ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
LÊ TUẤN ANH – ĐỖ TIẾN ĐẠT – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM ĐỨC QUANG

Toán 8

TẬP HAI

BẢN MẪU

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

MỤC LỤC

	Trang
CHƯƠNG VI. MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT	3
§1. Thu thập và phân loại dữ liệu	3
§2. Mô tả và biểu diễn dữ liệu trên các bảng, biểu đồ	9
§3. Phân tích và xử lí dữ liệu thu được ở dạng bảng, biểu đồ	19
§4. Xác suất của biến cố ngẫu nhiên trong một số trò chơi đơn giản	26
§5. Xác suất thực nghiệm của một biến cố trong một số trò chơi đơn giản	31
Bài tập cuối chương VI	37
CHƯƠNG VII. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN	39
§1. Phương trình bậc nhất một ẩn	39
§2. Ứng dụng của phương trình bậc nhất một ẩn	45
Bài tập cuối chương VII	50
CHƯƠNG VIII. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG. HÌNH ĐỒNG DẠNG	52
§1. Định lí Thalès trong tam giác	52
§2. Ứng dụng của định lí Thalès trong tam giác	58
§3. Đường trung bình của tam giác	62
§4. Tính chất đường phân giác của tam giác	66
§5. Tam giác đồng dạng	70
§6. Trường hợp đồng dạng thứ nhất của tam giác	74
§7. Trường hợp đồng dạng thứ hai của tam giác	79
§8. Trường hợp đồng dạng thứ ba của tam giác	83
§9. Hình đồng dạng	86
§10. Hình đồng dạng trong thực tiễn	90
Bài tập cuối chương VIII	94
HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM Chủ đề 3. Thực hành đo chiều cao	97
THỰC HÀNH MỘT SỐ PHẦN MỀM	101
BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ	106
BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ	107

Chương VI

MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: thu thập và phân loại dữ liệu; mô tả và biểu diễn dữ liệu trên các bảng, biểu đồ; phân tích và xử lí dữ liệu; xác suất, xác suất thực nghiệm của biến cố ngẫu nhiên trong một số trò chơi đơn giản; mối liên hệ giữa xác suất thực nghiệm của một biến cố với xác suất của biến cố đó khi số lần thực nghiệm rất lớn.

§1. THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU

Ở lớp 6 và lớp 7, chúng ta đã làm quen với tiến trình thống kê, trong đó có thu thập và phân loại dữ liệu.

Làm thế nào để thu thập và phân loại dữ liệu?

I. THU THẬP DỮ LIỆU

1 Các bạn học sinh lớp 8A muốn thu thập thông tin về số lượng huy chương đạt được của Đoàn thể thao Việt Nam tại SEA Games 30. Theo em, các bạn lớp 8A có thể thu thập những thông tin đó bằng cách nào?

> Có nhiều cách để thu thập dữ liệu, chẳng hạn: quan sát, lập phiếu điều tra (phiếu hỏi), tiến hành phỏng vấn, ... hoặc thu thập từ những nguồn có sẵn như sách, báo, trang web, các phương tiện thông tin đại chúng, ...

Chẳng hạn: Trong *Hoạt động 1*, các bạn học sinh lớp 8A có thể thu thập thông tin về số lượng huy chương đạt được của Đoàn thể thao Việt Nam tại SEA Games 30 từ trang web *https://vietnamnet.vn*, kết quả thu được như sau:

– Các loại huy chương là: huy chương Vàng, huy chương Bạc, huy chương Đồng;

– Số lượng huy chương mỗi loại đó lần lượt là: 98, 85, 105.

Ví dụ 1 Lớp trưởng lớp 8C muốn thu thập thông tin về các môn thể thao được ưa thích của các bạn trong lớp. Theo em, bạn lớp trưởng có thể thu thập những thông tin đó bằng cách nào?

Giải

Bạn lớp trưởng lớp 8C có thể thu thập những thông tin đó bằng cách lập phiếu hỏi theo mẫu sau (*Bảng 1*):

Môn thể thao	Ưa thích
Bóng đá	
Cầu lông	
Bóng rổ	
...	

Bảng 1

1 Một cửa hàng bán kem muốn tìm hiểu về các loại kem yêu thích của 40 khách hàng trong sáng Chủ nhật. Theo em, cửa hàng có thể thu thập những thông tin đó bằng cách nào?

II. PHÂN LOẠI VÀ TỔ CHỨC DỮ LIỆU

2 Bạn Ngân thu thập thông tin từ *Niên giám Thống kê 2020* (*NXB Thống kê, 2021*) về số lượng các tỉnh/thành phố thuộc các vùng kinh tế – xã hội của nước ta năm 2020 như sau:

– Sáu vùng kinh tế – xã hội là: Đồng bằng sông Hồng, Trung du và miền núi phía Bắc, Bắc Trung Bộ và Duyên hải miền Trung, Tây Nguyên, Đông Nam Bộ, Đồng bằng sông Cửu Long;

– Số lượng các tỉnh/thành phố thuộc các vùng kinh tế – xã hội đó lần lượt là: 11, 14, 14, 5, 6, 13.

Hãy phân loại các dữ liệu đó dựa trên tiêu chí: dữ liệu là số liệu; dữ liệu không phải là số liệu.

Trong các dữ liệu thống kê thu thập được:

– Có những dữ liệu thống kê là số (số liệu), những dữ liệu này còn gọi là *dữ liệu định lượng*,

– Có những dữ liệu thống kê không phải là số, những dữ liệu này còn gọi là *dữ liệu định tính*.

Do dữ liệu thu thập được thường rất đa dạng và phong phú nên để thuận tiện trong mô tả, biểu diễn và xử lí dữ liệu ta có thể phân chia, sắp xếp các dữ liệu đó thành những loại dữ liệu theo những tiêu chí cho trước.

Việc sắp xếp thông tin theo những tiêu chí nhất định gọi là *phân loại dữ liệu.*

Dựa trên tiêu chí định tính và định lượng, ta có thể phân loại các dữ liệu thành hai loại:

– Dữ liệu định lượng được biểu diễn bằng số thực;

– Dữ liệu định tính được biểu diễn bằng từ, chữ cái, kí hiệu, ...

Để thuận tiện trong tổ chức dữ liệu thu thập được, ta có thể phân nhóm mỗi loại dữ liệu trên thành các nhóm theo những tiêu chí cho trước.

Ví dụ 2 Để nâng cao hiệu quả kinh doanh, một siêu thị tiến hành hỏi những mặt hàng mà 50 khách hàng dự định mua khi vào siêu thị. Kết quả thu được như sau: gạo, mì ăn liền, thịt, cá, rau củ, trứng, hoa quả, sữa tươi, quần áo, nước khoáng, nước giải khát, nước sinh tố, xà phòng, kem đánh răng, bột giặt, xoong nồi, bát đĩa, bút viết, vở học sinh, cặp sách.

a) Có bao nhiêu mặt hàng được khách hàng dự định mua?

b) Hãy sắp xếp các mặt hàng đó theo những nhóm sau:

Nhóm 1: Mặt hàng thực phẩm; *Nhóm 2:* Mặt hàng đồ uống;

Nhóm 3: Mặt hàng đồ dùng trong gia đình; *Nhóm 4:* Mặt hàng văn phòng phẩm.

Giải

a) Có 20 mặt hàng được khách hàng dự định mua.

b) Ta phân nhóm 20 mặt hàng đó như sau:

Nhóm 1: Gạo, mì ăn liền, thịt, cá, rau củ, trứng, hoa quả;

Nhóm 2: Sữa tươi, nước khoáng, nước giải khát, nước sinh tố;

Nhóm 3: Xà phòng, kem đánh răng, bột giặt, xoong nồi, bát đĩa, quần áo;

Nhóm 4: Bút viết, vở học sinh, cặp sách.

2 Để tìm hiểu về các động vật có xương sống trên Trái Đất, bạn Loan đã sưu tầm tư liệu về những động vật sau: cá rô đồng, cá chép, cá thu, ếch, nhái, cóc, rắn hổ mang, thằn lằn, cá sấu, gà Đông Tảo, chim bồ câu, chim ưng, trâu, mèo, sư tử. Em hãy giúp bạn Loan phân nhóm các động vật đó theo những tiêu chí sau: Cá; Lưỡng cư; Bò sát; Chim; Động vật có vú.

Nhận xét: Việc phân loại dữ liệu thống kê phụ thuộc vào những tiêu chí đưa ra, hay nói cách khác, phụ thuộc vào mục đích phân loại.

III. TÍNH HỢP LÍ CỦA DỮ LIỆU

Sau khi thu thập, phân loại và tổ chức dữ liệu, ta cần xem xét tính hợp lí của những dữ liệu thống kê đó, đặc biệt chỉ ra được những dữ liệu không hợp lí.

3 Tìm điểm không hợp lí trong những dữ liệu cho dưới đây.

a) Danh sách email của các bạn trong đội văn nghệ lớp 8C như sau (*Bảng 2*):

STT	Tên	Email
1	Nguyễn Văn Dương	vanduong08@gmail.com
2	Chu Thị Thu Hằng	thuhang_chu.vn
3	Phạm Thị Mai Hương	maihuongpt@yahoo.com
4	Ngô Đức Tiến	Ductienngo2008@gmail.com

Bảng 2

b) Kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của bạn Dũng lần lượt là: 8; – 6; 7; 5; 9.

Nhận xét: Để đánh giá tính hợp lí của dữ liệu, ta cần đưa ra các tiêu chí đánh giá, chẳng hạn như dữ liệu phải:

– Đúng định dạng;

– Nằm trong phạm vi dự kiến;

– Phải có tính đại diện đối với vấn đề cần thống kê.

Trong *Hoạt động 3*, ta có:

– Dữ liệu thuhang_chu.vn là không hợp lí vì dữ liệu đó không đúng với định dạng của email;

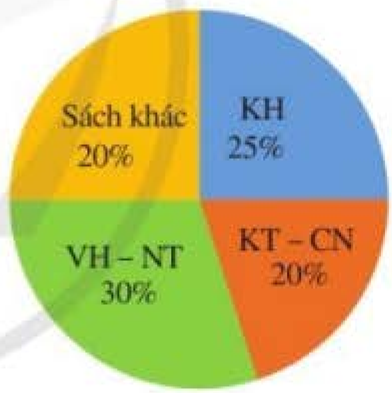
– Dữ liệu – 6 không hợp lí vì kết quả của một bài kiểm tra phải là số không âm.

Ví dụ 3 Để chuẩn bị cho năm học mới, một công ty may thiết kế mẫu đồng phục cho học sinh của một trường trung học cơ sở. Công ty đã hỏi ý kiến của 50 học sinh lớp 6 về mẫu đồng phục đã thiết kế và nhận được kết quả là có 40 học sinh thích mẫu đồng phục đó. Từ đó, công ty đưa ra kết luận rằng có 80% số học sinh của trường thích mẫu đồng phục đó. Theo em, công ty may đưa ra kết luận như thế thì có hợp lí không? Vì sao?

Giải

Kết luận mà công ty may nêu ra là không hợp lí vì đối tượng hỏi ý kiến chỉ là những học sinh lớp 6 không đảm bảo tính đại diện cho toàn bộ học sinh của trường trung học cơ sở (ở các khối lớp 6, 7, 8, 9).

4 Bạn Châu vẽ biểu đồ hình quạt tròn như ở *Hình 1* để biểu diễn tỉ lệ các loại sách trong thư viện: Khoa học (KH); Kĩ thuật và Công nghệ (KT – CN); Văn học và Nghệ thuật (VH – NT); Sách khác. Hỏi những số liệu mà bạn Châu nêu ra trong biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 1* đã chính xác chưa? Vì sao?



Hình 1

Để đánh giá tính hợp lí của dữ liệu, ta có thể dựa vào mối liên hệ toán học đơn giản giữa các số liệu.

Chẳng hạn, để đảm bảo tính hợp lí, dữ liệu cần phải đáp ứng đúng các tiêu chí toán học đơn giản như:

– Tổng tất cả các số liệu thành phần phải bằng số liệu của toàn thể;

– Số lượng của bộ phận phải nhỏ hơn số lượng của toàn thể.

Ví dụ 4 Một trường trung học cơ sở cho học sinh khối lớp 8 đăng kí tham gia hoạt động ngoại khoá. *Bảng 3* thống kê số lượng học sinh đăng kí tham gia hoạt động ngoại khoá của từng lớp. Số liệu nào trong *Bảng 3* là không hợp lí? Vì sao?

Lớp	Sĩ số	Số học sinh đăng kí tham gia hoạt động ngoại khoá
8A	40	35
8B	38	39
8C	40	35
8D	39	36

Bảng 3

3 Một cửa hàng có 16 nhân viên (mỗi nhân viên chỉ làm một ca). Quản lí cửa hàng thống kê như sau:

Ca 1: gồm 6 nhân viên;
Ca 2: gồm 6 nhân viên;
Ca 3: gồm 5 nhân viên.

Hỏi những số liệu mà quản lí cửa hàng nêu ra đã chính xác chưa? Vì sao?

Giải

Ta thấy: Sĩ số của lớp 8B chỉ là 38 (học sinh), nhưng số học sinh của lớp đó đăng kí tham gia hoạt động ngoại khoá lại là 39 (học sinh). Vì thế, số liệu này là không hợp lí.

BÀI TẬP

1. Sau khi tìm hiểu về các đại dương trên Trái Đất từ trang web *https://vi.wikipedia.org*, bạn Thanh thu được những dữ liệu thống kê sau:

– Năm đại dương là: Thái Bình Dương; Đại Tây Dương; Ấn Độ Dương; Bắc Băng Dương; Nam Đại Dương.

– Diện tích (đơn vị: triệu km^2) của năm đại dương đó lần lượt là: 165,25; 106,4; 75; 14,09; 20,3.

Hãy phân loại các dữ liệu đó dựa trên tiêu chí định tính và định lượng.

2. Để học tốt môn Ngữ văn lớp 8, bạn Dung dự định đọc những văn bản văn học sau: *Đất rừng phương Nam* (Đoàn Giỏi); *Hai vạn dặm dưới đáy biển* (J. Verne); *Buổi học cuối cùng* (A. Daudet); *Cô bé bán diêm* (H. Andersen); *Truyện Kiều* (Nguyễn Du); *Lục Vân Tiên* (Nguyễn Đình Chiểu); *Sherlock Holmes* (A. Doyle); *Tre Việt Nam* (Nguyễn Duy); *Thu hứng* (Đỗ Phủ); *Tự tình* (Hồ Xuân Hương); *Qua đèo Ngang* (Bà huyện Thanh Quan); *Khóc Dương Khuê* (Nguyễn Khuyến); *Cảnh vui của nhà nghèo* (Tản Đà); *Bếp lửa* (Bằng Việt); *Những ngày thơ ấu* (Nguyên Hồng); chèo *Quan âm Thị Kính*; tuồng *Nghêu Sò Ốc Hến*; *Romeo và Juliet* (W. Shakespeare).

Hãy phân nhóm những văn bản văn học nêu trên theo những tiêu chí sau (*Bảng 4*):

Truyện	Tên tác phẩm, tác giả (liệt kê cụ thể)
Thơ	Tên tác phẩm, tác giả (liệt kê cụ thể)
Kí	Tên tác phẩm, tác giả (liệt kê cụ thể)
Kịch bản văn học	Tên tác phẩm, tác giả (liệt kê cụ thể)

Bảng 4

3. Để chuẩn bị đưa ra thị trường mẫu xe ô tô mới, một hãng sản xuất xe ô tô tiến hành thăm dò màu sơn mà người mua yêu thích. Hãng sản xuất xe đó đã hỏi ý kiến của 100 người mua xe ở độ tuổi từ 20 đến 30 và nhận được kết quả là: 45 người thích màu đen, 20 người thích màu trắng, 35 người thích màu đỏ. Từ đó, hãng sản xuất xe đưa ra quảng cáo sau: 45% số người mua chọn xe màu đen, 20% số người mua chọn xe màu trắng. Theo em, hãng sản xuất xe đưa ra kết luận như trong quảng cáo trên thì có hợp lí không? Vì sao?

4. Một công ty kinh doanh vật liệu xây dựng có bốn kho hàng, mỗi kho hàng có 50 tấn hàng. Kế toán của công ty lập biểu đồ cột kép ở *Hình 2* biểu diễn số lượng vật liệu đã xuất bán và số lượng vật liệu còn tồn lại trong mỗi kho sau tuần lễ kinh doanh đầu tiên.

Hình 2

Kế toán đã ghi nhầm số liệu của một kho trong biểu đồ cột kép ở *Hình 2*. Theo em, kế toán đã ghi nhầm số liệu của kho nào?

5. *Bảng 5* thống kê số lượng học sinh từng lớp ở khối lớp 8 của một trường trung học cơ sở dự thi hết Học kì I môn Toán.

Lớp	Sĩ số	Số học sinh dự thi
8A	40	40
8B	41	40
8C	40	41
8D	39	39

Bảng 5

Số liệu nào trong *Bảng 5* là không hợp lí? Vì sao?

§2. MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN CÁC BẢNG, BIỂU ĐỒ

Ở lớp 6 và lớp 7, chúng ta đã làm quen với việc mô tả và biểu diễn dữ liệu vào bảng, biểu đồ thích hợp ở dạng: bảng thống kê; biểu đồ tranh; biểu đồ dạng cột/cột kép; biểu đồ đoạn thẳng; biểu đồ hình quạt tròn.

I. BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN CÁC BẢNG VÀ BIỂU ĐỒ THỐNG KÊ

1. Một số dạng bảng, biểu đồ thống kê

1 Hãy cho biết ta có thể mô tả và biểu diễn dữ liệu vào những dạng bảng, biểu đồ thống kê nào.

Ví dụ 1 Biểu đồ cột ở *Hình 3* cho biết kim ngạch xuất khẩu điện thoại và linh kiện của Việt Nam trong các năm 2017, 2018, 2019, 2020. Ở đây, kim ngạch xuất khẩu một loại hàng hoá là số tiền thu được khi xuất khẩu loại hàng hoá đó.

Nêu cách xác định kim ngạch xuất khẩu điện thoại và linh kiện của Việt Nam trong năm 2020.

(Nguồn: Báo cáo của Bộ Công thương từ năm 2017 đến năm 2020)

Hình 3

Giải

Nhìn vào cột biểu thị kim ngạch xuất khẩu điện thoại và linh kiện của Việt Nam trong năm 2020, ta thấy trên đỉnh cột đó ghi số 50 và đơn vị tính ghi trên trục thẳng đứng là tỉ đô la Mỹ. Vậy kim ngạch xuất khẩu điện thoại và linh kiện của Việt Nam trong năm 2020 là 50 tỉ đô la Mỹ.

Ví dụ 2 Biểu đồ cột kép ở *Hình 4* thống kê tổng sản phẩm trong nước (GDP) theo giá hiện hành của Việt Nam và Singapore trong các năm 2016, 2017, 2018, 2019.

Nêu cách xác định tổng sản phẩm trong nước (GDP) của Việt Nam và Singapore trong năm 2019.

(Nguồn: Niên giám thống kê 2020, NXB Thống kê, 2021)

Hình 4

Giải

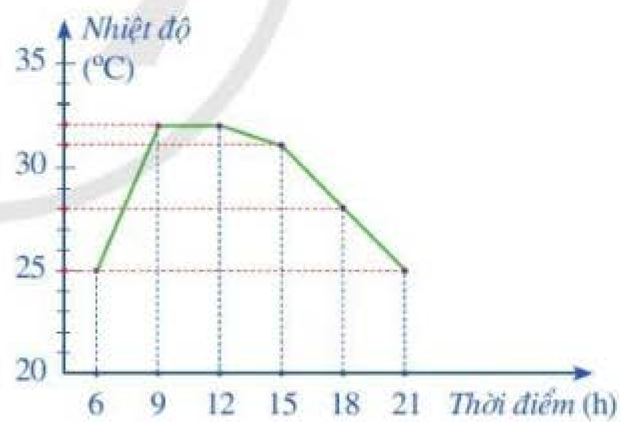
– Nhìn vào cột (màu xanh) biểu thị GDP của Việt Nam trong năm 2019, ta thấy trên đỉnh cột đó ghi số 261,9 và đơn vị tính ghi trên trục thẳng đứng là tỉ đô la Mỹ. Vậy GDP của Việt Nam trong năm 2019 là 261,9 tỉ đô la Mỹ.

1 Trong *Ví dụ 2*, nêu cách xác định tổng sản phẩm trong nước (GDP) của Việt Nam và Singapore lần lượt trong các năm 2016, 2017, 2018.

– Nhìn vào cột (màu cam) biểu thị GDP của Singapore trong năm 2019, ta thấy trên đỉnh cột đó ghi số 372,1 và đơn vị tính ghi trên trục thẳng đứng là tỉ đô la Mỹ. Vậy GDP của Singapore trong năm 2019 là 372,1 tỉ đô la Mỹ.

Ví dụ 3 Biểu đồ đoạn thẳng trong *Hình 5* biểu diễn nhiệt độ tại một số thời điểm trong ngày 23/4/2022 ở Huế.

Nêu nhiệt độ ở Huế lúc 9 h.



Hình 5

Giải

Để biết nhiệt độ ở Huế lúc 9 h, ta làm như sau:

– Từ điểm "9" trên trục nằm ngang, dóng theo chiều thẳng đứng tới đầu mút của đoạn thẳng thuộc đường gấp khúc;

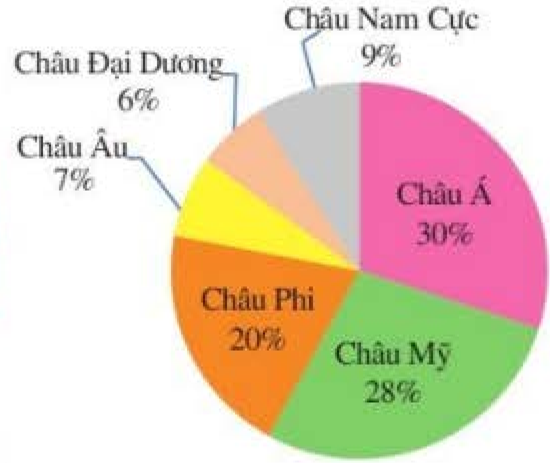
– Đi tiếp theo chiều ngang về bên trái cho đến khi gặp trục thẳng đứng;

– Đọc số chỉ trên trục thẳng đứng.

Ta có: Nhiệt độ ở Huế lúc 9 h là 32 °C.

Ví dụ 4 Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 6* biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) diện tích của châu Á, châu Âu, châu Phi, châu Mỹ, châu Đại Dương, châu Nam Cực so với tổng diện tích của cả sáu châu lục đó.

Lược đồ các châu lục và đại dương



(*Nguồn: https://vi.wikipedia.org*)

Hình 6

Hỏi châu Á chiếm bao nhiêu phần trăm tổng diện tích của cả sáu châu lục đó?

Giải

Tỉ số phần trăm của diện tích châu Á so với tổng diện tích của cả sáu châu lục là 30%.

2. Lựa chọn và biểu diễn dữ liệu vào bảng, biểu đồ thích hợp

2 Một công ty taxi tuyển lái xe cho ba ca làm việc trong ngày: ca 1 từ 0 h 00 đến 7 h 00; ca 2 từ 7 h 00 đến 17 h 00; ca 3 từ 17 h 00 đến 24 h 00. Kết quả tuyển chọn lái xe của công ty như sau: 5 người cho ca 1; 31 người cho ca 2; 14 người cho ca 3.

a) Hãy lựa chọn biểu đồ thích hợp để biểu diễn dữ liệu trên.

b) Hãy hoàn thiện biểu đồ ở *Hình 7* để nhận được biểu đồ cột biểu diễn kết quả tuyển chọn trên.

Hình 7

Nhận xét

– Để biểu diễn dữ liệu thống kê, ta cần lựa chọn bảng, biểu đồ thích hợp.

– Để có thể hoàn thiện được biểu đồ thống kê (hoặc bảng thống kê) đã lựa chọn, ta cần biểu diễn được dữ liệu vào biểu đồ (hoặc bảng) đó. Muốn vậy, ta cần biết cách xác định mỗi yếu tố của biểu đồ (hoặc bảng) thống kê đó.

Ví dụ 5 Số lượng học sinh ở hai lớp 8A và 8B đăng kí tham gia: câu lạc bộ (CLB) bóng đá lần lượt là 26 và 22 (học sinh); CLB bóng rổ lần lượt là 14 và 18 (học sinh).

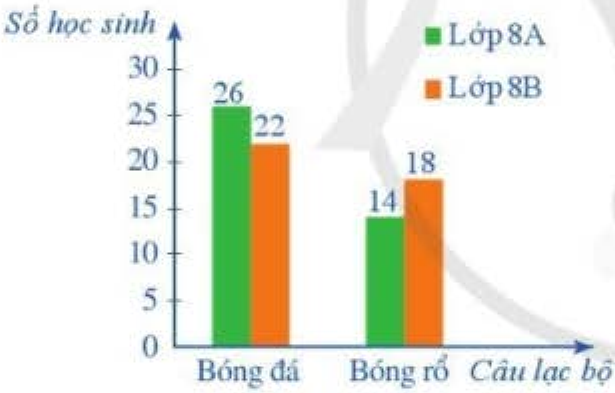
a) Hãy lựa chọn biểu đồ thích hợp để biểu diễn dữ liệu trên.

b) Hãy hoàn thiện biểu đồ ở *Hình 8* để nhận được biểu đồ cột kép thống kê số lượng học sinh ở hai lớp 8A và 8B đăng kí tham gia hai CLB trên.

Giải

a) Ta lựa chọn biểu đồ cột kép để biểu diễn dữ liệu trên.

b) Sau khi hoàn thiện biểu đồ ở *Hình 8*, ta nhận được biểu đồ cột kép ở *Hình 9* biểu diễn số lượng học sinh ở hai lớp 8A và 8B đăng kí tham gia CLB bóng đá và CLB bóng rổ.

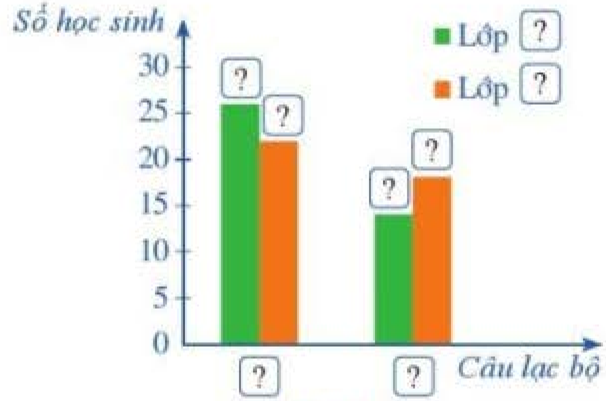


Hình 9

Ví dụ 6 Người phụ trách một câu lạc bộ thống kê số lượng thành viên có mặt tại câu lạc bộ từ thứ Hai đến thứ Sáu lần lượt như sau: 15; 20; 20; 15; 12 (người).

a) Hãy lựa chọn biểu đồ thích hợp để biểu diễn dữ liệu trên.

b) Hãy hoàn thiện biểu đồ ở *Hình 10* để nhận được biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số thành viên có mặt tại câu lạc bộ trong những ngày đã nêu.



Hình 8

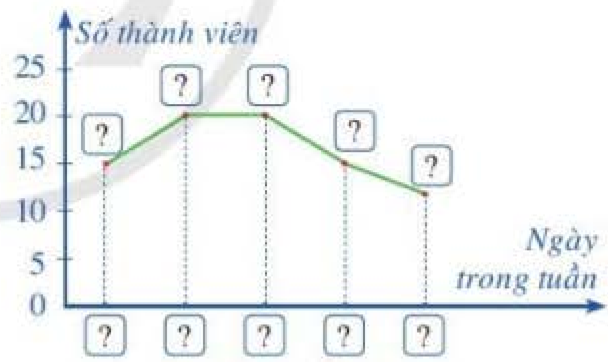
2 Thống kê số sản phẩm bán được trong các tháng 1, 2, 3 của một cửa hàng lần lượt là: 50; 40; 48 (đơn vị: chiếc).

a) Hãy lựa chọn bảng thống kê thích hợp để biểu diễn dữ liệu trên.

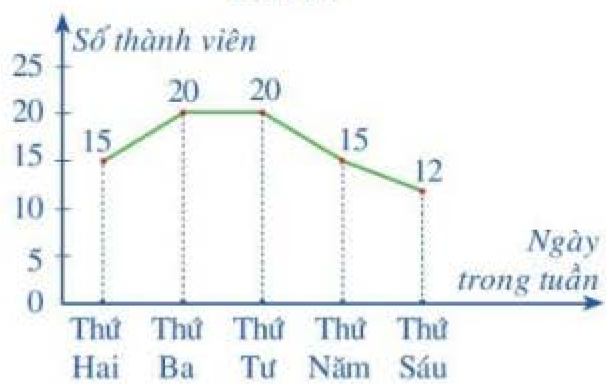
b) Hãy hoàn thiện *Bảng 1* để nhận được bảng thống kê biểu diễn dữ liệu trên.

Tháng	1	2	3
Số sản phẩm bán được (đơn vị: chiếc)	?	?	?

Bảng 1



Hình 10



Hình 11

Giải

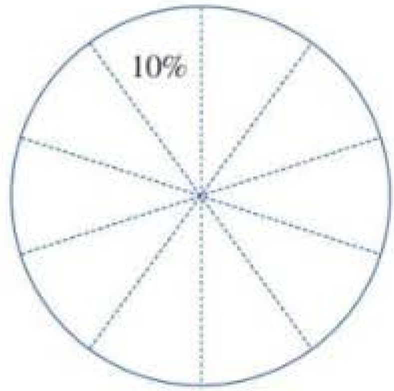
a) Ta lựa chọn biểu đồ đoạn thẳng để biểu diễn dữ liệu trên.

b) Sau khi hoàn thiện biểu đồ ở *Hình 10*, ta nhận được biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 11* biểu diễn số thành viên có mặt tại câu lạc bộ trong những ngày đã nêu.

Ví dụ 7 Một đội sản xuất bình xét thi đua cho mỗi thành viên theo bốn mức: Tốt, Khá, Trung bình, Chưa đạt. Sau khi bình xét, tỉ lệ xếp loại thi đua theo bốn mức: Tốt, Khá, Trung bình, Chưa đạt lần lượt là 30%; 40%; 20%; 10%.

a) Hãy lựa chọn biểu đồ thích hợp để biểu diễn dữ liệu trên.

b) Hãy hoàn thiện biểu đồ ở *Hình 12* để nhận được biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các dữ liệu thống kê trên. Biết rằng hình tròn biểu diễn dữ liệu ở *Hình 12* đã được chia sẵn thành các hình quạt, mỗi hình quạt ứng với 10%.

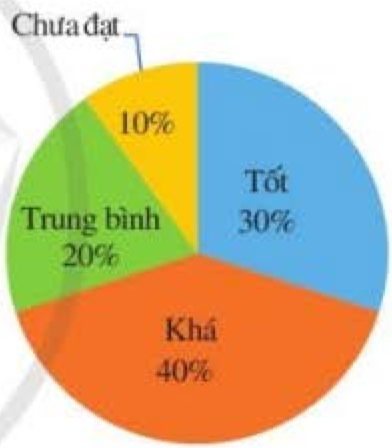


Hình 12

Giải

a) Ta lựa chọn biểu đồ hình quạt tròn để biểu diễn dữ liệu trên.

b) Do tỉ lệ xếp loại Tốt là 30% nên ta tô màu ba hình quạt chia sẵn liền nhau để biểu diễn tỉ lệ xếp loại Tốt. Ta cũng làm tương tự đối với các tỉ lệ xếp loại còn lại. Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 13* biểu thị các dữ liệu thống kê đã cho.



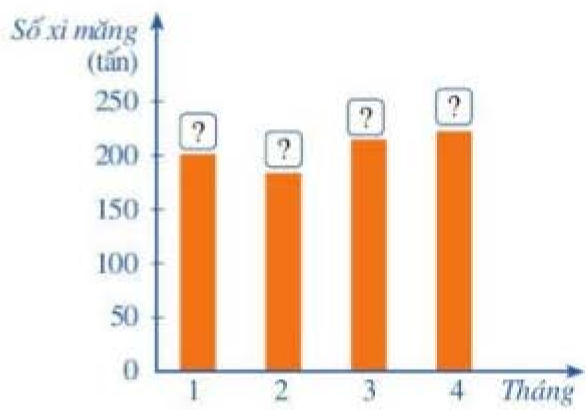
Hình 13

II. BIỂU DIỄN MỘT TẬP DỮ LIỆU THEO NHỮNG CÁCH KHÁC NHAU

3 Số xi măng bán được của một cửa hàng kinh doanh vật liệu xây dựng trong các tháng 1, 2, 3, 4 lần lượt là: 200,5; 183,6; 215,5; 221,9 (đơn vị: tấn).

a) Lập bảng số liệu thống kê số tấn xi măng bán được của cửa hàng đó trong các tháng 1, 2, 3, 4 theo mẫu sau:

Tháng	1	2	3	4
Số tấn đã bán	?	?	?	?



Hình 14

b) Hãy hoàn thiện biểu đồ ở *Hình 14* để nhận được biểu đồ cột biểu diễn số tấn xi măng bán được của cửa hàng đó trong các tháng trên.

Nhận xét: Đối với một tập dữ liệu, ta có thể:

– Biểu diễn tập dữ liệu đó theo những cách khác nhau vào bảng, biểu đồ thích hợp;

– Chuyển tập dữ liệu đó từ dạng biểu diễn này sang dạng biểu diễn khác.

Ví dụ 8 Thống kê số lượt khách du lịch quốc tế đến Việt Nam trong các năm 1990, 1995, 2000, 2005, 2010, 2015, 2019 khoảng là: 250; 1 351; 2 140; 3 478; 5 050; 7 944; 18 009 (đơn vị: nghìn lượt khách) (*Nguồn:https://vietnamtourism.gov.vn*).

a) Lập bảng thống kê số lượt khách du lịch quốc tế đến Việt Nam trong các năm trên theo mẫu bên:

Năm	1990	1995	2000	2005	2010	2015	2019
Số lượt khách (nghìn lượt)	?	?	?	?	?	?	?

b) Hãy hoàn thiện biểu đồ ở *Hình 15* để nhận được biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê số lượt khách du lịch quốc tế đến Việt Nam trong các năm trên.

Hình 15

Giải

a) *Bảng 2* biểu diễn số lượt khách du lịch quốc tế đến Việt Nam trong các năm trên:

Năm	1990	1995	2000	2005	2010	2015	2019
Số lượt khách (nghìn lượt)	250	1 351	2 140	3 478	5 050	7 944	18 009

Bảng 2

b) Biểu đồ cột ở *Hình 16* biểu diễn số lượt khách du lịch quốc tế đến Việt Nam trong các năm trên:

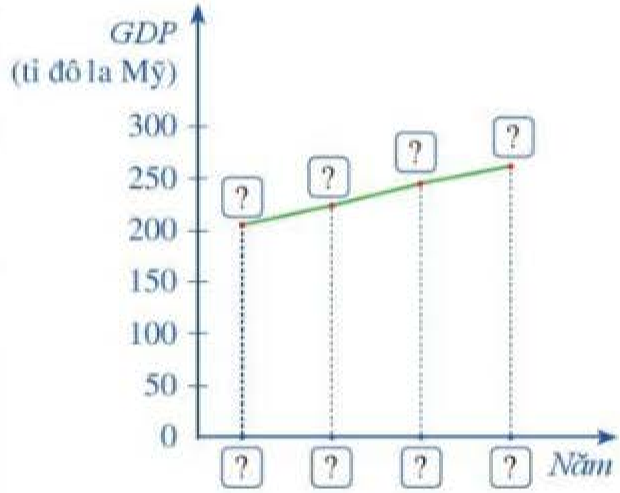
Hình 16

Ví dụ 9 Như đã nêu trong *Ví dụ 2*, tổng sản phẩm trong nước (GDP) theo giá hiện hành của Việt Nam trong các năm 2016, 2017, 2018, 2019 lần lượt là: 205,3; 223,7; 245,2; 261,9 (đơn vị: tỉ đô la Mỹ).

a) Lập bảng số liệu thống kê GDP của Việt Nam trong các năm trên theo mẫu sau:

Năm	2016	2017	2018	2019
GDP (tỉ đô la Mỹ)	?	?	?	?

b) Hãy hoàn thiện biểu đồ ở *Hình 17* để nhận được biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn GDP của Việt Nam trong các năm trên.



