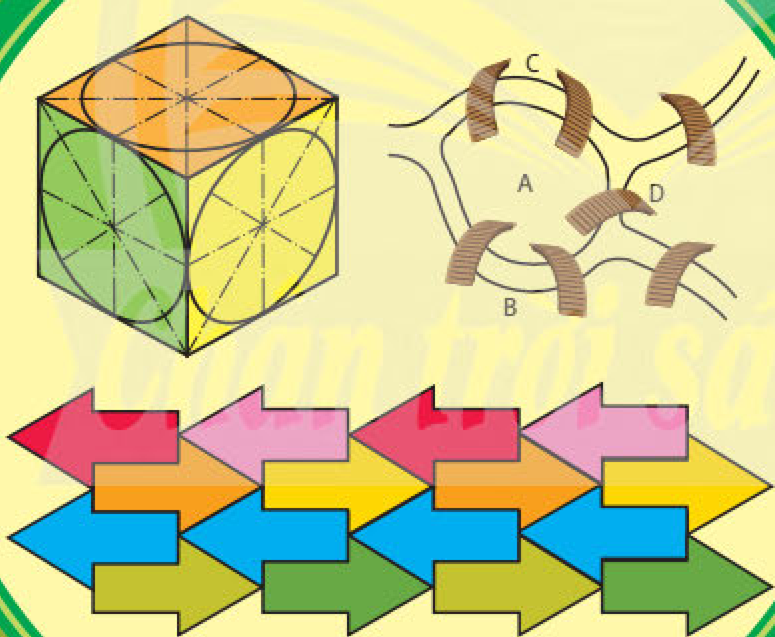
Chân trời sáng tạo

TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
ĐẶNG VĂN ĐOẠT

# CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP
# TOÁN
# 11




BẢN MẪU

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

# HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA
## Môn: TOÁN – LỚP 11

| TT | Họ và tên | Chức vụ Hội đồng |
|---|---|---|
| 1 | Ông Lê Mậu Hải | Chủ tịch |
| 2 | Bà Cao Thị Hà | Phó Chủ tịch |
| 3 | Ông Phạm Đức Tài | Uỷ viên, Thư kí |
| 4 | Ông Phạm Khắc Ban | Uỷ viên |
| 5 | Ông Nguyễn Hắc Hải | Uỷ viên |
| 6 | Ông Nguyễn Doãn Phú | Uỷ viên |
| 7 | Ông Nguyễn Chiến Thắng | Uỷ viên |
| 8 | Bà Nguyễn Thị Vĩnh Thuyên | Uỷ viên |
| 9 | Ông Đinh Cao Thượng | Uỷ viên |
| 10 | Bà Vũ Thị Như Trang | Uỷ viên |
| 11 | Ông Phạm Đình Tùng | Uỷ viên |

TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
ĐẶNG VĂN ĐOẠT

# CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP
# TOÁN
# 11



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

# HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Mỗi bài học trong sách Chuyên đề học tập Toán 11 thường có các phần như sau:

| | |
|---|---|
| Hoạt động khởi động | Gợi mở, kết nối người học vào chủ đề bài học. |
| Hoạt động khám phá | Gợi ý để người học tìm ra kiến thức mới. |
| Kiến thức trọng tâm | Nội dung kiến thức cần lĩnh hội. |
| Thực hành | Các bài tập cơ bản theo yêu cầu cần đạt. |
| Vận dụng | Ứng dụng kiến thức để giải quyết vấn đề. |

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng các em học sinh lớp sau!

# Lời nói đầu

Các bạn học sinh, quý thầy, cô giáo thân mến!

Tiếp nối sách Chuyên đề học tập Toán 10, sách **Chuyên đề học tập Toán 11** thuộc bộ sách **Chân trời sáng tạo** được biên soạn theo Chương trình giáo dục phổ thông năm 2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Sách bao gồm ba chuyên đề:

***Chuyên đề 1.*** **Phép biến hình phẳng.**

***Chuyên đề 2.*** **Lí thuyết đồ thị.**

***Chuyên đề 3.*** **Một số yếu tố vẽ kĩ thuật.**

Các chuyên đề này nhằm mục đích:

– Cung cấp thêm một số kiến thức và kĩ năng toán học nhằm đáp ứng yêu cầu phân hoá, tạo cơ hội cho học sinh vận dụng Toán học để giải quyết các vấn đề liên môn và thực tiễn, góp phần hình thành cơ sở khoa học cho giáo dục STEM.

