếng bìa nhựa (hoặc tấm mica) rồi cắt ra bốn hình thang cân trong suốt

Bước 3. Dùng băng keo trong (hoặc keo dán) để dán các cạnh bên của các hình thang cân với nhau tạo ra vật thể có hình dạng tương tự vật thể (*H*) trong *Hình 2b*.

2 Thực hành sử dụng Hologram

Bước 1. Sử dụng điện thoại di động hoặc máy tính bảng để tìm kiếm các video trình chiếu Hologram trên Internet

Bước 2. Đặt công cụ trình chiếu đã hoàn thành trên màn hình điện thoại di động hoặc máy tính bảng, tắt đèn, bật video và quan sát hình ảnh.

3 Tổng kết

a) Nhiệm vụ 1: Các nhóm báo cáo kết quả (mô hình Hologram đã tạo dựng được, các video trình chiếu Hologram, hình ảnh quan sát được trong thực tế).

b) Nhiệm vụ 2: Dựa trên báo cáo của mỗi nhóm, cả lớp góp ý cho hoạt động của mỗi nhóm.

c) Nhiệm vụ 3: Tổng kết và rút kinh nghiệm.

III. ĐÁNH GIÁ

Hình thức đánh giá: đánh giá trong dạy học dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

– Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.

– Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

– Nhóm tự đánh giá lại hoạt động của nhóm và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.

– Giáo viên và các nhóm đánh giá, rồi cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

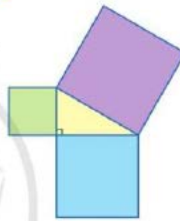
Chương V

TAM GIÁC. TỨ GIÁC

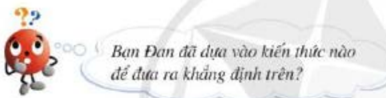
Trong chương này chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: định lí Pythagore; tứ giác; tính chất và dấu hiệu nhận biết tứ giác đặc biệt (hình thang cân, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông).

§1. ĐỊNH LÍ PYTHAGORE

Quan sát *Hình 1*, bạn Đan khẳng định rằng: Diện tích của hình vuông lớn nhất bằng tổng diện tích của hai hình vuông còn lại.



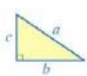
Hình 1



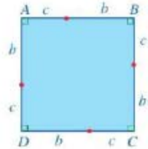
I. ĐỊNH LÍ PYTHAGORE

1 Thực hiện các hoạt động sau:

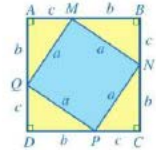
a) Vẽ và cắt giấy để có 4 hình tam giác vuông như nhau với độ dài cạnh huyền là a, độ dài hai cạnh góc vuông là b và c, trong đó a, b, c có cùng đơn vị độ dài (*Hình 2*).



Hình 2



Hình 3



Hình 4

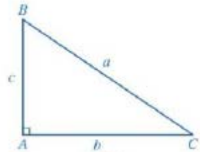
b) Vẽ hình vuông $ABCD$ có cạnh là $b + c$ như *Hình 3*. Đặt 4 hình tam giác vuông đã cắt ở câu a lên hình vuông $ABCD$ vừa vẽ, phần chưa bị che đi là hình vuông $MNPQ$ với độ dài cạnh là a (*Hình 4*).

c) Gọi S_1 là diện tích của hình vuông $ABCD$. Gọi S_2 là tổng diện tích của hình vuông $MNPQ$ và diện tích của 4 tam giác vuông AQM, BMN, CNP, DPQ. So sánh S_1 và S_2.

d) Dựa vào kết quả ở câu c, dự đoán mối liên hệ giữa a^2 và $b^2 + c^2$.

Định lí Pythagore:

> Trong một tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.



Hình 5

Chẳng hạn, với tam giác ABC vuông tại A (*Hình 5*), ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ hay $a^2 = b^2 + c^2$ (với $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$).

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5$ cm và $AC = 12$ cm. Tính độ dài của cạnh BC.

Giải

Do tam giác ABC vuông tại A nên theo định lí Pythagore ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Suy ra $BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.

Do đó $BC = \sqrt{169} = 13$ (cm).

> **1** Tính độ dài đường chéo của hình vuông có độ dài cạnh là a.

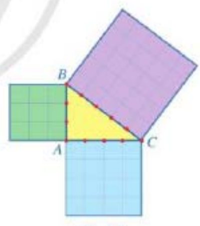
II. ĐỊNH LÍ PYTHAGORE ĐẢO

2 Thực hiện các hoạt động sau:

a) Vẽ một tam giác ABC có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm và $BC = 5$ cm;

b) Tính và so sánh diện tích của hình vuông có cạnh BC với tổng diện tích của hai hình vuông tương ứng có cạnh AB và AC (*Hình 6*);

c) Kiểm tra xem góc A của tam giác ABC có phải là góc vuông hay không.



Hình 6

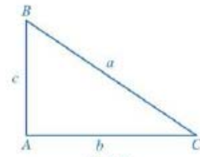
Định lí Pythagore đảo:

> Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng bình phương của hai cạnh còn lại thì tam giác đó là tam giác vuông.

Chẳng hạn, với tam giác ABC (*Hình 7*), nếu

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ hay } a^2 = b^2 + c^2$$

(với $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$) thì tam giác ABC vuông tại A.



Hình 7

Ví dụ 2 Cho tam giác DEG có $DE = 7$ cm, $DG = 24$ cm và $EG = 25$ cm. Tam giác DEG có phải là tam giác vuông hay không?

Giải

Xét tam giác DEG, ta có: $EG^2 = 25^2 = 625$ (cm^2)

và $DE^2 + DG^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$ (cm^2).

Suy ra $EG^2 = DE^2 + DG^2$.

Do đó tam giác DEG vuông tại D (theo định lí Pythagore đảo).

2 Tam giác có ba cạnh là 20 cm, 21 cm, 29 cm có phải là tam giác vuông hay không?

Ví dụ 3 *Hình 8* mô tả một cánh buồm có dạng tam giác vuông, được buộc vào cột buồm thẳng đứng, với độ dài hai cạnh góc vuông là 12 m và 5 m. Tính chu vi và diện tích của cánh buồm đó.

Giải

Do cánh buồm có dạng tam giác vuông với độ dài hai cạnh góc vuông là 12 m, 5 m nên theo định lí Pythagore ta có độ dài cạnh huyền của cánh buồm đó là:

$$\sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ (m)}.$$

Chu vi của cánh buồm đó là: $12 + 5 + 13 = 30$ (m).

Diện tích của cánh buồm đó là: $\dfrac{5 \cdot 12}{2} = 30$ (m^2).

Hình 8

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm độ dài cạnh còn lại trong mỗi trường hợp sau:

a) $AB = 8$ cm, $BC = 17$ cm;

b) $AB = 20$ cm, $AC = 21$ cm;

c) $AB = AC = 6$ cm.

2. Tam giác có độ dài ba cạnh trong mỗi trường hợp sau có phải là tam giác vuông hay không?

a) 12 cm, 35 cm, 37 cm; b) 10 cm, 7 cm, 8 cm; c) 11 cm, 6 cm, 7 cm.