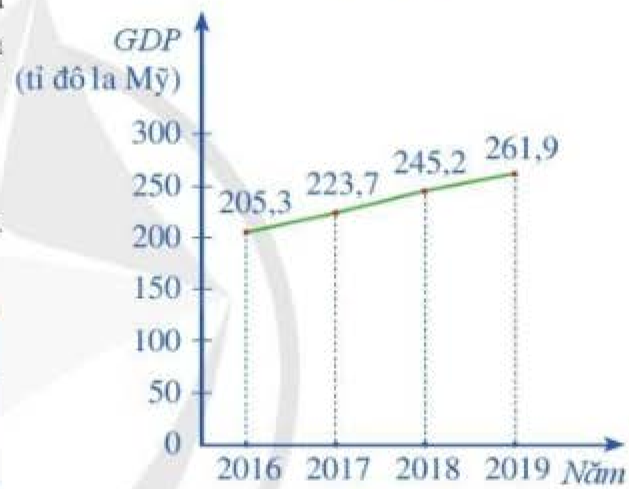
Hình 17

Giải

a) Ta có bảng số liệu thống kê GDP của Việt Nam trong các năm đã nêu là:

Năm	2016	2017	2018	2019
GDP (tỉ đô la Mỹ)	205,3	223,7	245,2	261,9

b) Sau khi hoàn thiện biểu đồ ở *Hình 17*, ta nhận được biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 18* biểu diễn GDP của Việt Nam trong các năm trên.



Hình 18

Ví dụ 10 Biểu đồ cột kép ở *Hình 19* biểu diễn tổng sản phẩm trong nước của lĩnh vực Nông, lâm nghiệp và thuỷ sản; Công nghiệp và xây dựng, trong các năm 2017, 2018, 2019. Lập bảng số liệu tổng sản phẩm trong nước của hai lĩnh vực trên trong các năm 2017, 2018, 2019 theo mẫu sau (đơn vị: nghìn tỉ đồng):

Lĩnh vực \ Năm	2017	2018	2019
Nông, lâm nghiệp và thuỷ sản	?	?	?
Công nghiệp và xây dựng	?	?	?

(*Nguồn: Niên giám Thống kê 2020, NXB Thống kê, 2021*)

Hình 19

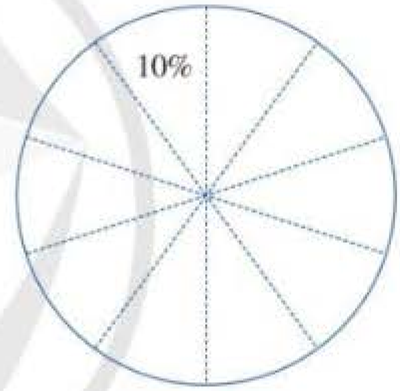
Giải

Bảng số liệu thống kê tổng sản phẩm trong nước của hai lĩnh vực trên trong các năm 2017, 2018, 2019 như sau (đơn vị: nghìn tỉ đồng):

Năm / Lĩnh vực	2017	2018	2019
Nông, lâm nghiệp và thuỷ sản	482,4	500,6	510,6
Công nghiệp và xây dựng	1 141,4	1 242,4	1 353,0

Ví dụ 11 Biểu đồ cột ở *Hình 20* biểu diễn tỉ lệ phần trăm sản phẩm bán được của một doanh nghiệp trong bốn quý của năm 2021. Hãy hoàn thiện biểu đồ ở *Hình 21* để nhận được biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các dữ liệu thống kê trên. Biết rằng hình tròn biểu diễn dữ liệu ở *Hình 21* đã được chia sẵn thành các hình quạt, mỗi hình quạt ứng với 10%.

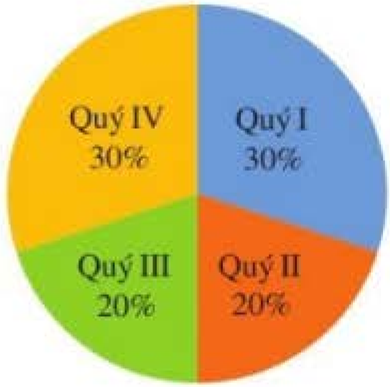
Hình 20



Hình 21

Giải

Do tỉ lệ phần trăm sản phẩm bán được trong Quý I là 30% nên ta tô màu ba hình quạt chia sẵn liền nhau để biểu diễn tỉ lệ đó. Ta cũng làm tương tự đối với các tỉ lệ phần trăm sản phẩm bán được trong các quý còn lại. Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 22* biểu thị các dữ liệu thống kê đã cho.



Hình 22

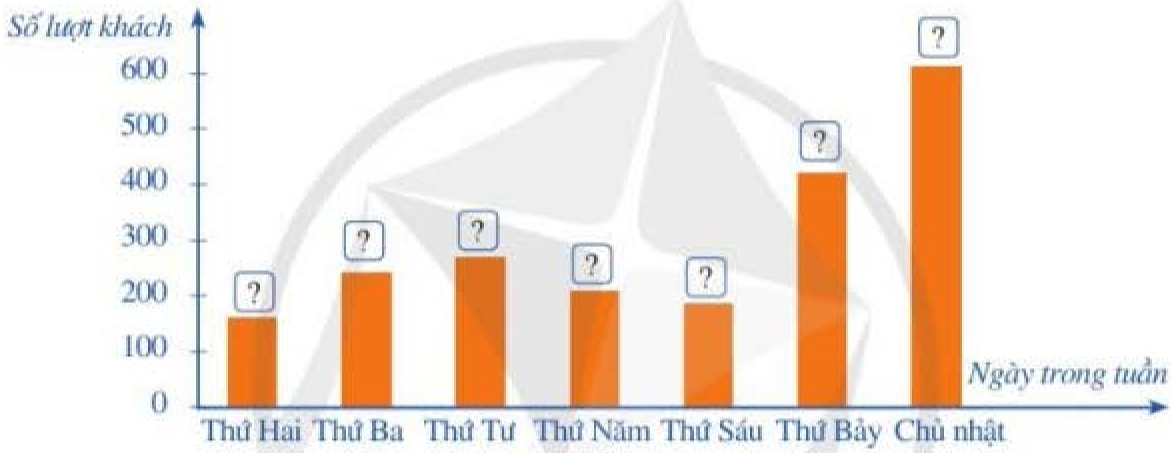
BÀI TẬP

1. Số lượt khách đến một cửa hàng kinh doanh từ thứ Hai đến Chủ nhật của một tuần trong tháng lần lượt là: 161, 243, 270, 210, 185, 421, 615.

a) Lập bảng thống kê số lượt khách đến cửa hàng trong những ngày đó theo mẫu sau:

Ngày trong tuần	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu	Thứ Bảy	Chủ nhật
Số lượt khách	?	?	?	?	?	?	?

b) Hãy hoàn thiện biểu đồ ở *Hình 23* để nhận được biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê số lượt khách đến cửa hàng trong những ngày đó.



Hình 23

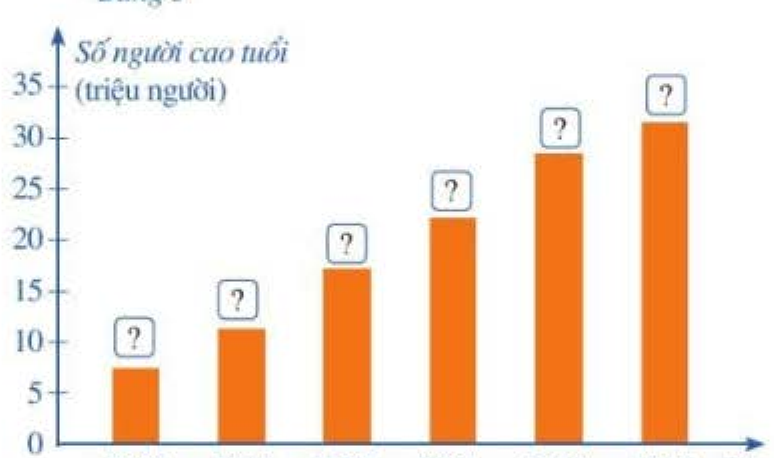
2. *Bảng 3* nêu thực trạng và dự báo về số người cao tuổi của Việt Nam đến năm 2069:

Năm	2009	2019	2029	2038	2049	2069
Số người cao tuổi (triệu người)	7,45	11,41	17,28	22,29	28,61	31,69

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

Bảng 3

Hãy hoàn thiện biểu đồ ở *Hình 24* để nhận được biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thực trạng và dự báo về số người cao tuổi của Việt Nam đến năm 2069:

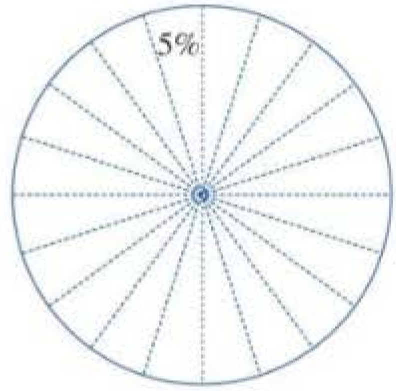


Hình 24

3. Ban tổ chức của giải thi đấu thể thao bán vé theo bốn mức A, B, C, D. Tỉ lệ phân chia các vé ở bốn mức A, B, C, D lần lượt là 35%, 45%, 15%, 5%.

a) Lập bảng thống kê tỉ lệ phân chia vé ở bốn mức trên theo mẫu sau:

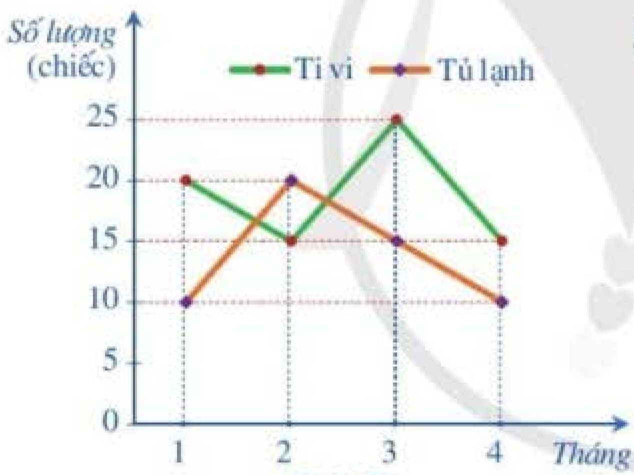
Mức vé	A	B	C	D
Tỉ lệ vé (%)	?	?	?	?



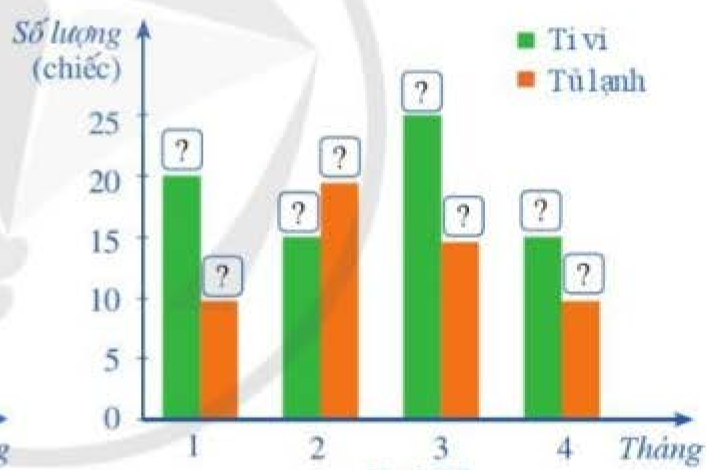
Hình 25

b) Hãy hoàn thiện biểu đồ ở *Hình 25* để nhận được biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các dữ liệu thống kê trên. Biết rằng ở *Hình 25* hình tròn đã được chia sẵn thành các hình quạt, mỗi hình quạt ứng với 5%.

4. Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 26* thống kê số lượng ti vi và tủ lạnh bán được trong tháng 1, tháng 2, tháng 3, tháng 4 của một cửa hàng kinh doanh. Hãy hoàn thiện biểu đồ cột kép ở *Hình 27* để nhận được biểu đồ biểu diễn các dữ liệu trong biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 26*.



Hình 26

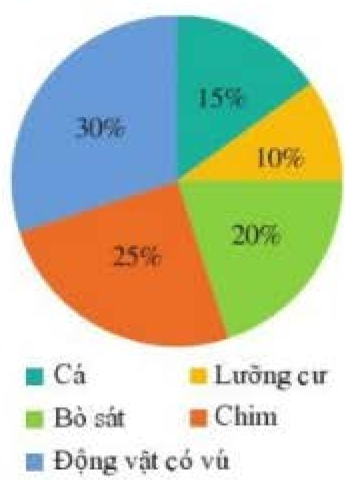


Hình 27

5. Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 28* biểu diễn tỉ lệ các loại mẫu vật trong bảo tàng sinh vật của một trường đại học về những lớp động vật có xương sống: Cá; Lưỡng cư; Bò sát; Chim; Động vật có vú.

Lập bảng thống kê tỉ lệ các loại mẫu vật đó trong bảo tàng sinh vật theo mẫu sau:

Lớp động vật có xương sống	Cá	Lưỡng cư	Bò sát	Chim	Động vật có vú
Tỉ lệ mẫu vật (%)	?	?	?	?	?



Hình 28

§3. PHÂN TÍCH VÀ XỬ LÍ DỮ LIỆU THU ĐƯỢC Ở DẠNG BẢNG, BIỂU ĐỒ

Ở lớp 6 và lớp 7, chúng ta đã làm quen với việc phân tích và xử lí dữ liệu thu được ở dạng bảng hoặc biểu đồ.

Phân tích và xử lí dữ liệu thu được ở dạng bảng hoặc biểu đồ để làm gì?

I. PHÁT HIỆN VẤN ĐỀ DỰA TRÊN PHÂN TÍCH VÀ XỬ LÍ DỮ LIỆU THU ĐƯỢC Ở DẠNG BẢNG, BIỂU ĐỒ

Trong mục này, chúng ta tiếp tục tìm hiểu cách phát hiện vấn đề (hoặc quy luật đơn giản) dựa trên phân tích và xử lí số liệu thu được ở dạng bảng, biểu đồ thống kê nhằm rút ra những kết luận hữu ích.

1 *Bảng 1* cho biết tiền lãi của một cửa hàng trong Quý I năm 2022:

Tháng	Tháng 1	Tháng 2	Tháng 3
Tiền lãi (triệu đồng)	10	30	15

Bảng 1

a) Tính tổng tiền lãi của cửa hàng trong các tháng của Quý I năm 2022.

b) Tiền lãi trong tháng 2 gấp bao nhiêu lần tiền lãi của cả hai tháng còn lại của Quý I?

Để phát hiện vấn đề (hoặc quy luật đơn giản) dựa trên phân tích và xử lí số liệu thu được, ta cần:
– Nhận biết được mối liên hệ toán học đơn giản giữa các số liệu đã được biểu diễn;
– Thực hiện được tính toán và suy luận toán học.

Ví dụ 1 Đánh giá kết quả học tập trong Học kì I của học sinh lớp 8A ở một trường trung học cơ sở được thống kê trong *Bảng 2*:

Mức	Tốt	Khá	Đạt	Chưa đạt
Số học sinh	16	11	10	3

Bảng 2

a) Lớp 8A có tất cả bao nhiêu học sinh?

b) Trong buổi sơ kết cuối Học kì I, giáo viên chủ nhiệm lớp 8A thông báo: Tỉ lệ học sinh đạt kết quả học tập Học kì I được đánh giá ở mức Tốt và Khá so với cả lớp là trên 67%. Thông báo đó của giáo viên chủ nhiệm có đúng không?

Giải

a) Số học sinh của lớp 8A là:

$$16 + 11 + 10 + 3 = 40 \text{ (học sinh)}.$$

b) Số học sinh đạt kết quả học tập Học kì I được đánh giá ở mức Tốt và Khá của lớp 8A là:

$$16 + 11 = 27 \text{ (học sinh)}.$$

So với cả lớp 8A, tỉ lệ học sinh đạt kết quả học tập Học kì I được đánh giá ở mức Tốt và Khá là:

$$\frac{27 \,.\, 100}{40}\% = 67{,}5\% > 67\%.$$

Vậy thông báo đó của giáo viên chủ nhiệm là đúng.

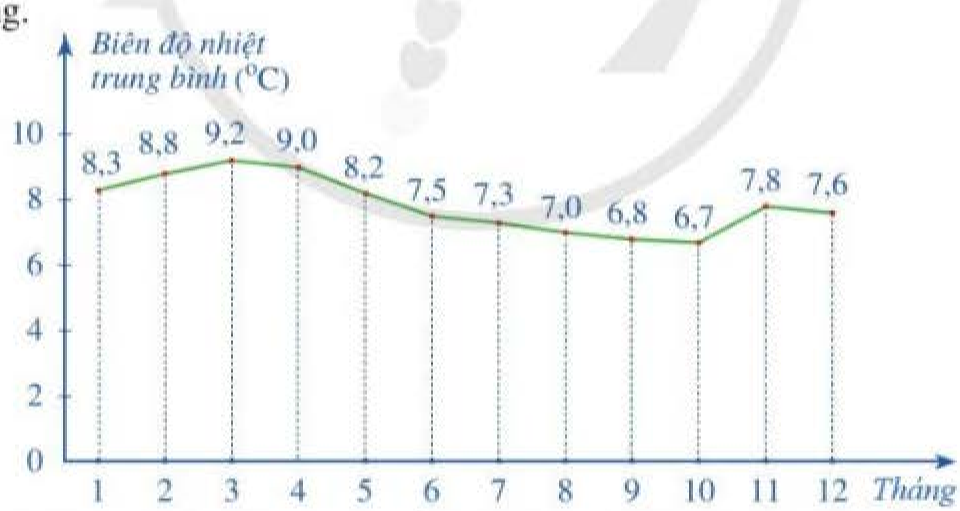
1 Xếp loại thi đua của một tổ sản xuất là:

Xếp loại	Xuất sắc	Đạt	Không đạt
Số nhân viên	7	12	1

Tổ trưởng thông báo: Tỉ lệ nhân viên xếp loại ở mức Xuất sắc so với cả tổ là trên 30%. Thông báo đó của tổ trưởng có đúng không?

Ví dụ 2 Chênh lệch giữa nhiệt độ cao nhất và nhiệt độ thấp nhất trong ngày được gọi là *biên độ nhiệt* của ngày đó. *Biên độ nhiệt trung bình tháng* là số trung bình cộng của biên độ nhiệt các ngày trong tháng đó.

Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 29* biểu diễn biên độ nhiệt trung bình tháng của Đồng bằng sông Cửu Long.



(Nguồn: Lê Huy Bá, Lương Văn Việt và Nguyễn Xuân Hoàn, Khô hạn, xâm nhập mặn ở Đồng bằng sông Cửu Long – Cơ sở lí luận và thực tiễn, NXB ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, 2017)

Hình 29

a) Biên độ nhiệt trung bình của tháng nào là cao nhất? Thấp nhất?

b) Hãy nhận xét về sự thay đổi biên độ nhiệt trung bình tháng trong các khoảng thời gian: tháng 1 – tháng 3; tháng 3 – tháng 10; tháng 10 – tháng 11; tháng 11 – tháng 12.

Giải

a) Từ biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 29*, ta thấy biên độ nhiệt trung bình của tháng 3 là cao nhất và biên độ nhiệt trung bình của tháng 10 là thấp nhất.

b) Ta có các nhận xét sau:

– Biên độ nhiệt trung bình tháng tăng trong các khoảng thời gian: tháng 1 – tháng 3; tháng 10 – tháng 11.

– Biên độ nhiệt trung bình tháng giảm trong các khoảng thời gian: tháng 3 – tháng 10; tháng 11 – tháng 12.

Chú ý: Theo dõi biên độ nhiệt trung bình tháng của một khu vực trong khoảng thời gian đủ dài thì ta có thể nhận biết được những nét đặc trưng khí hậu của khu vực đó.

Ví dụ 3 Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 30* biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) kế hoạch chi tiêu hàng tháng của gia đình bác Hạnh.

a) Khoản chi tiêu nào của gia đình bác Hạnh là lớn nhất?

b) Số tiền chi tiêu hàng tháng của gia đình bác Hạnh dành cho ăn uống gấp bao nhiêu lần số tiền dành cho tiết kiệm?

c) Tính số tiền gia đình bác Hạnh tiết kiệm hàng tháng theo kế hoạch, biết tổng thu nhập hàng tháng của gia đình bác Hạnh là 25 triệu đồng.

Hình 30

Giải

a) Khoản chi tiêu hàng tháng dành cho ăn uống của gia đình bác Hạnh là lớn nhất.

b) Do 35 : 20 = 1,75 nên số tiền chi tiêu hàng tháng của gia đình bác Hạnh dành cho ăn uống gấp 1,75 lần số tiền dành cho tiết kiệm.

c) Số tiền gia đình bác Hạnh tiết kiệm hàng tháng theo kế hoạch là: 25 . 20% = 5 (triệu đồng).

II. GIẢI QUYẾT NHỮNG VẤN ĐỀ ĐƠN GIẢN DỰA TRÊN PHÂN TÍCH VÀ XỬ LÍ DỮ LIỆU THU ĐƯỢC Ở DẠNG BẢNG, BIỂU ĐỒ

Sau khi phát hiện vấn đề (hoặc quy luật đơn giản) dựa trên phân tích và xử lí số liệu thu được, ta cần giải quyết những vấn đề đó nhằm rút ra những kết luận hữu ích.

2 Để chuẩn bị đưa ra thị trường mẫu sản phẩm mới, một hãng sản xuất đồ nội thất tiến hành thăm dò màu sơn mà người mua yêu thích. Hãng sản xuất đó đã hỏi ý kiến của 100 người mua hàng và nhận được kết quả là: 65 người thích màu nâu, 20 người thích màu cam, 15 người thích màu xanh. Theo em, hãng đó nên sản xuất nhiều hơn mẫu sản phẩm với màu sơn nào?

Để giải quyết vấn đề đã được phát hiện (dựa trên phân tích và xử lí số liệu thu được), ta cần thực hiện những tính toán và suy luận trên cơ sở mối liên hệ toán học giữa các số liệu đó.

Ví dụ 4 Biểu đồ cột ở *Hình 31* thống kê sản lượng sản xuất than ở tỉnh Quảng Ninh trong các năm 2017, 2018, 2019, 2020. Căn cứ vào thống kê trên, một bài báo đã nêu ra nhận định: "Tổng sản lượng sản xuất than ở tỉnh Quảng Ninh trong các năm 2017, 2018, 2019, 2020 đã đạt xấp xỉ 164 triệu tấn và so với năm 2017, sản lượng sản xuất than ở tỉnh Quảng Ninh trong năm 2020 đã tăng lên xấp xỉ 34%". Em hãy cho biết nhận định trên của bài báo có chính xác không?

Giải

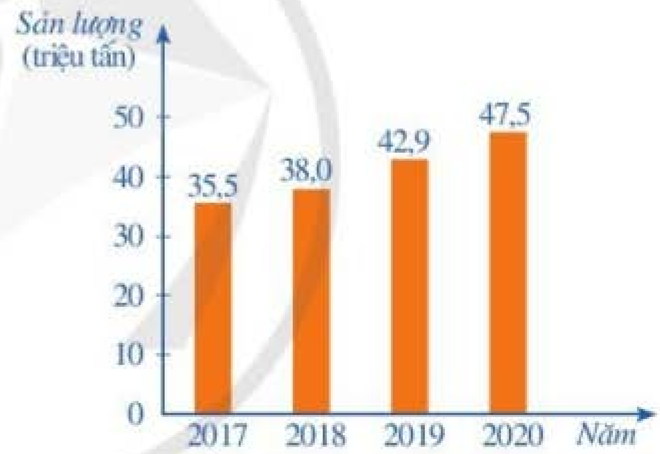
Tổng sản lượng sản xuất than ở tỉnh Quảng Ninh trong các năm 2017, 2018, 2019, 2020 là:

$$35,5 + 38 + 42,9 + 47,5 \approx 164 \text{ (triệu tấn)}.$$

Ở tỉnh Quảng Ninh, tỉ số phần trăm của sản lượng sản xuất than trong năm 2020 và sản lượng sản xuất than trong năm 2017 là:

$$\frac{47,5 \,.\, 100}{35,5}\% \approx 134\%.$$

Vậy nhận định trên của bài báo là chính xác.



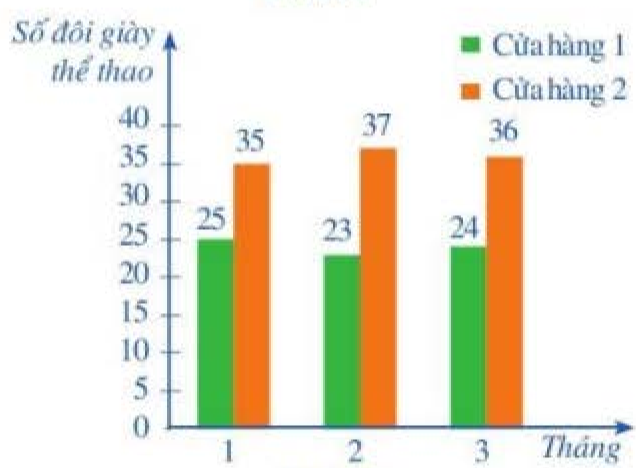
(Nguồn: Báo cáo của Bộ Công thương từ năm 2017 đến năm 2020)

Hình 31

Ví dụ 5 Biểu đồ cột kép ở *Hình 32* thống kê số đôi giày thể thao được bán ra trong Quý I năm 2022 của hai cửa hàng kinh doanh.

a) Mỗi cửa hàng đó đã bán được bao nhiêu đôi giày thể thao trong Quý I năm 2022?

b) Giả sử hết Quý I cửa hàng 1 còn lại 5 đôi giày. Để có thể bán hết hàng, em hãy chọn



Hình 32

phương án kinh doanh phù hợp nhất đối với cửa hàng 1 trong tháng tiếp theo:

A. Nhập về 10 đôi giày thể thao; **B.** Nhập về 15 đôi giày thể thao;

C. Nhập về 20 đôi giày thể thao; **D.** Nhập về 40 đôi giày thể thao.

Giải

a) Số đôi giày thể thao cửa hàng 1 đã bán được trong Quý I năm 2022 là: 25 + 23 + 24 = 72 (đôi giày).

Số đôi giày thể thao cửa hàng 2 đã bán được trong Quý I năm 2022 là: 35 + 37 + 36 = 108 (đôi giày).

b) Số đôi giày thể thao cửa hàng 1 đã bán được ở mỗi tháng của Quý I năm 2022 là từ 23 đến 25 (đôi giày), bình quân là 24 đôi giày/tháng. Mặt khác, hết Quý 1 của hàng 1 vẫn còn lại 5 đôi giày nên số giày nhập về theo các phương án A và B là ít, trong khi đó số giày nhập về theo phương án D là nhiều, chỉ có số giày nhập về theo phương án C là hợp lí. Vậy cửa hàng 1 nên chọn phương án C.

2 Số cây được trồng trong vườn nhà bác Mai là:

Loại cây	**Vải**	**Hồng**	**Chuối**
Số cây	80	25	55

a) Tính tổng số cây trong vườn nhà bác Mai.

b) Hỏi số cây vải chiếm bao nhiêu phần trăm tổng số cây trong vườn?

BÀI TẬP

1. Biểu đồ cột kép ở *Hình 33* thống kê thu nhập bình quân đầu người/năm của Việt Nam và Singapore trong các năm 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020.

(*Nguồn: Niên giám Thống kê 2020, NXB Thống kê, 2021*)

Hình 33

a) Lập bảng thống kê tỉ số của thu nhập bình quân đầu người/năm của Singapore và thu nhập bình quân đầu người/năm của Việt Nam trong các năm nói trên theo mẫu ở *Bảng 3* (viết tỉ số ở dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).

Năm	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Tỉ số của thu nhập bình quân đầu người/năm của Singapore và thu nhập bình quân đầu người/năm của Việt Nam	?	?	?	?	?	?

Bảng 3

b) Nêu nhận xét về sự thay đổi của các tỉ số trong *Bảng 3*.

2. Biểu đồ đoạn thẳng trong *Hình 34* biểu diễn số lượng lớp học ở cấp trung học cơ sở (THCS) của Việt Nam trong các năm học 2015 – 2016, 2016 – 2017, 2017 – 2018, 2018 – 2019.

(Nguồn: Niên giám thống kê 2020, NXB Thống kê, 2021)

Hình 34

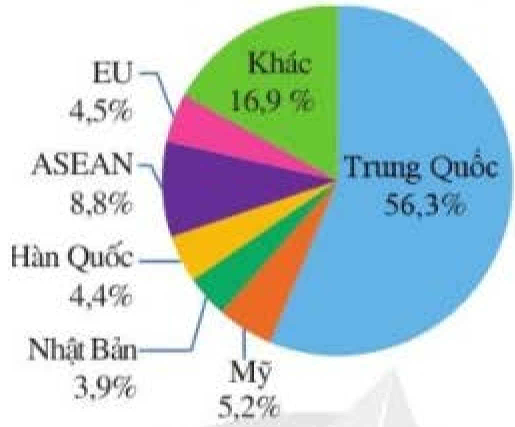
a) Lập bảng thống kê số lượng lớp học ở cấp THCS của Việt Nam trong các năm học đó theo mẫu sau:

Năm học	2015 – 2016	2016 – 2017	2017 – 2018	2018 – 2019
Số lớp học ở cấp THCS (nghìn lớp)	?	?	?	?

b) So với năm học 2015 – 2016, số lượng lớp học ở cấp THCS của Việt Nam trong năm học 2018 – 2019 đã tăng lên bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

c) Em hãy đề xuất những giải pháp để tăng số lượng lớp học ở cấp THCS của Việt Nam trong những năm học tới, đặc biệt ở những thành phố và khu đô thị lớn.

3. Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 35* biểu diễn cơ cấu thị trường xuất khẩu rau quả của Việt Nam năm 2020. Theo số liệu của Tổng cục Hải quan, kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong năm 2020 đạt 3,27 tỉ đô la Mỹ. Ở đây, kim ngạch xuất khẩu một loại hàng hoá là số tiền thu được khi xuất khẩu loại hàng hoá đó.



(Nguồn: Tổng cục Hải quan)

Hình 35

a) Lập bảng thống kê kim ngạch xuất khẩu rau quả của nước ta sang các thị trường đó trong năm 2020 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) theo mẫu sau:

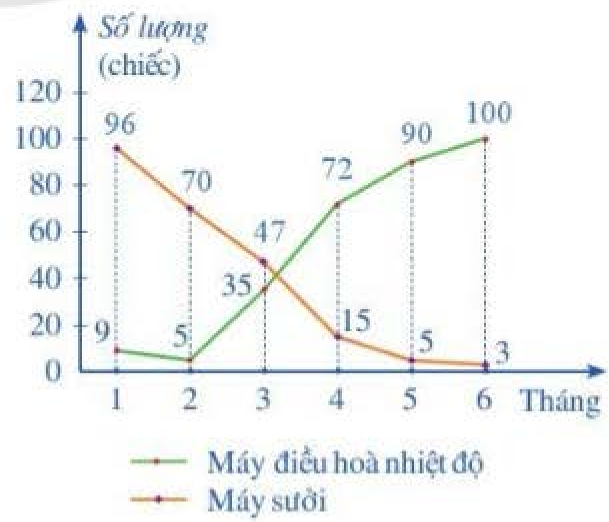
Thị trường xuất khẩu	Trung Quốc	ASEAN	Mỹ	EU	Hàn Quốc	Nhật Bản	Khác
Kim ngạch xuất khẩu rau quả (triệu đô la Mỹ)	?	?	?	?	?	?	?

b) Kim ngạch xuất khẩu rau quả sang thị trường Trung Quốc nhiều hơn tổng kim ngạch xuất khẩu rau quả sang các thị trường còn lại là bao nhiêu triệu đô la Mỹ?

4. Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 36* thống kê số lượng máy điều hoà nhiệt độ và máy sưởi bán được trong sáu tháng đầu năm của một cửa hàng kinh doanh.

a) Trong tháng 6, cửa hàng đó bán được loại máy nào nhiều hơn?

b) Phân tích xu thế về số lượng máy mỗi loại mà cửa hàng đó bán được. Tháng tiếp theo cửa hàng đó nên nhập nhiều loại máy nào?



Hình 36

§4. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN TRONG MỘT SỐ TRÒ CHƠI ĐƠN GIẢN

Quan sát đồng xu ở *Hình 37*. Ta quy ước: mặt xuất hiện số 5 000 là mặt sấp hay mặt S; mặt xuất hiện Quốc huy Việt Nam là mặt ngửa hay mặt N.

Tung đồng xu 1 lần. Xét biến cố ngẫu nhiên "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N".

Hai mặt của đồng xu

Hình 37

Làm thế nào để tính được xác suất của biến cố ngẫu nhiên nói trên?

I. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI TUNG ĐỒNG XU

Trong trò chơi tung đồng xu, ta quy ước đồng xu là cân đối và đồng chất.

1 Tung đồng xu 1 lần.

a) Viết tập hợp A các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu.

b) Viết tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra đối với biến cố B: "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N". Mỗi phần tử của tập hợp đó gọi là một kết quả thuận lợi cho biến cố B.

c) Tìm tỉ số của số các kết quả thuận lợi cho biến cố B và số phần tử của tập hợp A.

- *Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu là* $A = \{S; N\}$.
- *Có một kết quả thuận lợi cho biến cố là mặt N.*

  Vì thế, tỉ số cần tìm là $\frac{1}{2}$.

Như vậy, trong trò chơi tung đồng xu, tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N" và số các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu là $\frac{1}{2}$. Tỉ số này được gọi là *xác suất* của biến cố nói trên.

Trong trò chơi tung đồng xu, ta có:

- Xác suất của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N" bằng $\frac{1}{2}$.
- Xác suất của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt S" bằng $\frac{1}{2}$.

II. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI VÒNG QUAY SỐ

2 *Hình 38* mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm tám phần bằng nhau và ghi các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8, chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa.

Hình 38

Quay đĩa tròn một lần.

a) Viết tập hợp C gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số ghi ở hình quạt mà mũi tên chỉ vào khi đĩa dừng lại.

b) Viết tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra đối với biến cố D: "Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số lẻ". Mỗi phần tử của tập hợp đó gọi là một kết quả thuận lợi cho biến cố D.

c) Tìm tỉ số của số các kết quả thuận lợi cho biến cố D và số phần tử của tập hợp C.

Trong trò chơi vòng quay số đã nêu, tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố "Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số lẻ" và số các kết quả có thể xảy ra đối với số ghi ở hình quạt mà mũi tên chỉ vào là $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Tỉ số này gọi là *xác suất* của biến cố nói trên.