– Giúp học sinh hiểu rõ vai trò và những ứng dụng của Toán học trong thực tiễn; làm cơ sở cho định hướng nghề nghiệp sau Trung học phổ thông; tạo cơ hội cho học sinh nhận biết năng khiếu, sở thích của mình, từ đó tạo đam mê khi học Toán.

Mỗi chuyên đề đều có nêu các kiến thức cơ bản sẽ học và các yêu cầu cần đạt của chuyên đề. Các bài học đều xây dựng theo tinh thần định hướng phát triển năng lực và thường được thống nhất theo các bước: khởi động, khám phá, thực hành, vận dụng.

Chúng tôi hi vọng rằng sách **Chuyên đề học tập Toán 11** sẽ hỗ trợ quý thầy cô trong quá trình dạy học, đồng thời giúp các bạn học sinh hứng thú hơn khi học tập bộ môn Toán.

Rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô giáo và các bạn học sinh để sách được ngày càng hoàn thiện hơn.

**CÁC TÁC GIẢ**

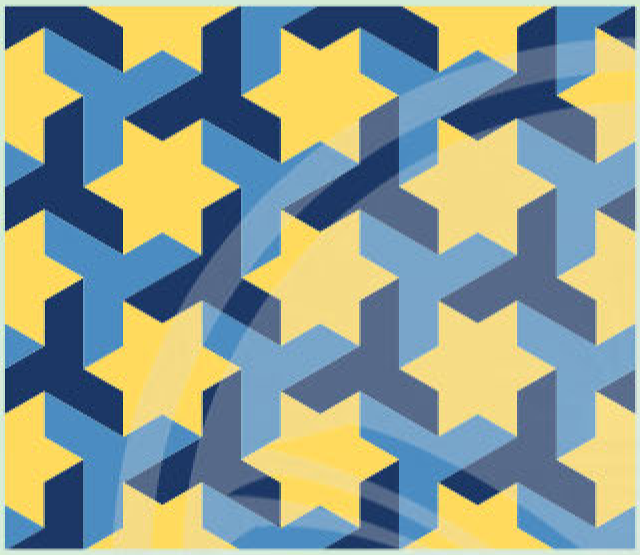
# Mục lục

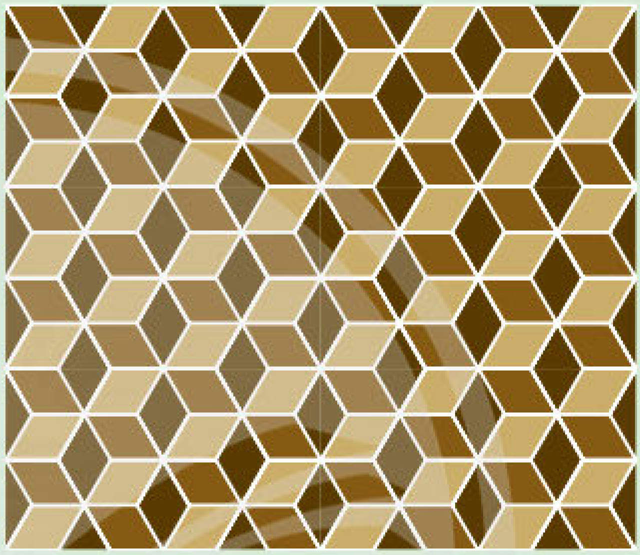
*Trang*

## *Chuyên đề 1*

# PHÉP BIẾN HÌNH PHẲNG

**Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu về khái niệm và tính chất của các phép dời hình, cụ thể là: Phép đối xứng trục; Phép đối xứng tâm; Phép tịnh tiến và Phép quay. Chúng ta cũng sẽ tìm hiểu về khái niệm và tính chất của phép đồng dạng phối cảnh (phép vị tự) và phép đồng dạng, đồng thời học cách vận dụng các phép dời hình và phép đồng dạng nói trên trong đồ hoạ và trong một số vấn đề thực tiễn.**





Phép biến hình thường được sử dụng trong đồ hoạ, tạo hoa văn trang trí.