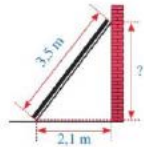
3. Cho tam giác vuông cân có độ dài cạnh góc vuông bằng 1 dm. Tính độ dài cạnh huyền của tam giác đó.

4. Cho một tam giác đều cạnh a.

a) Tính độ dài đường cao của tam giác đó theo a.

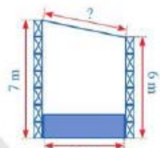
b) Tính diện tích của tam giác đó theo a.

5. *Hình 9* mô tả một thanh gỗ dài 3,5 m dựa vào một bức tường thẳng đứng. Chân thanh gỗ cách mép tường một khoảng là 2,1 m. Khoảng cách từ điểm thanh gỗ chạm vào tường đến mặt đất là bao nhiêu mét?



Hình 9

6. *Hình 10* mô tả mặt cắt đứng của một sân khấu ngoài trời có mái che. Chiều cao của khung phía trước khoảng 7 m, chiều cao của khung phía sau là 6 m, hai khung cách nhau một khoảng là 5 m. Chiều dài của mái che sân khấu đó là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 10

CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

1. Nguồn gốc tên gọi *Định lí Pythagore*

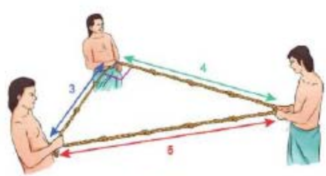
Theo lịch sử, dù mối liên hệ giữa tổng bình phương các cạnh của tam giác vuông đã được biết khá lâu nhưng định lí vẫn được đặt theo tên của người đầu tiên chứng minh được nó, là nhà toán học Hy Lạp Pythagore (tiếng Hy Lạp là Pythagoras). Có rất nhiều cách để chứng minh định lí Pythagore, bao gồm cả chứng minh bằng hình học lẫn đại số, mà một số cách được biết đến từ hàng nghìn năm trước.

Pythagore
(570 – 495 trước Công nguyên)
(Nguồn: https://shutterstock.com)

2. Cách tạo ra góc vuông của người Ai Cập cổ đại

Người Ai Cập cổ đại tạo ra góc vuông bằng cách dùng một chiếc dây tạo thành các nút để có 12 đoạn bằng nhau. Theo đó sẽ có ba người, mỗi người giữ chặt nút của sợi dây để tạo thành hình tam giác có độ dài các cạnh lần lượt là 3, 4 và 5 khoảng. Khi đó, góc tạo bởi hai đoạn dây có 3 khoảng và 4 khoảng sẽ là góc vuông (*Hình 11*).

(Nguồn: https://wowstem.org)



Hình 11

§2. TỨ GIÁC

Hình ảnh thửa ruộng nhìn từ trên cao hay hình ảnh cánh diều (*Hình 12*) gợi lên những hình tứ giác.

a) Thửa ruộng

b) Cánh diều

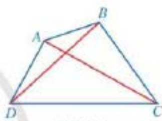
(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 12

I. TỨ GIÁC

1. Nhận biết tứ giác

1 Quan sát tứ giác *ABCD* ở *Hình 13* và đọc tên các cạnh, các đường chéo, các đỉnh, các góc của tứ giác đó.



Hình 13

Ở *Hình 13*, ta có:

- Tứ giác *ABCD*;
- Các cạnh: *AB*, *BC*, *CD*, *DA*;
- Các cặp cạnh đối: *AB* và *CD*, *BC* và *DA*;
- Các đường chéo: *AC*, *BD*;
- Các đỉnh: *A*, *B*, *C*, *D*;
- Các góc: $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDA}$;
- Các cặp góc đối: $\widehat{DAB}$ và $\widehat{BCD}$, $\widehat{ABC}$ và $\widehat{CDA}$.

Trong tứ giác *ABCD*:

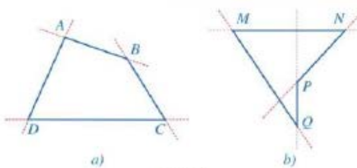
- Hai cạnh kề nhau (chẳng hạn: *AB*, *BC*) không cùng thuộc một đường thẳng;
- Không có ba đỉnh nào thẳng hàng;
- Có thể đọc tên góc theo tên đỉnh, chẳng hạn, góc *ABC* còn gọi là góc *B* và góc đó còn gọi là *góc trong* của tứ giác.

Nhận xét

Tứ giác có 4 cạnh, 2 đường chéo, 4 đỉnh và 4 góc.

2. Nhận biết tứ giác lồi

2 Quan sát các hình *14a*, *14b* và nêu nhận xét về vị trí của mỗi tứ giác so với đường thẳng chứa một cạnh bất kì của tứ giác đó.



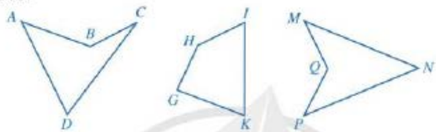
a) *b)*

Hình 14

Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của tứ giác đó.

Chẳng hạn, tứ giác $ABCD$ ở *Hình 14a* là tứ giác lồi, còn tứ giác $MNPQ$ ở *Hình 14b* không phải là tứ giác lồi.

Ví dụ 1 Quan sát *Hình 15*, tứ giác nào là tứ giác lồi? Đọc tên các cạnh, các đỉnh, các góc của tứ giác lồi đó.



Hình 15

Giải

Trong ba tứ giác ở *Hình 15*, chỉ có tứ giác $GHIK$ luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của tứ giác đó nên tứ giác $GHIK$ là tứ giác lồi.

Tứ giác $GHIK$ có các cạnh là: GH, HI, IK, KG; các đỉnh là: G, H, I, K; các góc là: $\widehat{G}$, $\widehat{H}$, $\widehat{I}$, $\widehat{K}$.

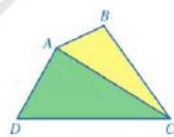
Quy ước: Từ nay về sau, khi nói về tứ giác mà không chú thích gì thêm thì ta hiểu đó là tứ giác lồi.

II. TỔNG CÁC GÓC CỦA MỘT TỨ GIÁC

3 Quan sát tứ giác $ABCD$ ở *Hình 16*, đường chéo AC chia nó thành hai tam giác ABC và ACD.

a) Gọi T_1 và T_2 lần lượt là tổng các góc của tam giác ABC và tam giác ACD. Tổng $T_1 + T_2$ bằng bao nhiêu độ?

b) Gọi T là tổng các góc của tứ giác $ABCD$. So sánh T với $T_1 + T_2$.



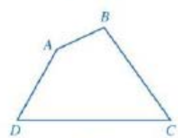
Hình 16

Ta có định lí:

Tổng các góc của một tứ giác là 360°.

Chẳng hạn, với tứ giác $ABCD$ (*Hình 17*) ta có:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ.$$



Hình 17

Ví dụ 2 Tứ giác $MNPQ$ có số đo của $\widehat{M}$, $\widehat{N}$, $\widehat{P}$, $\widehat{Q}$ lần lượt là x, $2x$, $3x$ và $4x$. Tính số đo mỗi góc của tứ giác $MNPQ$.

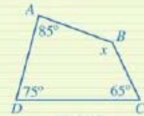
Giải

Trong tứ giác $MNPQ$, ta có $\widehat{M}+\widehat{N}+\widehat{P}+\widehat{Q}=360^\circ$.