Trong trò chơi vòng quay số đã nêu, nếu k là số kết quả thuận lợi cho một biến cố thì xác suất của biến cố đó bằng $\frac{k}{8}$.

Ví dụ 1 Trong trò chơi vòng quay số ở *Hoạt động 2*, tính xác suất của biến cố "Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số chẵn".

Giải

Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố "Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số chẵn".

Vì thế, xác suất của biến cố đó là $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

1 Trong trò chơi vòng quay số ở *Hoạt động 2*, tính xác suất của biến cố "Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số nhỏ hơn 6".

III. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI CHỌN NGẪU NHIÊN MỘT ĐỐI TƯỢNG TỪ MỘT NHÓM ĐỐI TƯỢNG

Ta xét trò chơi chọn ngẫu nhiên một đối tượng từ một nhóm đối tượng với số kết quả có thể xảy ra là hữu hạn và khả năng xảy ra của từng kết quả là giống nhau.

3 Một hộp có 10 viên bi với kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các viên bi đó tên 4 loài thực vật là: Lúa, Ngô, Hoa hồng, Hoa hướng dương và tên 6 loài động vật là: Trâu, Bò, Voi, Hổ, Báo, Sư tử, hai viên bi khác nhau thì viết hai tên khác nhau.

Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp.

a) Viết tập hợp E gồm các kết quả có thể xảy ra đối với tên sinh vật được viết trên viên bi lấy ra.

b) Viết tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra đối với biến cố G: "Trên viên bi lấy ra viết tên một loài động vật". Mỗi phần tử của tập hợp đó gọi là một kết quả thuận lợi cho biến cố G.

c) Tìm tỉ số của số các kết quả thuận lợi cho biến cố G và số phần tử của tập hợp E.

Trong trò chơi lấy bi từ trong hộp đã nêu, tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố "Trên viên bi lấy ra viết tên một loài động vật" và số các kết quả có thể xảy ra đối với tên sinh vật được viết trên viên bi lấy ra là $\frac{6}{10} = 0,6$. Tỉ số này gọi là *xác suất* của biến cố nói trên.

Trong trò chơi chọn ngẫu nhiên một đối tượng từ một nhóm đối tượng, xác suất của một biến cố bằng tỉ số của số kết quả thuận lợi cho biến cố và số các kết quả có thể xảy ra đối với đối tượng được chọn ra.

Ví dụ 2 Trong trò chơi lấy bi ở *Hoạt động 3*, tính xác suất của biến cố:

a) "Trên viên bi lấy ra viết tên một loài thực vật";

b) "Trên viên bi lấy ra viết tên một loài động vật ăn thịt".

Giải

a) Các kết quả thuận lợi cho biến cố "Trên viên bi lấy ra viết tên một loài thực vật" là viên bi được lấy ra viết những tên sau: Lúa, Ngô, Hoa hồng, Hoa hướng dương. Do đó, có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố đó. Vì thế, xác suất của biến cố đó là $\frac{4}{10} = 0,4$.

b) Các kết quả thuận lợi cho biến cố "Trên viên bi lấy ra viết tên một loài động vật ăn thịt" là viên bi được lấy ra viết những tên sau: Hổ, Báo, Sư tử. Do đó, có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố đó. Vì thế, xác suất của biến cố đó là $\frac{3}{10} = 0,3$.

Ví dụ 3 Một đội thanh niên tình nguyện gồm 25 thành viên đến từ các tỉnh/thành phố: Hà Nội, Hải Dương, Hải Phòng, Hà Nam, Nam Định, Ninh Bình, Đắk Lắk, Lâm Đồng, Phú Yên, Khánh Hoà, Bình Dương, Tây Ninh, Long An, Tiền Giang, Vĩnh Long, Bến Tre, Đồng Tháp, Trà Vinh, An Giang, Cần Thơ, Hậu Giang, Bạc Liêu, Sóc Trăng, Kiên Giang và Cà Mau; mỗi tỉnh/thành phố chỉ có đúng một thành viên trong đội. Chọn ra ngẫu nhiên một thành viên của đội thanh niên đó. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Thành viên được chọn ra đến từ vùng Đồng bằng sông Hồng";

b) "Thành viên được chọn ra đến từ vùng Đồng bằng sông Cửu Long".

Giải

Vì đội thanh niên tình nguyện gồm 25 thành viên nên số các kết quả có thể xảy ra đối với thành viên được chọn ra từ đội thanh niên đó là 25.

a) Các kết quả thuận lợi cho biến cố "Thành viên được chọn ra đến từ vùng Đồng bằng sông Hồng" là thành viên được chọn ra lần lượt đến từ các tỉnh/thành phố Hà Nội, Hải Dương, Hải Phòng, Hà Nam, Nam Định, Ninh Bình. Do đó có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố đó. Vì thế, xác suất của biến cố đó là $\frac{6}{25}$.

b) Các kết quả thuận lợi cho biến cố "Thành viên được chọn ra đến từ vùng Đồng bằng sông Cửu Long" là thành viên được chọn ra lần lượt đến từ các tỉnh/thành phố Long An, Tiền Giang, Vĩnh Long, Bến Tre, Đồng Tháp, Trà Vinh, An Giang, Cần Thơ, Hậu Giang, Bạc Liêu, Sóc Trăng, Kiên Giang, Cà Mau. Do đó có 13 kết quả thuận lợi cho biến cố đó. Vì thế, xác suất của biến cố đó là $\frac{13}{25}$.

Ví dụ 4 Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số.

a) Tìm số phần tử của tập hợp D gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.

b) Tính xác suất của biến cố "Số tự nhiên được viết ra là bội của 9".

Giải

a) Tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra là:

$$D = \{10; 11; 12; ...; 99\}.$$

Số phần tử của tập hợp D là 90.

2 Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Tính xác suất của biến cố "Số tự nhiên được viết ra là số chia cho 9 dư 1".

b) Các kết quả thuận lợi cho biến cố "Số tự nhiên được viết ra là bội của 9" là: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99. Do đó, có 10 kết quả thuận lợi cho biến cố đó. Vì thế, xác suất của biến cố đó là $\frac{10}{90} = \frac{1}{9}$.

BÀI TẬP

1. Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 52; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau.

Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có chữ số tận cùng bằng 5";

b) "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có hai chữ số";

c) "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có hai chữ số với tích các chữ số bằng 6".

2. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có ba chữ số.

a) Có bao nhiêu cách viết ngẫu nhiên một số tự nhiên như vậy?

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

– "Số tự nhiên được viết ra là lập phương của một số tự nhiên";

– "Số tự nhiên được viết ra là số chia hết cho 10".

3. Sau khi tìm hiểu các tài liệu, bạn Trung lựa chọn 10 biển đẹp của các châu lục trên thế giới: Hạ Long (thuộc nước Việt Nam); Phuket (thuộc nước Thái Lan); Marasusa Tropea (thuộc nước Italia); Cala Macarella (thuộc nước Tây Ban Nha); Ifaty (thuộc nước Madagascar); Lamu (thuộc nước Kenya); Ipanema (thuộc nước Brazil); Cancun (thuộc nước Mexico); Bondi (thuộc nước Australia); Scotia (thuộc châu Nam cực). Chọn ngẫu nhiên một biển trong 10 biển đó.

Vịnh Hạ Long (Việt Nam)

(Ảnh: Denis Rozan)

a) Gọi E là tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra đối với biển được chọn. Tính số phần tử của tập hợp E.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

– "Biển được chọn thuộc châu Âu";

– "Biển được chọn thuộc châu Á";

– "Biển được chọn thuộc châu Phi";

– "Biển được chọn thuộc châu Úc";

– "Biển được chọn thuộc châu Nam cực";

– "Biển được chọn thuộc châu Mỹ".

§5. XÁC SUẤT THỰC NGHIỆM CỦA MỘT BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ TRÒ CHƠI ĐƠN GIẢN

Sau khi tung một đồng xu 15 lần liên tiếp, bạn Thảo kiểm đếm được mặt N xuất hiện 8 lần.

- *Xác suất thực nghiệm của biến cố ngẫu nhiên "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N" là bao nhiêu?*
- *Xác suất thực nghiệm đó có mối liên hệ gì với xác suất của biến cố ngẫu nhiên trên?*

I. XÁC SUẤT THỰC NGHIỆM CỦA MỘT BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI TUNG ĐỒNG XU

Trong trò chơi tung đồng xu, ta quy ước đồng xu là cân đối và đồng chất.

1. Khái niệm

1 Sau khi tung một đồng xu 20 lần liên tiếp, bạn Thảo kiểm đếm được mặt N xuất hiện 11 lần. Viết tỉ số của số lần xuất hiện mặt N và tổng số lần tung đồng xu.

Nhận xét: Tỉ số của số lần xuất hiện mặt N và tổng số lần tung đồng xu là $\frac{11}{20}$. Ở lớp 6, ta đã gọi tỉ số đó là *xác suất thực nghiệm* xuất hiện mặt N khi tung một đồng xu 20 lần liên tiếp.

Xét biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N". Tỉ số $\frac{11}{20}$ còn gọi là *xác suất thực nghiệm* của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N" trong trò chơi trên.

Ta có định nghĩa sau:

- Xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N" khi tung đồng xu nhiều lần bằng

$$\frac{\text{Số lần xuất hiện mặt N}}{\text{Tổng số lần tung đồng xu}}.$$

- Xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt S" khi tung đồng xu nhiều lần bằng

$$\frac{\text{Số lần xuất hiện mặt S}}{\text{Tổng số lần tung đồng xu}}.$$

Ví dụ 1 Tính xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N" trong mỗi trường hợp sau:

a) Tung một đồng xu 30 lần liên tiếp, có 17 lần xuất hiện mặt N;

b) Tung một đồng xu 27 lần liên tiếp, có 14 lần xuất hiện mặt S.

1 Nếu tung một đồng xu 40 lần liên tiếp, có 19 lần xuất hiện mặt N thì xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt S" bằng bao nhiêu?

Giải

a) Xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N" là $\frac{17}{30}$.

b) Khi tung đồng xu 27 lần liên tiếp, do mặt S xuất hiện 14 lần nên mặt N xuất hiện 13 lần.

Vì vậy, xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N" là $\frac{13}{27}$.

2. Mối liên hệ giữa xác suất thực nghiệm của một biến cố với xác suất của biến cố đó khi số lần thực nghiệm rất lớn

2 Đọc kĩ các nội dung sau.

Bá tước George-Louis Leclerc de Buffon (1707 – 1788, người Pháp) là một nhà khoa học tự nhiên lớn, nghiên cứu về Thực vật, Động vật, Trái Đất, Lịch sử tự nhiên, ... Ông đã thí nghiệm việc tung đồng xu nhiều lần và thu được kết quả sau:

Số lần tung	Số lần mặt N xuất hiện	Xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N"
4 040	2 048	0,5069
12 000	6 019	0,5016
24 000	12 012	0,5005

Sau này, người ta chứng minh được rằng khi số lần tung ngày càng lớn thì xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N" ngày càng gần với 0,5. Như chúng ta đã biết số 0,5 là xác suất của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N".

Trong trò chơi tung đồng xu, khi số lần tung ngày càng lớn thì xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt N" (hoặc biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt S") ngày càng gần với xác suất của biến cố đó.

Ví dụ 2 Trong trò chơi tung đồng xu, khi số lần tung đồng xu ngày càng lớn thì xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt S" ngày càng gần với số thực nào?

Giải

Do xác suất của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt S" là 0,5 nên khi số lần tung đồng xu ngày càng lớn thì xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt S" ngày càng gần với 0,5.

II. XÁC SUẤT THỰC NGHIỆM CỦA MỘT BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI GIEO XÚC XẮC

Trong trò chơi gieo xúc xắc, ta quy ước xúc xắc là cân đối và đồng chất. Mỗi xúc xắc có sáu mặt, số chấm ở mỗi mặt là một trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6.

1. Khái niệm

3 Sau khi gieo ngẫu nhiên xúc xắc 20 lần liên tiếp, bạn Vinh kiểm đếm được mặt 1 chấm xuất hiện 3 lần. Viết tỉ số của số lần xuất hiện mặt 1 chấm và tổng số lần gieo xúc xắc.

Nhận xét: Tỉ số của số lần xuất hiện mặt 1 chấm và tổng số lần gieo xúc xắc là $\frac{3}{20}$.
Ở lớp 6, ta đã gọi tỉ số đó là *xác suất thực nghiệm* xuất hiện mặt 1 chấm khi gieo xúc xắc 20 lần liên tiếp.

Trong trò chơi trên, xét biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc là mặt 1 chấm". Tỉ số $\frac{3}{20}$ cũng còn gọi là *xác suất thực nghiệm* của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc là mặt 1 chấm".

Ta có định nghĩa sau:

Xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc là mặt *k* chấm" ($k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le 6$) khi gieo xúc xắc nhiều lần bằng

$$\frac{\text{Số lần xuất hiện mặt } k \text{ chấm}}{\text{Tổng số lần gieo xúc xắc}}.$$

Ví dụ 3 Gieo xúc xắc 30 lần liên tiếp, có 5 lần xuất hiện mặt 6 chấm. Tính xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc là mặt 6 chấm".

Giải

Xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc là mặt 6 chấm" là $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

2 Gieo xúc xắc 30 lần liên tiếp, có 4 lần xuất hiện mặt 2 chấm. Tính xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc là mặt 2 chấm".

2. Mối liên hệ giữa xác suất thực nghiệm của một biến cố với xác suất của biến cố đó khi số lần thực nghiệm rất lớn

Tương tự như trò chơi tung đồng xu, người ta chứng minh được rằng:

Trong trò chơi gieo xúc xắc, khi số lần gieo xúc xắc ngày càng lớn thì xác suất thực nghiệm của một biến cố ngày càng gần với xác suất của biến cố đó.

Ví dụ 4 Trong trò chơi gieo xúc xắc, khi số lần gieo xúc xắc ngày càng lớn thì xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc là mặt k chấm" ($k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 6$) ngày càng gần với số thực nào?

Giải

Do xác suất của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc là mặt k chấm" là $\frac{1}{6}$ nên khi số lần gieo xúc xắc ngày càng lớn thì xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc là mặt k chấm" ngày càng gần với $\frac{1}{6}$.

III. XÁC SUẤT THỰC NGHIỆM CỦA BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI CHỌN NGẪU NHIÊN MỘT ĐỐI TƯỢNG TỪ MỘT NHÓM ĐỐI TƯỢNG

Ta xét trò chơi chọn ngẫu nhiên một đối tượng từ một nhóm đối tượng với số kết quả có thể xảy ra là hữu hạn và khả năng xảy ra của từng kết quả là giống nhau.

1. Khái niệm

4 Một hộp có 1 quả bóng màu xanh, 1 quả bóng màu đỏ và 1 quả bóng màu vàng; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Mỗi lần bạn Châu lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp, ghi lại màu của quả bóng lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp. Sau 20 lần lấy bóng liên tiếp, bạn Châu kiểm đếm được quả bóng màu xanh xuất hiện 7 lần. Viết tỉ số của số lần xuất hiện quả bóng màu xanh và tổng số lần lấy bóng.

Nhận xét: Tỉ số của số lần xuất hiện quả bóng màu xanh và tổng số lần lấy bóng là $\frac{7}{20}$.

Ở lớp 6, ta đã gọi tỉ số đó là *xác suất thực nghiệm* xuất hiện quả bóng màu xanh khi lấy bóng 20 lần liên tiếp.

Trong trò chơi trên, xét biến cố "Quả bóng lấy ra là quả bóng màu xanh". Tỉ số $\frac{7}{20}$ cũng còn gọi là *xác suất thực nghiệm* của biến cố "Quả bóng lấy ra là quả bóng màu xanh".

Ta xét trò chơi chọn ngẫu nhiên một đối tượng từ một nhóm k đối tượng sao cho khả năng được chọn ra của k đối tượng đó là như nhau. Xét một đối tượng A trong nhóm đối tượng đó. Mỗi lần ta chọn ngẫu nhiên một đối tượng trong nhóm, ghi lại tên của đối tượng được chọn ra và bỏ lại đối tượng đó vào nhóm. Ta có định nghĩa sau:

Xác suất thực nghiệm của biến cố "Đối tượng *A* được chọn ra" khi chọn đối tượng nhiều lần bằng

$$\frac{\text{Số lần đối tượng } A \text{ được chọn ra}}{\text{Tổng số lần chọn đối tượng}}.$$

Ví dụ 5 Một hộp có 1 quả bóng màu xanh, 1 quả bóng màu đỏ và 1 quả bóng màu vàng; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Mỗi lần bạn Xuân lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng trong hộp, ghi lại màu của quả bóng lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp.

Trong 45 lần lấy bóng liên tiếp, quả bóng màu xanh xuất hiện 15 lần, quả bóng màu đỏ xuất hiện 14 lần. Tính xác suất thực nghiệm của biến cố "Quả bóng lấy ra là quả bóng màu vàng" trong trò chơi trên.

Giải

Khi lấy bóng 45 lần liên tiếp, do quả bóng màu xanh xuất hiện 15 lần và quả bóng màu đỏ xuất hiện 14 lần nên quả bóng màu vàng xuất hiện 16 lần. Vì vậy, xác suất thực nghiệm của biến cố "Quả bóng lấy ra là quả bóng màu vàng" là $\frac{16}{45}$.

3 Một hộp có 10 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số nguyên dương không vượt quá 10, hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ lấy ra và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Sau 40 lần lấy thẻ liên tiếp, thẻ ghi số 1 được lấy ra 3 lần. Tính xác suất thực nghiệm của biến cố "Thẻ lấy ra ghi số 1" trong trò chơi trên.

2. Mối liên hệ giữa xác suất thực nghiệm của một biến cố với xác suất của biến cố đó khi số lần thực nghiệm rất lớn

Trong trò chơi chọn ngẫu nhiên một đối tượng từ một nhóm đối tượng, mỗi lần ta lấy ngẫu nhiên một đối tượng, ghi lại đối tượng lấy ra và bỏ lại đối tượng đó vào nhóm đối tượng đã cho.

Tương tự như trò chơi tung đồng xu, người ta chứng minh được rằng:

Khi số lần lấy ra ngẫu nhiên một đối tượng ngày càng lớn thì xác suất thực nghiệm của biến cố "Đối tượng lấy ra là đối tượng *A*" ngày càng gần với xác suất của biến cố đó.

Ví dụ 6 Xét đối tượng *A* từ nhóm gồm *k* đối tượng trong trò chơi nói trên. Khi số lần lấy ra ngẫu nhiên một đối tượng ngày càng lớn thì xác suất thực nghiệm của biến cố "Đối tượng lấy ra là đối tượng *A*" ngày càng gần với số thực nào?

Giải

Do xác suất của biến cố "Đối tượng lấy ra là đối tượng A" là $\frac{1}{k}$ nên khi số lần lấy ra ngẫu nhiên một đối tượng ngày càng lớn thì xác suất thực nghiệm của biến cố "Đối tượng lấy ra là đối tượng A" ngày càng gần với $\frac{1}{k}$.

BÀI TẬP

1. Tính xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của đồng xu là mặt S" trong mỗi trường hợp sau:

a) Tung một đồng xu 50 lần liên tiếp, có 27 lần xuất hiện mặt S;

b) Tung một đồng xu 45 lần liên tiếp, có 24 lần xuất hiện mặt N.

2. Gieo một xúc xắc 30 lần liên tiếp, ghi lại mặt xuất hiện của xúc xắc sau mỗi lần gieo. Tính xác suất thực nghiệm của mỗi biến cố sau:

a) "Mặt xuất hiện của xúc xắc là mặt 3 chấm";

b) "Mặt xuất hiện của xúc xắc là mặt 4 chấm".

3. Nêu mối liên hệ giữa xác suất thực nghiệm của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn" khi số lần gieo xúc xắc ngày càng lớn với xác suất của biến cố đó.

4. Một hộp có 10 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số nguyên dương không vượt quá 10, hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau.

Lấy ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ lấy ra và bỏ lại thẻ đó vào hộp.

a) Sau 30 lần rút thẻ liên tiếp, tính xác suất thực nghiệm của mỗi biến cố sau:

– "Thẻ rút ra ghi số 1";

– "Thẻ rút ra ghi số 5";

– "Thẻ rút ra ghi số 10".

b) Nêu mối liên hệ giữa xác suất thực nghiệm của biến cố "Thẻ rút ra ghi số chia hết cho 3" với xác suất của biến cố đó khi số lần rút thẻ ngày càng lớn.

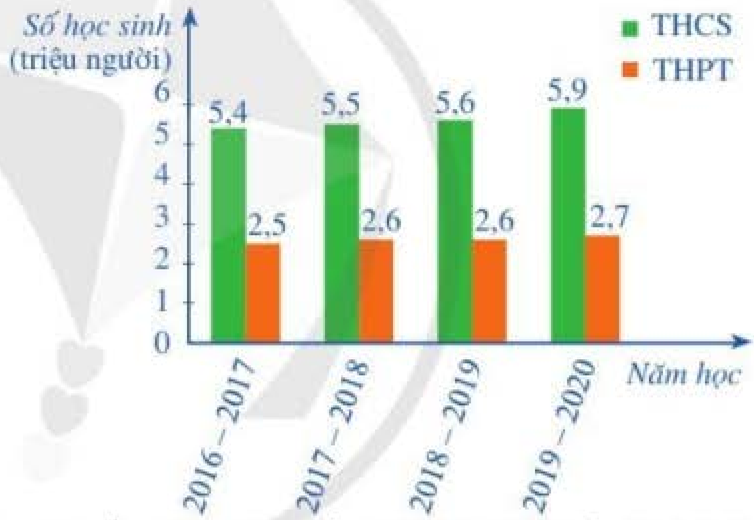
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

1. Để học tốt môn Ngữ văn lớp 8, bạn Thảo dự định đọc những kịch bản văn học sau: chèo *Quan âm Thị Kính*; chèo *Kim Nham*; tuồng *Nghêu Sò Ốc Hến*; *Quẫn* (Lộng Chương); *Bệnh sĩ* (Lưu Quang Vũ); *Ông Jourdain mặc lễ phục* (Molière); *Vũ Như Tô* (Nguyễn Huy Tưởng); *Rừng trúc* (Nguyễn Đình Thi); *Romeo và Juliet* (W. Shakespeare).

Trong những kịch bản văn học nêu trên, hãy phân nhóm và tổ chức những kịch bản đó theo những tiêu chí sau:

Tuồng – Chèo (sân khấu dân gian)	Tên tác phẩm, tác giả (liệt kê cụ thể)
Hài kịch	Tên tác phẩm, tác giả (liệt kê cụ thể)
Bi kịch	Tên tác phẩm, tác giả (liệt kê cụ thể)

2. Biểu đồ cột kép trong *Hình 39* biểu diễn số lượng học sinh trung học cơ sở (THCS) và trung học phổ thông (THPT) của Việt Nam trong các năm học 2016 – 2017, 2017 – 2018, 2018 – 2019, 2019 – 2020.



(Nguồn: Niên giám Thống kê 2020, NXB Thống kê, 2021)

Hình 39

a) Lập bảng thống kê số lượng học sinh THCS và THPT của Việt Nam trong các năm học đó (đơn vị: triệu người) theo mẫu sau:

Năm học	2016 – 2017	2017 – 2018	2018 – 2019	2019 – 2020
Số học sinh THCS	?	?	?	?
Số học sinh THPT	?	?	?	?

b) Lập bảng thống kê tỉ số giữa số lượng học sinh THCS của Việt Nam và số lượng học sinh THPT của Việt Nam trong các năm học đó theo mẫu sau (viết tỉ số ở dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười):

Năm học	2016 – 2017	2017 – 2018	2018 – 2019	2019 – 2020
Tỉ số của số học sinh THCS và số học sinh THPT	?	?	?	?

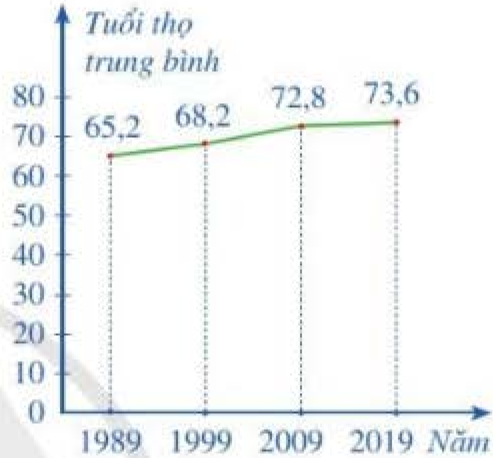
Bảng 1

c) Nêu nhận xét về sự thay đổi của các tỉ số trong *Bảng 1*.

3. Biểu đồ đoạn thẳng trong *Hình 40* biểu diễn tuổi thọ trung bình của người Việt Nam qua 30 năm (từ năm 1989 đến năm 2019).

a) Lập bảng thống kê tuổi thọ trung bình của người Việt Nam trong các năm đó theo mẫu sau (đơn vị: tuổi):

Năm	1989	1999	2009	2019
Tuổi thọ trung bình	?	?	?	?



(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

Hình 40

b) Một bài báo có nêu thông tin: So với năm 1989, tuổi thọ trung bình của người Việt Nam trong năm 2019 đã tăng lên 14%. Thông tin của bài báo đó có chính xác không?

4. Trong trò chơi vòng quay số đã giới thiệu ở *Hoạt động 2* của §4, tính xác suất của biến cố:

a) "Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số chia cho 4 dư 3";

b) "Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số chỉ có đúng một ước nguyên tố".

5. Một hộp có 5 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số nguyên dương không vượt quá 5, hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ lấy ra và bỏ lại thẻ đó vào hộp.

a) Sau 40 lần lấy thẻ liên tiếp, hãy tính xác suất thực nghiệm của các biến cố sau "Thẻ lấy ra ghi số chẵn" và "Thẻ lấy ra ghi số lẻ".

b) Tính xác suất của các biến cố "Thẻ lấy ra ghi số chẵn" và "Thẻ lấy ra ghi số lẻ".

c) Nêu mối liên hệ giữa xác suất thực nghiệm của mỗi biến cố "Thẻ lấy ra ghi số chẵn" và "Thẻ lấy ra ghi số lẻ" với xác suất của mỗi biến cố đó khi số lần lấy thẻ ngày càng lớn.

Chương VII

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: phương trình bậc nhất một ẩn; ứng dụng của phương trình bậc nhất một ẩn.

§1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Giả sử mỗi hộp màu tím đặt trên đĩa cân ở *Hình 1* đều có khối lượng là x (kg), còn mỗi hộp màu vàng đều có khối lượng là 1 (kg). Gọi $A(x)$, $B(x)$ lần lượt là các biểu thức biểu thị (theo x) tổng khối lượng của các hộp xếp ở đĩa cân bên trái, đĩa cân bên phải. Do cân thăng bằng nên ta có hệ thức: $A(x) = B(x)$.

Hình 1

Hệ thức $A(x) = B(x)$ gợi nên khái niệm nào trong toán học?

I. MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

1 Trong bài toán nêu ở phần mở đầu, hãy viết:

a) Các biểu thức $A(x)$, $B(x)$ lần lượt biểu thị (theo x) tổng khối lượng của các hộp xếp ở đĩa cân bên trái, đĩa cân bên phải;

b) Hệ thức thể hiện sự bằng nhau của hai biểu thức trên.

Nhận xét: Ta gọi hệ thức $3x + 4 = x + 12$ là một *phương trình với ẩn số x* (hay *ẩn x*), trong đó vế trái là biểu thức $A(x) = 3x + 4$ và vế phải là biểu thức $B(x) = x + 12$.

Một phương trình với ẩn x có dạng $A(x) = B(x)$, trong đó *vế trái* $A(x)$ và *vế phải* $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x.

2 Khi $x = 4$, tính giá trị mỗi vế của phương trình: $3x + 4 = x + 12$ (1). So sánh hai giá trị đó.

Nhận xét: Hai vế của phương trình (1) nhận cùng một giá trị khi $x = 4$. Ta nói rằng số 4 thoả mãn (hay nghiệm đúng) phương trình đã cho và gọi 4 (hay $x = 4$) là một nghiệm của phương trình đó.

Nếu hai vế của phương trình (ẩn x) nhận cùng một giá trị khi $x = a$ thì số a gọi là một nghiệm của phương trình đó.

Chú ý: Khi bài toán yêu cầu giải một phương trình, ta phải tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó.

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

1. Định nghĩa

3 Quan sát phương trình (ẩn x): $4x + 12 = 0$, nêu nhận xét về bậc của đa thức ở vế trái của phương trình đó.

Ta có định nghĩa sau:

Phương trình dạng $ax + b = 0$, với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$ được gọi là *phương trình bậc nhất một ẩn*.

Ví dụ 1 Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất một ẩn?

a) $2x - 5 = 0$.

b) $3x + 10 = 0$.

c) $7x = 0$.

d) $x^2 - 9 = 0$.

1 Nêu hai ví dụ về phương trình bậc nhất ẩn x.

Giải

Phương trình ở câu a), b), c) là phương trình bậc nhất một ẩn.

Phương trình ở câu d) không là phương trình bậc nhất một ẩn.

Ví dụ 2 Kiểm tra xem $x = 2$ có là nghiệm của mỗi phương trình bậc nhất sau hay không.

a) $-3x + 6 = 0$.

b) $7x - 14 = 0$.

c) $x + 2 = 0$.

Giải

a) Thay $x = 2$, ta có: $-3 . 2 + 6 = 0$.

Vậy $x = 2$ là nghiệm của phương trình $-3x + 6 = 0$.

b) Thay $x = 2$, ta có: $7 . 2 - 14 = 0$.

Vậy $x = 2$ là nghiệm của phương trình $7x - 14 = 0$.

2 Kiểm tra xem $x = -3$ có là nghiệm của phương trình bậc nhất $5x + 15 = 0$ hay không.

c) Thay $x = 2$, ta có: $2 + 2 \neq 0$.

Vậy $x = 2$ không là nghiệm của phương trình $x + 2 = 0$.

2. Cách giải

4 Nêu quy tắc chuyển vế trong một đẳng thức số.

Đối với phương trình, ta cũng có *quy tắc chuyển vế* như sau: *Trong một phương trình, ta có thể chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia và đổi dấu số hạng đó.*

5 Xét đẳng thức số: $2 + 3 - 4 = 9 - 10 + 2$. Tính giá trị mỗi vế của đẳng thức đó khi nhân cả hai vế với 5 và so sánh hai giá trị nhận được.

Như vậy, trong một đẳng thức số, ta có thể nhân cả hai vế với cùng một số (khác 0).

Đối với phương trình, ta cũng có *quy tắc nhân với một số* (gọi tắt là *quy tắc nhân*) như sau: *Trong một phương trình, ta có thể nhân cả hai vế với cùng một số khác* 0.

Chú ý

Nhân cả hai vế với $\frac{1}{2}$ cũng có nghĩa là chia cả hai vế cho 2. Do đó quy tắc nhân còn có thể phát biểu như sau: *Trong một phương trình, ta có thể chia cả hai vế cho cùng một số khác* 0.

6 Áp dụng quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân, hãy giải phương trình: $5x - 30 = 0$ (2).

Để giải phương trình (2), ta làm như sau:

$5x - 30 = 0$

$5x = 30$ ← *Chuyển – 30 sang vế phải và đổi dấu.*

$x = 30 : 5$ ← *Chia cả hai vế của phương trình cho 5.*

$x = 6$.

Vậy phương trình (2) có nghiệm $x = 6$.

Một cách tổng quát, ta có:

Phương trình $ax + b = 0$ (với $a \neq 0$) được giải như sau:

$ax + b = 0$

$ax = -b$

$x = \frac{-b}{a}$.

Phương trình bậc nhất $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) luôn có nghiệm duy nhất $x = \frac{-b}{a}$.

Ví dụ 3 Giải các phương trình:

a) $-0,5x + 11 = 0$;

b) $\frac{2}{7}x - 4 = 0$.

Giải

a) $-0,5x + 11 = 0$

$-0,5x = -11$

$x = (-11) : (-0,5)$

$x = 22$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 22$.

b) $\frac{2}{7}x - 4 = 0$

$\frac{2}{7}x = 4$

$x = 4 : \frac{2}{7}$

$x = 14$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 14$.

3 Giải các phương trình:

a) $-6x - 15 = 0$;

b) $-\frac{9}{2}x + 21 = 0$.

7 Giải phương trình: $3x + 4 = x + 12$.

Để giải phương trình trên, ta làm như sau:

$3x + 4 = x + 12$

$3x + 4 - x = 12$ ← *Chuyển các số hạng chứa ẩn sang một vế.*

$2x = 12 - 4$ ← *Chuyển các hằng số sang vế còn lại.*

$2x = 8$

$x = 4$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 4$.

Nhận xét: Bằng cách tương tự như trên, ta có thể giải được phương trình dạng:

$$ax + b = cx + d\ (a \neq c).$$

Ví dụ 4 Giải phương trình: $2x - (2 + 5x) = 4(x + 3)$.

Giải

$2x - (2 + 5x) = 4(x + 3)$

$2x - 2 - 5x = 4x + 12$

$-3x - 2 = 4x + 12$

$-2 - 12 = 4x + 3x$

$-14 = 7x$

$x = -2$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -2$.

4 Giải phương trình:

$2(x - 0,7) - 1,6 = 1,5 - (x + 1,2)$.

Ví dụ 5 Tìm chỗ sai trong lời giải sau và giải lại cho đúng:

$$\begin{aligned} 3x-5-2x &= 25+4x \\ 3x-2x+4x &= 25+5 \\ 5x &= 30 \\ x &= 30:5 \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 6$.

Giải

Khi chuyển số hạng $4x$ từ vế phải sang vế trái, ta phải đổi dấu số hạng đó. Vì vậy, lời giải trên sai ở bước thứ hai. Ta có thể giải lại như sau:

$$\begin{aligned} 3x-5-2x &= 25+4x \\ 3x-2x-4x &= 25+5 \\ -3x &= 30 \\ x &= 30:(-3) \\ x &= -10. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -10$.

BÀI TẬP

1. Kiểm tra xem số nào là nghiệm của phương trình tương ứng sau đây.

a) $3x + 9 = 0$ với $x = 3$; $x = -3$.

b) $2 - 2x = 3x + 1$ với $x = -\frac{1}{5}$; $x = \frac{1}{5}$.

2. Tìm chỗ sai trong mỗi lời giải sau và giải lại cho đúng:

a) $5-(x+8) = 3x+3(x-9)$

$$\begin{aligned} 5-x+8 &= 3x+3x-27 \\ 13-x &= 6x-27 \\ -x-6x &= -27+13 \\ -7x &= -14 \\ x &= (-14):(-7) \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

b) $3x-18+x = 12-(5x+3)$

$$\begin{aligned} 4x-18 &= 12-5x-3 \\ 4x+5x &= 9-18 \\ 9x &= -9 \\ x &= (-9):9 \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$.

3. Giải các phương trình:

a) $6x + 4 = 0$; b) $-14x - 28 = 0$;

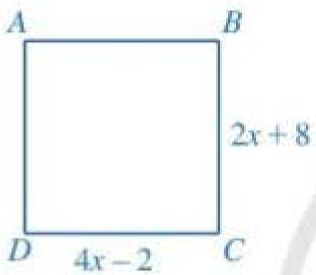
c) $\frac{1}{3}x - 5 = 0$; d) $3y - 1 = -y + 19$;

e) $-2(z + 3) - 5 = z + 4$; g) $3(t - 10) = 7(t - 10)$.