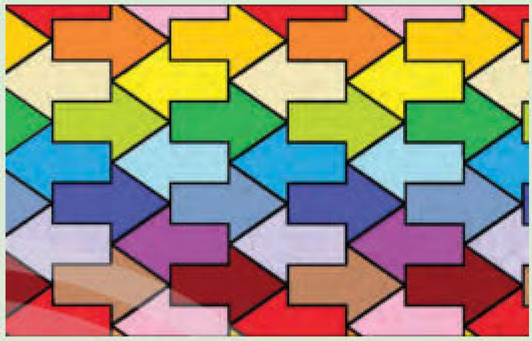
### Sau chuyên đề này, bạn có thể:

- Nhận biết được khái niệm phép dời hình.
- Nhận biết được tính chất của phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép tịnh tiến và phép quay.
- Xác định được ảnh của điểm, đoạn thẳng, tam giác, đường tròn qua phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép tịnh tiến và phép quay.
- Nhận biết được khái niệm phép đồng dạng phối cảnh (phép vị tự), phép đồng dạng.
- Nhận biết được tính chất của phép vị tự.
- Xác định được ảnh của điểm, đoạn thẳng, tam giác, đường tròn qua phép vị tự.
- Vận dụng được phép dời hình và phép đồng dạng trong đồ hoạ và trong một số vấn đề thực tiễn (ví dụ: tạo các hoa văn, hình, khối, …).

# Bài 1. Phép biến hình và phép dời hình

**Từ khoá:** Phép biến hình; Phép dời hình; Tính bảo toàn khoảng cách.

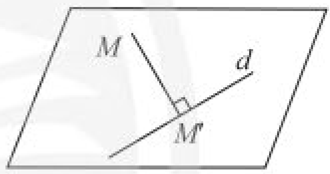
Bức tranh trang trí trong hình bên trước khi tô màu thực chất được tạo ra từ một hình mũi tên duy nhất và được dời chỗ tới các vị trí khác nhau. Hãy thảo luận để tìm hiểu về các phép biến đổi hình học nào đã tạo ra tất cả các hình mũi tên như vậy từ một hình mũi tên ban đầu.



## 1. Phép biến hình

Trong mặt phẳng, cho đường thẳng $d$ và điểm $M$. Gọi $M'$ là hình chiếu vuông góc của $M$ trên đường thẳng $d$.

Vẽ ba điểm $A$, $B$, $C$ tuỳ ý và tìm hình chiếu vuông góc $A'$, $B'$, $C'$ của chúng trên $d$.




Hình 1

**Định nghĩa**

***Phép biến hình*** $f$ trong mặt phẳng là một quy tắc cho tương ứng với mỗi điểm $M$ với duy nhất một điểm $M'$. Điểm $M'$ được gọi là ***ảnh*** của điểm $M$ qua phép biến hình $f$, kí hiệu $M' = f(M)$.

***Chú ý:***

a) Nếu $M'$ là ảnh của điểm $M$ qua phép biến hình $f$ thì ta nói *phép biến hình $f$ biến điểm $M$ thành điểm $M'$*.

b) Nếu $\mathcal{H}$ là một hình bất kì thì hình $\mathcal{H}' = \{M' \mid M' = f(M), \forall M \in \mathcal{H}\}$ được gọi là *ảnh của hình $\mathcal{H}$ qua $f$*. Ta nói phép biến hình $f$ biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$, kí hiệu là $\mathcal{H}' = f(\mathcal{H})$.

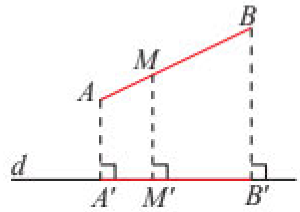
c) Phép biến hình biến mỗi điểm $M$ thành chính nó gọi là *phép đồng nhất*.

***Ví dụ 1.*** Trong 1,

a) Chứng minh phép chiếu vuông góc lên đường thẳng $d$ là một phép biến hình.

b) Cho hai điểm $A$, $B$ nằm cùng phía so với đường thẳng $d$ sao cho đường thẳng $AB$ không vuông góc với $d$. Tìm ảnh của đoạn thẳng $AB$ qua phép biến hình ở câu a).

*Giải*



Hình 2

a) Đặt $g(M) = M'$. Trong đó, $M'$ là hình chiếu vuông góc của điểm $M$ lên đường thẳng $d$. Ta thấy $g$ là một quy tắc sao cho ứng với mỗi điểm $M$ đều xác định duy nhất một điểm $M'$. Vậy phép chiếu vuông góc lên $d$ là một phép biến hình.