Do đó: $x + 2x + 3x + 4x = 360^\circ$ hay $10x = 360^\circ$. Suy ra $x = 36^\circ$.

Vậy tứ giác $MNPQ$ có: $\widehat{M} = x = 36^\circ$; $\widehat{N} = 2x = 72^\circ$; $\widehat{P} = 3x = 108^\circ$; $\widehat{Q} = 4x = 144^\circ$.

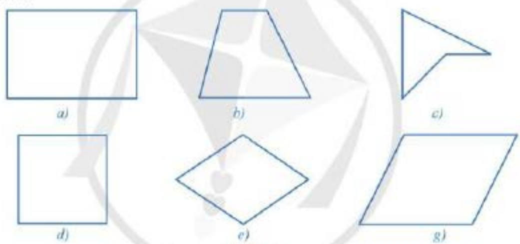
Tìm x trong *Hình 18*.



Hình 18

BÀI TẬP

1. Trong các tứ giác ở hình *19a*, *19b*, *19c*, *19d*, *19e*, *19g*, tứ giác nào không phải là tứ giác lồi? Vì sao?



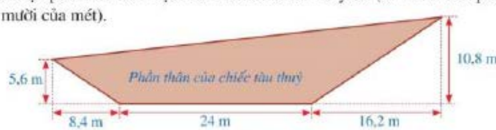
Hình 19

2. a) Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A}+\widehat{C}=180^\circ$ thì $\widehat{B}+\widehat{D}$ bằng bao nhiêu độ?

b) Có hay không một tứ giác có 2 góc tù và 2 góc vuông?

c) Có hay không một tứ giác có cả 4 góc đều là góc nhọn?

3. *Hình 20* mô tả mặt cắt dọc phần nổi trên mặt nước của một chiếc tàu thuỷ. Tính chu vi mặt cắt dọc phần nổi trên mặt nước của chiếc tàu thuỷ đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Hình 20

§3. HÌNH THANG CÂN

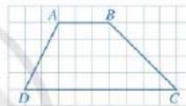
Khung cửa sổ
(Nguồn: https://shutterstock.com)
Hình 21

Ở lớp 6, phần ***Hình học trực quan***, chúng ta đã được làm quen với hình thang cân và những vật thể có dạng hình thang cân, chẳng hạn, khung cửa sổ có dạng hình thang cân (*Hình 21*).

Hình thang cân có những tính chất gì? Có những dấu hiệu nào để nhận biết một tứ giác là hình thang cân?

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Cho biết hai cạnh AB và CD của tứ giác $ABCD$ ở *Hình 22* có song song với nhau hay không.

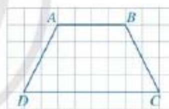


Hình 22

Ta có định nghĩa:

> *Hình thang* là tứ giác có hai cạnh đối song song.

2 Hai góc C và D cùng kề với đáy CD của hình thang $ABCD$ ở *Hình 23*. Cho biết hai góc C và D có bằng nhau hay không.



Hình 23

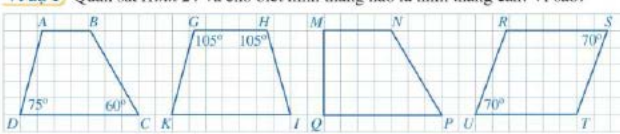
Ta có định nghĩa:

> *Hình thang cân* là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

Chẳng hạn, ở *Hình 23*, hình thang $ABCD$ là hình thang cân vì $\widehat{C} = \widehat{D}$.

Chú ý: Nếu $ABCD$ là hình thang cân (AB // CD) thì $\widehat{A} = \widehat{B}$ và $\widehat{C} = \widehat{D}$.

Ví dụ 1 Quan sát *Hình 24* và cho biết hình thang nào là hình thang cân. Vì sao?



Hình 24

Giải

Trong bốn hình thang ở *Hình 24*, chỉ có hình thang $GHIK$ là hình thang cân vì hình thang $GHIK$ có $\widehat{G}$ và $\widehat{H}$ cùng kề với đáy GH và $\widehat{G} = \widehat{H}$ (vì cùng bằng 105°).

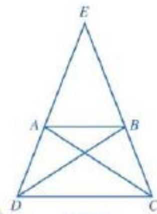
II. TÍNH CHẤT

3 Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $AB < CD$, E là giao điểm của AD và BC (*Hình 25*).

a) So sánh các cặp góc: $\widehat{EDC}$ và $\widehat{ECD}$; $\widehat{EAB}$ và $\widehat{EBA}$.

b) So sánh các cặp đoạn thẳng: EA và EB; ED và EC. Từ đó, hãy so sánh AD và BC.

c) Hai tam giác ADC và BCD có bằng nhau hay không? Từ đó, hãy so sánh AC và BD.

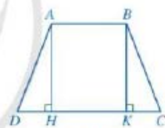


Hình 25

Ta có định lí:

> Trong một hình thang cân:
> a) Hai cạnh bên bằng nhau;
> b) Hai đường chéo bằng nhau.

Ví dụ 2 Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $AB < CD$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên đường thẳng CD (*Hình 26*). Chứng minh $DH = CK$.



Hình 26

Giải

Xét hai tam giác vuông ADH và BCK, ta có:

$AD = BC$; $\widehat{ADH} = \widehat{BCK}$ (vì $ABCD$ là hình thang cân).

Suy ra $\Delta ADH = \Delta BCK$ (cạnh huyền - góc nhọn).

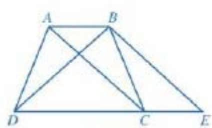
Do đó $DH = CK$ (hai cạnh tương ứng).

1 Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$. Chứng minh $\widehat{ADB} = \widehat{BCA}$.

III. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT

4 Quan sát hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$) có hai đường chéo AC và BD bằng nhau. Kẻ BE song song với AC (E thuộc đường thẳng CD) (*Hình 27*).

a) Hai tam giác ABC và ECB có bằng nhau hay không?



Hình 27

b) So sánh các cặp góc: $\widehat{BED}$ và $\widehat{BDE}$; $\widehat{ACD}$ và $\widehat{BED}$.

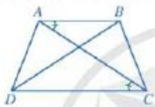
c) Hai tam giác ACD và BDC có bằng nhau hay không? Từ đó, hãy so sánh $\widehat{ADC}$ và $\widehat{BCD}$.

d) $ABCD$ có phải là hình thang cân hay không?

Ta có dấu hiệu nhận biết:

Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

Ví dụ 3 Cho tứ giác $ABCD$ có $AB < CD$, hai đường chéo AC và BD bằng nhau, $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ (*Hình 28*). Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.



Hình 28

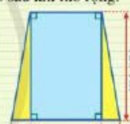
Giải

Do $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ và $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACD}$ nằm ở vị trí so le trong nên $AB \parallel CD$.

Suy ra tứ giác $ABCD$ là hình thang.

Vì hình thang $ABCD$ có $AC = BD$ nên $ABCD$ là hình thang cân.