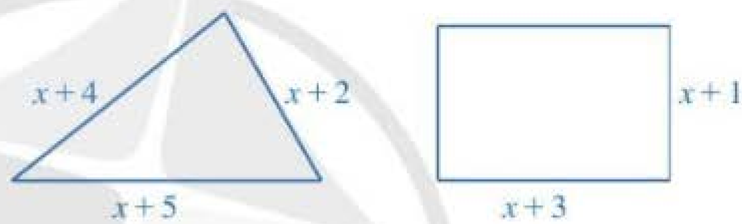
4. Giải các phương trình:

a) $\frac{5x-2}{3} = \frac{5-3x}{2}$; b) $\frac{10x+3}{12} = 1 + \frac{6+8x}{9}$; c) $\frac{7x-1}{6} + 2x = \frac{16-x}{5}$.

5. Tìm x, biết tứ giác $ABCD$ là hình vuông (*Hình 2*).



Hình 2

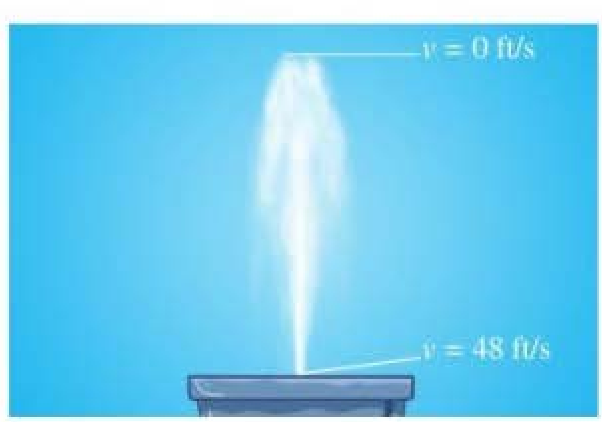


Hình 3

6. Hình tam giác và hình chữ nhật ở *Hình 3* có cùng chu vi. Viết phương trình biểu thị sự bằng nhau của chu vi hình tam giác, hình chữ nhật đó và tìm x.

7. Trong một cửa hàng bán thực phẩm, bạn Loan nhìn thấy cô bán hàng dùng một chiếc cân đĩa. Bên đĩa thứ nhất, cô đặt một quả cân nặng 500 g; bên đĩa thứ hai, cô đặt hai gói hàng cùng cân nặng x g và ba quả cân nhỏ, mỗi quả cân đó nặng 50 g. Bạn Loan thấy cân thăng bằng. Viết phương trình biểu thị sự thăng bằng của cân khi đó.

8. *Hình 4* mô tả một đài phun nước. Tốc độ ban đầu của nước là 48 ft/s (ft là một đơn vị đo độ dài với 1 ft = 0,3048 m). Tốc độ v (ft/s) của nước tại thời điểm t (s) được cho bởi công thức: $v = 48 - 32t$. Tìm thời gian để một giọt nước đi từ mặt đài phun nước đến khi đạt được độ cao tối đa.



Hình 4

§2. ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Phương trình bậc nhất một ẩn giúp chúng ta giải quyết nhiều vấn đề trong toán học cũng như trong thực tiễn.

Chẳng hạn, trong kho tàng văn hoá dân gian Hy Lạp có bài toán cổ như sau:

Một người hỏi nhà toán học Pythagore rằng ông có bao nhiêu học trò. Ông trả lời: "Một nửa số học trò của tôi học Toán, một phần tư học Nhạc, một phần bảy đăm chiêu, ngoài ra có ba cô gái".

(Nguồn: V. D. Tchit-chia-cốp, Những bài toán cổ, NXBGD năm 2004)

Hỏi nhà toán học Pythagore có bao nhiêu học trò?

I. BIỂU DIỄN MỘT ĐẠI LƯỢNG BỞI BIỂU THỨC CHỨA ẨN

1 Trong bài toán cổ trên, gọi x là số học trò của nhà toán học Pythagore (x là số nguyên dương). Viết biểu thức với biến x biểu thị:

a) Số học trò học Toán; b) Số học trò học Nhạc; c) Số học trò đăm chiêu.

Nhận xét: Trong thực tế, nhiều đại lượng biến đổi phụ thuộc lẫn nhau. Nếu kí hiệu một trong các đại lượng đó là x thì các đại lượng khác có thể biểu diễn dưới dạng một biểu thức của biến x.

Ví dụ 1 Bác Ánh đi siêu thị mua bốn chiếc quạt điện cùng loại. Do siêu thị thực hiện khuyến mãi nên giá bán bốn chiếc quạt đó như sau: Hai chiếc quạt đầu tiên không được giảm giá, chiếc quạt thứ ba có giá bán được giảm 200 nghìn đồng so với giá bán của chiếc quạt thứ hai, chiếc quạt thứ tư có giá bán được giảm 300 nghìn đồng so với giá bán của chiếc quạt thứ ba. Gọi x (nghìn đồng) là giá bán của chiếc quạt đầu tiên. Viết biểu thức với biến x biểu thị tổng số tiền bác Ánh phải trả.

1 Bạn An dành mỗi ngày x phút để chạy bộ. Viết biểu thức với biến x biểu thị:

a) Quãng đường (đơn vị: m) bạn An chạy được trong x phút, nếu bạn An chạy với tốc độ là 150 m/phút;

b) Tốc độ của bạn An (đơn vị: m/phút), nếu trong x phút bạn An chạy được quãng đường là 1 800 m.

Giải. Ta thấy:

– Giá bán hai chiếc quạt đầu tiên đều là x (nghìn đồng);

– Giá bán chiếc quạt thứ ba là $x - 200$ (nghìn đồng);

– Giá bán chiếc quạt thứ tư là $(x-200)-300 = x-500$ (nghìn đồng).

Tổng số tiền bác Ánh phải trả khi mua bốn chiếc quạt là:

$$x + x + (x-200) + (x-500) = 4x - 700 \text{ (nghìn đồng).}$$

II. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

2 Hãy giải bài toán cổ trong phần mở đầu.

Để giải bài toán đó, ta có thể làm như sau:

• *Bước 1.* Lập phương trình

Gọi số học trò của nhà toán học Pythagore là x ($x \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó: Số học trò học Toán là $\frac{x}{2}$; Số học trò học Nhạc là $\frac{x}{4}$; Số học trò đăm chiêu là $\frac{x}{7}$.

Theo giả thiết, ta có phương trình: $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+3 = x$.

• *Bước 2.* Giải phương trình

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+3 = x$$

$$\frac{25x+84}{28} = x$$

$$25x + 84 = 28x$$

$$84 = 28x - 25x$$

$$84 = 3x$$

$$x = 28.$$

• *Bước 3.* Kết luận

Giá trị $x = 28$ thoả mãn điều kiện của ẩn. Vậy số học trò của nhà toán học Pythagore là 28.

Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình như sau:

• *Bước 1.* Lập phương trình

– Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết

– Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng

• *Bước 2.* Giải phương trình

• *Bước 3.* Kết luận.

Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

Ví dụ 2 Năm nay, tuổi của anh gấp ba lần tuổi của em. Sau 6 năm nữa, tuổi của anh chỉ gấp đôi tuổi của em. Hỏi năm nay tuổi của anh và tuổi của em là bao nhiêu?

Giải

Gọi tuổi của em hiện nay là x, điều kiện: $x \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó, tuổi của anh hiện nay là $3x$.

Sau 6 năm nữa, tuổi của em là $x + 6$ và tuổi của anh là $3x + 6$.

Theo giả thiết, ta có phương trình: $3x + 6 = 2(x + 6)$.

Giải phương trình:

$$3x + 6 = 2(x + 6)$$
$$3x + 6 = 2x + 12$$
$$3x - 2x = 12 - 6$$
$$x = 6.$$

2 Hiện nay ông hơn cháu 56 tuổi. Cách đây 5 năm, tuổi của ông gấp tám lần tuổi của cháu. Hỏi cháu hiện nay bao nhiêu tuổi?

Giá trị $x = 6$ thoả mãn điều kiện của ẩn. Vậy tuổi của em hiện nay là 6 và tuổi của anh hiện nay là $3 \cdot 6 = 18$.

Ví dụ 3 Một xe máy khởi hành từ Hà Nội đi Hải Phòng với tốc độ 40 km/h. Sau đó 10 phút, trên cùng tuyến đường đó, một ô tô xuất phát từ Hải Phòng đi Hà Nội với tốc độ 60 km/h. Hỏi sau bao lâu, kể từ khi xe máy khởi hành, hai xe gặp nhau? Biết quãng đường Hà Nội – Hải Phòng dài 120 km.

Giải

Đổi 10 phút = $\frac{1}{6}$ giờ.

Gọi thời gian từ lúc xe máy khởi hành đến lúc hai xe gặp nhau là x (giờ), điều kiện: $x > \frac{1}{6}$. Khi đó, thời gian ô tô đi từ lúc khởi hành đến khi gặp xe máy là $x - \frac{1}{6}$ (giờ).

Khi hai xe gặp nhau, xe máy đã đi được quãng đường là $40x$ (km), ô tô đã đi được quãng đường là $60\left(x - \frac{1}{6}\right)$ (km).

Đến lúc hai xe gặp nhau, tổng quãng đường đi được của hai xe đúng bằng quãng đường Hà Nội – Hải Phòng dài 120 km nên ta có phương trình: $40x + 60\left(x - \frac{1}{6}\right) = 120$.

Giải phương trình:

$$40x + 60\left(x - \frac{1}{6}\right) = 120$$

$$40x + 60x - 10 = 120$$

$$100x = 130$$

$$x = \frac{130}{100} = \frac{13}{10}.$$

Giá trị $x = \frac{13}{10}$ thoả mãn điều kiện của ẩn. Vậy kể từ khi xe máy khởi hành, hai xe gặp nhau sau $\frac{13}{10}$ giờ, tức là 1 giờ 18 phút.

Ví dụ 4 Giá cước dịch vụ của một hãng taxi ở Hà Nội vào tháng 4/2022 như sau:

Giá cước mở cửa (tính cho 1 km đầu tiên)	**Giá cước những kilômét tiếp theo**	**Giá cước từ kilômét thứ 21 trở đi**
20 000 đồng	11 500 đồng	9 500 đồng

Gọi x ($x > 0$) là số kilômét mà hành khách di chuyển. Khi đó, số tiền mà hành khách phải trả được tính bởi công thức:

$T = 20\,000$ nếu $0 < x \leq 1$;

$T = 20\,000 + 11\,500(x - 1)$ nếu $1 < x \leq 20$;

$T = 238\,500 + 9\,500(x - 20)$ nếu $x > 20$.

Cô Hạnh di chuyển bằng xe của hãng xe taxi trên và đã trả số tiền là 343 000 đồng. Hỏi cô Hạnh đã di chuyển quãng đường là bao nhiêu kilômét?

Giải

Nếu hành khách di chuyển quãng đường 20 km thì phải trả số tiền là:

$$20\,000 + 11\,500 \,.\, (20 - 1) = 238\,500 \text{ (đồng)}.$$

Do $343\,000 > 238\,500$ nên cô Hạnh đã di chuyển quãng đường nhiều hơn 20 km hay $x > 20$.

Do đó, tổng số tiền cô Hạnh phải trả (tính theo x) là: $238\,500 + 9\,500(x - 20)$ (đồng).

Theo giả thiết, ta có phương trình: $238\,500 + 9\,500(x - 20) = 343\,000$.

Giải phương trình:

$238\,500 + 9\,500(x - 20) = 343\,000$

$238\,500 + 9\,500x - 190\,000 = 343\,000$

$48\,500 + 9\,500x = 343\,000$

$9\,500x = 343\,000 - 48\,500$

$9\,500x = 294\,500$

$x = 31.$

Vậy cô Hạnh đã di chuyển quãng đường là 31 km.

3 Một tổ may áo theo kế hoạch mỗi ngày phải may 30 cái áo. Nhờ cải tiến kĩ thuật, tổ đã may được mỗi ngày 40 cái nên đã hoàn thành trước thời hạn 3 ngày và còn may thêm được 20 cái áo nữa. Tính số áo mà tổ đó phải may theo kế hoạch.

BÀI TẬP

1. Một cuộc thi có 20 câu hỏi với quy định cho điểm như sau: Với mỗi câu hỏi, nếu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm, trả lời sai thì bị trừ 1 điểm, không trả lời thì không được điểm. Bạn Minh được 70 điểm trong cuộc thi đó. Hỏi bạn Minh đã trả lời đúng được bao nhiêu câu? Biết rằng bạn Minh đã trả lời tất cả các câu trong cuộc thi.

2. Giá niêm yết của một máy lọc nước và một nồi cơm điện có tổng là 6,5 triệu đồng. Bác Bình mua hàng vào đúng dịp tri ân khách hàng nên so với giá niêm yết máy lọc nước được giảm giá 15% và nồi cơm điện được giảm giá 10%. Do đó, tổng số tiền bác phải trả là 5,65 triệu đồng. Tính giá tiền niêm yết của mỗi sản phẩm đã nêu.

3. Bác An đã gửi một lượng tiền tiết kiệm kì hạn 1 năm ở một ngân hàng với lãi suất 5,6%/năm (cứ sau kì hạn 1 năm, tiền lãi của kì hạn đó lại được cộng vào tiền vốn). Sau khi gửi 2 năm, bác An rút được số tiền cả gốc và lãi là 111 513 600 đồng. Hỏi ban đầu bác An đã gửi vào ngân hàng số tiền là bao nhiêu đồng? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong 2 năm đó.

4. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc để đi từ Huế vào Đà Nẵng. Tốc độ xe thứ nhất là 40 km/h, tốc độ xe thứ hai là 60 km/h. Xe thứ hai đến Đà Nẵng nghỉ nửa giờ rồi quay lại Huế thì gặp xe thứ nhất ở vị trí cách Đà Nẵng 10 km. Tính quãng đường Huế – Đà Nẵng.

5. Câu ca dao "Lúa chiêm lấp ló đầu bờ – Hễ nghe tiếng sấm phất cờ mà lên" về mặt khoa học được giải thích như sau: Khi trời mưa kèm theo sấm sét, nitric acid sẽ được sinh ra và hoà tan trong nước mưa, có tác dụng làm tăng cường dinh dưỡng nitrogen cho đất trồng, giúp cây lúa phát triển tươi tốt. Phân tử của nitric acid đó có một nguyên tử H, một nguyên tử N và x nguyên tử O. Xác định công thức phân tử của nitric acid đó. Biết khối lượng phân tử của nó là 63 amu và khối lượng của mỗi nguyên tử H, N, O lần lượt là 1 amu, 14 amu, 16 amu.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

1. Chọn đáp án đúng.

a) Nghiệm của phương trình $2x + 6 = 0$ là:

A. $x = -3$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = \frac{1}{3}$. **D.** $x = -\frac{1}{3}$.

b) Nghiệm của phương trình $-3x + 5 = 0$ là:

A. $x = -\frac{5}{3}$. **B.** $x = \frac{5}{3}$. **C.** $x = \frac{3}{5}$. **D.** $x = -\frac{3}{5}$.

c) Nghiệm của phương trình $\frac{1}{4}z = -3$ là:

A. $z = -\frac{3}{4}$. **B.** $z = -\frac{4}{3}$. **C.** $z = -\frac{1}{12}$. **D.** $z = -12$.

d) Nghiệm của phương trình $2(t-3) + 5 = 7t - (3t + 1)$ là:

A. $t = \frac{3}{2}$. **B.** $t = 1$. **C.** $t = -1$. **D.** $t = 0$.

e) $x = -2$ là nghiệm của phương trình:

A. $x - 2 = 0$. **B.** $x + 2 = 0$. **C.** $2x + 1 = 0$. **D.** $2x - 1 = 0$.

2. Giải các phương trình:

a) $7x + 21 = 0$; b) $-5x + 35 = 0$; c) $-\frac{1}{4}x - 1 = 0$.

3. Giải các phương trình:

a) $2x - 3 = -3x + 17$; b) $\frac{2}{3}x + 1 = -\frac{1}{3}x$;

c) $0{,}15(t-4) = 9{,}9 - 0{,}3(t-1)$; d) $\frac{3z+5}{5} - \frac{z+1}{3} = 1$.

4. Có hai can đựng nước. Can thứ nhất có lượng nước gấp đôi lượng nước ở can thứ hai. Nếu rót 5 *l* nước ở can thứ nhất vào can thứ hai thì lượng nước ở can thứ nhất bằng $\frac{5}{4}$ lượng nước ở can thứ hai. Tính lượng nước ban đầu ở mỗi can.

5. Một số gồm hai chữ số có chữ số hàng chục gấp ba lần chữ số hàng đơn vị. Nếu đổi chỗ hai chữ số của số đó cho nhau thì ta nhận được số mới nhỏ hơn số ban đầu là 18 đơn vị. Tìm số ban đầu.

6. Một ca nô tuần tra đi xuôi dòng từ *A* đến *B* hết 1 giờ 20 phút và ngược dòng từ *B* về *A* hết 2 giờ. Tính tốc độ riêng của ca nô, biết tốc độ của dòng nước là 3 km/h.

7. (*Bài toán nói về cuộc đời của nhà toán học Diofantos, được lấy trong Hợp tuyển Hy Lạp – Cuốn sách gồm 46 bài toán về số, viết dưới dạng thơ trào phúng*).

Thời thơ ấu của Diofantos chiếm $\frac{1}{6}$ cuộc đời

$\frac{1}{12}$ cuộc đời tiếp theo là thời thanh niên sôi nổi

Thêm $\frac{1}{7}$ cuộc đời nữa ông sống độc thân

Sau khi lập gia đình được 5 năm thì sinh một con trai

Nhưng số mệnh chỉ cho con sống bằng nửa đời cha

Ông đã từ trần 4 năm sau khi con mất

Diofantos sống bao nhiêu tuổi, hãy tính cho ra?

8. Ông Ba có một khoản tiền để kinh doanh. Ông đã đầu tư một nửa số tiền đó vào một công ty trồng rau sạch với lãi suất 10% mỗi tháng và đầu tư $\frac{1}{4}$ số tiền đó vào một nhà hàng với lãi suất 12% mỗi tháng. Tổng tiền lãi hàng tháng ông Ba nhận được từ công ty trồng rau sạch và nhà hàng là 64 triệu đồng. Hỏi khoản tiền ông Ba có lúc đầu là bao nhiêu?

9. Theo kế hoạch, một dây chuyền phải sản xuất một số sản phẩm trong 18 ngày với số lượng sản phẩm làm được trong mỗi ngày là như nhau. Do mỗi ngày dây chuyền đã sản xuất vượt mức 10 sản phẩm nên sau 16 ngày dây chuyền chẳng những đã hoàn thành kế hoạch mà còn làm thêm được 20 sản phẩm nữa. Tính số sản phẩm thực tế dây chuyền làm được trong mỗi ngày.

10. Có hai dung dịch acid cùng loại với nồng độ acid lần lượt là 45% và 25%. Trộn hai dung dịch acid đó để được 5 kg dung dịch có nồng độ acid là 33%. Tính khối lượng dung dịch acid cần dùng của mỗi loại trên.

11. Thả một quả cầu nhôm khối lượng 0,15 kg được đun nóng tới 100 °C vào một cốc nước có khối lượng nước là 0,47 kg ở 20 °C. Người ta xác định được:

– Nhiệt lượng quả cầu nhôm toả ra khi nhiệt độ hạ từ 100 °C đến nhiệt độ cân bằng t °C là:

$$Q_1 = 0{,}15 \,.\, 880 \,.\, (100 - t) \text{ (J)}.$$

– Nhiệt lượng nước thu vào khi tăng nhiệt độ từ 20 °C đến nhiệt độ cân bằng t °C là:

$$Q_2 = 0{,}47 \,.\, 4\,200 \,.\, (t - 20) \text{ (J)}.$$

Tìm nhiệt độ cân bằng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Chương VIII

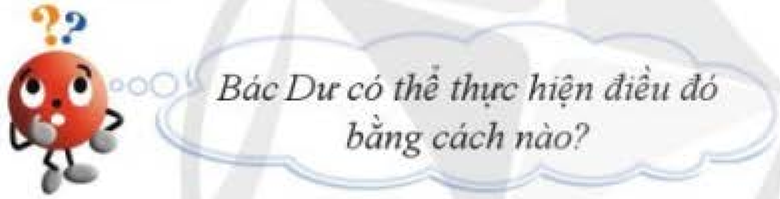
TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG. HÌNH ĐỒNG DẠNG

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: định lí Thalès trong tam giác và ứng dụng; đường trung bình của tam giác; tính chất đường phân giác của tam giác; tam giác đồng dạng; ba trường hợp đồng dạng của tam giác; hình đồng dạng và hình đồng dạng trong thực tiễn.

Trong các ví dụ và bài tập tính toán bằng số của chương này, các số đo độ dài ở mỗi bài nếu không ghi đơn vị ta quy ước là cùng đơn vị đo.

§1. ĐỊNH LÍ THALÈS TRONG TAM GIÁC

Bác Dư muốn cắt một thanh sắt (*Hình 1*) thành năm phần bằng nhau nhưng bác lại không có thước để đo.



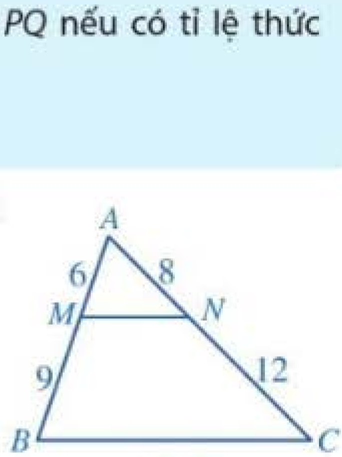
Hình 1

I. ĐOẠN THẲNG TỈ LỆ

1 Cho hai đoạn thẳng $AB = 2$ cm, $CD = 3$ cm và hai đoạn thẳng $MN = 4$ cm, $PQ = 6$ cm. So sánh hai tỉ số $\frac{AB}{CD}, \frac{MN}{PQ}$.

> Hai đoạn thẳng *AB* và *CD* tỉ lệ với hai đoạn thẳng *MN* và *PQ* nếu có tỉ lệ thức $\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$.

Ví dụ 1 Trong *Hình 2*, hai đoạn thẳng *AM* và *MB* có tỉ lệ với hai đoạn thẳng *AN* và *NC* hay không? Vì sao?



Hình 2

Giải

Ta có $\frac{AM}{MB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $\frac{AN}{NC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Suy ra $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.

Vậy hai đoạn thẳng *AM* và *MB* tỉ lệ với hai đoạn thẳng *AN* và *NC*.

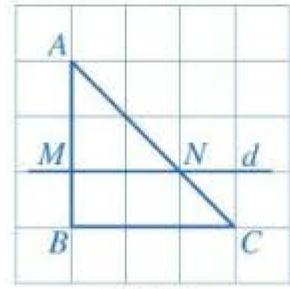
II. ĐỊNH LÍ THALÈS TRONG TAM GIÁC

1. Định lí Thalès

2 Quan sát *Hình 3* và cho biết:

a) Đường thẳng d có song song với BC hay không;

b) Bằng cách đếm số ô vuông, dự đoán xem các tỉ số $\frac{AM}{MB}, \frac{AN}{NC}$ có bằng nhau hay không.

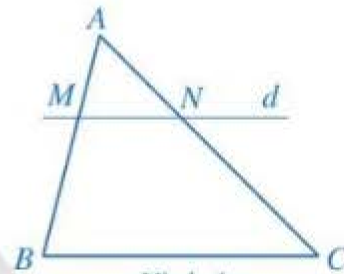


Hình 3

Cho tam giác ABC. Một đường thẳng d song song với cạnh BC, cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M, N (*Hình 4*).

Đường thẳng d định ra trên cạnh AB hai đoạn thẳng AM, MB và định ra trên cạnh AC hai đoạn thẳng tương ứng là AN, NC.

Ta thừa nhận định lí Thalès sau:



Hình 4

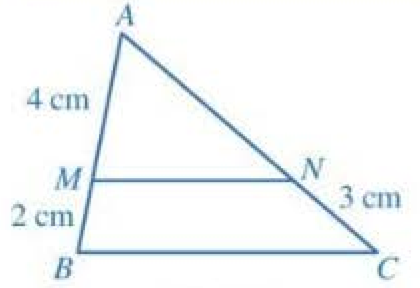
Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Nhận xét: Trong *Hình 4*, nếu $MN \parallel BC$ thì $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.

Do đó $\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC} = \frac{AM + MB}{AN + NC} = \frac{AB}{AC}$. Suy ra $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

1 Trong *Hình 4*, chứng tỏ rằng nếu $MN \parallel BC$ thì $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$.

Ví dụ 2 Trong *Hình 5*, cho biết $MN \parallel BC$, $AM = 4$ cm, $MB = 2$ cm, $NC = 3$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AN.



Hình 5

Giải

Xét tam giác ABC với $MN \parallel BC$, ta có:

$\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB}$ (định lí Thalès).

Do đó $\frac{AN}{3} = \frac{4}{2} = 2$.

Suy ra $AN = 2 \,.\, 3 = 6$ (cm).

2 Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh AB. Đường thẳng qua M song song với BC cắt cạnh AC tại N. Chứng minh N là trung điểm của cạnh AC.

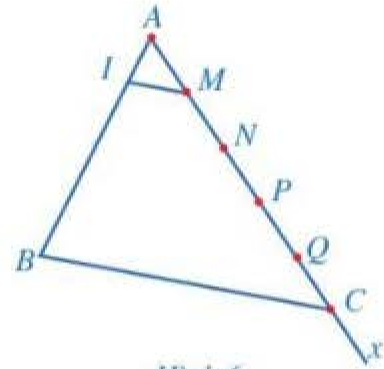
Ví dụ 3 Giải bài toán nêu trong phần mở đầu.

Giải. (*Hình 6*)

Bác Dư có thể làm như sau:

– Đặt thanh sắt trên mặt phẳng sân và coi thanh sắt như đoạn thẳng AB.

– Vẽ tia Ax và lấy một đoạn dây không dãn nào đó rồi đặt liên tiếp trên tia Ax, bắt đầu từ điểm A, năm đoạn thẳng AM, MN, NP, PQ, QC có độ dài đều bằng độ dài đoạn dây.



Hình 6

– Trong tam giác ABC, kẻ đường thẳng qua M song song với cạnh BC, cắt cạnh AB tại I.

Theo định lí Thalès, ta có: $\frac{AI}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{5}$. Do đó $AI = \frac{1}{5}AB$.

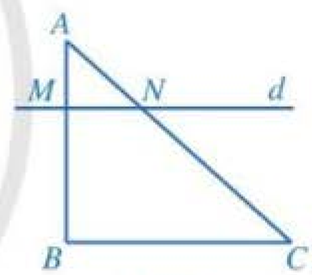
Dựa theo đoạn mẫu AI, bác Dư có thể cắt một thanh sắt thành năm phần bằng nhau.

2. Định lí Thalès đảo

3 Trong *Hình 7*, cho $AM = 1$, $MB = 2$, $AN = 1{,}5$, $NC = 3$.

a) So sánh các tỉ số $\frac{AM}{MB}$; $\frac{AN}{NC}$.

b) Đường thẳng d (đi qua M, N) có song song với BC hay không?



Hình 7

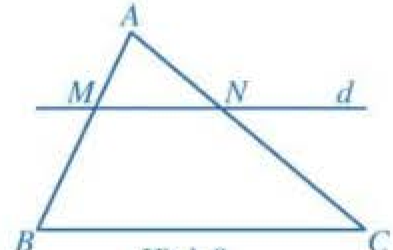
Ta thừa nhận định lí Thalès đảo sau:

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

Trong *Hình 8*, nếu $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ thì $MN \parallel BC$.

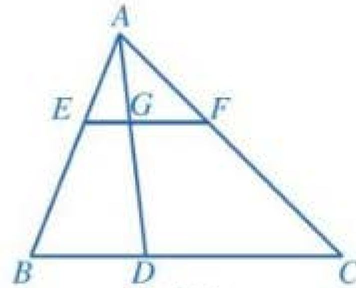
Nhận xét: Trong *Hình 8*, nếu có một trong hai tỉ lệ thức:

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$ thì ta cũng có $MN \parallel BC$.



Hình 8

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC. Điểm D nằm giữa B và C. Các điểm E, F, G không trùng với đỉnh của tam giác và lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, AC, AD thoả mãn $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AD}$ (*Hình 9*).



Hình 9

a) Chứng minh $EG // BD$ và $GF // DC$.

b) Các điểm E, F, G có thẳng hàng không?

Giải

a) Trong tam giác ABD, ta có $\frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AD}$.

Suy ra $EG // BD$ (định lí Thalès đảo).

Trong tam giác ADC, ta có $\frac{AG}{AD} = \frac{AF}{AC}$.

Suy ra $GF // DC$ (định lí Thalès đảo).

b) Do EG, GF đều đi qua G và song song với BC nên ba điểm E, F, G thẳng hàng.

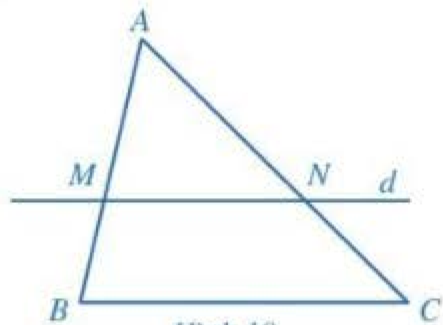
3 Cho tam giác ABC vuông tại A có $CA = 4$, $CB = 5$. Giả sử M, N là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh CA, CB sao cho $CM = 1$, $CN = 1,25$. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

3. Hệ quả của định lí Thalès

Từ định lí Thalès ta có hệ quả sau:

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

Cụ thể, cho tam giác ABC, đường thẳng d song song với cạnh BC lần lượt cắt các cạnh AB, AC tại M và N (*Hình 10*). Khi đó, ta có: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



Hình 10

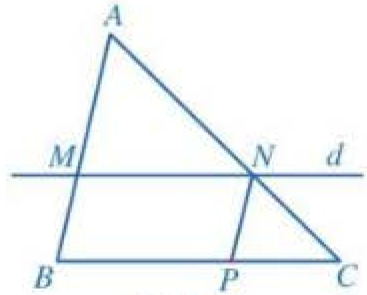
Chứng minh

Qua điểm N kẻ đường thẳng song song với AB, cắt cạnh BC tại điểm P thuộc cạnh BC (*Hình 11*). Khi đó, tứ giác $BMNP$ có các cạnh đối song song nên là hình bình hành. Do đó $BP = MN$. Xét tam giác ABC với $NP // AB$, ta có: $\frac{BP}{BC} = \frac{AN}{AC}$ (định lí Thalès).

Suy ra $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$. Xét tam giác ABC với $MN // BC$, ta có:

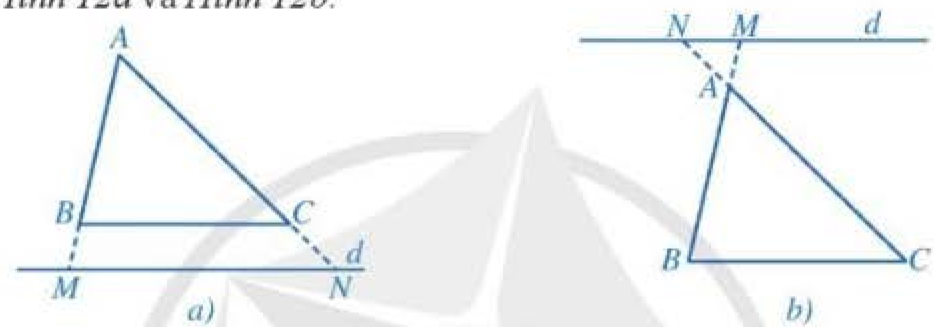
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (định lí Thalès).

Vậy $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (1).



Hình 11

Chú ý: Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng d song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại. Chẳng hạn, ta cũng có dãy tỉ số bằng nhau (1) trong *Hình 12a* và *Hình 12b*.



Hình 12

Ví dụ 5 Trong *Hình 13*, cho biết $AB = 4$, $BC = 3$, $AM = 3$, $MN // BC$.

Tính độ dài đoạn thẳng MN.

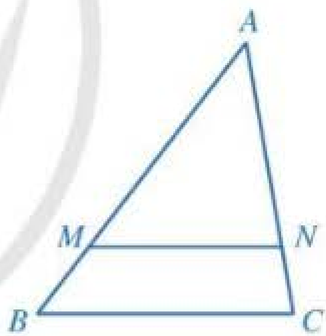
Giải

Xét tam giác ABC với $MN // BC$, ta có:

$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ (hệ quả của định lí Thalès).

Do $AB = 4$, $BC = 3$, $AM = 3$ nên $\frac{3}{4} = \frac{MN}{3}$.

Suy ra $MN = \frac{3 \,.\, 3}{4} = 2,25$.



Hình 13

Ví dụ 6 Cho hình thang $ABCD$ với hai đáy là AB và CD. Hai đường chéo cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O song song với hai đáy lần lượt cắt AD và BC tại M và N. Chứng minh:

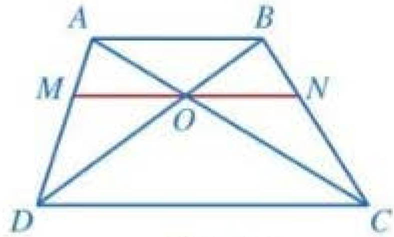
a) $\frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}$;   b) O là trung điểm của MN.

Giải. (*Hình 14*)

a) Xét tam giác OCD với $AB // CD$, ta có:

$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ (hệ quả của định lí Thalès).

Suy ra $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{OA + OC}{OB + OD} = \frac{AC}{BD}$. Vậy $\frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}$.



Hình 14

b) Xét tam giác ACD với $OM \parallel CD$, ta có: $\frac{OM}{CD} = \frac{AO}{AC}$ (hệ quả của định lí Thalès).

Xét tam giác BCD với $ON \parallel CD$, ta có: $\frac{ON}{CD} = \frac{BO}{BD}$ (hệ quả của định lí Thalès).

Mà $\frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}$, suy ra $\frac{OM}{CD} = \frac{ON}{CD}$, tức là $OM = ON$. Vậy O là trung điểm của MN.

BÀI TẬP

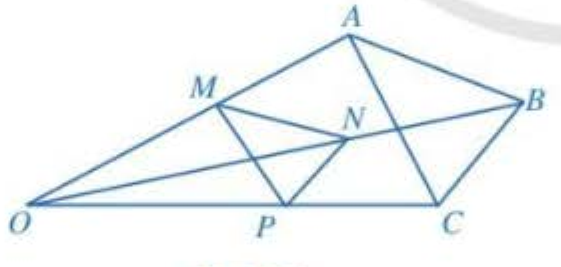
1. Cho tam giác ABC có $AB = 4{,}5$ cm, $AC = 6$ cm. Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC thoả mãn $AM = 3$ cm và $MN \parallel BC$. Tính độ dài đoạn thẳng AN.

2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = 4$ cm, $CD = 6$ cm. Đường thẳng d song song với hai đáy và cắt hai cạnh bên AD, BC của hình thang đó lần lượt tại M, N; cắt đường chéo AC tại P.

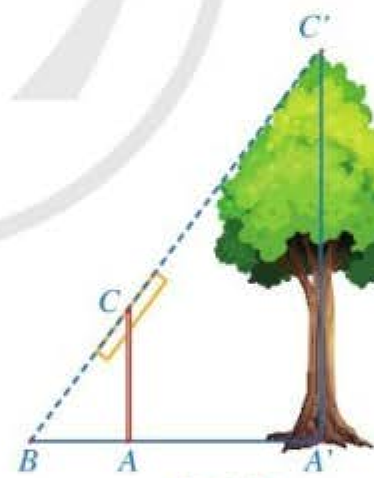
a) Chứng minh $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$;

b) Tính độ dài các đoạn thẳng MP, PN, MN; biết rằng $MD = 2MA$.