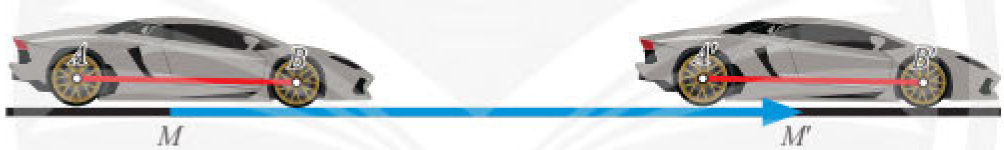
b) Gọi $A' = g(A)$, $B' = g(B)$. Ta thấy khi điểm $M$ di động trên đoạn thẳng $AB$ thì ảnh $M'$ của $M$ qua $g$ tạo ra đoạn thẳng $A'B'$, nghĩa là $A'B' = \{M' | M' = g(M), \forall M \in AB\}$.

Vậy ảnh của đoạn thẳng $AB$ qua phép biến hình $g$ là đoạn thẳng $A'B'$, hay $g(AB) = A'B'$.

1 Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, ứng mỗi điểm $M(x; y)$ quy tắc $f$ xác định điểm $M'(-3x; 3y)$. Hãy cho biết $f$ có phải là phép biến hình không. Nếu có, tìm ảnh của điểm $A(-1; 2)$ qua $f$.

## 2. Phép dời hình

2 Khi một ô tô dời chỗ đậu từ vị trí $M$ đến $M'$, khoảng cách giữa hai trục bánh xe có thay đổi không?



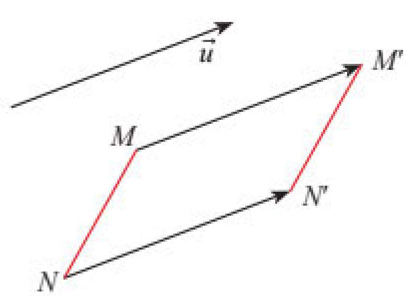
Hình 3

### Định nghĩa

***Phép dời hình*** là phép biến hình bảo toàn khoảng cách (không làm thay đổi khoảng cách) giữa hai điểm bất kì.

**Ví dụ 2.** Trong mặt phẳng, cho trước một vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$. Ta định nghĩa một phép biến hình $f$ như sau: Với mỗi điểm $M$ tuỳ ý, ta chọn $M' = f(M)$ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Chứng minh $f$ là một phép dời hình.

*Giải*



Hình 4

Với hai điểm tuỳ ý $M$, $N$, đặt $M' = f(M)$ và $N' = f(N)$.
Ta có: $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$ nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$.
Suy ra $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM'} = \overrightarrow{NM'} + \overrightarrow{M'N'}$.
Do đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right| = \left|\overrightarrow{M'N'}\right| \Rightarrow MN = M'N'$.
Vậy $f$ là một phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì, suy ra $f$ là một phép dời hình.

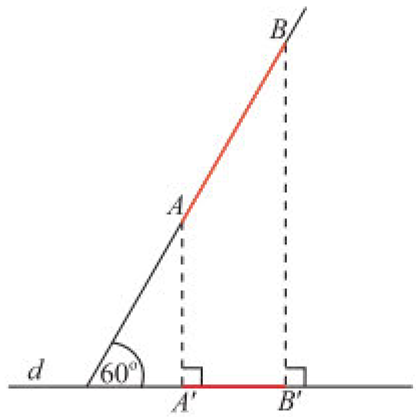
***Ví dụ 3.*** Sử dụng Hình 5 làm gợi ý để chứng minh phép chiếu vuông góc không phải là một phép dời hình.

***Giải***

Trong Hình 5, ta thấy hai điểm $A$, $B$ qua phép chiếu vuông góc $f$ có ảnh lần lượt là $A'$, $B'$.

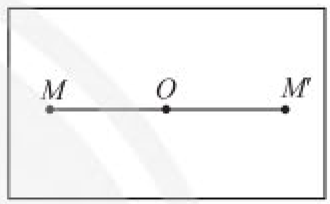
Ta có $A'B' = AB \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}AB$. Do đó $A'B' \neq AB$.

Vậy phép chiếu vuông góc $f$ không phải là một phép dời hình.