2 Một ô cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chiều dài là 120 cm và chiều rộng là 80 cm. Người ta mở rộng ô cửa sổ đó bằng cách tăng độ dài cạnh dưới về hai bên, mỗi bên 20 cm (mô tả ở *Hình 29*). Sau khi mở rộng thì ô cửa sổ đó có dạng hình gì? Tính diện tích của ô cửa sổ đó sau khi mở rộng.



Hình 29

BÀI TẬP

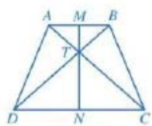
1. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $AB < CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và T là giao điểm của AC và BD (*Hình 30*).

Chứng minh:

a) $\widehat{TAD} = \widehat{TBC}$, $\widehat{TDA} = \widehat{TCB}$;

b) $TA = TB$, $TD = TC$;

c) MN là đường trung trực của cả hai đoạn thẳng AB và CD.



Hình 30

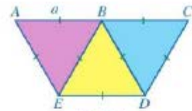
Trong hình thang cân, đường thẳng đi qua trung điểm của hai đáy là trục đối xứng của nó.

2. Người ta ghép ba hình tam giác đều có độ dài cạnh là a với vị trí như *Hình 31*.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Chứng minh tứ giác $ACDE$ là hình thang cân.

c) Tính diện tích của tứ giác $ACDE$ theo a.



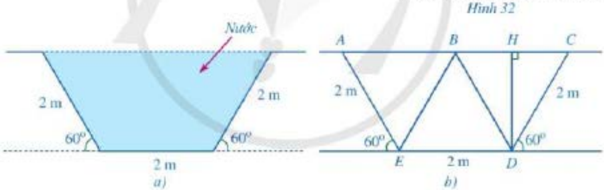
Hình 31

3. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên cạnh AB lấy hai điểm M, N sao cho $AM = NB < \frac{1}{2}AB$. Chứng minh tứ giác $MNCD$ là hình thang cân.

4. Cho tam giác ABC cân tại A có hai đường phân giác BE và CK. Chứng minh tứ giác $BKEC$ là hình thang cân.

5. *Hình 33a* là mặt cắt đứng phần chứa nước của một con mương (*Hình 32*) khi đầy nước có dạng hình thang cân. Người ta mô tả lại bằng hình học mặt cắt đứng của con mương đó ở *Hình 33b* với $BD \parallel AE$ (B thuộc AC), H là hình chiếu của D trên đường thẳng AC.

(Nguồn: https://shutterstock.com
Hình 32



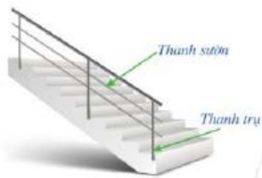
Hình 33

a) Chứng minh các tam giác BCD, BDE, ABE là các tam giác đều.

b) Tính độ dài của DH, AC.

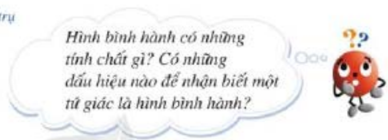
c) Tính diện tích mặt cắt đứng phần chứa nước của con mương đó khi đầy nước.

§4. HÌNH BÌNH HÀNH



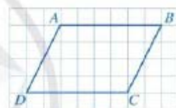
Hình 34

Trong thiết kế tay vịn cầu thang (*Hình 34*), người ta thường để các cặp thanh sườn song song với nhau, các cặp thanh trụ song song với nhau, tạo nên các hình bình hành.



I. ĐỊNH NGHĨA

1 Cho biết các cặp cạnh đối AB và CD, AD và BC của tứ giác $ABCD$ ở *Hình 35* có song song với nhau hay không.



Hình 35

Ta có định nghĩa:

> *Hình bình hành* là tứ giác có hai cặp cạnh đối song song.

Ví dụ 1 Ở *Hình 36*, tứ giác nào là hình bình hành? Vì sao?

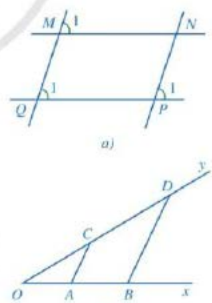
Giải

• Ở *Hình 36a*, ta có $\widehat{M_1} = \widehat{Q_1}$ và $\widehat{M_1}$, $\widehat{Q_1}$ ở vị trí đồng vị nên $MN \parallel PQ$.

Ta lại có $\widehat{Q_1} = \widehat{P_1}$ và $\widehat{Q_1}$, $\widehat{P_1}$ ở vị trí đồng vị nên $MQ \parallel NP$.

Do đó, tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

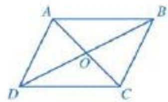
• Ở *Hình 36b*, AB và CD cắt nhau tại O nên AB và CD không song song với nhau. Do đó, tứ giác $ABDC$ không phải là hình bình hành.



Hình 36

II. TÍNH CHẤT

2 Cho hình bình hành $ABCD$ (*Hình 37*).



Hình 37

a) Hai tam giác ABD và CDB có bằng nhau hay không? Từ đó, hãy so sánh các cặp đoạn thẳng: AB và CD; DA và BC.

b) So sánh các cặp góc: $\widehat{DAB}$ và $\widehat{BCD}$; $\widehat{ABC}$ và $\widehat{CDA}$.

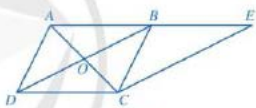
c) Hai tam giác OAB và OCD có bằng nhau hay không? Từ đó, hãy so sánh các cặp đoạn thẳng: OA và OC; OB và OD.

Ta có định lí:

> Trong một hình bình hành:
> a) Các cạnh đối bằng nhau;
> b) Các góc đối bằng nhau;
> c) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Ví dụ 2 Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $BECD$, AC cắt BD tại O (*Hình 38*). Chứng minh:

a) $AB = BE$; b) $OB = \frac{1}{2}CE$.



Hình 38

Giải

Do $ABCD$ là hình bình hành nên

$$AB = CD,\ OB = OD = \frac{1}{2}BD.$$

Do $BECD$ là hình bình hành nên $BE = CD$, $BD = CE$.

a) Từ $AB = CD$ và $BE = CD$, suy ra $AB = BE$ (vì cùng bằng CD).

b) Từ $OB = \frac{1}{2}BD$ và $BD = CE$, suy ra $OB = \frac{1}{2}CE$.

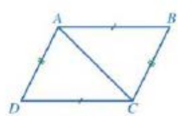
1 Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 80^0$, $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm. Tính số đo mỗi góc và độ dài các cạnh còn lại của hình bình hành $ABCD$.

III. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT

3

a) Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = CD$, $BC = DA$ (*Hình 39*).

• Hai tam giác ABC và CDA có bằng nhau hay không? Từ đó, hãy so sánh các cặp góc: $\widehat{BAC}$ và $\widehat{DCA}$; $\widehat{ACB}$ và $\widehat{CAD}$.



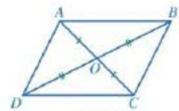
Hình 39

• $ABCD$ có phải là hình bình hành hay không?

b) Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường (*Hình 40*).

• Hai tam giác ABO và CDO có bằng nhau hay không? Từ đó, hãy so sánh các cặp góc: $\widehat{BAC}$ và $\widehat{DCA}$; $\widehat{ACB}$ và $\widehat{CAD}$.

• $ABCD$ có phải là hình bình hành hay không?