3. Trong *Hình 15*, cho $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$. Chứng minh $MP \parallel AC$.



Hình 15



Hình 16

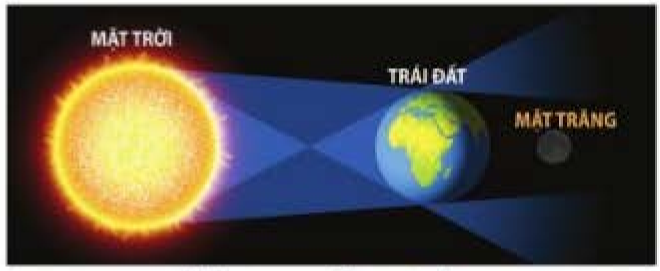
4. Trong *Hình 16*, độ dài đoạn thẳng $A'C'$ mô tả chiều cao của một cái cây, đoạn thẳng AC mô tả một cái cọc (cây và cọc cùng vuông góc với đường thẳng đi qua ba điểm A', A, B). Giả sử $AC = 2$ m, $AB = 1{,}5$ m, $A'B = 4{,}5$ m. Tính chiều cao của cây.

5. Cho đoạn thẳng AB. Hãy trình bày cách chia đoạn thẳng AB thành ba đoạn thẳng bằng nhau mà không cần dùng thước đo.

§2. ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ THALÈS TRONG TAM GIÁC

Từ xa xưa, con người đã muốn tìm hiểu về Mặt Trời, Trái Đất, Mặt Trăng, chẳng hạn: Đường kính của mỗi hành tinh đó là bao nhiêu? Khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trăng và Mặt Trời là bao nhiêu? Dựa vào hiện tượng Nhật thực và Nguyệt thực, các nhà toán học và thiên văn học Hy Lạp cổ đại đã đưa ra được câu trả lời cho những vấn đề trên.

Hiện tượng Nhật thực



Hiện tượng Nguyệt thực

(*Nguồn: https://www.shutterstock.com*)

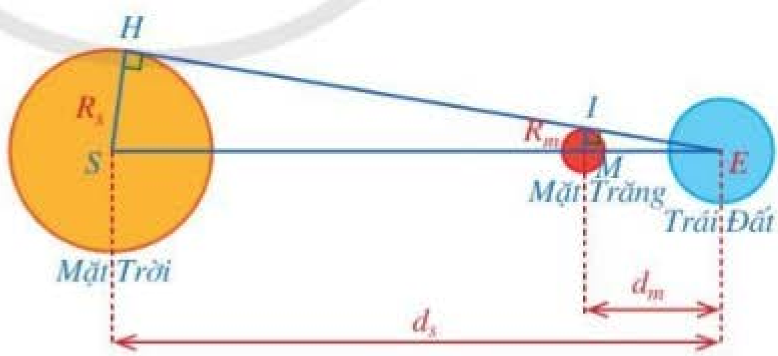
Vào thời điểm xảy ra Nhật thực (Nguyệt thực), đường kính của Mặt Trời, Mặt Trăng có tỉ lệ với khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời và đến Mặt Trăng hay không?

I. ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CÁCH

Bằng cách sử dụng định lí Thalès, ta có thể ước lượng được khoảng cách giữa hai vị trí khi không thể đo đạc trực tiếp khoảng cách giữa hai vị trí đó. Dưới đây ta sẽ nêu một vài ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 1 *Hình 17* mô tả vị trí tương đối của Mặt Trời, Mặt Trăng và Trái Đất khi xảy ra hiện tượng Nhật thực.

Gọi khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, Mặt Trăng lần lượt là $d_s = ES$, $d_m = EM$. Gọi bán kính của Mặt Trời, Mặt Trăng lần lượt là $R_s = SH$, $R_m = MI$. Chứng minh $\dfrac{R_m}{R_s} = \dfrac{d_m}{d_s}$.



Hình 17

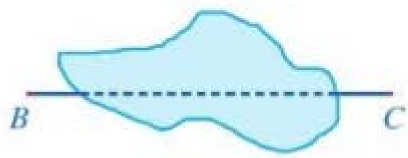
Giải. (*Hình 17*)

Xét tam giác ESH có $MI \perp EH$, $SH \perp EH$ nên $MI \parallel SH$.

Do đó, áp dụng hệ quả của định lí Thalès, ta có: $\dfrac{MI}{SH} = \dfrac{EM}{ES}$. Vậy $\dfrac{R_m}{R_s} = \dfrac{d_m}{d_s}$.

Các nhà toán học và thiên văn học Hy Lạp cổ đại đã sử dụng hệ thức trên và một số hệ thức có được từ hiện tượng Nguyệt thực để ước lượng bán kính của Mặt Trời, Trái Đất, Mặt Trăng cũng như khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trăng và Mặt Trời.

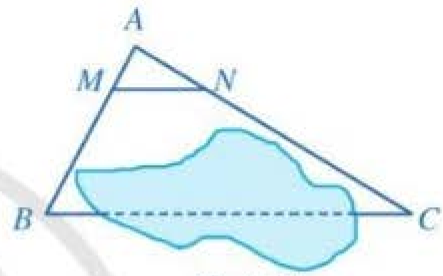
Ví dụ 2 Để đo khoảng cách giữa hai vị trí B và C như ở *Hình 18* mà không thể đo trực tiếp, người ta có thể làm như sau (*Hình 19*):



Hình 18

– Chọn điểm A ở vị trí thích hợp và đo các khoảng cách AB, AC.

– Xác định các điểm M, N lần lượt thuộc AB, AC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Đo độ dài đoạn thẳng MN.



Hình 19

a) Giải thích tại sao ta có thể xác định được khoảng cách giữa hai vị trí B và C.

b) Tính khoảng cách giữa hai vị trí B và C khi $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{5}$ và $MN = 18$ m.

Giải. (*Hình 19*)

a) Xét tam giác ABC, ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ nên $MN \,//\, BC$ (định lí Thalès đảo).

Suy ra $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$ (hệ quả của định lí Thalès).

Do đó $BC = \frac{AB\,.\,MN}{AM}$.

Vậy ta có thể xác định được khoảng cách giữa hai vị trí B và C.

b) Do $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{5}$ nên $\frac{AB}{AM} = 5$.

Suy ra $BC = 5\,.\,MN = 5\,.\,18 = 90$ (m).

Vậy khoảng cách giữa hai vị trí B và C là 90 m.

1 Bạn Loan đặt một cái que lên bàn cờ vua như ở *Hình 20*. Bạn ấy nói rằng: Không sử dụng thước đo, có thể chia cái que đó thành ba phần bằng nhau. Em hãy giải thích tại sao.

Hình 20

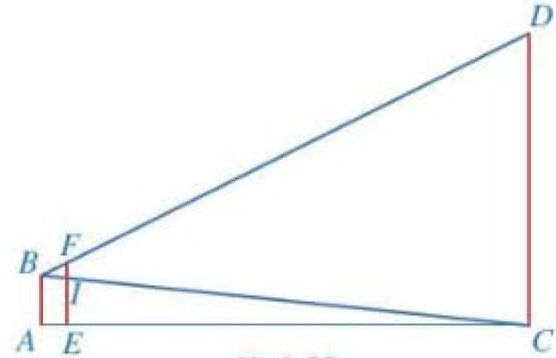
II. ƯỚC LƯỢNG CHIỀU CAO

Quan sát *Hình 21* và cho biết: Làm thế nào để ước lượng được chiều cao của cột cờ trong sân trường?

(Ảnh: Hien Phung Thu)

Hình 21

Ví dụ 3 Để ước lượng chiều cao của cột cờ trong sân trường, bạn Huy dựng ở sân trường (theo phương thẳng đứng) một cọc có chiều cao 2 m và đặt xa chân cột cờ 15 m. Sau khi bạn Huy lùi ra xa cách cọc 0,8 m thì nhìn thấy đầu cọc và đỉnh cột cờ cùng nằm trên một đường thẳng. Hỏi chiều cao của cột cờ là bao nhiêu mét? Biết rằng khoảng cách từ chân đến mắt bạn Huy là 1,6 m.



Hình 22

Giải. (*Hình 22*)

Giả sử các đoạn thẳng CD, EF, AB lần lượt biểu thị cho vị trí của cột cờ, cọc và vị trí đứng của bạn Huy, trong đó B chỉ vị trí mắt của bạn ấy. Ta có $AB = 1{,}6$ m, $AE = 0{,}8$ m, $EC = 15$ m, $EF = 2$ m.

Gọi I là giao điểm của EF và BC.

Xét tam giác ABC có $AB \perp AC$, $EI \perp AC$ nên $AB \parallel EI$.

Suy ra $\dfrac{EI}{AB} = \dfrac{EC}{AC}$ (hệ quả của định lí Thalès).

Do đó $\dfrac{EI}{1{,}6} = \dfrac{15}{15 + 0{,}8}$ hay $EI = \dfrac{1{,}6 \,.\, 15}{15{,}8} = \dfrac{120}{79}$ (m).

Suy ra $IF = EF - EI = 2 - \dfrac{120}{79} = \dfrac{38}{79}$ (m).

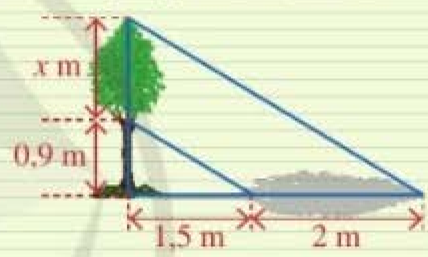
Mặt khác, do $AB \parallel EI$ nên theo định lí Thalès ta cũng có: $\dfrac{BC}{BI} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{15{,}8}{0{,}8} = \dfrac{79}{4}$.

Xét tam giác BCD có $CD \perp AC$, $IF \perp AC$ nên $CD \parallel IF$.

Suy ra $\dfrac{IF}{CD} = \dfrac{BI}{BC}$ (hệ quả của định lí Thalès). Do đó $CD = IF \cdot \dfrac{BC}{BI} = \dfrac{38}{79} \cdot \dfrac{79}{4} = 9{,}5$ (m).

Vậy chiều cao của cột cờ là 9,5 m.

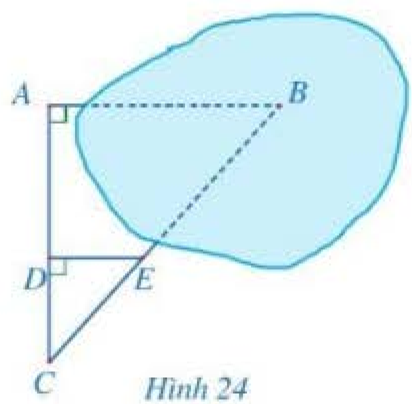
2 Người ta đo bóng của một cây và được các số đo ở *Hình 23*. Giả sử rằng các tia nắng song song với nhau, hãy tính độ cao x.



Hình 23

BÀI TẬP

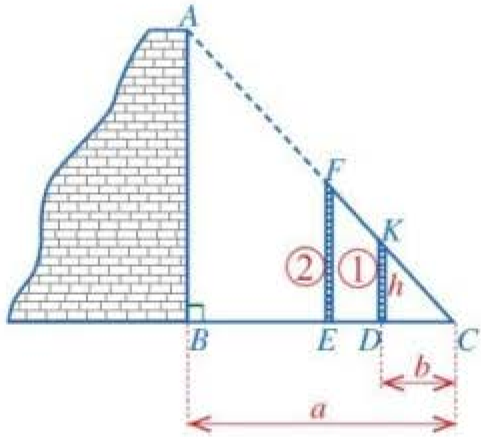
1. Để đo khoảng cách giữa hai vị trí A và B trong đó B không tới được, người ta tiến hành chọn các vị trí C, D, E như ở *Hình 24* và đo được $AC = 50$ m, $CD = 20$ m, $DE = 18$ m. Hỏi khoảng cách giữa hai vị trí A và B là bao nhiêu?



Hình 24

2. *Có thể gián tiếp đo chiều cao của một bức tường khá cao bằng dụng cụ đơn giản được không?*

Hình 25 thể hiện cách đo chiều cao AB của một bức tường bằng các dụng cụ đơn giản gồm: Hai cọc thẳng đứng (cọc ① cố định; cọc ② có thể di động được) và sợi dây FC. Cọc ① có chiều cao $DK = h$. Các khoảng cách $BC = a$, $DC = b$ đo được bằng thước dây thông dụng.



Hình 25

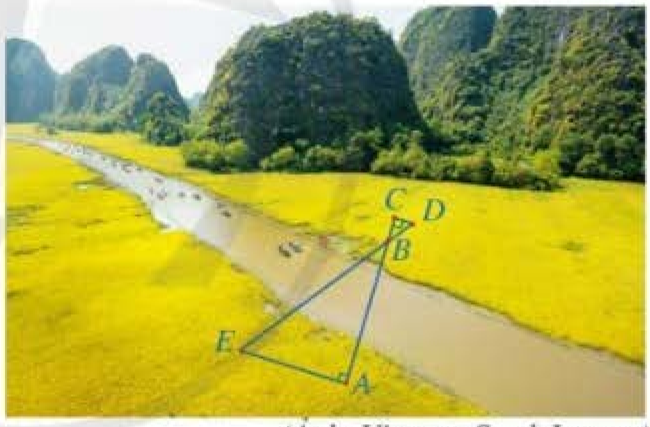
a) Em hãy cho biết người ta tiến hành đo đạc như thế nào?

b) Tính chiều cao AB theo h, a, b.

3. Trong *Hình 26*, các thanh AA', BB', CC', DD' của giàn gỗ song song với nhau. Không sử dụng thước đo, hãy giải thích vì sao độ dài các đoạn AB, BC, CD lần lượt tỉ lệ với độ dài các đoạn $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$.

(Ảnh: Brett Taylor Photography)

Hình 26



(Ảnh: Vietnam Stock Images)

Hình 27

4. Anh Thiện và chị Lương đứng ở hai phía bờ sông và muốn ước lượng khoảng cách giữa hai vị trí A, B ở hai bên bờ sông (*Hình 27*).

– Anh Thiện chọn vị trí C ở trên bờ sông sao cho A, B, C thẳng hàng và đo được $BC = 4$ m;

– Tiếp theo, anh Thiện xác định vị trí D, chị Lương xác định vị trí E sao cho D, B, E thẳng hàng, đồng thời $\widehat{BAE} = \widehat{BCD} = 90°$;

– Anh Thiện đo được $CD = 2$ m, chị Lương đo được $AE = 12$ m.

Hãy tính khoảng cách giữa hai vị trí A và B.

§3. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC

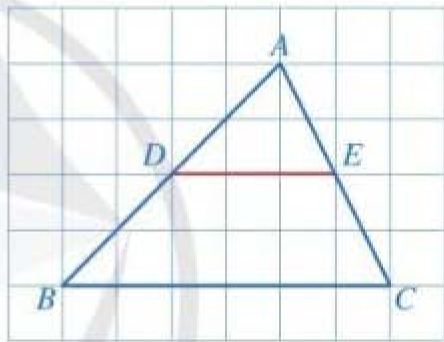
Hình 28 gợi nên hình ảnh tam giác ABC và đoạn thẳng MN với M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và AC.

(*Ảnh: Pressmaster*)

Hình 28

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Quan sát tam giác ABC ở *Hình 29* và cho biết hai đầu mút D, E của đoạn thẳng DE có đặc điểm gì.

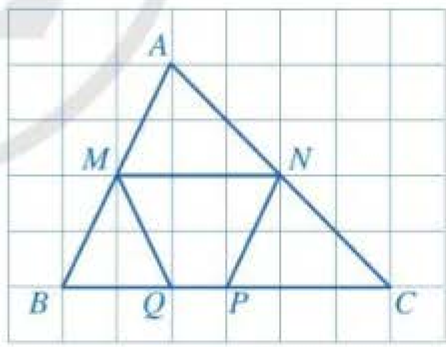


Hình 29

Ta có định nghĩa sau:

Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác đó.

Ví dụ 1 Trong các đoạn thẳng MN, MQ, NP ở *Hình 30*, đoạn thẳng nào là đường trung bình của tam giác ABC? Vì sao?



Hình 30

Giải

– Đoạn thẳng MN là đường trung bình của tam giác ABC vì hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, AC.

– Đoạn thẳng MQ không là đường trung bình của tam giác ABC vì điểm Q không phải là trung điểm của cạnh BC.

– Đoạn thẳng NP là đường trung bình của tam giác ABC vì hai điểm N, P lần lượt là trung điểm của hai cạnh AC, BC.

1 Vẽ tam giác ABC và các đường trung bình của tam giác đó.

Nhận xét: Mỗi tam giác có ba đường trung bình.

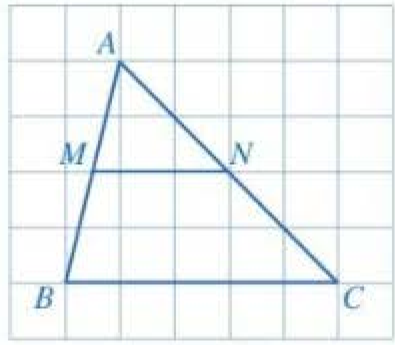
II. TÍNH CHẤT

2 Cho tam giác ABC có MN là đường trung bình (*Hình 31*).

a) MN có song song với BC hay không? Vì sao?

b) Tỉ số $\frac{MN}{BC}$ bằng bao nhiêu?

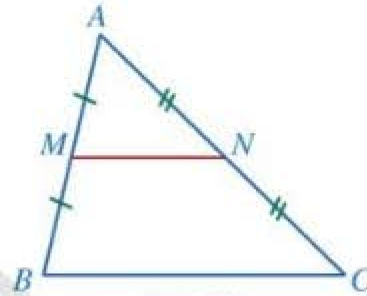
Ta có định lí sau:



Hình 31

> Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh đó.

GT	$\Delta ABC, MA = MB = \frac{1}{2}AB, NA = NC = \frac{1}{2}AC$
KL	$MN \,//\, BC, MN = \frac{1}{2}BC$



Hình 32

Chứng minh. (*Hình 32*)

Xét tam giác ABC có $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1$ nên $MN \,//\, BC$ (định lí Thalès đảo).

Suy ra $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ (hệ quả của định lí Thalès). Vậy $MN \,//\, BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$.

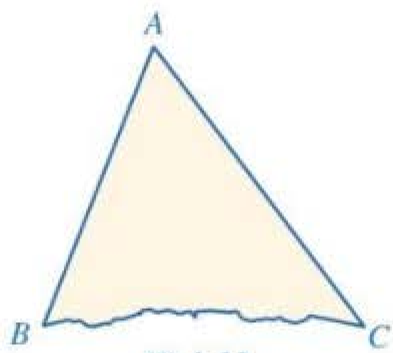
Ví dụ 2 Trong bài toán ở phần mở đầu (*Hình 28*), người ta đo được khoảng cách giữa hai điểm B, C là 5 m. Làm thế nào để tính được khoảng cách giữa hai điểm M, N mà không cần phải đo trực tiếp?

Giải

Xét tam giác ABC có $MA = MB$, $NA = NC$ nên đoạn thẳng MN là đường trung bình và

$MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2{,}5$ (m).

Ví dụ 3 Bạn Ngân đưa cho bạn Linh một mảnh giấy có dạng hình tam giác ABC nhưng bị rách một phần (*Hình 33*). Bạn Ngân đố bạn Linh: Tính độ dài đoạn thẳng BC và vẽ đường thẳng d đi qua A đồng thời vuông góc với đường thẳng BC mà không được đặt thước đi qua hai điểm B, C.



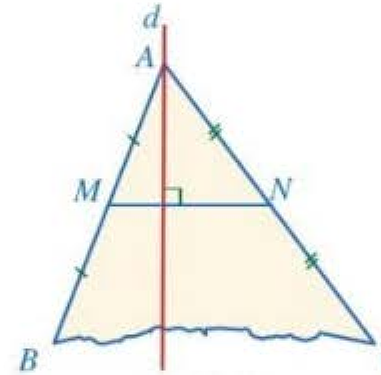
Hình 33

Bạn Linh đã làm như sau (*Hình 34*):

– Lấy hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, AC. Đo độ dài đoạn thẳng MN, được kết quả $MN = 1,5$ dm.

– Qua điểm A kẻ đường thẳng d vuông góc với MN.

Bạn Linh khẳng định rằng $BC = 3$ dm và đường thẳng d vuông góc với BC. Bạn Linh làm có đúng không? Vì sao?

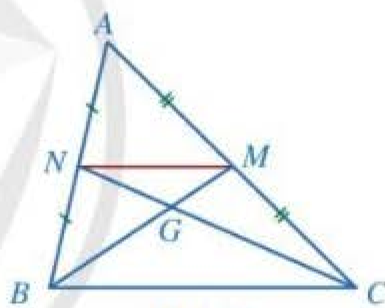


Hình 34

Giải

Vì đoạn thẳng MN nối trung điểm của hai cạnh AB và AC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC. Suy ra $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$. Vì $d \perp MN$ và $MN \parallel BC$ nên $d \perp BC$. Ta cũng có $BC = 2MN = 2 \,.\, 1,5 = 3$ (dm). Vậy bạn Linh đã làm đúng.

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại điểm G. Chứng minh $GB = \frac{2}{3}BM$.



Hình 35

Giải. (*Hình 35*)

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB nên MN là đường trung bình của tam giác ABC.

Suy ra $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$. Lại do $MN \parallel BC$ nên theo hệ quả của định lí Thalès ta có $\frac{GM}{GB} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $GB = 2GM$. Vậy $GB = \frac{2}{3}BM$.

Nhận xét: Ví dụ trên cho ta cách chứng minh tính chất trọng tâm của tam giác: "Trọng tâm của tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy".

2 Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Giả sử M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BC, AC. Chứng minh:

a) M, N, P thẳng hàng;

b) $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của AB, điểm N thuộc cạnh AC thoả mãn $MN \parallel BC$. Chứng minh $NA = NC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$.

Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.

2. Cho tam giác ABC có AM là đường trung tuyến, các điểm N, P phân biệt thuộc cạnh AB sao cho $AP = PN = NB$. Gọi Q là giao điểm của AM và CP. Chứng minh:

a) $MN \parallel CP$; b) $AQ = QM$; c) $CP = 4PQ$.

3. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Cho $AC = BD$. Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

c) Cho $AC \perp BD$. Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

4. Cho tam giác ABC nhọn có H là trực tâm. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BH, HC, CA. Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

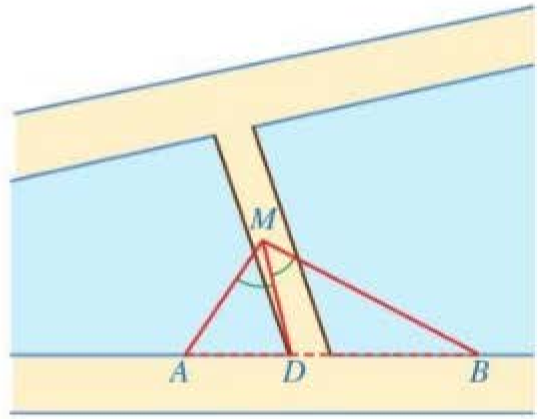
5. Trong *Hình 36*, ba cạnh màu vàng AB, BC, CA gợi nên hình ảnh tam giác ABC và đoạn thẳng màu xanh MN là một đường trung bình của tam giác đó. Bạn Duyên đứng ở phía dưới đo khoảng cách giữa hai chân cột số ① và số ②, từ đó ước lượng được độ dài đoạn thẳng MN khoảng 4,5 m. Khoảng cách giữa hai mép dưới của mái được tính bằng độ dài đoạn thẳng BC. Hỏi khoảng cách đó khoảng bao nhiêu mét?

(*Ảnh: photobeginner*)

Hình 36

§4. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

Một người đứng ở vị trí M trên cây cầu bắc qua con kênh quan sát ba điểm thẳng hàng A, B, D lần lượt là chân hai cột đèn trồng ở bờ kênh và chân cầu (*Hình 37*). Người đó nhận thấy góc nhìn đến hai điểm A, D thì bằng góc nhìn đến hai điểm B, D, tức là $\widehat{AMD} = \widehat{BMD}$. Người đó muốn ước lượng tỉ số khoảng cách từ vị trí M đang đứng đến điểm A và đến điểm B mà không cần phải đo trực tiếp hai khoảng cách đó.



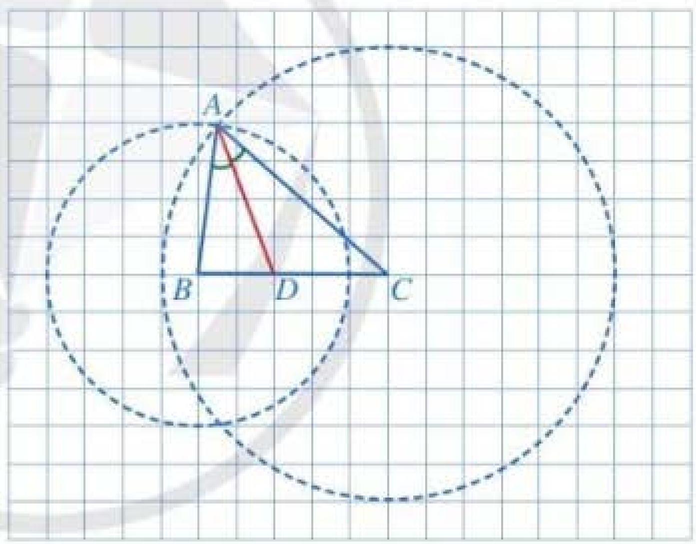
Hình 37

1 Trong *Hình 38*, tam giác ABC có AD là đường phân giác của góc BAC. Giả sử mỗi ô vuông của lưới ô vuông có độ dài cạnh bằng 1 cm.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng DB, DC.

b) Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC.

c) So sánh các tỉ số $\dfrac{DB}{DC}, \dfrac{AB}{AC}$.



Hình 38

Nhận xét

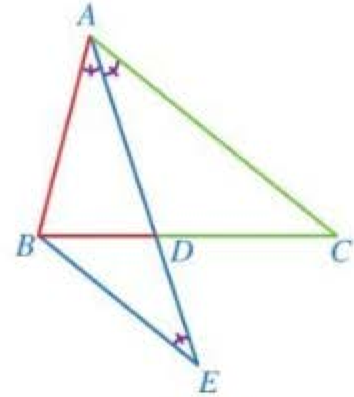
Ở *Hình 38*, ta có $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $DB = 2$ cm, $DC = 3$ cm nên $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{3}$.

Như vậy, trong tam giác ABC, đường phân giác AD chia cạnh đối diện BC thành hai đoạn thẳng DB, DC tỉ lệ với hai cạnh kề AB, AC.

Một cách tổng quát, ta có định lí sau:

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

GT	ΔABC AD là đường phân giác của góc BAC $(D \in BC)$
KL	$\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$



Hình 39

Chứng minh. (*Hình 39*)

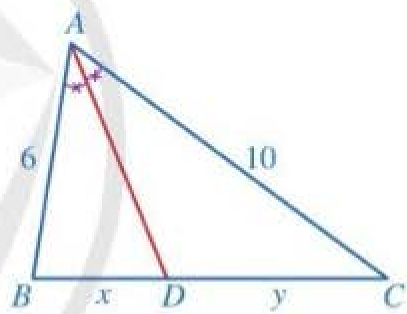
Qua B vẽ đường thẳng song song với AC, cắt đường thẳng AD tại điểm E.

Ta có $\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ (giả thiết). Vì $BE \,//\, AC$ nên $\widehat{CAE} = \widehat{BEA}$ (hai góc so le trong).

Suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$. Do đó tam giác ABE cân tại B, suy ra $BE = AB$ (1).

Áp dụng hệ quả của định lí Thalès đối với tam giác ACD, ta có $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{BE}{AC}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.



Hình 40

Ví dụ 1 Quan sát *Hình 40*.

a) Tính $\dfrac{x}{y}$.

b) Tính x, y, biết $x + y = 9$.

Giải

a) Xét tam giác ABC có AD là đường phân giác của góc BAC nên $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (tính chất đường phân giác).

Suy ra $\dfrac{x}{y} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

b) Ta có $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{5}$, suy ra $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{5}$.

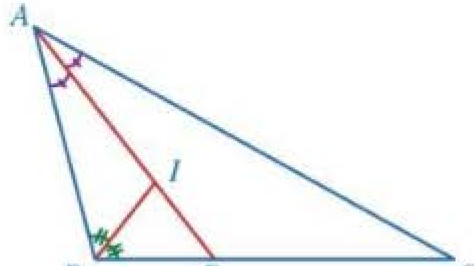
Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{x+y}{3+5} = \dfrac{9}{8}$.

Suy ra: $x = 3 \cdot \dfrac{9}{8} = \dfrac{27}{8}$, $y = 5 \cdot \dfrac{9}{8} = \dfrac{45}{8}$.

1 Giải bài toán nêu trong phần mở đầu.

2 Cho tam giác ABC có $AB < AC$, AD là đường phân giác. Chứng minh $DB < DC$.

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $BC = 6$, $CA = 8$, AD là một đường phân giác và I là giao điểm ba đường phân giác của tam giác đó (*Hình 41*). Tính DB và $\frac{ID}{IA}$.



Hình 41

Giải

Xét tam giác ABC có AD là đường phân giác của góc BAC nên $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, do đó $\frac{DB}{1} = \frac{DC}{2}$.

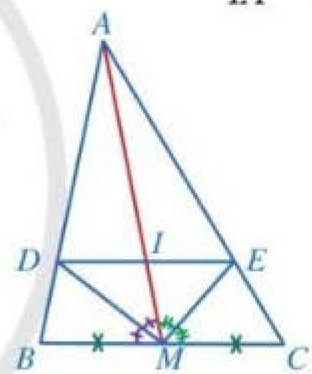
Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{DB}{1} = \frac{DC}{2} = \frac{DB + DC}{1 + 2} = \frac{6}{3} = 2$.

Suy ra $DB = 2$. Xét tam giác ABD có BI là đường phân giác của góc ABD nên $\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA}$.

Suy ra $\frac{ID}{IA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3 Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF. Chứng minh $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC có AM là đường trung tuyến. Gọi MD, ME lần lượt là đường phân giác của các tam giác AMB và AMC. Giả sử DE cắt AM tại I. Chứng minh $DE \parallel BC$ và I là trung điểm của DE.



Hình 42

Giải. (*Hình 42*)

Xét tam giác AMB có MD là đường phân giác của góc AMB nên $\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB}$.

Xét tam giác AMC có ME là đường phân giác của góc AMC nên $\frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC}$.

Mà $MB = MC$ nên $\frac{MA}{MB} = \frac{MA}{MC}$. Suy ra $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$.

Vì thế $DE \parallel BC$ (định lí Thalès đảo trong tam giác ABC).

Áp dụng hệ quả của định lí Thalès trong hai tam giác ABM và ACM, ta có: $\frac{ID}{MB} = \frac{AI}{AM}$ và $\frac{IE}{MC} = \frac{AI}{AM}$. Suy ra $\frac{ID}{MB} = \frac{IE}{MC}$.

Mà $MB = MC$ nên $ID = IE$. Do đó I là trung điểm của DE.

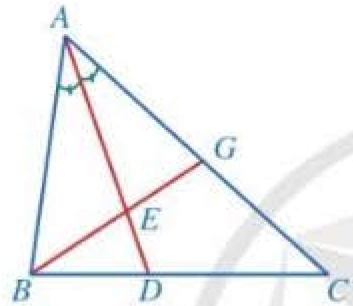
4 Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC sao cho $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Chứng minh AD là tia phân giác của góc BAC.

BÀI TẬP

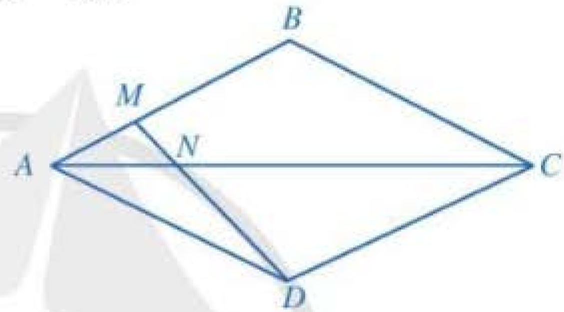
1. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF. Biết $AB = 4$, $BC = 5$, $CA = 6$. Tính BD, CE, AF.

2. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM. Tia phân giác của góc ABC lần lượt cắt các đoạn thẳng AM, AC tại điểm D, E. Chứng minh $\frac{EC}{EA} = 2\frac{DM}{DA}$.

3. Quan sát *Hình 43* và chứng minh $\frac{DB}{DC} : \frac{EB}{EG} = \frac{AG}{AC}$.



Hình 43



Hình 44

4. Cho hình thoi $ABCD$ (*Hình 44*). Điểm M thuộc cạnh AB thoả mãn $AB = 3AM$. Hai đoạn thẳng AC và DM cắt nhau tại N. Chứng minh $ND = 3MN$.

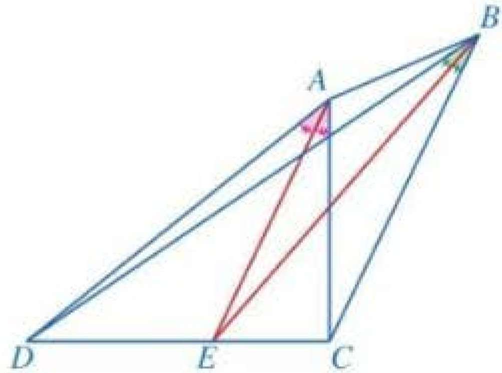
5. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$, $AC = 4$, AD là đường phân giác. Tính:

a) Độ dài các đoạn thẳng BC, DB, DC;

b) Khoảng cách từ điểm D đến đường thẳng AC;

c) Độ dài đường phân giác AD.

6. Cho tứ giác $ABCD$ với các tia phân giác của các góc CAD và CBD cùng đi qua điểm E thuộc cạnh CD (*Hình 45*). Chứng minh $AD \,.\, BC = AC \,.\, BD$.



Hình 45

§5. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Trong bức ảnh ở *Hình 46*, các tam giác được tạo dựng với hình dạng giống hệt nhau nhưng có kích thước to nhỏ khác nhau.

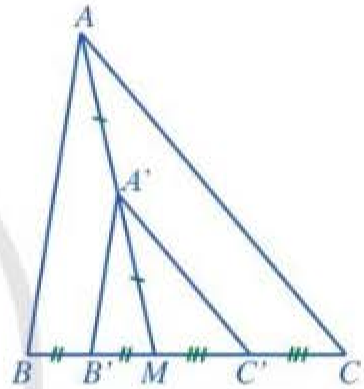
Các tam giác trong Hình 46 gợi nên những tam giác có mối liên hệ gì?

(Hình minh hoạ: wacomka)

Hình 46

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Cho tam giác ABC, điểm M nằm trên cạnh BC. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng MA, MB, MC (*Hình 47*).



Hình 47

a) So sánh các cặp góc: $\widehat{B'A'C'}$ và $\widehat{BAC}$; $\widehat{C'B'A'}$ và $\widehat{CBA}$; $\widehat{A'C'B'}$ và $\widehat{ACB}$.

b) So sánh các tỉ số: $\dfrac{A'B'}{AB}$; $\dfrac{B'C'}{BC}$; $\dfrac{C'A'}{CA}$.

Nhận xét: Hai tam giác $A'B'C'$ và ABC có:

– Các góc tương ứng bằng nhau: $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$; $\widehat{C'B'A'} = \widehat{CBA}$; $\widehat{A'C'B'} = \widehat{ACB}$.

– Các cạnh tương ứng tỉ lệ: $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA}$.