*Hình 5*

Cho điểm $O$ trong mặt phẳng. Ta định nghĩa một phép biến hình $h$ như sau: Với mỗi điểm $M$ khác $O$ chọn $M' = h(M)$ sao cho $O$ là trung điểm của đoạn thẳng $MM'$ (Hình 6), còn với $M$ trùng với $O$ thì ta chọn $O = h(M)$. Chứng minh $h$ là một phép dời hình.




*Hình 6*

Một người đã vẽ xong bức tranh một con thiên nga đang bơi trên mặt hồ (đường thẳng $d$) (Hình 7a). Người đó muốn vẽ bóng của con thiên nga đó xuống mặt nước (như Hình 7b) bằng cách gấp tờ giấy theo đường thẳng $d$ và đồ theo hình con thiên nga trên nửa tờ giấy còn lại. Chứng tỏ rằng đây là một phép dời hình.


*Hình 7*

***Chú ý:*** Hai hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ được gọi là bằng nhau nếu tồn tại ít nhất một phép dời hình $f$ biến $\mathscr{H}$ thành $\mathscr{H}'$.

## 3. Tính chất của phép dời hình

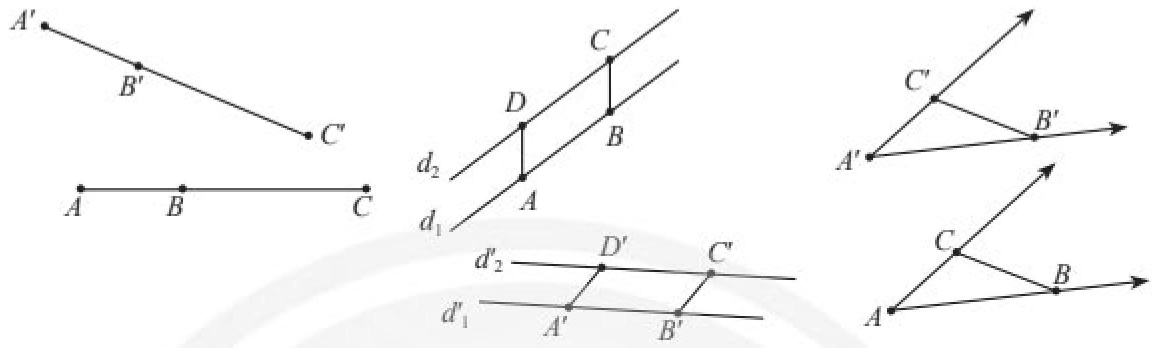
Trong mỗi trường hợp dưới đây, cho $f$ là một phép dời hình.

a) Cho ba điểm $A$, $B$, $C$ thẳng hàng theo thứ tự ($B$ nằm giữa $A$ và $C$). Gọi $A'$, $B'$, $C'$ lần lượt là ảnh của $A$, $B$, $C$ qua $f$ (Hình 8a). Có nhận xét gì về vị trí tương đối của ba điểm $A'$, $B'$, $C'$?

b) Cho hai đường thẳng song song $d_1$ và $d_2$, lấy hai đoạn thẳng bằng nhau $AB$ và $DC$ lần lượt trên $d_1$ và $d_2$. Gọi $d'_1$, $d'_2$ lần lượt là ảnh của $d_1$, $d_2$ và $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ lần lượt là ảnh của $A$, $B$, $C$, $D$ qua $f$ (Hình 8b). Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình gì? Nêu nhận xét về vị trí tương đối của hai đường thẳng $d'_1$, $d'_2$.

c) Cho $A'B'C'$ là ảnh của tam giác $ABC$ qua $f$ (Hình 8c).

So sánh $\Delta A'B'C'$ và $\Delta ABC$. So sánh số đo hai góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{B'A'C'}$.




a) b) c)

*Hình 8*

**Tính chất**

Phép dời hình bảo toàn:
- Tính thẳng hàng của ba điểm và thứ tự của ba điểm thẳng hàng.
- Tính song song của hai đường thẳng.
- Độ lớn của một góc.

**Hệ quả**

Phép dời hình có tính chất:
- Biến tia thành tia.
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó.
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, có tâm là ảnh của tâm.

***Ví dụ 4.*** Gọi $A'B'C'D'$ là ảnh của tứ giác $ABCD$ qua phép biến hình $h$ trong . Hãy chứng minh:

a) Nếu $O$ là giao điểm của hai đường chéo $AC$ và $BD$ thì $h(O)$ là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

b) Nếu $ABCD$ là hình thang vuông thì $A'B'C'D'$ cũng là hình thang vuông.