Hình 40

Ta có những dấu hiệu nhận biết sau:

• Tứ giác có các cặp cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.

• Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

Ví dụ 3 Cho tứ giác $ABCD$ có hai cạnh đối AB và CD song song và bằng nhau, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Chứng minh:

a) $\Delta OAB = \Delta OCD$;

b) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Giải. (*Hình 41*)

a) Xét hai tam giác OAB và OCD, ta có:

$\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$ (so le trong);

$AB = CD$ (giả thiết);

$\widehat{OBA} = \widehat{ODC}$ (so le trong).

Suy ra $\Delta OAB = \Delta OCD$ (g.c.g).

b) Do $\Delta OAB = \Delta OCD$ nên $OA = OC$, $OB = OD$ (các cặp cạnh tương ứng).

Suy ra tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Do đó tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

2 Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O thoả mãn $OA = OC$ và $\widehat{OAD} = \widehat{OCB}$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Hình 41

Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.

BÀI TẬP

1. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$, $\widehat{ABC} = \widehat{CDA}$. Kẻ tia Ax là tia đối của tia AB. Chứng minh:

Tứ giác có các cặp góc đối bằng nhau là hình bình hành.

a) $\widehat{ABC} + \widehat{DAB} = 180^\circ$;

b) $\widehat{xAD} = \widehat{ABC}$; $AD \parallel BC$;

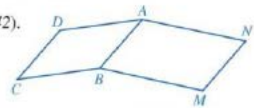
c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

2. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của GB và GC. Chứng minh tứ giác $PQMN$ là hình bình hành.

3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ (*Hình 42*). Chứng minh:

a) $CD = MN$;

b) $\widehat{BCD} + \widehat{BMN} = \widehat{DAN}$.

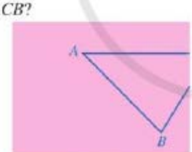


Hình 42

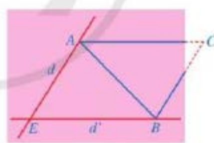
4. Để đo khoảng cách giữa hai vị trí A, B ở hai phía của một toà nhà mà không thể trực tiếp đo được, người ta làm như sau: Chọn các vị trí O, C, D sao cho O không thuộc đường thẳng AB; khoảng cách CD là đo được; O là trung điểm của cả AC và BD (*Hình 43*). Người ta đo được $CD = 100$ m. Tính độ dài của AB.

Hình 43

5. Bạn Hoa vẽ tam giác ABC lên tờ giấy sau đó cắt một phần tam giác ở phía góc C (*Hình 44*). Bạn Hoa đố bạn Hùng: Không vẽ lại tam giác ABC, làm thế nào tính được độ dài các đoạn thẳng AC, BC và số đo góc ACB?



Hình 44



Hình 45

Bạn Hùng đã làm như sau:

– Qua điểm A kẻ đường thẳng d song song với BC, qua điểm B kẻ đường thẳng d' song song với AC;

– Gọi E là giao điểm của d và d';

– Đo độ dài các đoạn thẳng AE, BE và đo góc AEB. Từ đó, tính được độ dài các đoạn thẳng AC, BC và số đo góc ACB (*Hình 45*).

Em hãy giải thích cách làm của bạn Hùng.

§5. HÌNH CHỮ NHẬT

Hình 46

Màn hình phẳng của chiếc ti vi ở *Hình 46* có dạng hình chữ nhật.

Hình chữ nhật có những tính chất gì? Có những dấu hiệu nào để nhận biết một tứ giác là hình chữ nhật?

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Cho biết số đo mỗi góc của tứ giác $ABCD$ ở *Hình 47*.

Hình 47

Ta có định nghĩa:

> ***Hình chữ nhật*** là tứ giác có bốn góc vuông.

Ví dụ 1 Ở *Hình 48*, tứ giác nào là hình chữ nhật? Vì sao?

Hình 48

Giải

• Ở *Hình 48a*, ta có $\widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{P} = \widehat{Q} = 90^\circ$ nên $\widehat{M}, \widehat{N}, \widehat{P}, \widehat{Q}$ đều là góc vuông. Suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

• Ở *Hình 48b*, do $\widehat{H} = 102^\circ$ nên $\widehat{H}$ không là góc vuông. Suy ra tứ giác $GHIK$ không phải là hình chữ nhật.

Nhận xét: Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.

II. TÍNH CHẤT

2

a) Mỗi hình chữ nhật có là một hình thang cân hay không?

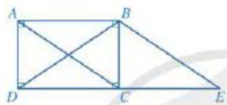
b) Mỗi hình chữ nhật có là một hình bình hành hay không?

Nhận xét: Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành, của hình thang cân.

Ta có định lí:

> Trong một hình chữ nhật:
> a) Hai cạnh đối song song và bằng nhau;
> b) Hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Ví dụ 2 Cho hình chữ nhật $ABCD$ và hình bình hành $ABEC$ (*Hình 49*). Chứng minh $BD = BE$.



Hình 49

> **1** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC. Chứng minh $MN = \frac{1}{2}AC$.

Giải

Ta có: $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = BD$;

$ABEC$ là hình bình hành nên $BE = AC$.

Suy ra $BD = BE$ (cùng bằng AC).

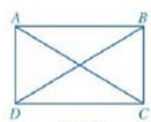
III. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT

3

a) Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 90^\circ$. $ABCD$ có phải là hình chữ nhật hay không?

b) Cho hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD bằng nhau (*Hình 50*).

- Hai tam giác ABC và DCB có bằng nhau hay không? Từ đó, hãy so sánh $\widehat{ABC}$ và $\widehat{DCB}$.
- $ABCD$ có phải là hình chữ nhật hay không?



Hình 50

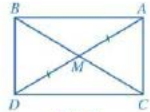
Ta có những dấu hiệu nhận biết sau:

> - Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
> - Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM thoả mãn $AM = \frac{1}{2}BC$. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$ (*Hình 51*). Chứng minh:

a) Tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật;

b) Tam giác ABC vuông tại A.



Hình 51

Giải

a) Vì tứ giác $ABDC$ có hai đường chéo AD, BC cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường nên $ABDC$ là hình bình hành.

Do $AM = \frac{1}{2}BC$ và $AM = \frac{1}{2}AD$ (vì M là trung điểm của AD) nên $BC = AD$.

Hình bình hành $ABDC$ có hai đường chéo BC, AD bằng nhau nên $ABDC$ là hình chữ nhật.

b) Do $ABDC$ là hình chữ nhật nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Suy ra tam giác ABC vuông tại A.

2 Cho hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O thoả mãn $\widehat{OAB} = \widehat{ODC}$. Chứng minh $ABCD$ là hình chữ nhật.

Nhận xét: Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

BÀI TẬP

1. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $\widehat{A} = 90^\circ$. Chứng minh $ABCD$ là hình chữ nhật.

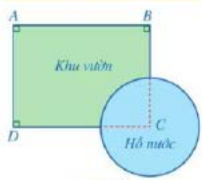
Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A có M là trung điểm của cạnh BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$. Chứng minh tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật và $AM = \frac{1}{2}BC$.

Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm E nằm trên cạnh CD sao cho $\widehat{AEB} = 78^\circ$, $\widehat{EBC} = 39^\circ$. Tính số đo của $\widehat{BEC}$ và $\widehat{EAB}$.