Ta nói tam giác $A'B'C'$ *đồng dạng* với tam giác ABC.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

> Tam giác $A'B'C'$ gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu:
>
> $$\widehat{A'} = \widehat{A};\ \widehat{B'} = \widehat{B};\ \widehat{C'} = \widehat{C};$$
>
> $$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$
>
> Kí hiệu là $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

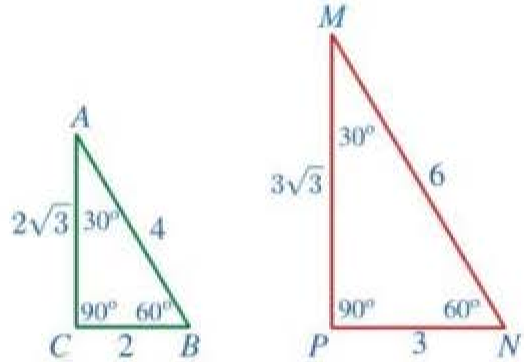
Chú ý: Khi tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC:

- Ta viết $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ với các đỉnh được ghi theo thứ tự các góc tương ứng bằng nhau;
- Tỉ số các cạnh tương ứng $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = k$ gọi là *tỉ số đồng dạng*.

Chẳng hạn, trong *Hình 47*, tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số đồng dạng là $\frac{1}{2}$ và tam giác ABC đồng dạng với tam giác $A'B'C'$ theo tỉ số đồng dạng là 2.

Nhận xét: Nếu $\Delta A'B'C' = \Delta ABC$ thì $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số đồng dạng là 1.

Ví dụ 1 Hai tam giác ở *Hình 48* có đồng dạng hay không? Vì sao?



Hình 48

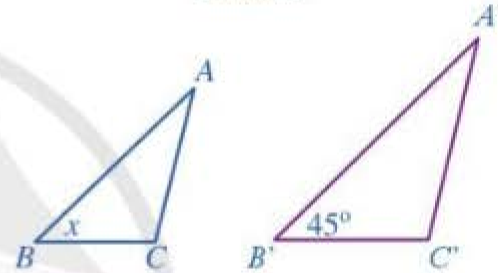
Giải

Xét hai tam giác MNP và ABC có:

$\widehat{M} = \widehat{A} = 30°$; $\widehat{N} = \widehat{B} = 60°$; $\widehat{P} = \widehat{C} = 90°$;

$\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA} = \frac{3}{2}$.

Vậy theo định nghĩa hai tam giác đồng dạng ta có: $\Delta MNP \backsim \Delta ABC$.



Hình 49

Ví dụ 2 Cho $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ (*Hình 49*). Tìm x.

Giải

Vì $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ nên $\widehat{B'} = \widehat{B}$. Suy ra $x = 45°$.

1 Cho $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ và $AB = 3$, $BC = 2$, $CA = 4$, $A'B' = x$, $B'C' = 3$, $C'A' = y$. Tìm x và y.

II. TÍNH CHẤT

2 Từ định nghĩa hai tam giác đồng dạng, hãy cho biết:

a) Mỗi tam giác có đồng dạng với chính nó hay không;

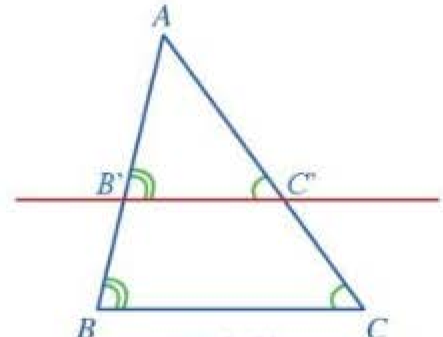
b) Nếu $\Delta A'B'C'$ đồng dạng với ΔABC thì ΔABC có đồng dạng với $\Delta A'B'C'$ hay không;

c) Nếu $\Delta A''B''C''$ đồng dạng với $\Delta A'B'C'$ và $\Delta A'B'C'$ đồng dạng với ΔABC thì $\Delta A''B''C''$ có đồng dạng với ΔABC hay không.

Ta có tính chất sau về quan hệ đồng dạng giữa hai tam giác:

- Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó.
- Nếu $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ thì $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$.
- Nếu $\Delta A''B''C'' \backsim \Delta A'B'C'$ và $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ thì $\Delta A''B''C'' \backsim \Delta ABC$.

3 Cho tam giác ABC (*Hình 50*). Một đường thẳng song song với BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại B', C'. Chứng minh $\Delta AB'C' \backsim \Delta ABC$.



Hình 50

Để chứng minh khẳng định trên, ta có thể làm như sau:

Vì $B'C' \parallel BC$ nên ta có:

$\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC}$ (hai góc đồng vị);

$\widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$ (hai góc đồng vị);

$\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$ (hệ quả của định lí Thalès).

Xét hai tam giác $AB'C'$ và ABC có:

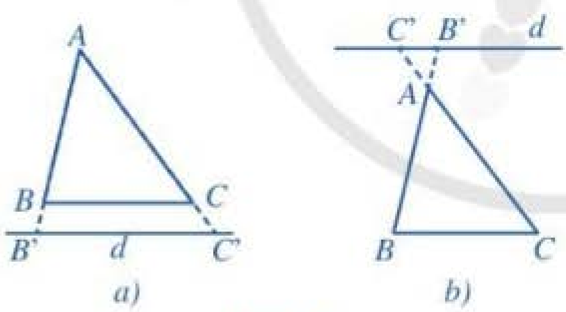
$\widehat{B'AC'} = \widehat{BAC}$; $\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC}$; $\widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$; $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$.

Suy ra $\Delta AB'C' \backsim \Delta ABC$.

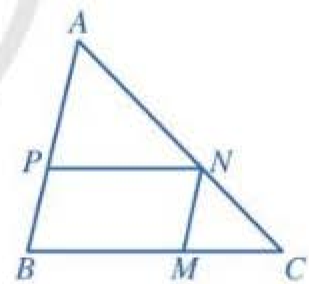
Ta có định lí sau về cặp tam giác đồng dạng nhận được từ định lí Thalès:

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh thứ ba thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

Nhận xét: Định lí trên cũng đúng cho trường hợp đường thẳng cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại. Chẳng hạn, trong *Hình 51a* và *Hình 51b* ta cũng có $\Delta AB'C' \backsim \Delta ABC$.



Hình 51



Hình 52

Ví dụ 3 Quan sát *Hình 52* và sử dụng kí hiệu để viết các cặp tam giác đồng dạng, biết tứ giác $BMNP$ là hình bình hành.

Giải

Do $PN \parallel BC$ (giả thiết) nên $\Delta APN \backsim \Delta ABC$.

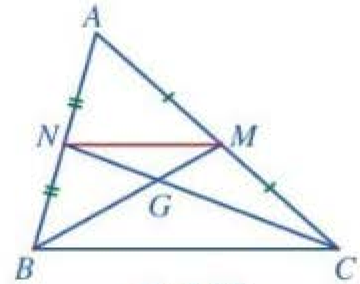
Lại do $MN \parallel AB$ (giả thiết) nên $\Delta NMC \backsim \Delta ABC$.

Vì $\Delta APN \backsim \Delta ABC$, $\Delta NMC \backsim \Delta ABC$ nên $\Delta APN \backsim \Delta NMC$.

2 Cho tam giác ABC. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của AB, AC. Chứng minh $\Delta AB'C' \backsim \Delta ABC$.

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC. Hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Chứng minh $\Delta GMN \backsim \Delta GBC$.

Giải. (*Hình 53*)



Hình 53

Vì M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB nên MN là đường trung bình của tam giác ABC. Suy ra MN // BC.

Xét tam giác GBC, do MN // BC nên $\Delta GMN \backsim \Delta GBC$.

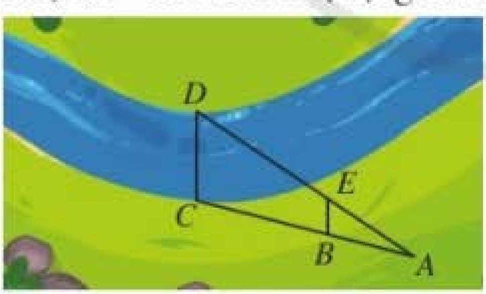
BÀI TẬP

1. Cho $\Delta ABC \backsim \Delta MNP$ và $\widehat{A} = 45^o$, $\widehat{B} = 60^o$. Tính các góc C, M, N, P.

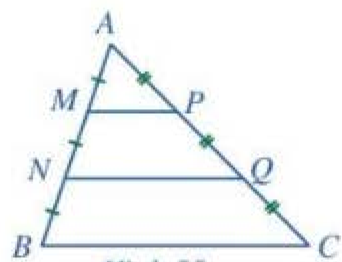
2. Cho $\Delta ABC \backsim \Delta MNP$ và $AB = 4$, $BC = 6$, $CA = 5$, $MN = 5$. Tính độ dài các cạnh NP, PM.

3. Ba vị trí A, B, C trong thực tiễn lần lượt được mô tả bởi ba đỉnh của tam giác $A'B'C'$ trên bản vẽ. Biết tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $\frac{1}{1\,000\,000}$ và $A'B' = 4$ cm, $B'C' = 5$ cm, $C'A' = 6$ cm. Tính khoảng cách giữa hai vị trí A và B, B và C, C và A trong thực tiễn (theo đơn vị kilômét).

4. Trong *Hình 54*, độ rộng của khúc sông được tính bằng khoảng cách giữa hai vị trí C, D. Giả sử chọn được các vị trí A, B, E sao cho $\Delta ABE \backsim \Delta ACD$ và đo được $AB = 20$ m, $AC = 50$ m, $BE = 8$ m. Tính độ rộng của khúc sông đó.



Hình 54



Hình 55

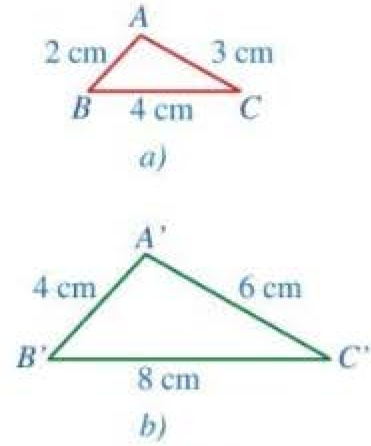
5. Cho tam giác ABC (*Hình 55*), các điểm M, N thuộc cạnh AB thoả mãn $AM = MN = NB$, các điểm P, Q thuộc cạnh AC thoả mãn $AP = PQ = QC$. Tam giác AMP đồng dạng với những tam giác nào?

6. Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường thẳng đi qua D lần lượt cắt đoạn thẳng BC và tia AB tại M và N sao cho điểm M nằm giữa hai điểm B và C. Chứng minh:

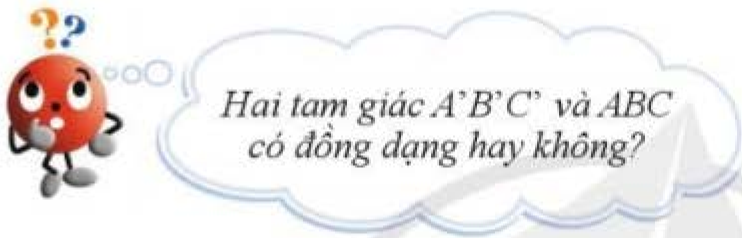
a) $\Delta NBM \backsim \Delta NAD$; b) $\Delta NBM \backsim \Delta DCM$; c) $\Delta NAD \backsim \Delta DCM$.

§6. TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC

Mảnh đất trồng hoa của nhà bạn Hằng có dạng hình tam giác với độ dài các cạnh là 2 m, 3 m, 4 m. Bạn Hằng vẽ tam giác *ABC* có độ dài các cạnh là 2 cm, 3 cm, 4 cm để mô tả hình ảnh mảnh vườn đó (*Hình 56a*). Bạn Khôi nói rằng tam giác *ABC* nhỏ quá và vẽ tam giác *A'B'C'* có độ dài các cạnh là 4 cm, 6 cm, 8 cm (*Hình 56b*).



Hình 56



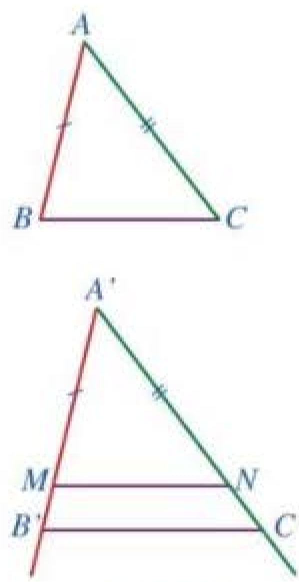
I. TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ NHẤT: CẠNH - CẠNH - CẠNH

1 Quan sát *Hình 56* và so sánh các tỉ số: $\dfrac{A'B'}{AB}; \dfrac{A'C'}{AC}; \dfrac{B'C'}{BC}$.

Ta có định lí sau:

> **Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.**

GT	$\Delta ABC, \Delta A'B'C', \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$
KL	$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$



Hình 57

Chứng minh

Trường hợp 1: $\dfrac{A'B'}{AB} = 1$.

Khi đó: $A'B' = AB, B'C' = BC, C'A' = CA$.

Suy ra $\Delta A'B'C' = \Delta ABC$. Vì vậy $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

Trường hợp 2: $\dfrac{A'B'}{AB} \neq 1$.

Trên tia *A'B'* lấy điểm *M* thoả mãn $A'M = AB$.

Trên tia *A'C'* lấy điểm *N* thoả mãn $A'N = AC$ (*Hình 57*).

Vì $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$ và $A'M = AB$, $A'N = AC$ nên $\dfrac{A'B'}{A'M} = \dfrac{A'C'}{A'N}$.

Suy ra $MN \mathbin{//} B'C'$ (định lí Thalès đảo). Do đó $\dfrac{MN}{B'C'} = \dfrac{A'N}{A'C'}$ (hệ quả của định lí Thalès).

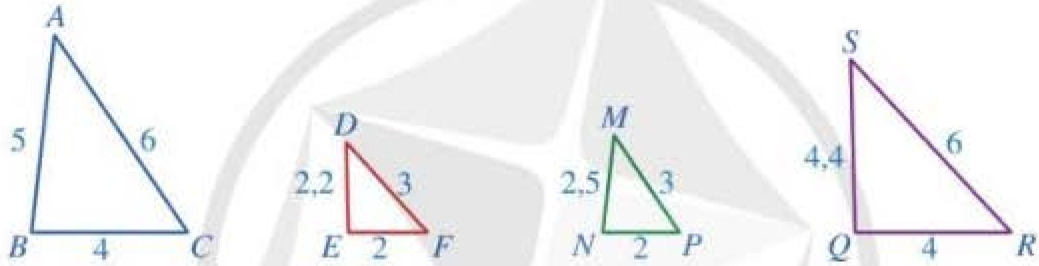
Từ đó ta có: $\dfrac{MN}{B'C'} = \dfrac{A'N}{A'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$, suy ra $MN = BC$.

Xét hai tam giác $A'MN$ và ABC có: $A'M = AB$, $A'N = AC$, $MN = BC$.

Suy ra $\Delta A'MN = \Delta ABC$ (c.c.c). Do đó $\Delta A'MN \backsim \Delta ABC$.

Vì $MN \mathbin{//} B'C'$ nên theo định lí trang 72 ta có $\Delta A'B'C' \backsim \Delta A'MN$. Vậy $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

Ví dụ 1 Quan sát *Hình 58* và chỉ ra hai cặp tam giác đồng dạng:



Hình 58

Giải

– Xét hai tam giác ABC và MNP, ta có: $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{5}{2,5} = 2$, $\dfrac{BC}{NP} = \dfrac{4}{2} = 2$, $\dfrac{CA}{PM} = \dfrac{6}{3} = 2$.

Suy ra $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{CA}{PM}$. Vậy $\Delta ABC \backsim \Delta MNP$.

– Xét hai tam giác DEF và SQR, ta có:

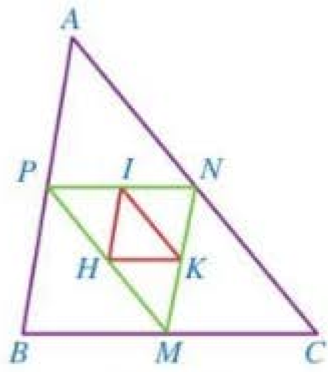
$\dfrac{DE}{SQ} = \dfrac{2,2}{4,4} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{EF}{QR} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{FD}{RS} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\dfrac{DE}{SQ} = \dfrac{EF}{QR} = \dfrac{FD}{RS}$. Vậy $\Delta DEF \backsim \Delta SQR$.

1 Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của AG, BG, CG. Chứng minh $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB và I, H, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng NP, PM, MN. Chứng minh $\Delta IHK \backsim \Delta ABC$.

Giải. (*Hình 59*)



Hình 59

Vì M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA nên MN là đường trung bình của tam giác ABC. Suy ra $MN = \frac{1}{2}AB$ (1).

Vì I, H lần lượt là trung điểm của các cạnh NP, PM nên IH là đường trung bình của tam giác MNP.

Suy ra $IH = \frac{1}{2}MN$ (2).

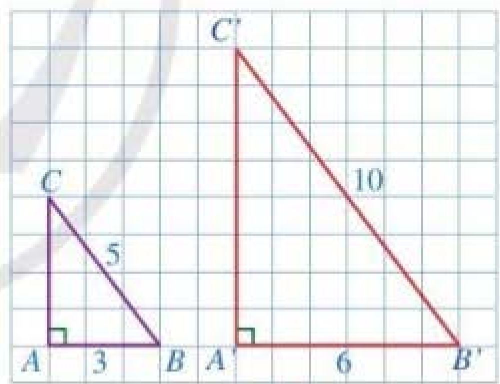
Từ hai đẳng thức (1) và (2), ta có $IH = \frac{1}{4}AB$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $HK = \frac{1}{4}BC$, $KI = \frac{1}{4}CA$.

Vì $\frac{IH}{AB} = \frac{HK}{BC} = \frac{KI}{CA} = \frac{1}{4}$ nên $\Delta IHK \backsim \Delta ABC$.

II. ÁP DỤNG TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC VÀO TAM GIÁC VUÔNG

2 Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ lần lượt vuông tại A và A' (*Hình 60*) sao cho $AB = 3$, $BC = 5$, $A'B' = 6$, $B'C' = 10$.



Hình 60

a) Tính CA và $C'A'$.

b) So sánh các tỉ số $\frac{A'B'}{AB}$, $\frac{B'C'}{BC}$, $\frac{C'A'}{CA}$.

c) Hai tam giác $A'B'C'$ và ABC có đồng dạng với nhau hay không?

Ta có định lí sau:

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

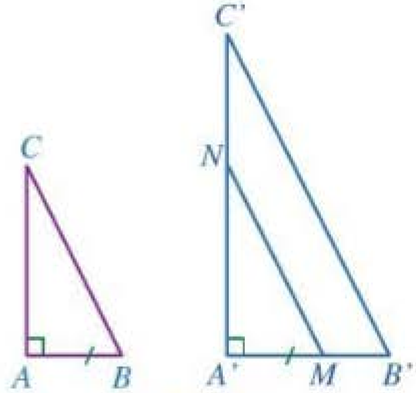
GT	ΔABC, $\Delta A'B'C'$, $\widehat{A'} = \widehat{A} = 90^\circ$ $\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$
KL	$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$

Chứng minh

Trường hợp 1: $\frac{A'B'}{AB} = 1$. Khi đó $A'B' = AB$, $B'C' = BC$.
Suy ra $\Delta A'B'C' = \Delta ABC$. Vì vậy $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

Trường hợp 2: $\frac{A'B'}{AB} \neq 1$.

Trên tia $A'B'$ lấy điểm M thoả mãn $A'M = AB$.



Hình 61

Qua M kẻ đường thẳng song song với $B'C'$, cắt đường thẳng $A'C'$ tại N (*Hình 61*). Ta có: $\frac{A'M}{A'B'} = \frac{MN}{B'C'}$ (hệ quả của định lí Thalès).

Vì thế $\frac{AB}{A'B'} = \frac{MN}{B'C'}$. Từ giả thiết suy ra: $\frac{BC}{B'C'} = \frac{MN}{B'C'}$, tức là $MN = BC$.

Xét hai tam giác vuông ABC và $A'MN$, ta có $A'M = AB$, $MN = BC$ nên $\Delta A'MN = \Delta ABC$.
Suy ra $\Delta A'MN \backsim \Delta ABC$. Vì $MN \parallel B'C'$ nên theo định lí trang 72 ta có $\Delta A'MN \backsim \Delta A'B'C'$.
Vậy $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

Ví dụ 3 Quan sát *Hình 62* và chỉ ra hai cặp tam giác đồng dạng:

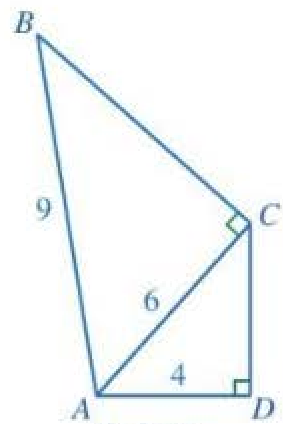
Hình 62

Giải

– Xét hai tam giác ABC và IKH, ta có: $\widehat{A} = \hat{I} = 90^\circ$ và $\frac{AB}{IK} = \frac{BC}{KH}$ (vì $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$).
Suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta IKH$.

– Xét hai tam giác DEF và MPN, ta có: $\widehat{D} = \widehat{M} = 90^\circ$ và $\frac{DE}{MP} = \frac{EF}{PN}$ (vì $\frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$).
Suy ra $\Delta DEF \backsim \Delta MPN$.

Ví dụ 4 Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = 9$, $AC = 6$, $AD = 4$, $\widehat{ADC} = \widehat{ACB} = 90^\circ$ (*Hình 63*). Chứng minh tia AC là tia phân giác của góc BAD.



Hình 63

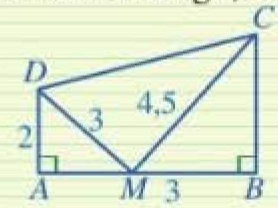
Giải

Vì $\frac{AC}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $\frac{AD}{AC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ nên $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$.

Xét hai tam giác ADC và ACB có $\widehat{ADC} = \widehat{ACB} = 90°$ và $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$ nên $\Delta ADC \backsim \Delta ACB$. Suy ra $\widehat{CAD} = \widehat{BAC}$.

Vậy tia AC là tia phân giác của góc BAD.

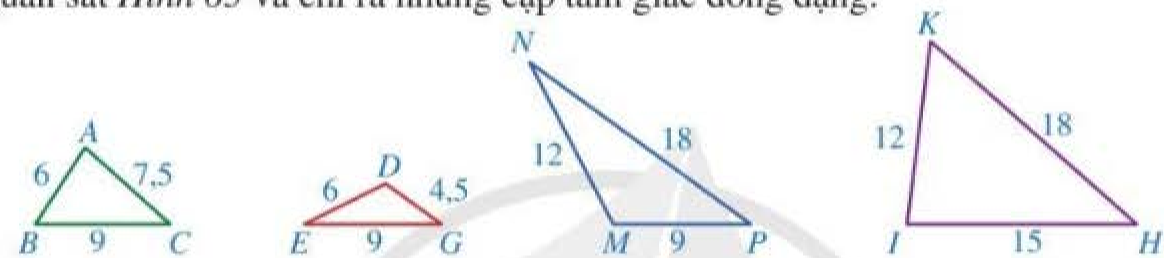
2 Trong *Hình 64*, chứng minh tam giác CDM vuông tại M.



Hình 64

BÀI TẬP

1. Quan sát *Hình 65* và chỉ ra những cặp tam giác đồng dạng:



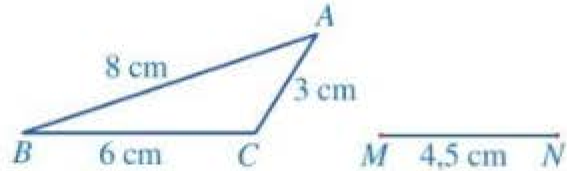
Hình 65

2. Cho hai tam giác ABC và MNP có $AB = 2$, $BC = 5$, $CA = 6$, $MN = 4$, $NP = 10$, $PM = 12$. Hãy viết các cặp góc tương ứng bằng nhau của hai tam giác trên và giải thích kết quả.

3. Bác Hùng vẽ bản đồ trong đó dùng ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC lần lượt mô tả ba vị trí M, N, P trong thực tiễn. Bác Duy cũng vẽ một bản đồ, trong đó dùng ba đỉnh A', B', C' của tam giác $A'B'C'$ lần lượt mô tả ba vị trí M, N, P đó. Tỉ lệ bản đồ mà bác Hùng và bác Duy vẽ lần lượt là 1 : 1 000 000 và 1 : 1 500 000. Chứng minh $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ và tính tỉ số đồng dạng.

4. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các tia OA, OB, OC sao cho $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{OC}{OP} = \frac{2}{3}$. Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta MNP$.

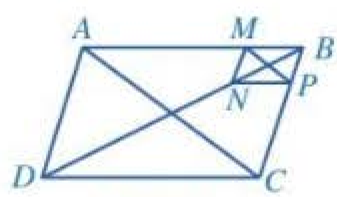
5. Bạn Hoa vẽ trên giấy một tam giác ABC và đoạn thẳng MN với các kích thước như *Hình 66*. Bạn Hoa đố bạn Thanh vẽ điểm P thoả mãn $\widehat{PMN} = \widehat{ACB}$, $\widehat{PNM} = \widehat{BAC}$ mà không sử dụng thước đo góc. Em hãy giúp bạn Thanh sử dụng thước thẳng (có chia khoảng milimét) và compa để vẽ điểm P và giải thích kết quả tìm được.



Hình 66

6. Cho các hình bình hành $ABCD$ và $BMNP$ như ở *Hình 67*. Chứng minh:

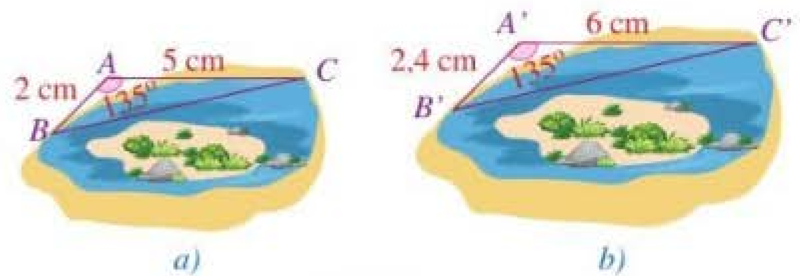
a) $\frac{BM}{BA} = \frac{BP}{BC}$; b) $\Delta MNP \backsim \Delta CBA$.



Hình 67

§7. TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ HAI CỦA TAM GIÁC

Bạn Hoàng và bạn Thu cùng vẽ bản đồ một ốc đảo và ba vị trí với tỉ lệ bản đồ khác nhau. Bạn Hoàng dùng ba điểm A, B, C lần lượt biểu thị các vị trí thứ nhất, thứ hai, thứ ba (*Hình 68a*). Bạn Thu dùng ba điểm A', B', C' lần lượt biểu thị ba vị trí đó (*Hình 68b*).



Hình 68

Hai tam giác $A'B'C'$ và ABC có đồng dạng hay không?

I. TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ HAI: CẠNH - GÓC - CẠNH

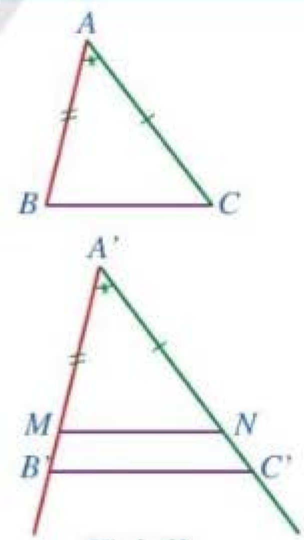
1 Quan sát *Hình 68* và so sánh:

a) Các tỉ số $\dfrac{A'B'}{AB}$ và $\dfrac{A'C'}{AC}$; b) Các góc $\widehat{A}$ và $\widehat{A'}$.

Ta có định lí sau:

Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng.

GT	$\Delta ABC, \Delta A'B'C', \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}, \ \widehat{A'} = \widehat{A}$
KL	$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$



Hình 69

Chứng minh

Trường hợp 1: $\dfrac{A'B'}{AB} = 1$.

Khi đó: $A'B' = AB, A'C' = AC$ và $\widehat{A'} = \widehat{A}$.

Suy ra $\Delta A'B'C' = \Delta ABC$ (c.g.c). Vậy $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

Trường hợp 2: $\dfrac{A'B'}{AB} \neq 1$.

Trên tia $A'B'$ lấy điểm M thoả mãn $A'M = AB$. Trên tia $A'C'$ lấy điểm N thoả mãn $A'N = AC$ (*Hình 69*). Xét hai tam giác ABC và $A'MN$ có $AB = A'M, AC = A'N, \widehat{A'} = \widehat{A}$.

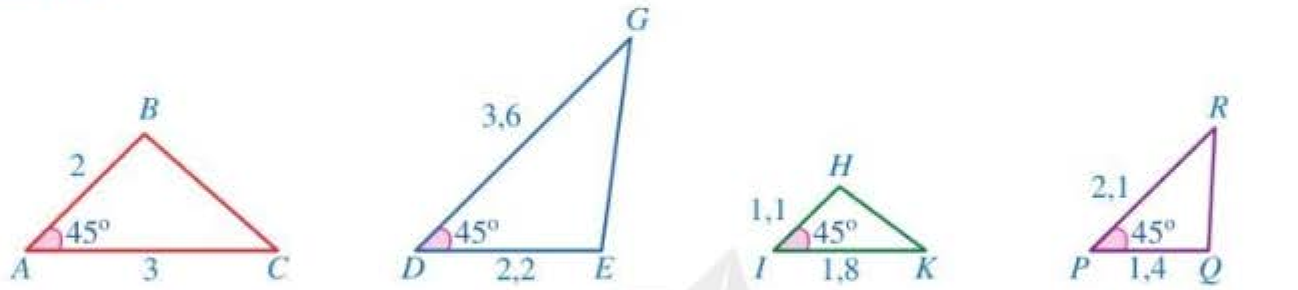
Suy ra $\Delta ABC = \Delta A'MN$ (c.g.c). Do đó $\Delta A'MN \backsim \Delta ABC$ (1).

Vì $AB = A'M$, $AC = A'N$ và $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ nên $\frac{A'B'}{A'M} = \frac{A'C'}{A'N}$.

Suy ra $MN // B'C'$ (định lí Thalès đảo). Từ đó theo định lí trang 72 ta có $\Delta A'B'C' \backsim \Delta A'MN$ (2).

Từ (1) và (2), ta suy ra $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

Ví dụ 1 Quan sát *Hình 70* và chỉ ra hai cặp tam giác đồng dạng:



Hình 70

Giải

– Xét hai tam giác ABC và PQR, ta có:

$\frac{AB}{PQ} = \frac{2}{1,4} = \frac{10}{7}$, $\frac{AC}{PR} = \frac{3}{2,1} = \frac{10}{7}$.

Suy ra $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$.

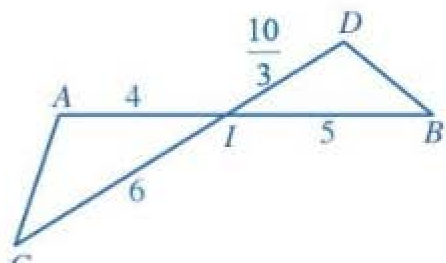
Lại có $\widehat{A} = \widehat{P} = 45°$. Suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta PQR$.

– Xét hai tam giác DEG và IHK, ta có: $\frac{DE}{IH} = \frac{2,2}{1,1} = 2$, $\frac{DG}{IK} = \frac{3,6}{1,8} = 2$. Suy ra $\frac{DE}{IH} = \frac{DG}{IK}$.

Lại có $\widehat{D} = \widehat{I} = 45°$. Suy ra $\Delta DEG \backsim \Delta IHK$.

1 Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ thoả mãn $AB = 2$, $AC = 3$, $A'B' = 6$, $A'C' = 9$ và $\widehat{A} = \widehat{A'}$. Chứng minh $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Ví dụ 2 Quan sát *Hình 71*, chứng minh $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{C} = \widehat{B}$.



Hình 71

Giải

Xét hai tam giác IAC và IDB, ta có: $\frac{IA}{ID} = \frac{4}{\frac{10}{3}} = \frac{6}{5} = \frac{IC}{IB}$,

$\widehat{AIC} = \widehat{DIB}$ (hai góc đối đỉnh).

Suy ra $\Delta IAC \backsim \Delta IDB$.

Do đó $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{C} = \widehat{B}$ (các cặp góc tương ứng).

2 Cho góc xOy. Trên tia Ox lấy các điểm A, B sao cho $OA = 2$ cm, $OB = 9$ cm. Trên tia Oy lấy các điểm M, N sao cho $OM = 3$ cm, $ON = 6$ cm. Chứng minh $\widehat{OBM} = \widehat{ONA}$.

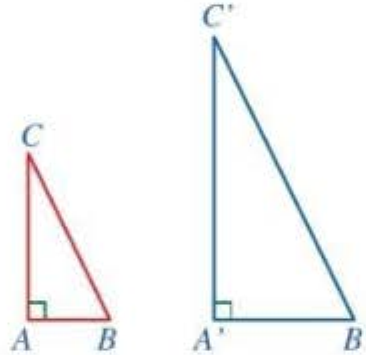
II. ÁP DỤNG TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ HAI CỦA TAM GIÁC VÀO TAM GIÁC VUÔNG

2 Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có:

$\widehat{A'} = \widehat{A} = 90^o$, $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$ (*Hình 72*).

Chứng minh $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

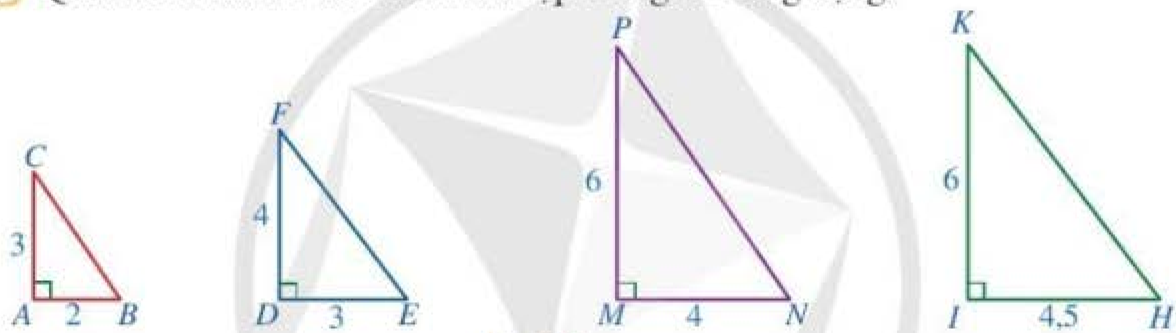
Ta có định lí sau:



Hình 72

Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

Ví dụ 3 Quan sát *Hình 73* và chỉ ra hai cặp tam giác đồng dạng:



Hình 73

Giải

– Xét hai tam giác ABC và MNP, ta có:

$\widehat{A} = \widehat{M} = 90^\circ$ và $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP}$ (vì $\dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$).

Suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta MNP$.

– Xét hai tam giác DEF và IHK, ta có: $\widehat{D} = \widehat{I} = 90^\circ$ và $\dfrac{DE}{IH} = \dfrac{DF}{IK}$ (vì $\dfrac{3}{4,5} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$).

Suy ra $\Delta DEF \backsim \Delta IHK$.

3 Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ lần lượt vuông tại A và A' sao cho $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$. Chứng minh $\widehat{B} = \widehat{B'}$.

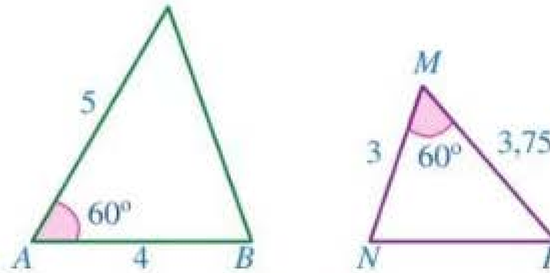
BÀI TẬP

1. Cho *Hình 74*.

a) Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta MNP$.

b) Góc nào của tam giác MNP bằng góc B?

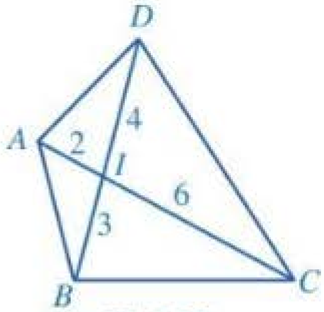
c) Góc nào của tam giác ABC bằng góc P?



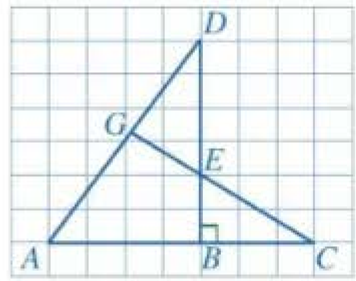
Hình 74

2. Cho *Hình 75*, chứng minh:

a) $\Delta IAB \backsim \Delta IDC$; b) $\Delta IAD \backsim \Delta IBC$.



Hình 75



Hình 76

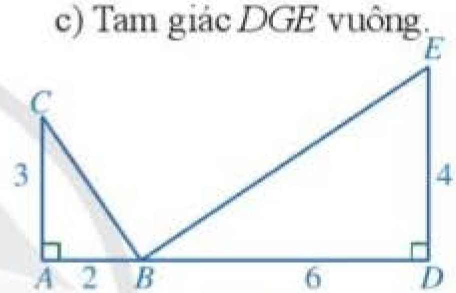
3. Cho *Hình 76*, biết $AB = 4$, $BC = 3$, $BE = 2$, $BD = 6$. Chứng minh:

a) $\Delta ABD \backsim \Delta EBC$; b) $\widehat{DAB} = \widehat{DEG}$; c) Tam giác DGE vuông.

4. Cho *Hình 77*, chứng minh:

a) $\widehat{ABC} = \widehat{BED}$;

b) $BC \perp BE$.



Hình 77

5. Cho $\Delta ABC \backsim \Delta MNP$.

a) Gọi D và Q lần lượt là trung điểm của BC và NP. Chứng minh $\Delta ABD \backsim \Delta MNQ$.

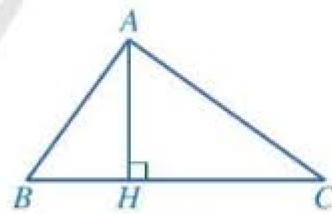
b) Gọi G và K lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và MNP. Chứng minh $\Delta ABG \backsim \Delta MNK$.

6. Cho *Hình 78*, biết $AH^2 = BH \,.\, CH$.

Chứng minh:

a) $\Delta HAB \backsim \Delta HCA$;

b) Tam giác ABC vuông tại A.



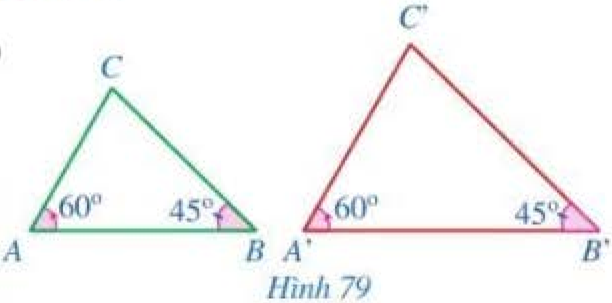
Hình 78

7. *Đố.* Chỉ sử dụng thước thẳng có chia đơn vị đến milimét và thước đo góc, làm thế nào đo được khoảng cách giữa hai vị trí B, C trên thực tế, biết rằng có vị trí A thoả mãn $AB = 20$ m, $AC = 50$ m, $\widehat{BAC} = 135°$.

Bạn Vy làm như sau: Vẽ tam giác $A'B'C'$ có $A'B' = 2$ cm, $A'C' = 5$ cm, $\widehat{B'A'C'} = 135°$. Bạn Vy lấy thước đo khoảng cách giữa hai điểm B', C' và nhận được kết quả $B'C' \approx 6{,}6$ cm. Từ đó, bạn Vy kết luận khoảng cách giữa hai vị trí B, C trên thực tế khoảng 66 m. Em hãy giải thích tại sao bạn Vy có thể kết luận như vậy.

§8. TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ BA CỦA TAM GIÁC

Bạn Khanh vẽ hai tam giác ABC và $A'B'C'$ sao cho $\widehat{A'} = \widehat{A} = 60°$ và $\widehat{B'} = \widehat{B} = 45°$ (*Hình 79*).



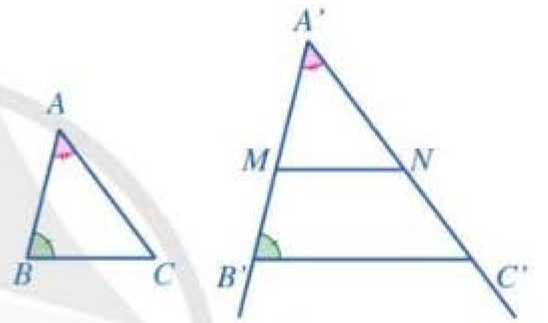
Hình 79

Hai tam giác $A'B'C'$ và ABC có đồng dạng hay không?

I. TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ BA: GÓC - GÓC

1 Cho hai tam giác ABC, $A'B'C'$ sao cho: $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\widehat{B'} = \widehat{B}$ và $A'B' \neq AB$ (*Hình 80*). Trên tia $A'B'$ lấy điểm M khác B thoả mãn $A'M = AB$. Qua M kẻ đường thẳng song song với $B'C'$ cắt tia $A'C'$ tại N. Chứng minh $\Delta A'MN = \Delta ABC$.

Từ đó suy ra $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.



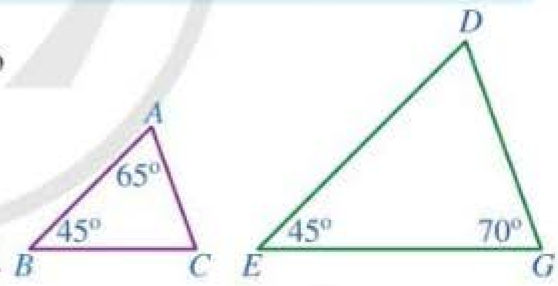
Hình 80

Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

Ví dụ 1 Hai tam giác DEG và ABC ở *Hình 81* có đồng dạng hay không? Vì sao?

Giải

Trong tam giác DEG, ta có: $\widehat{D} = 180^o - (45^o + 70^o) = 65^o$.



Hình 81

Xét hai tam giác DEG và ABC, ta có: $\widehat{D} = \widehat{A} = 65^o$, $\widehat{E} = \widehat{B} = 45°$. Suy ra $\Delta DEG \backsim \Delta ABC$.

1 Cho hai tam giác ABC và MNP thoả mãn $\widehat{A} = 50°$, $\widehat{B} = 60°$, $\widehat{N} = 60°$, $\widehat{P} = 70°$. Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta MNP$.

Ví dụ 2 Cho *Hình 82*. Chứng minh:

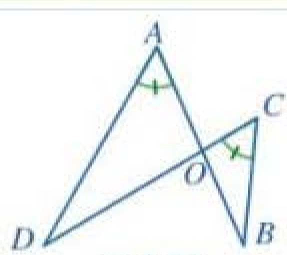
a) $\Delta OAD \backsim \Delta OCB$; b) $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.

Giải

a) Xét hai tam giác OAD và OCB, ta có:

$\widehat{A} = \widehat{C}$ (giả thiết), $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ (hai góc đối đỉnh).

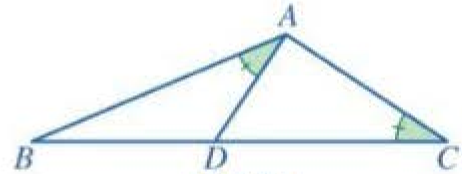
Suy ra $\Delta OAD \backsim \Delta OCB$.



Hình 82

b) Vì $\Delta OAD \backsim \Delta OCB$ nên $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OD}{OB}$. Vậy $OA \,.\, OB = OC \,.\, OD$.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC có góc A lớn hơn góc C. Điểm D thuộc cạnh BC thoả mãn $\widehat{BAD} = \widehat{BCA}$. Chứng minh $BA^2 = BC \,.\, BD$.



Hình 83

Giải. (*Hình 83*)

Xét hai tam giác ABD và CBA, ta có:

$\widehat{BAD} = \widehat{BCA}$ (giả thiết); $\widehat{ABD} = \widehat{CBA}$.

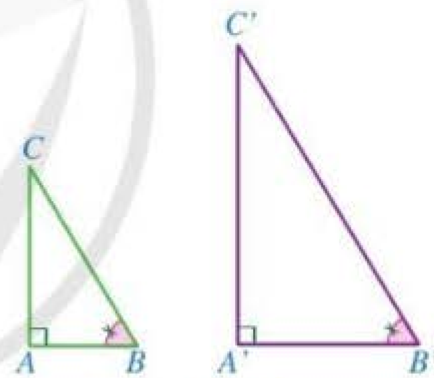
Suy ra $\Delta ABD \backsim \Delta CBA$.

Do đó $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BD}{BA}$ hay $BA^2 = BC \,.\, BD$.

II. ÁP DỤNG TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ BA CỦA TAM GIÁC VÀO TAM GIÁC VUÔNG

2 Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có $\widehat{A'} = \widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B'} = \widehat{B}$ (*Hình 84*).

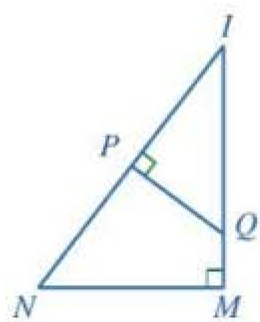
Chứng minh $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.



Hình 84

Nếu tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

Ví dụ 4 Hai tam giác IMN và IPQ ở *Hình 85* có đồng dạng hay không? Vì sao?



Hình 85

Giải

Xét hai tam giác IMN và IPQ, ta có:

$\widehat{IMN} = \widehat{IPQ} = 90^\circ$; $\widehat{MIN} = \widehat{PIQ}$.

Do đó $\Delta IMN \backsim \Delta IPQ$.

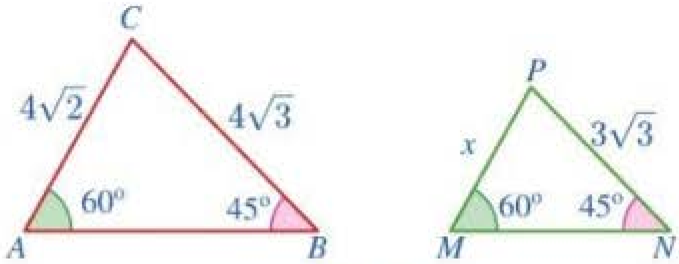
2 Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Chứng minh $HA \,.\, HD = HB \,.\, HE$.

BÀI TẬP

1. Cho *Hình 86.*

a) Chứng minh $\Delta MNP \backsim \Delta ABC$.

b) Tìm x.



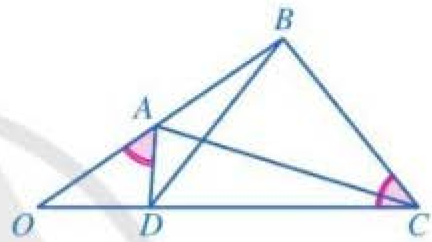
Hình 86

2. Cho hai tam giác ABC và PMN thoả mãn $\widehat{A} = 70°$, $\widehat{B} = 80°$, $\widehat{M} = 80°$, $\widehat{N} = 30°$.
Chứng minh $\dfrac{AB}{PM} = \dfrac{BC}{MN} = \dfrac{CA}{NP}$.

3. Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Chứng minh:

a) $\Delta ACD \backsim \Delta BCE$ và $CA \,.\, CE = CB \,.\, CD$;

b) $\Delta ACD \backsim \Delta AHE$ và $AC \,.\, AE = AD \,.\, AH$.



Hình 87

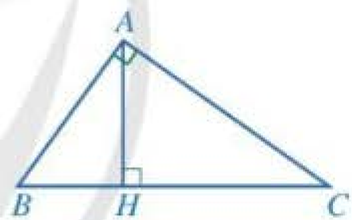
4. Cho *Hình 87* với $\widehat{OAD} = \widehat{OCB}$. Chứng minh:

a) $\Delta OAD \backsim \Delta OCB$;

b) $\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OC}{OB}$;

c) $\Delta OAC \backsim \Delta ODB$.

5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (*Hình 88*). Chứng minh:



Hình 88

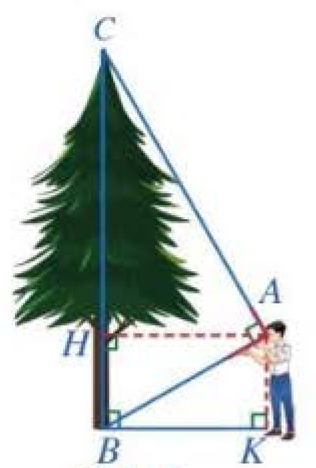
a) $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ và $AB^2 = BC \,.\, BH$;

b) $\Delta ABC \backsim \Delta HAC$ và $AC^2 = BC \,.\, CH$;

c) $\Delta ABH \backsim \Delta CAH$ và $AH^2 = BH \,.\, CH$;

d) $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

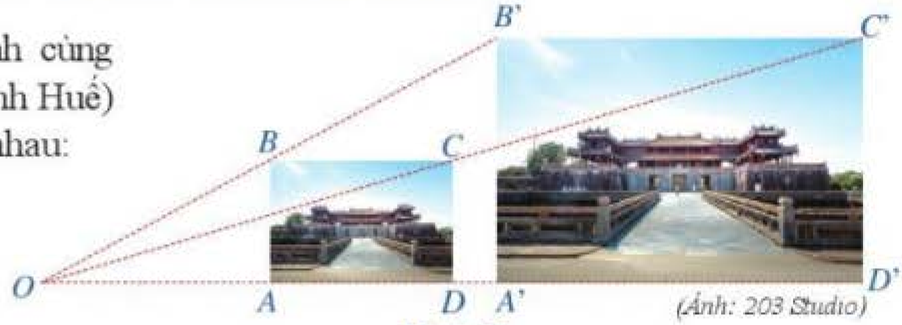
6. Trong *Hình 89*, bạn Minh dùng một dụng cụ để đo chiều cao của cây. Cho biết khoảng cách từ mắt bạn Minh đến cây và đến mặt đất lần lượt là $AH = 2{,}8$ m và $AK = 1{,}6$ m. Em hãy tính chiều cao của cây.



Hình 89

§9. HÌNH ĐỒNG DẠNG

Hình 90 mô tả hai bức ảnh cùng chụp Ngọ Môn (Hoàng Thành Huế) nhưng có kích thước khác nhau:

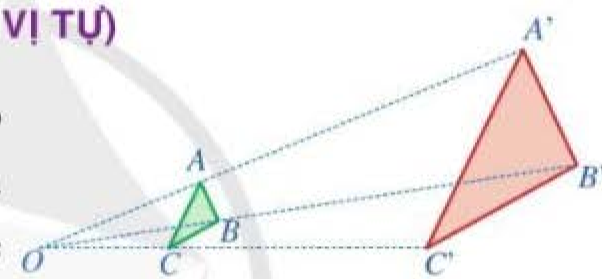


Hình 90

Hai bức ảnh trong Hình 90 giống hệt nhau nhưng có kích thước to nhỏ khác nhau gợi nên những hình có mối liên hệ gì?

I. HÌNH ĐỒNG DẠNG PHỐI CẢNH (HÌNH VỊ TỰ)

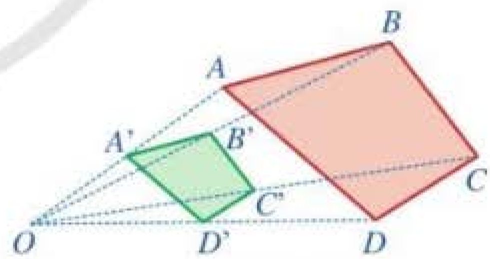
1 Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ sao cho ba đường thẳng AA', BB', CC' cùng đi qua điểm O và $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = 3$ (*Hình 91*). Tam giác $A'B'C'$ nhận được từ tam giác ABC bằng cách nào?



Hình 91

Nhận xét: Từ điểm O, "phóng to" ba lần tam giác ABC, ta sẽ nhận được tam giác $A'B'C'$. Hai tam giác $A'B'C'$ và ABC gọi là *đồng dạng phối cảnh* (hay *vị tự*) với nhau, điểm O gọi là tâm đồng dạng phối cảnh, tỉ số $k = \frac{A'B'}{AB} = 3$ gọi là *tỉ số vị tự*.

2 Cho hai tứ giác $ABCD$ và $A'B'C'D'$ sao cho bốn đường thẳng AA', BB', CC', DD' cùng đi qua điểm O và $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = \frac{1}{2}$ (*Hình 92*). Tứ giác $A'B'C'D'$ có thể nhận được từ tứ giác $ABCD$ bằng cách nào?



Hình 92

Nhận xét: Từ điểm O, "thu nhỏ" hai lần tứ giác $ABCD$, ta sẽ nhận được tứ giác $A'B'C'D'$. Hai tứ giác $A'B'C'D'$ và $ABCD$ gọi là *đồng dạng phối cảnh* (hay *vị tự*) với nhau, điểm O gọi là tâm đồng dạng phối cảnh, tỉ số $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$ gọi là *tỉ số vị tự*.

Như vậy, bằng cách "phóng to" (nếu tỉ số vị tự $k > 1$) hay "thu nhỏ" (nếu tỉ số vị tự $k < 1$) hình $\mathcal{H}$, ta sẽ nhận được hình $\mathcal{H}'$ *đồng dạng phối cảnh* (hay *vị tự*) với hình $\mathcal{H}$.

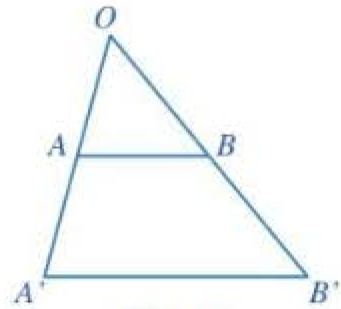
Chú ý: Ta cũng gọi hình $\mathcal{H}'$ là *hình đồng dạng phối cảnh* (hay *hình vị tự*) *tỉ số k* của hình $\mathcal{H}$.

Ví dụ 1 Cho biết hai hình chữ nhật $A'B'C'D'$ và $ABCD$ minh hoạ hai bức ảnh ở *Hình 90* có đồng dạng phối cảnh hay không. Nếu có, hãy chỉ ra tâm đồng dạng phối cảnh.

Giải

Ta thấy: Ở *Hình 90*, bốn đường thẳng AA', BB', CC', DD' cùng đi qua điểm O và $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD}$. Vậy hai hình chữ nhật $A'B'C'D'$ và $ABCD$ là đồng dạng phối cảnh và điểm O là tâm đồng dạng phối cảnh.

Ví dụ 2 Cho điểm O nằm ngoài đoạn thẳng AB. Hãy chỉ ra đoạn thẳng $A'B'$ sao cho hai đoạn thẳng $A'B'$, AB đồng dạng phối cảnh, điểm O là tâm đồng dạng phối cảnh và $\frac{A'B'}{AB} = 2$.



Hình 93

Giải

Trên các tia OA, OB, ta lần lượt lấy các điểm A', B' sao cho $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = 2$ (*Hình 93*). Khi đó, hai đoạn thẳng AB, $A'B'$ là đồng dạng phối cảnh và điểm O là tâm đồng dạng phối cảnh. Mặt khác, ta có: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = 2$ (hệ quả của định lí Thalès).

Nhận xét: Hình đồng dạng phối cảnh tỉ số k của đoạn thẳng AB là một đoạn thẳng $A'B'$ (nằm trên đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng AB) và $A'B' = k\,AB$.

II. HÌNH ĐỒNG DẠNG

3 Thực hiện các hoạt động sau.

a) Cắt ra từ tờ giấy kẻ ô vuông:

– Hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3$ cm, $AD = 2$ cm; hình chữ nhật $A'B'C'D'$ có $A'B' = 3$ cm, $A'D' = 2$ cm;

– Hình vuông $MNPQ$ có $MN = 4$ cm; hình vuông $M'N'P'Q'$ có $M'N' = 4$ cm.

b) – Đặt hai mảnh giấy hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$ "chồng khít" lên nhau.

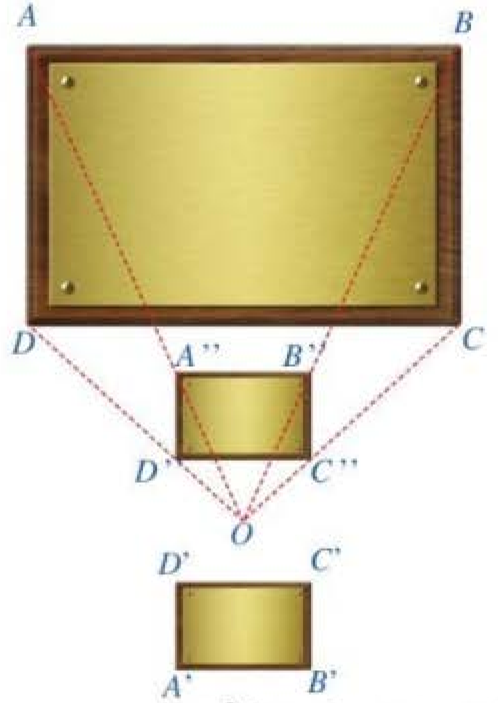
– Đặt hai mảnh giấy hình vuông $MNPQ$ và $M'N'P'Q'$ "chồng khít" lên nhau.

Nhận xét: Nếu có thể đặt hình $\mathcal{H}$ chồng khít lên hình $\mathcal{H}'$ thì ta nói hai hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ là *bằng nhau* (hay còn gọi là hình $\mathcal{H}$ bằng hình $\mathcal{H}'$).

4 Trong *Hình 94*, hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 9$ (cm), $AD = 6$ (cm); hình chữ nhật $A'B'C'D'$ có $A'B' = 3$ (cm), $A'D' = 2$ (cm); hình chữ nhật $A''B''C''D''$ có $A''B'' = 3$ (cm), $A''D'' = 2$ (cm). Quan sát *Hình 94* và cho biết:

a) Hai hình chữ nhật $A''B''C''D''$, $ABCD$ có đồng dạng phối cảnh hay không.

b) Hai hình chữ nhật $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$ có bằng nhau hay không.



(Ảnh: Andrey-Kuzmin)
Hình 94

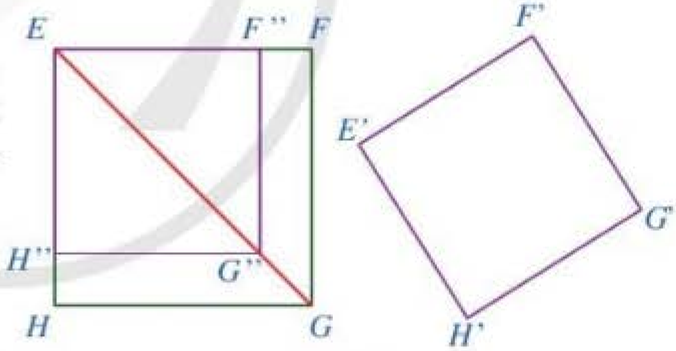
Nhận xét: Hình chữ nhật $A'B'C'D'$ bằng hình chữ nhật $A''B''C''D''$ và hình chữ nhật $A''B''C''D''$ đồng dạng phối cảnh với hình chữ nhật $ABCD$. Ta nói hình chữ nhật $A'B'C'D'$ ***đồng dạng*** với hình chữ nhật $ABCD$.

Ta cũng có khái niệm tương tự như trên cho hai hình tuỳ ý. Cụ thể như sau: Ta nói hình $\mathcal{H}'$ ***đồng dạng*** với hình $\mathcal{H}$ nếu hình $\mathcal{H}'$ bằng một hình nào đó đồng dạng phối cảnh với hình $\mathcal{H}$.

Như vậy, hình $\mathcal{H}'$ đồng dạng với hình $\mathcal{H}$ nếu hình $\mathcal{H}'$ bằng hình $\mathcal{H}$ hoặc bằng một hình phóng to hay thu nhỏ của hình $\mathcal{H}$.

Chú ý: Hai hình đồng dạng phối cảnh (hay vị tự) cũng là hai hình đồng dạng.

Ví dụ 3 Cho hai hình vuông $EFGH$, $E'F'G'H'$ lần lượt có độ dài cạnh là 5 cm và 4 cm. Hai hình vuông đó có đồng dạng hay không? Vì sao?



Hình 95

Giải

Trên các đoạn thẳng EF, EG, EH, ta lần lượt lấy các điểm F'', G'', H'' sao cho $\dfrac{EF''}{EF} = \dfrac{EG''}{EG} = \dfrac{EH''}{EH} = \dfrac{4}{5}$ (*Hình 95*). Theo định lí Thalès đảo ta có: $F''G'' \parallel FG$; $G''H'' \parallel GH$. Suy ra tứ giác $EF''G''H''$ là hình chữ nhật.

Mặt khác, ta có: $\dfrac{EF''}{EF} = \dfrac{F''G''}{FG} = \dfrac{G''H''}{GH} = \dfrac{H''E}{HE} = \dfrac{4}{5}$ (hệ quả của định lí Thalès), suy ra $EF'' = F''G'' = G''H'' = H''E = 4$ (cm). Vì vậy, tứ giác $EF''G''H''$ là hình vuông có độ dài cạnh bằng 4 cm. Do đó, hai hình vuông $E'F'G'H'$ và $EF''G''H''$ bằng nhau.

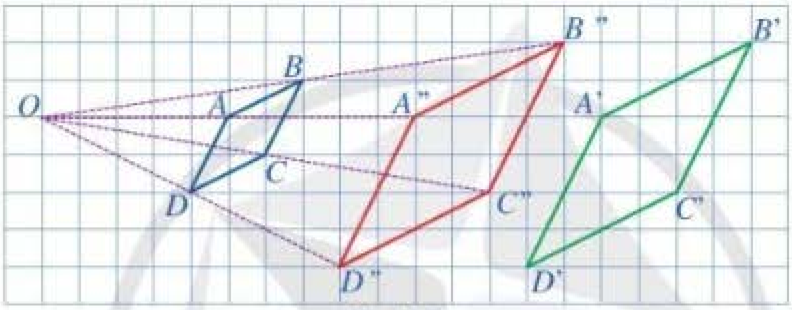
Vì $\frac{EF''}{EF} = \frac{EG''}{EG} = \frac{EH''}{EH} = \frac{4}{5}$ nên hình vuông $EF''G''H''$ đồng dạng phối cảnh với hình vuông $EFGH$. Vậy hình vuông $E'F'G'H'$ đồng dạng với hình vuông $EFGH$.

BÀI TẬP

1. Trong *Hình 96*, các điểm A, B, C, D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OA'', OB'', OC'', OD''. Quan sát *Hình 96* và cho biết:

a) Hai hình thoi $A'B'C'D'$ và $A''B''C''D''$ có bằng nhau hay không.

b) Hai hình thoi $A'B'C'D'$ và $ABCD$ có đồng dạng hay không.



Hình 96

2. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 6$, $CA = 5$. Cho O, I là hai điểm phân biệt.

a) Giả sử tam giác $A'B'C'$ là hình đồng dạng phối cảnh của tam giác ABC với điểm O là tâm đồng dạng phối cảnh, tỉ số $\frac{A'B'}{AB} = 3$. Hãy tìm độ dài các cạnh của tam giác $A'B'C'$.

b) Giả sử tam giác $A''B''C''$ là hình đồng dạng phối cảnh của tam giác ABC với điểm I là tâm đồng dạng phối cảnh, tỉ số $\frac{A''B''}{AB} = 3$. Hãy tìm độ dài các cạnh của tam giác $A''B''C''$.

c) Chứng minh $\Delta A'B'C' = \Delta A''B''C''$.

Chú ý: Hai tam giác cùng là hình đồng dạng phối cảnh tỉ số k (tâm đồng dạng phối cảnh có thể khác nhau) của một tam giác luôn bằng nhau.

3. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$. Trên các tia AB, AC, AD ta lần lượt lấy các điểm B'', C'', D'' sao cho $\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{AD''}{AD} = \frac{B'C'}{BC}$. Chứng minh:

a) Hình chữ nhật $AB''C''D''$ đồng dạng phối cảnh với hình chữ nhật $ABCD$;

b) $AB'' = A'B'$, $B''C'' = B'C'$;

c) Hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là đồng dạng.

§10. HÌNH ĐỒNG DẠNG TRONG THỰC TIỄN

I. HÌNH ĐỒNG DẠNG TRONG THẾ GIỚI TỰ NHIÊN

Trong thế giới tự nhiên, xuất hiện nhiều vật thể có hình ảnh liên quan đến hình đồng dạng, chẳng hạn các vật thể có cấu trúc fractal. Một định nghĩa tổng quát cho các cấu trúc fractal là: "Một cấu trúc hình học có thể chia thành nhiều phần, mỗi phần có dạng thu nhỏ của cấu trúc hoàn chỉnh ban đầu". Các cấu trúc dạng này có thể xuất hiện dưới dạng các đám mây, bông tuyết, một nhánh dương xỉ, các dãy núi hoặc thậm chí là sự dao động của thị trường chứng khoán hay hệ thống thần kinh con người. Mặc dù các fractal đã được biết đến từ lâu nhưng mãi đến thập niên 80 của thế kỉ XX nhà toán học Pháp gốc Ba Lan Benoit Mandelbrot mới đưa ra Hình học fractal để nghiên cứu chúng một cách có hệ thống. Dưới đây là hình ảnh một số vật thể tự nhiên có cấu trúc fractal:

Lá dương xỉ
(Ảnh: Sergej Razvodovskij)

Súp lơ xanh Romanesco
(Ảnh: Nataly Studio)

Cây bắp cải
(Ảnh: Quality Stock Arts)

Lô hội xoắn ốc
(Ảnh: Bildagentur Zoonar GmbH)

II. HÌNH ĐỒNG DẠNG TRONG NGHỆ THUẬT, KIẾN TRÚC

Một trong các nguyên tắc quan trọng với nghệ thuật hay kiến trúc là nguyên tắc phối cảnh. Hầu hết thiết kế về kiến trúc, đồ hoạ, hay một tác phẩm nghệ thuật nào đều phải thực hiện tốt yếu tố phối cảnh. Vì thế, bố cục có tính đến những yếu tố phối cảnh thường được sử dụng trong các tác phẩm nghệ thuật hay kiến trúc. Dưới đây là một vài ví dụ:

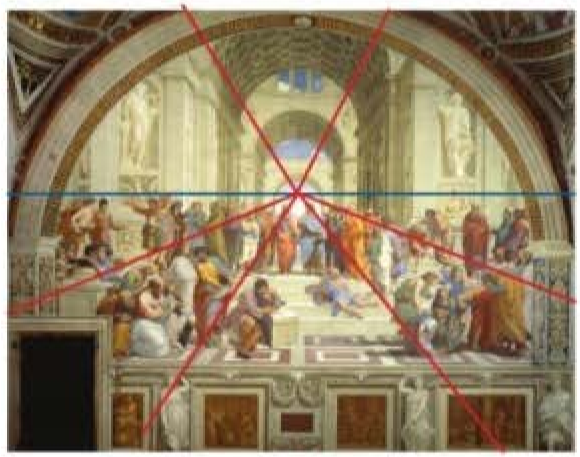
1. Danh hoạ Raphael (tên đầy đủ là Raffaello Sanzio da Urbino, 1483 – 1520) khi vẽ bức tranh "Lễ trao nhẫn cho Maria" đã sử dụng nguyên tắc phối cảnh. Những đường màu đỏ ở *Hình 97* thực chất là song song với nhau và hướng từ người xem nhìn vào bức tranh, chúng hội tụ tới điểm gọi là ***điểm mất hút*** (tiếng Anh là "vanishing point", tiếng Pháp là "point de fuite"). Nguyên tắc phối cảnh như vậy đã tạo nên chiều sâu của bức tranh.

Bức tranh "Lễ trao nhẫn cho Maria"

Hình 97

2. Bức tranh "Trường phái triết học Athens" (School of Athens) của danh họa Raphael cũng sử dụng nguyên tắc phối cảnh. Những đường màu đỏ ở *Hình 98* thực chất là song song với nhau và hướng từ người xem nhìn vào bức tranh, chúng hội tụ tới ***điểm mất hút***. Đường thẳng màu xanh nằm ngang trên bức tranh và đi qua điểm mất hút được gọi là đường chân trời (tiếng Anh là "horizon line"). Nguyên tắc phối cảnh như vậy cũng đã tạo nên chiều sâu của bức tranh.

Bức tranh "Trường phái triết học Athens"



Hình 98

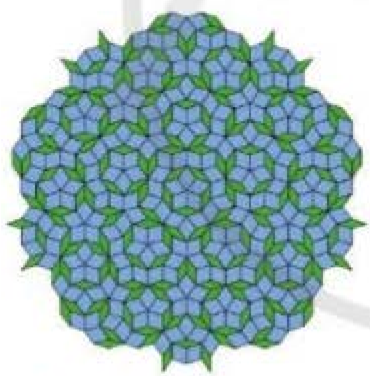
III. HÌNH ĐỒNG DẠNG TRONG KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Các hình đồng dạng cũng được sử dụng nhiều trong khoa học và công nghệ. Dưới đây là một vài ví dụ:

1. Lược đồ Việt Nam:

(Nguồn: Trung tâm Biên giới và Địa giới - Cục Đo đạc và Bản đồ Việt Nam)

2. Các Tessellations được sử dụng trong thiết kế và trang trí:

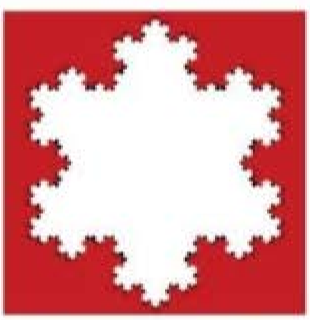


Tessellation Penrose

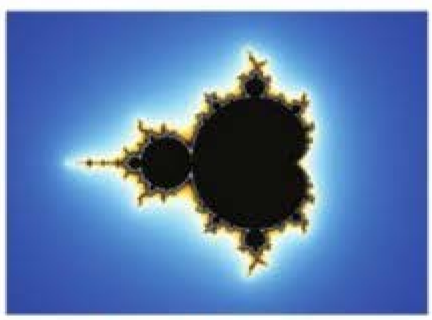
Xoắn đơn của Heinz Voderberg

(Nguồn ảnh: https://vi.tr2tr.wiki/ Tessellation)

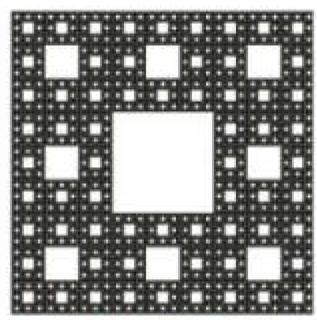
3. Một số cấu trúc fractal cơ bản trong toán học:



Bông tuyết Koch
(*Minh hoạ: Astronira*)



Fractal Mandelbrot
(*Minh hoạ: Vit Smolek*)



Thảm Sierpinski
(*Minh hoạ: Zita*)

BÀI TẬP

1. Tìm hiểu thêm về những hình đồng dạng trong tự nhiên (với vật chất, cây cối, ...), trong nghệ thuật, trang trí, trong thiết kế, ...