4. Một khu vườn có dạng tứ giác $ABCD$ với các góc A, B, D là góc vuông, $AB = 400$ m, $AD = 300$ m. Người ta đã làm một cái hồ nước có dạng hình tròn, khi đó vị trí C không còn nằm trong khu vườn nữa (*Hình 52*). Tính khoảng cách từ vị trí C đến mỗi vị trí A, B, D.



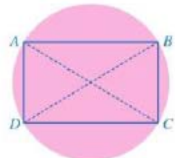
Hình 52

5. Bạn Linh có một mảnh giấy dạng hình tròn. Bạn Linh đố bạn Bình: Làm thế nào có thể chọn ra 4 vị trí trên đường tròn đó để chúng là 4 đỉnh của một hình chữ nhật?

Bạn Bình đã làm như sau:

Bước 1. Gấp mảnh giấy sao cho hai nửa hình tròn trùng khít nhau. Nét gấp thẳng tạo thành đường kính của hình tròn. Ta đánh dấu hai đầu mút của đường kính đó là hai điểm A, C.

Bước 2. Sau đó lại gấp tương tự mảnh giấy đó nhưng theo đường kính mới và đánh dấu hai đầu mút của đường kính mới là hai điểm B, D. Khi đó tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật (*Hình 53*).



Hình 53

Em hãy giải thích cách làm của bạn Bình.

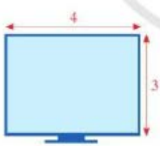
CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

Tỉ lệ khung hình

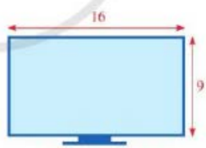
Tỉ lệ khung hình (còn được gọi là tỉ lệ hình ảnh) thể hiện tỉ lệ của chiều rộng và chiều cao (theo cùng đơn vị đo) của một khung hình có dạng hình chữ nhật.

Chẳng hạn, ta có thể hiểu khung hình ti vi có tỉ lệ 16 : 9 là khung hình ti vi có dạng hình chữ nhật với chiều rộng là 16 đơn vị và chiều cao là 9 đơn vị.

Ngày nay, các thiết bị như màn hình máy tính, màn hình ti vi, ... thường sử dụng hai tỉ lệ khung hình là 4 : 3 và 16 : 9 (*Hình 54*).



Tỉ lệ khung hình 4 : 3



Tỉ lệ khung hình 16 : 9

Hình 54

Tỉ lệ khung hình 4 : 3 được sử dụng phổ biến trên các màn hình máy tính, phù hợp làm việc văn phòng hoặc dùng cho truyền hình tiêu chuẩn, máy quay phim.

Tỉ lệ khung hình 16 : 9 là tỉ lệ chuẩn quốc tế hiện nay phổ biến nhất trên các thiết bị công nghệ như màn hình điện thoại, ti vi, màn hình LED, ... Đặc điểm nổi bật của khung hình tỉ lệ 16 : 9 là cho phép hình ảnh/video được hiển thị sắc nét, trọn vẹn màn hình.

§6. HÌNH THOI

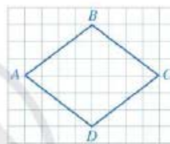
(Nguồn: https://shutterstock.com)
Hình 55

Hoạ tiết trên vải ở *Hình 55* gợi lên hình ảnh của hình thoi.

Hình thoi có những tính chất gì?
Có những dấu hiệu nào để nhận biết một tứ giác là hình thoi?

I. ĐỊNH NGHĨA

1 So sánh độ dài các cạnh của tứ giác *ABCD* ở *Hình 56*.



Hình 56

Ta có định nghĩa:

> ***Hình thoi*** là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Ví dụ 1 Ở *Hình 57*, tứ giác nào là hình thoi? Vì sao?

Hình 57

Giải

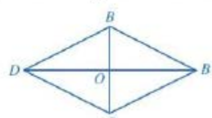
• Ở *Hình 57a*, ta có $MN = NP = PQ = QM$ (vì cùng bằng 2,5 cm) nên tứ giác *MNPQ* là hình thoi.

• Ở *Hình 57b*, ta có $GH \neq KG$ (vì 2,5 cm $\neq$ 2 cm) nên tứ giác *GHIK* không phải là hình thoi.

II. TÍNH CHẤT

2 Cho hình thoi *ABCD* có hai đường chéo *AC* và *BD* cắt nhau tại *O* (*Hình 58*).

a) Hình thoi *ABCD* có là hình bình hành hay không?



Hình 58

b) Hai đường chéo AC và BD có vuông góc với nhau hay không?

c) Hai tam giác ABC và ADC có bằng nhau hay không? Tia AC có phải là tia phân giác của $\widehat{BAD}$ hay không?

Nhận xét: Do hình thoi là hình bình hành nên hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.

Ta có định lí:

Trong một hình thoi:

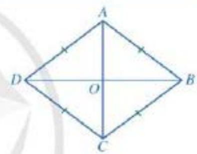
a) Các cạnh đối song song;

b) Các góc đối bằng nhau;

c) Hai đường chéo vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường;

d) Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc ở đỉnh.

Ví dụ 2 Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, $AC = 3$ cm, $BD = 4$ cm (*Hình 59*). Tính độ dài của OA, OB, AB.



Hình 59

Giải

Do $ABCD$ là hình thoi nên O là trung điểm của hai đường chéo AC, BD.

Suy ra: $OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1,5$ (cm);

$OB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ (cm).

Ta có $AC \perp BD$ (vì $ABCD$ là hình thoi) nên tam giác OAB vuông tại O. Áp dụng định lí Pythagore, ta có:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2.$$

Do đó $AB^2 = (1,5)^2 + 2^2 = 6,25$ hay $AB = 2,5$ (cm).

1 Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Chứng minh tam giác ABD là tam giác đều.

III. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT

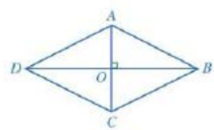
3

a) Cho hình bình hành $ABCD$ có hai cạnh kề AB và BC bằng nhau. $ABCD$ có phải là hình thoi hay không?

b) Cho hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau (*Hình 60*).

• Đường thẳng AC có phải là đường trung trực của đoạn thẳng BD hay không?

• $ABCD$ có phải là hình thoi hay không?

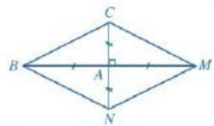


Hình 60

Ta có những dấu hiệu nhận biết sau:

- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC vuông tại A. Các điểm M, N lần lượt thuộc tia đối của tia AB, AC sao cho $AM = AB$, $AN = AC$. Chứng minh tứ giác $BCMN$ là hình thoi.



Hình 61

Giải. (*Hình 61*)

Tứ giác $BCMN$ có A là trung điểm của cả hai đường chéo BM và CN nên $BCMN$ là hình bình hành.

Do tam giác ABC vuông tại A nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$ hay $BM \perp CN$.

Hình bình hành $BCMN$ có hai đường chéo BM và CN vuông góc với nhau nên $BCMN$ là hình thoi.

2 Cho tam giác ABC cân tại A có M là trung điểm BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm N sao cho $MN = MA$. Chứng minh tứ giác $ABNC$ là hình thoi.