2. Gấp và cắt giấy thành những chữ cái in hoa đồng dạng với nhau theo mẫu (*Hình 99*, *Hình 100*) sau đây:

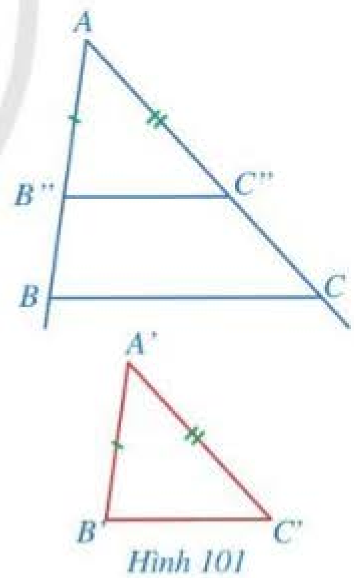
Hình 99

Hình 100

TÌM TÒI – MỞ RỘNG

Hai tam giác đồng dạng có là hai hình đồng dạng hay không?

Ở §5 trang 70, ta đã định nghĩa tam giác $A'B'C'$ là đồng dạng với tam giác ABC nếu:
$\widehat{A'} = \widehat{A}; \widehat{B'} = \widehat{B}; \widehat{C'} = \widehat{C}; \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = k$ (*).



Hình 101

Xét $k \neq 1$. Trên các tia AB, AC, ta lần lượt lấy các điểm B'', C'' sao cho $AB'' = A'B'$; $AC'' = A'C'$ (*Hình 101*).

Ta có: $\dfrac{AB''}{AB} = \dfrac{A'B'}{AB} = k$; $\dfrac{AC''}{AC} = \dfrac{A'C'}{AC} = k$. Suy ra $\dfrac{AB''}{AB} = \dfrac{AC''}{AC}$.
Theo định lí Thalès đảo, ta có $B''C'' \parallel BC$.

Suy ra $\dfrac{AB''}{AB} = \dfrac{B''C''}{BC} = k$ (hệ quả của định lí Thalès).

Vì thế, ta có: $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{B''C''}{BC}$. Do đó $B''C'' = B'C'$.

Suy ra $\Delta A'B'C' = \Delta AB''C''$ (c.c.c).

Mặt khác, vì $\dfrac{AB''}{AB} = \dfrac{AC''}{AC}$ nên tam giác $AB''C''$ đồng dạng phối cảnh với tam giác ABC.
Vậy hai tam giác $A'B'C'$ và ABC là hai hình đồng dạng.

Nhận xét: Định nghĩa hai tam giác $A'B'C'$ và ABC đồng dạng bằng điều kiện (*) thực chất là dấu hiệu để nhận ra hai hình đó đồng dạng.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

1. Cho $\Delta DEG \backsim \Delta MNP$, $\widehat{E} = 60°$, $\widehat{M} = 40°$.

a) Số đo góc D bằng bao nhiêu độ?

A. $40°$. **B.** $50°$. **C.** $60°$. **D.** $80°$.

b) Số đo góc N bằng bao nhiêu độ?

A. $40°$. **B.** $50°$. **C.** $60°$. **D.** $80°$.

c) Số đo góc P bằng bao nhiêu độ?

A. $40°$. **B.** $50°$. **C.** $60°$. **D.** $80°$.

2. Cho $\Delta DEG \backsim \Delta MNP$, $DE = 2$ cm, $DG = 4$ cm, $MN = 4$ cm, $NP = 6$ cm.

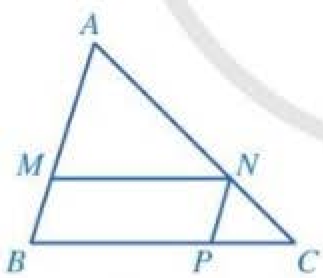
a) Độ dài cạnh EG là

A. 2 cm. **B.** 3 cm. **C.** 4 cm. **D.** 8 cm.

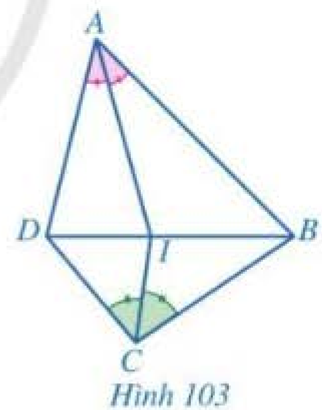
b) Độ dài cạnh MP là

A. 2 cm. **B.** 3 cm. **C.** 4 cm. **D.** 8 cm.

3. Cho tam giác ABC, các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, BC sao cho tứ giác $BMNP$ là hình bình hành (*Hình 102*). Chứng minh $\dfrac{MN}{BC} + \dfrac{NP}{AB} = 1$.



Hình 102



Hình 103

4. Cho tứ giác $ABCD$. Tia phân giác của các góc BAD và BCD cắt nhau tại điểm I. Biết I thuộc đoạn thẳng BD (*Hình 103*). Chứng minh $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

5. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, AN và Q là giao điểm của AN và DM. Chứng minh:

a) $MP \parallel AD$, $MP = \dfrac{1}{4}AD$;

b) $AQ = \dfrac{2}{5}AN$.

c) Gọi R là trung điểm của CD. Chứng minh ba điểm M, P, R thẳng hàng và $PR = \dfrac{3}{4}AD$.

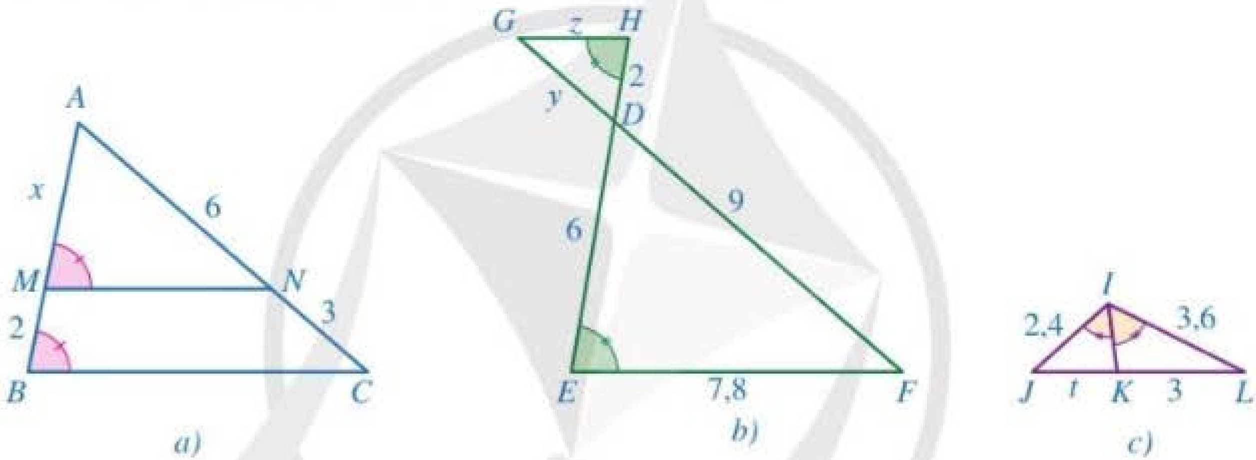
6. Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác $A'B'C'$ theo tỉ số đồng dạng k.

a) Gọi AM, $A'M'$ lần lượt là các đường trung tuyến của tam giác ABC, $A'B'C'$. Chứng minh $\Delta ABM \backsim \Delta A'B'M'$ và $\dfrac{AM}{A'M'} = k$.

b) Gọi AD, $A'D'$ lần lượt là các đường phân giác của tam giác ABC, $A'B'C'$. Chứng minh $\Delta ABD \backsim \Delta A'B'D'$ và $\dfrac{AD}{A'D'} = k$.

c) Gọi AH, $A'H'$ lần lượt là các đường cao của tam giác ABC, $A'B'C'$ và $\widehat{ABC} < 90^\circ$. Chứng minh $\Delta ABH \backsim \Delta A'B'H'$ và $\dfrac{AH}{A'H'} = k$.

7. Tính các độ dài x, y, z, t ở các hình *104a*, *104b*, *104c*.

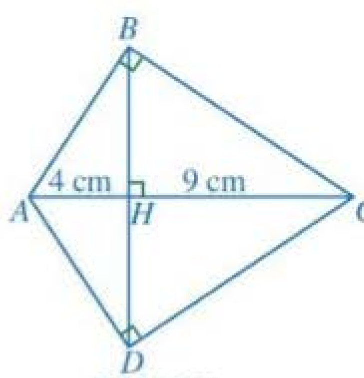


Hình 104

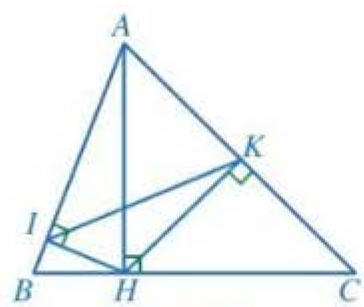
8. Cho *Hình 105*. Chứng minh:

a) $\Delta HAB \backsim \Delta HBC$;

b) $HB = HD = 6$ cm.



Hình 105



Hình 106

9. Cho *Hình 106*. Chứng minh:

a) $AH^2 = AB \,.\, AI = AC \,.\, AK$;

b) $\widehat{AIK} = \widehat{ACH}$.

10. Cho tam giác ABC có M, N là hai điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho MN // BC. Gọi I, P, Q lần lượt là giao điểm của BN và CM, AI và MN, AI và BC. Chứng minh:

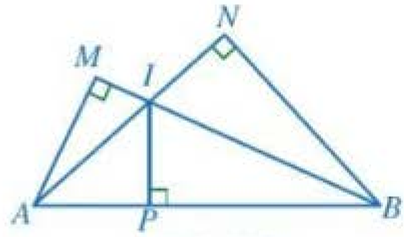
a) $\frac{MP}{BQ} = \frac{PN}{QC} = \frac{AP}{AQ}$;

b) $\frac{MP}{QC} = \frac{PN}{BQ} = \frac{IP}{IQ}$.

11. Cho *Hình 107*. Chứng minh:

a) $\Delta ABN \backsim \Delta AIP$ và $AI \,.\, AN = AP \,.\, AB$;

b) $AI \,.\, AN + BI \,.\, BM = AB^2$.



Hình 107

12. Sau một thời gian sử dụng, một tủ sách nghệ thuật đã có dấu hiệu bị xuống cấp và cần sửa lại *(Hình 108)*. Các ngăn BM, CN và DP gỗ bị hỏng và cần thay mới. Bác Ngọc cần ba miếng ván sao cho khớp với các vị trí này. Em hãy giúp bác Ngọc tính toán chiều dài các miếng ván BM, CN, DP sao cho khớp với các vị trí cần thay thế. Biết chiều dài miếng ván EQ bằng 4 m.

Hình 108

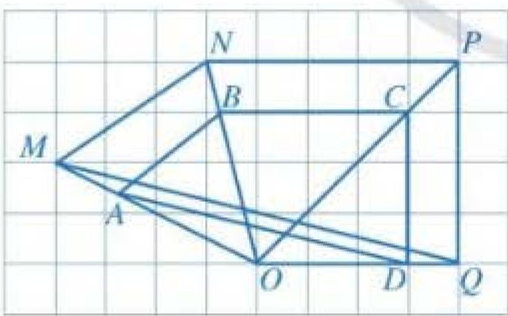
13. Cho *Hình 109*. Hình nào đồng dạng phối cảnh với:

a) Tam giác OAB?

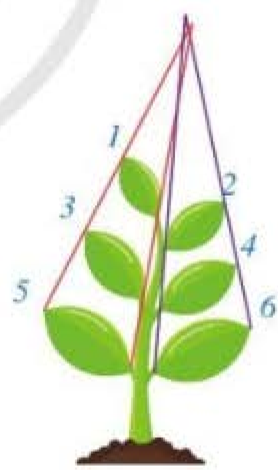
b) Tam giác OBC?

c) Tam giác OCD?

d) Tứ giác $ABCD$?



Hình 109



Hình 110

14. *Hình 110* có ghi thứ tự của 6 lá mầm, trong đó có nhiều cặp lá mầm gợi nên những cặp hình đồng dạng. Hãy viết 6 cặp lá mầm gợi nên những hình đồng dạng.

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Chủ đề 3

THỰC HÀNH ĐO CHIỀU CAO

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Giới thiệu về đo đạc

Những kiến thức hình học đầu tiên của loài người xuất phát từ nhu cầu thực tiễn. Hình học phát sinh ở Ai Cập do nhu cầu đo đạc đất đai hằng năm sau mỗi mùa lũ lụt của sông Nile (trong tiếng Hy Lạp hình học là sự đo đất).

Việc đo đạc thực địa, nghiên cứu địa hình đóng vai trò quan trọng trong cuộc sống. Chẳng hạn, việc tiến hành đo đạc các công trình giao thông đường thuỷ như: dòng chảy, lưu lượng nước trên sông, hồ, kênh đào ven vịnh, … có ý nghĩa rất quan trọng trong việc phân luồng giao thông đường thuỷ và đồng thời giúp tàu thuyền di chuyển trên đường thuỷ được an toàn. Bên cạnh đó, việc đo đạc chính xác còn giúp các nhà quản lí xây dựng hệ thống kè, đập, cảng, bến neo đậu hợp lí, xây dựng hệ thống phao tiêu, hải đăng bảo hộ phù hợp.

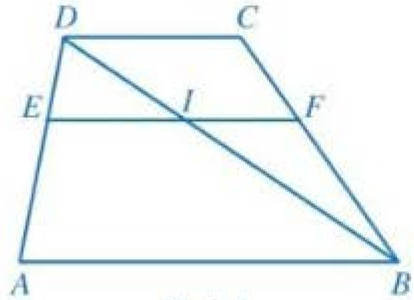
2. Kiến thức toán học

a) Nếu $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ thì ta có $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC}$ (1).

Nhận xét: Xét hệ thức $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$ trong dãy tỉ số bằng nhau (1). Nếu biết độ dài ba đoạn thẳng thì chúng ta sẽ tính được độ dài đoạn thẳng còn lại. Chúng ta có thể áp dụng tính chất đó để tính độ dài của đoạn thẳng mà không đo được trực tiếp.

b) Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$. Hai điểm E, F lần lượt nằm trên hai cạnh bên AD, BC sao cho $EF \parallel AB$ (*Hình 1*).

Giả sử $\dfrac{DE}{EA} = k$. Khi đó, ta có: $AB = \dfrac{k+1}{k}EF - \dfrac{1}{k}CD$ (2).



Hình 1

Thật vậy, theo hệ quả của định lí Thalès trong tam giác ADB ta có:

$$\frac{AB}{EI} = \frac{DA}{DE} = \frac{DE + EA}{DE} = 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}.$$

Suy ra $EI = \dfrac{k}{k+1}AB$.

Cũng theo hệ quả của định lí Thalès trong tam giác BCD, ta có:

$$\frac{IF}{CD} = \frac{BI}{BD} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{k+1}.$$

Suy ra $IF = \dfrac{1}{k+1}CD$. Do đó $EF = EI + IF = \dfrac{k}{k+1}AB + \dfrac{1}{k+1}CD$.

Vậy $AB = \dfrac{k+1}{k}EF - \dfrac{1}{k}CD$.

3. Một số cách đo chiều cao trong thực tiễn

Để đo chiều cao một cây mà không thể đo trực tiếp được, người ta có thể sử dụng những cách sau đây.

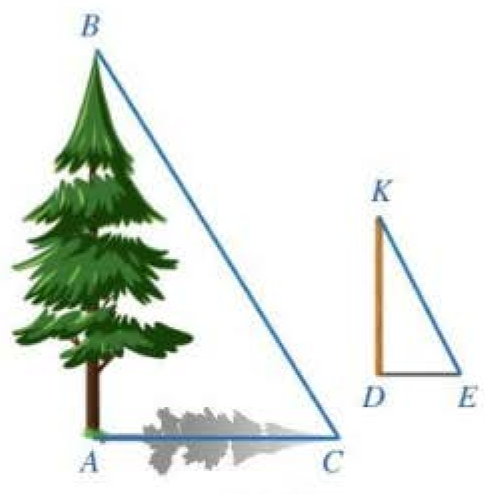
a) Cách thứ nhất (Hình 2):

+ Đo độ dài bóng nắng của cây (là độ dài đoạn AC).

+ Đặt một cọc DK vuông góc với mặt đất, đo độ dài cọc DK và độ dài bóng nắng của cọc (là độ dài đoạn DE).

+ Vì các tia nắng được coi là song song với nhau nên $KE \parallel BC$. Do đó $\Delta DKE \backsim \Delta ABC$.

Suy ra $\dfrac{AB}{DK} = \dfrac{AC}{DE}$. Vậy $AB = \dfrac{AC \cdot DK}{DE}$.



Hình 2

b) Cách thứ hai (Hình 3):

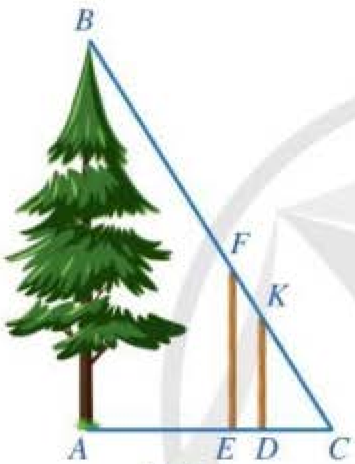
+ Cắm cọc DK cố định, vuông góc với mặt đất.

+ Điều chỉnh cọc EF (cao hơn cọc DK) lên hoặc xuống sao cho hai đầu cọc F, K và điểm B (ngọn cây) thẳng hàng.

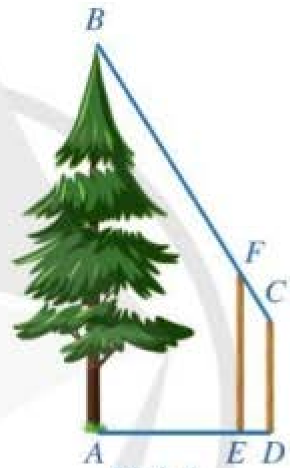
+ Xác định điểm C trên mặt đất sao cho F, K và C thẳng hàng (bằng cách dùng dây hoặc thước căng thẳng theo đường thẳng FK cho đến khi chạm đất). Đo độ dài cọc DK và các khoảng cách CD, CA.

+ Vì $DK \parallel AB$ (do cùng vuông góc với AC) nên $\Delta CDK \backsim \Delta CAB$.

Suy ra $\dfrac{DK}{AB} = \dfrac{CD}{CA}$. Vậy $AB = \dfrac{DK \,.\, CA}{CD}$.



Hình 3



Hình 4

c) Cách thứ ba (Hình 4):

+ Cắm cọc DC cố định, vuông góc với mặt đất.

+ Điều chỉnh cọc EF (cao hơn cọc DC) lên hoặc xuống sao cho hai đầu cọc C, F và điểm B (ngọn cây) thẳng hàng.

+ Đo các khoảng cách DE, EA; đo độ dài hai cọc DC, EF.

+ Tính tỉ số $\dfrac{DE}{EA} = k$. Áp dụng công thức (2), ta có: $AB = \dfrac{k+1}{k}EF - \dfrac{1}{k}CD$.

II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG HỌC TẬP

Tiến trình tổ chức các hoạt động bao gồm: phần chuẩn bị; phần thực hiện; phần tổng kết.

1. Phần chuẩn bị

1 Giáo viên thực hiện hai nhiệm vụ sau:

a) Chia lớp thành các nhóm, mỗi nhóm có từ 3 đến 5 học sinh;

b) Yêu cầu mỗi nhóm học sinh chuẩn bị cọc, dây, thước thẳng đo độ dài.

2 Mỗi nhóm học sinh thực hiện nhiệm vụ sau:

a) Lựa chọn vật thể để đo chiều cao khi không thể đo trực tiếp.

b) Xây dựng cách thức đo chiều cao của những vật thể đó.

c) Phân công trách nhiệm của từng thành viên trong nhóm.

2. Phần thực hiện

3 Mỗi nhóm học sinh thực hành đo chiều cao khi không thể đo trực tiếp. Cụ thể là:

– Lựa chọn một vật cần đo chiều cao trong thực tế mà không thể đo trực tiếp được.

– Tiến hành xác định chiều cao đó.

– Báo cáo kết quả của nhóm theo mẫu sau:

Độ dài các đoạn thẳng đo được	Chiều cao cần tính
?	?

III. ĐÁNH GIÁ

Hình thức đánh giá: theo hình thức đánh giá của học tập dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

– Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.

– Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

– Nhóm tự đánh giá lại hoạt động của nhóm và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.

– Giáo viên và các nhóm đánh giá, rồi cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

THỰC HÀNH MỘT SỐ PHẦN MỀM
(NẾU NHÀ TRƯỜNG CÓ ĐIỀU KIỆN THỰC HIỆN)

I. SỬ DỤNG PHẦN MỀM GEOGEBRA

1. Tạo công cụ minh hoạ việc sử dụng hệ số góc của đường thẳng để nhận biết sự cắt nhau hoặc song song của hai đường thẳng

a) Tạo các số a, b, c, d *ban đầu*

– Nhập lệnh: a = 1 rồi bấm ↵

– Nhập lệnh: b = 2 rồi bấm ↵

– Nhập lệnh: c = 3 rồi bấm ↵

– Nhập lệnh: d = 4 rồi bấm ↵

b) Tạo các hộp chọn đầu vào

– Dùng a=1 tạo hộp chọn đầu vào a và đặt tên là "Nhập vào số a (khác 0): a =" rồi tạo liên kết với a.

– Dùng a=1 tạo hộp chọn đầu vào b và đặt tên là "Nhập vào số b: b =" rồi tạo liên kết với b.

– Dùng a=1 tạo hộp chọn đầu vào c và đặt tên là "Nhập vào số c (khác 0): c =" rồi tạo liên kết với c.

– Dùng a=1 tạo hộp chọn đầu vào d và đặt tên là "Nhập vào số d: d =" rồi tạo liên kết với d.

c) Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất y = ax + b *và đồ thị hàm số bậc nhất* y = cx + d

– Nhập lệnh: y = ax + b rồi bấm ↵

Khi đó màn hình sẽ xuất hiện đồ thị hàm số y = ax + b.

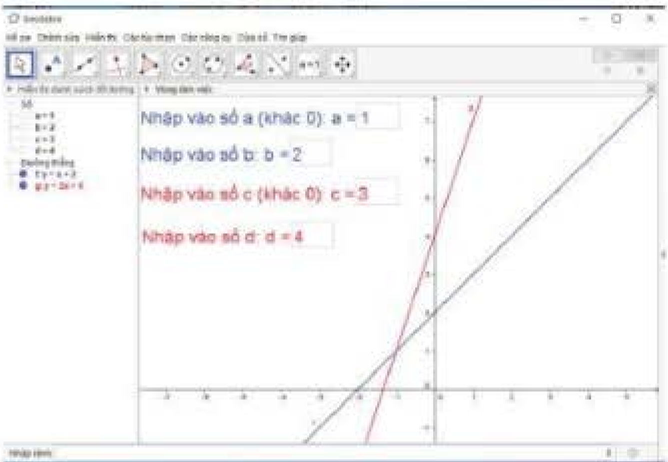
– Nhập lệnh: y = cx + d rồi bấm ↵

Khi đó màn hình sẽ xuất hiện đồ thị hàm số y = cx + d.

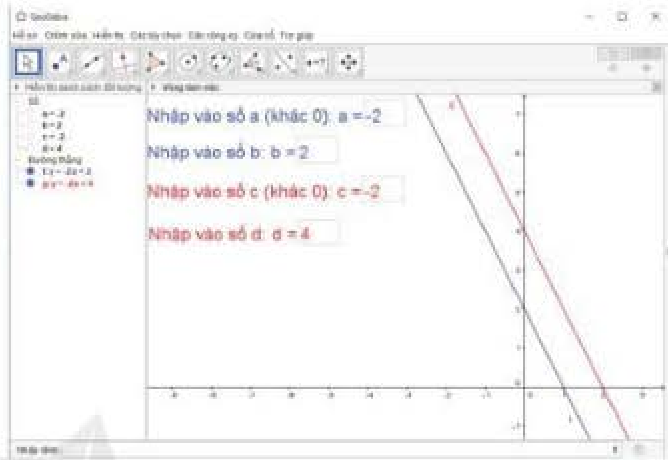
d) Minh hoạ việc sử dụng hệ số góc của đường thẳng để nhận biết sự song song và cắt nhau của hai đường thẳng

– Đổi màu đồ thị hàm số bằng cách nháy chuột phải vào đường thẳng, chọn **Thuộc tính**, **Màu sắc** và chọn màu phù hợp.

– Khi ta thay các giá trị a, b, c, d ở các hộp chọn đầu vào ta sẽ có các đồ thị hàm số bậc nhất khác nhau. Chẳng hạn với a = 1 và c = 3 (a ≠ c) hay a = – 2 và c = – 2 (a = c) ta có các đồ thị hàm số như sau:



a ≠ c (hai đường thẳng cắt nhau)



a = c (hai đường thẳng song song)

2. Trải nghiệm một số định lí trong tam giác

Ta có thể vẽ tam giác vuông và trải nghiệm định lí Pythagore cho tam giác vuông như sau:

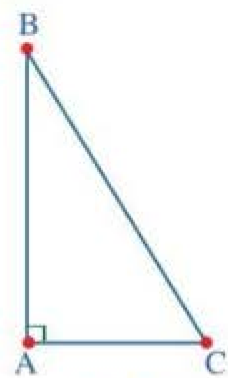
a) Vẽ tam giác vuông ABC (Hình 1)

– Dùng  để vẽ điểm A và điểm B.

– Dùng  để vẽ đoạn thẳng AB.

– Dùng  để vẽ đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng AB.

– Dùng  để vẽ điểm C thuộc đường thẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.



Hình 1

– Ẩn đường thẳng vừa vẽ.

– Dùng  để vẽ các đoạn thẳng BC và CA.

– Dùng , nháy chuột lần lượt vào các điểm B, A, C (hoặc các điểm C, A, B) để kí hiệu góc vuông trên hình vẽ.

b) Trải nghiệm định lí Pythagore cho tam giác vuông

– Dùng  để hiển thị độ dài các cạnh (làm tròn) của tam giác vuông.

– Nhập lệnh: u = AB^2 + AC^2 – BC^2 rồi bấm ↵

– Nhập lệnh: “$AB^2 + AC^2 – BC^2 =$” + u rồi bấm ↵

– Khi di chuyển một trong các đỉnh A, B, C của tam giác ABC, ta thấy độ dài các cạnh của tam giác ABC thay đổi, nhưng $AB^2 + AC^2 – BC^2$ luôn bằng 0, nghĩa là $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

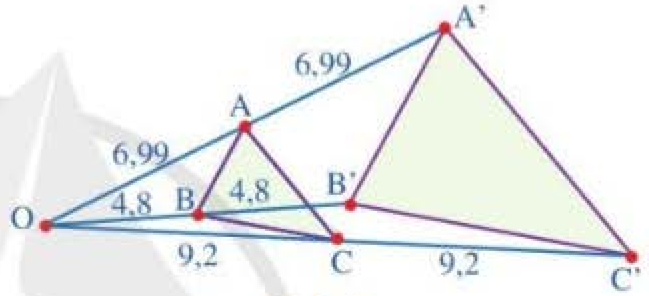
1 Vẽ hình và trải nghiệm định lí Thalès trong tam giác.

3. Vẽ hình đồng dạng phối cảnh (hình vị tự)

Ta có thể vẽ tam giác A’B’C’ đồng dạng phối cảnh với tam giác ABC cho trước với điểm *O* cho trước là tâm đồng dạng phối cảnh và $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = 2$ như sau:

– Dùng vẽ một tam giác ABC bất kì và dùng để vẽ điểm *O* là tâm đồng dạng phối cảnh;

– Nháy chuột lần lượt vào , tam giác ABC, điểm O và nhập vào số 2 trong cửa sổ xuất hiện rồi bấm ↵, trên màn hình sẽ xuất hiện tam giác A’B’C’ cần vẽ.



Hình 2

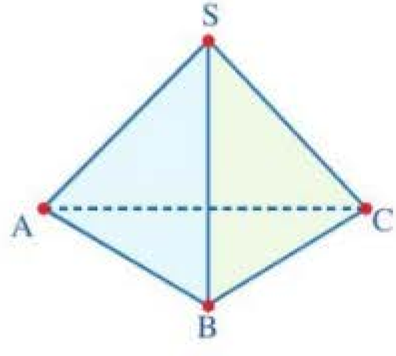
Chú ý: Ta có thể dùng để vẽ các đoạn thẳng OA, AA’, OB, BB’, OC, CC’ và cho hiển thị độ dài các đoạn thẳng đó (bằng cách nháy chuột vào mỗi đoạn thẳng đó, bấm chuột phải, chọn **Thuộc tính ..., Hiển thị tên: Giá trị**) để thấy AA’, BB’, CC’ cùng đi qua O và OA = AA’, OB = BB’, OC = CC’ (hay $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = 2$).

4. Vẽ hình chóp tam giác đều, hình chóp tứ giác đều

Dùng (nháy chuột vào 2 vị trí trên **Vùng làm việc** và nhập vào số đỉnh là 3) để vẽ một tam giác đều trong **Vùng làm việc**.

– Nháy chuột vào **Hiển thị** trên thanh bảng chọn, sau đó nháy chuột vào **Hiển thị dạng 3D**. Trong cửa sổ **Hiển thị dạng 3D**, nháy chuột vào , sau đó nháy chuột vào một điểm trong hình tam giác đều và giữ chuột trái, kéo lên trên, ta sẽ có hình chóp tam giác đều.

– Đổi tên các đỉnh của hình chóp và ẩn các đối tượng không cần thiết để có hình chóp tam giác đều S.ABC (*Hình 3*).



Hình 3

2 Vẽ hình chóp tứ giác đều.

II. SỬ DỤNG PHẦN MỀM MICROSOFT WORD VÀ MICROSOFT EXCEL

1. Sử dụng phần mềm Microsoft Word để vẽ biểu đồ hình quạt tròn

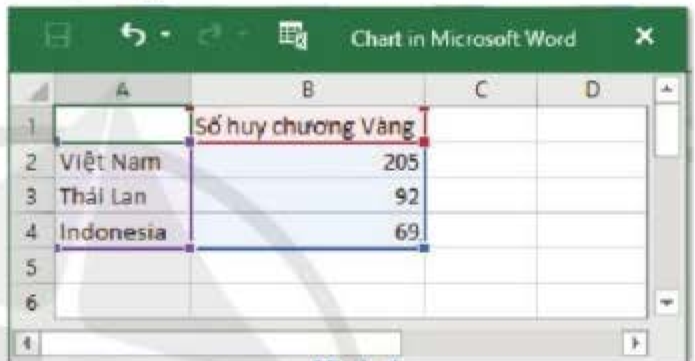
Bảng bên cho biết ba đoàn thể thao đạt được nhiều huy chương Vàng nhất tại SEA Games 31 theo kết quả tổng sắp huy chương (https://seagames2021.com).

Đoàn Thể thao	Số huy chương Vàng
Việt Nam	205
Thái Lan	92
Indonesia	69

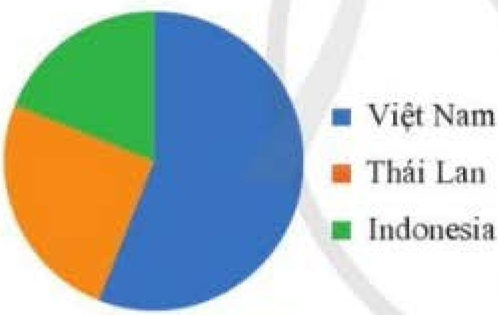
Ta có thể sử dụng phần mềm Microsoft Word để vẽ biểu đồ hình quạt tròn thể hiện số huy chương Vàng mà ba đoàn thể thao nói trên đã đạt được như sau:

– Nháy chuột lần lượt vào dải lệnh **Insert**, chọn **Chart,** trong hộp thoại **Insert Chart** xuất hiện chọn **Pie** rồi bấm **OK**;

– Nhập số liệu vào bảng xuất hiện như ở *Hình 4* rồi bấm ↵ ta sẽ có biểu đồ hình quạt tròn như *Hình 5*:



Hình 4



Hình 5

3 Sử dụng phần mềm Microsoft Excel để vẽ biểu đồ cột thể hiện số huy chương Vàng mà các đoàn Việt Nam, Thái Lan và Indonesia đạt được tại SEA Games 31.

2. Sử dụng phần mềm Microsoft Excel để trải nghiệm mô phỏng thí nghiệm tung đồng xu nhiều lần và tính xác suất thực nghiệm trong trò chơi tung đồng xu

Mô phỏng thí nghiệm tung đồng xu 10 lần và tính xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt sấp (Xem *Hình 6*):

– Tạo ra một số ngẫu nhiên là 0 *hoặc* 1 *ở ô* A1:

+ Nháy chuột vào ô A1;

+ Nhập vào: =RANDBETWEEN(0; 1).

– Ghi vào ô B1 *chữ "Sấp" nếu kết quả ở ô* A1 *là* 1 *hoặc chữ "Ngửa" nếu kết quả ở ô* A1 *là* 0:

+ Nháy chuột vào ô B1;

+ Nhập vào: =IF(A1=1; "Sấp"; "Ngửa").

– Ghi vào các ô từ A1 đến A10 một số ngẫu nhiên là 0 hoặc 1:

+ Nháy chuột vào ô A1, nháy chuột phải và chọn **Copy**;

+ Chọn các ô từ A2 đến A10, rồi nháy chuột phải và chọn **Paste**.

– Ghi vào các ô B1, B2, ..., B10 chữ "Sấp" nếu kết quả ở ô A1, A2, ..., A10 tương ứng là 1 hoặc ghi chữ "Ngửa" nếu kết quả ở ô A1, A2, ..., A10 tương ứng là 0:

+ Nháy chuột vào ô B1, nháy chuột phải và chọn **Copy**;

+ Chọn các ô từ B2 đến B10, rồi nháy chuột phải và chọn **Paste**.

– Ghi vào ô C1 số lần xuất hiện mặt sấp ở các ô từ B1 đến B10:

+ Nháy chuột vào ô C1;

+ Nhập vào: =COUNTIF(B1:B10, "Sấp").

– Ghi vào ô C2 xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt sấp khi tung đồng xu 10 lần:

+ Nháy chuột vào ô C2;

+ Nhập vào: =C1/10.

	A	B	C	D
1	0	Ngửa	4	
2	0	Ngửa	0,4	
3	0	Ngửa		
4	1	Sấp		
5	0	Ngửa		
6	1	Sấp		
7	1	Sấp		
8	0	Ngửa		
9	1	Sấp		
10	0	Ngửa		
11				

Hình 6

4 Mô phỏng thí nghiệm tung một đồng xu 20 lần và xác định xác suất thực nghiệm để xuất hiện mặt sấp.

5 Mô phỏng thí nghiệm gieo một xúc xắc 50 lần và xác định xác suất thực nghiệm để xuất hiện mặt có sáu chấm.

Chú ý

Ta có thể mô phỏng thí nghiệm tung đồng xu *n* lần và tính xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt sấp theo cách tương tự trên. Để lặp lại mô phỏng việc tung đồng xu *n* lần ta chỉ cần bấm phím F9 trên bàn phím máy tính.