BÀI TẬP

1. Cho hình bình hành $ABCD$ có tia AC là tia phân giác của góc DAB. Chứng minh $ABCD$ là hình thoi.

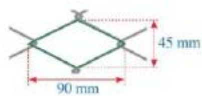
Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

2. Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Chứng minh:

$$AC^2 + BD^2 = 4(OA^2 + OB^2) = 4AB^2.$$

3. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{CDB} = 40^\circ$. Tính số đo mỗi góc của hình thoi $ABCD$.

4. *Hình 62* mô tả một ô lưới mắt cáo có dạng hình thoi với độ dài của hai đường chéo là 45 mm và 90 mm. Độ dài cạnh của ô lưới mắt cáo đó là bao nhiêu milimét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 62

5. Một viên gạch trang trí có dạng hình thoi với độ dài cạnh là 40 cm và số đo một góc là 60° (*Hình 63*). Diện tích của viên gạch đó là bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Hình 63

§7. HÌNH VUÔNG

Một số hoạ tiết và hoa văn trên thổ cẩm (*Hình 64*) có dạng hình vuông.

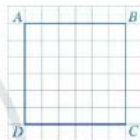
Hình vuông có những tính chất gì? Có những dấu hiệu nào để nhận biết một tứ giác là hình vuông?

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 64

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Cho biết các góc và các cạnh của tứ giác *ABCD* ở *Hình 65* có đặc điểm gì.

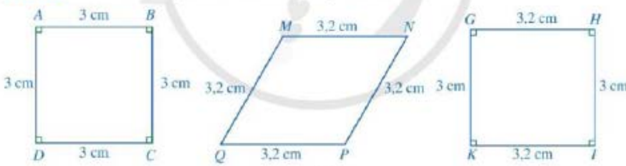


Hình 65

Ta có định nghĩa:

> *Hình vuông* là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.

Ví dụ 1 Ở *Hình 66*, tứ giác nào là hình vuông? Vì sao?



Hình 66

Giải

• Ở *Hình 66a*, ta có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D}$ (vì cùng bằng 90°) và $AB = BC = CD = DA$ (vì cùng bằng 3 cm) nên tứ giác *ABCD* là hình vuông.

• Ở *Hình 66b*, ta có $\widehat{M}$, $\widehat{N}$, $\widehat{P}$, $\widehat{Q}$ không là góc vuông nên tứ giác *MNPQ* không phải là hình vuông.

• Ở *Hình 66c*, ta có $GH \neq HI$ (vì 3,2 cm ≠ 3 cm) nên tứ giác *GHIK* không phải là hình vuông.

II. TÍNH CHẤT

2

a) Mỗi hình vuông có là một hình chữ nhật hay không?

b) Mỗi hình vuông có là một hình thoi hay không?

Nhận xét: Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

Ta có định lí sau:

Trong một hình vuông:

a) Các cạnh đối song song;

b) Hai đường chéo bằng nhau, vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường;

c) Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc ở đỉnh.

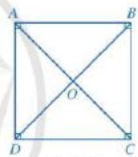
Ví dụ 2 Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Chứng minh các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA là những tam giác vuông cân.

Giải. (*Hình 67*)

Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC = BD$, $AC \perp BD$, AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Suy ra các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA là những tam giác vuông tại O và $OA = OB = OC = OD$.

Do đó các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA là những tam giác vuông cân.



Hình 67

1 Cho hình vuông $ABCD$. Tính số đo các góc CAB, DAC.

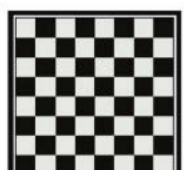
Ví dụ 3 Một mặt bàn cờ vua có dạng hình vuông với độ dài cạnh là 40 cm (*Hình 68*). Độ dài đường chéo của mặt bàn cờ vua đó là bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Giải

Gọi độ dài đường chéo của mặt bàn cờ vua đó là x (cm) với $x > 0$.

Áp dụng định lí Pythagore, ta có: $x^2 = 40^2 + 40^2 = 3\,200$.

Mà $x > 0$ nên $x = \sqrt{3\,200} \approx 56,6$ (cm).


Hình 68

III. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT

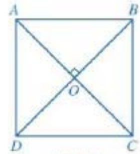
3

a) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có hai cạnh kề AB và BC bằng nhau. $ABCD$ có phải là hình vuông hay không?

b) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau (*Hình 69*).

• Đường thẳng AC có phải là đường trung trực của đoạn thẳng BD hay không?

• $ABCD$ có phải là hình vuông hay không?



Hình 69

c) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có AC là tia phân giác của góc DAB.

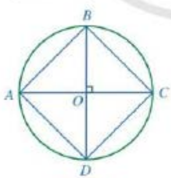
• Tam giác ABC có phải là tam giác vuông cân hay không?

• $ABCD$ có phải là hình vuông hay không?

Ta có những dấu hiệu nhận biết sau:

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
- **Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.**

Ví dụ 4 Cho đường tròn tâm O. Giả sử AC và BD là hai đường kính của đường tròn sao cho $AC \perp BD$ (*Hình 70*). Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình vuông.



Hình 70

2 Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh BC lấy các điểm D, E sao cho

$$BD = DE = EC.$$

Qua D và E kẻ đường thẳng vuông góc với BC, chúng cắt AB và AC lần lượt tại H và G. Chứng minh tứ giác $DEGH$ là hình vuông.

Giải

Vì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường nên $ABCD$ là hình bình hành.

Hình bình hành $ABCD$ có $AC = BD$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật.

Hình chữ nhật $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau nên $ABCD$ là hình vuông.

BÀI TẬP

1. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = BD$. Chứng minh $ABCD$ là hình vuông.

> Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

2. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 90^\circ$. Chứng minh $ABCD$ là hình vuông.

> Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác AD. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC. Chứng minh tứ giác $AHDK$ là hình vuông.

4. Cho hai mảnh giấy, mỗi mảnh có dạng hình vuông với độ dài cạnh là 1 dm. Hãy trình bày cách cắt ghép hai mảnh giấy đó để được một hình vuông có độ dài cạnh là $\sqrt{2}$ dm.

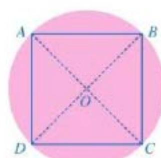
5. Bạn Thảo có một mảnh giấy có dạng hình tròn. Bạn Thảo đố bạn Minh: Không dùng thước thẳng và compa, làm thế nào có thể xác định tâm của hình tròn và chọn ra 4 vị trí trên đường tròn đó để chúng là 4 đỉnh của một hình vuông?

Bạn Minh đã làm như sau:

Bước 1. Gấp mảnh giấy sao cho hai nửa hình tròn trùng khít nhau. Nét gấp thẳng tạo thành đường kính của hình tròn. Ta đánh dấu hai đầu mút của đường kính đó là hai điểm A, C.

Bước 2. Tiếp tục gấp mảnh giấy (có dạng nửa hình tròn) ở *Bước 1* sao cho hai nửa mới của nửa hình tròn đó lại trùng khít nhau. Trải miếng bìa về dạng hình tròn ban đầu, ta được nét gấp mới là một đường kính khác của hình tròn.

Bước 3. Ta đánh dấu giao điểm của hai đường kính là O và hai đầu mút của đường kính mới là hai điểm B, D. Khi đó O là tâm của hình tròn và tứ giác $ABCD$ là hình vuông (*Hình 71*).



Hình 71

Em hãy giải thích cách làm của bạn Minh.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

1. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^{\circ}$, $\widehat{B} = 70^{\circ}$, $\widehat{C} = 80^{\circ}$. Khi đó, $\widehat{D}$ bằng

A. 130°. **B.** 140°. **C.** 150°. **D.** 160°.

2. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $\widehat{A} = 80^{\circ}$. Khi đó, $\widehat{C}$ bằng

A. 80°. **B.** 90°. **C.** 100°. **D.** 110°.

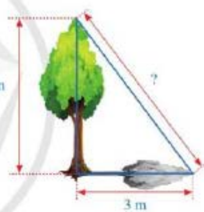
3. Cho hình bình hành $MNPQ$ có các góc khác 90°, MP cắt NQ tại I. Khi đó

A. $IM = IN$. **B.** $IM = IP$. **C.** $IM = IQ$. **D.** $IM = MP$.

4. Cho hình chữ nhật $MNPQ$. Đoạn thẳng MP bằng đoạn thẳng nào sau đây?

A. NQ. **B.** MN. **C.** NP. **D.** QM.

5. *Hình 72* mô tả một cây cao 4 m. Biết rằng khi trời nắng, cây đổ bóng trên mặt đất, điểm xa nhất của bóng cây cách gốc cây một khoảng là 3 m. Tính khoảng cách từ điểm xa nhất của bóng cây đến đỉnh của cây.



Hình 72

6. Màn hình một chiếc ti vi có dạng hình chữ nhật với kích thước màn hình ti vi được tính bằng độ dài đường chéo của màn hình (đơn vị: inch, trong đó 1 inch = 2,54 cm). Người ta đưa ra công thức tính khoảng cách an toàn khi xem ti vi để giúp khách hàng chọn được chiếc ti vi phù hợp với căn phòng của mình như sau:

Khoảng cách tối thiểu = $5{,}08 \, . \, d$ (cm);

Khoảng cách tối đa = $7{,}62 \, . \, d$ (cm).

Trong đó, d là kích thước màn hình ti vi tính theo inch.

Với một chiếc ti vi có chiều dài màn hình là 74,7 cm; chiều rộng màn hình là 32 cm:

a) Kích thước màn hình của chiếc ti vi đó là bao nhiêu inch (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

b) Khoảng cách tối thiểu và khoảng cách tối đa để xem chiếc ti vi đó là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

7. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$, $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$. Chứng minh $ABCD$ là hình bình hành.

8. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

9. Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các cạnh AC, BC lần lượt lấy các điểm D, G sao cho $AD = CG < AC$. Từ điểm D kẻ DE vuông góc với AC (E thuộc AB). Chứng minh tứ giác $CDEG$ là hình chữ nhật.

10. Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ < AB$. Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là điểm nằm giữa A và B, N là điểm nằm giữa C và D sao cho $AM = CN$. Gọi I là giao điểm của MN và AC. Chứng minh:

a) $\Delta IAM = \Delta ICN$;

b) Tứ giác $AMCN$ là hình bình hành;

c) Ba điểm B, I, D thẳng hàng.

12. Cho hình thoi $ABCD$ và hình bình hành $BCMD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh:

a) $OD = \frac{1}{2}CM$ và tam giác ACM là tam giác vuông;

b) Ba điểm A, D, M thẳng hàng;

c) Tam giác DCM là tam giác cân.

13. Cho hình vuông $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD. Gọi O là giao điểm của AM và BN. Chứng minh:

a) $\Delta ABM = \Delta BCN$;

b) $\widehat{BAO} = \widehat{MBO}$;

c) $AM \perp BN$.

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
đa thức nhiều biến (đa thức)	một tổng của những đơn thức	8
đơn thức nhiều biến (đơn thức)	biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến	5
đơn thức thu gọn	đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến, mà mỗi biến đã được nâng lên luỹ thừa với số mũ nguyên dương và chỉ được viết một lần	6
hai đơn thức đồng dạng	hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến	7
hàm số bậc nhất	hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$, trong đó a, b là các số cho trước và a khác 0	67
hằng đẳng thức	$P = Q$ là hằng đẳng thức nếu giá trị của biểu thức P luôn bằng giá trị của biểu thức Q tại mỗi giá trị cho trước của các biến mà ta có thể tính được giá trị của cả hai biểu thức P và Q	18
hệ số góc	hệ số a của đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy	75
hình bình hành	tứ giác có hai cặp cạnh đối song song	105
hình chóp tam giác đều	hình chóp có đáy là tam giác đều, các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau	80
hình chóp tứ giác đều	hình chóp có đáy là hình vuông, các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau	85
hình chữ nhật	tứ giác có bốn góc vuông	109
hình thang cân	hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau	101
hình thoi	tứ giác có bốn cạnh bằng nhau	113
hình vuông	tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau	116
phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số)	biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức	24
phân thức đại số (phân thức)	một biểu thức có dạng $\frac{P}{Q}$, trong đó, P, Q là những đa thức và Q khác đa thức 0	29
tứ giác lồi	tứ giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của tứ giác đó	100

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
LÊ HUY ĐAN

Thiết kế sách và ảnh:
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG YÊN

Trình bày bìa:
TRẦN TIỂU LÂM

Sửa bản in:
LÊ HUY ĐAN – VŨ THỊ MINH THẢO

Trong sách có sử dụng tư liệu, hình ảnh của một số tác giả. Trân trọng cảm ơn.

TOÁN 8 - TẬP MỘT
Mã số: ....
ISBN: ....
In .... cuốn, khổ 19 x 26,5 cm, tại............
Địa chỉ: ....
Số xác nhận đăng kí xuất bản ....- ... /CXBIPH/ ....-....../ĐHSP
Quyết định xuất bản số: ..../QĐ - NXBĐHSP, ngày ....
In xong và nộp lưu chiểu ....

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống

Toán 8 là cuốn sách giáo khoa dành cho học sinh lớp 8, thuộc bộ sách giáo khoa *Cánh Diều*, thực hiện theo *Chương trình Giáo dục phổ thông 2018*.

Sách gồm hai tập được biên soạn đáp ứng yêu cầu phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh. Các hoạt động học tập được tổ chức theo tiến trình từ dễ đến khó, hướng đến việc khám phá, phát hiện, thực hành, vận dụng giải quyết vấn đề trong thực tiễn, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh. Sách được trình bày hấp dẫn, khơi gợi sự tò mò, kích thích hứng thú, tạo dựng niềm tin trong học tập môn Toán ở học sinh.

Sách là sản phẩm tâm huyết của tập thể tác giả – những nhà giáo, nhà khoa học giàu kinh nghiệm trong giáo dục phổ thông.

SỬ DỤNG
TEM CHỐNG GIẢ

1. Quét mã QR hoặc dùng trình duyệt web để truy cập website bộ sách Cánh Diều: www.hoc10.com
2. Vào mục Hướng dẫn (www.hoc10.com/huong-dan) để kiểm tra sách giả và xem hướng dẫn kích hoạt sử dụng học liệu điện tử.