***Giải***

Trong , ta đã có $h$ là phép dời hình.

a) Do phép dời hình $h$ bảo toàn tính thẳng hàng của ba điểm nên từ $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$ ta suy ra $O'$ là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

b) Giả sử $ABCD$ là hình thang có $AB // CD$ và góc $A$ vuông. Do phép dời hình $h$ bảo toàn tính song song và độ lớn của góc, ta suy ra $A'B' // C'D'$ và góc $A'$ vuông. Vậy $A'B'C'D'$ cũng là hình thang vuông.

Gọi $A'B'C'D'$ là ảnh của hình chữ nhật $ABCD$ qua phép biến hình được diễn tả trong . Hãy cho biết $A'B'C'D'$ là hình gì. Giải thích.

## BÀI TẬP

1. Cho đường thẳng $d$ đi qua tâm $O$ của đường tròn $(C)$ và cắt $(C)$ tại $A$ và $B$. Tìm ảnh của đường tròn $(C)$ qua phép chiếu vuông góc lên $d$.
2. Cho đường thẳng $d$ cố định, xét phép biến hình $f$ biến điểm $M$ thuộc $d$ thành chính nó và biến điểm $M$ không thuộc $d$ thành điểm $M'$ sao cho $d$ là trung trực của đoạn $MM'$. Hãy chứng minh $f$ là một phép dời hình.
3. Cho phép dời hình $f$ biến hình vuông $\mathscr{H}$ có cạnh bằng 2 cm thành hình vuông $\mathscr{H}'$. Tìm diện tích của $\mathscr{H}'$.
4. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, xét các phép biến hình sau đây:
   – Phép biến hình $f$ biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(-x; -y)$;
   – Phép biến hình $g$ biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(2x; 2y)$.
   Trong hai phép biến hình trên, phép nào là phép dời hình? Giải thích.
5. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, xét phép biến hình $h$ biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x; y)$, trong đó

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

   Hãy chứng minh $h$ là một phép dời hình.

# Bài 2. Phép tịnh tiến

**Từ khoá:** Phép tịnh tiến; Vectơ tịnh tiến.

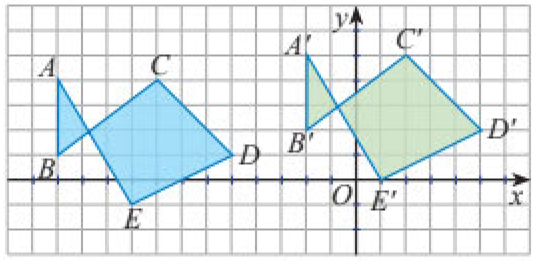
Phép dời hình nào có thể biến hình ngôi sao A thành hình ngôi sao B?

## 1. Định nghĩa

Quan sát các điểm được vẽ trên mặt phẳng toạ độ (Hình 1).

a) Có nhận xét gì về các vectơ $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, ..., $\overrightarrow{EE'}$?

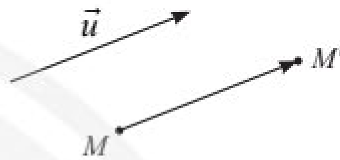
b) Có hay không phép biến hình biến các điểm $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ thành các điểm $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$?




*Hình 1*

Cho vectơ $\vec{u}$, ***phép tịnh tiến theo vectơ*** $\vec{u}$ là phép biến hình biến điểm $M$ thành điểm $M'$ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ được kí hiệu là $T_{\vec{u}}$ và $\vec{u}$ gọi là ***vectơ tịnh tiến***.




*Hình 2*

***Chú ý:*** Nếu $M'$ là ảnh của điểm $M$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ thì ta kí hiệu $M' = T_{\vec{u}}(M)$.

***Ví dụ 1.*** Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến điểm $M$ thành điểm $M'$. Tìm phép biến hình biến điểm $M'$ thành điểm $M$.

***Giải***

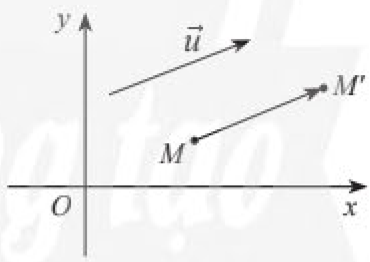
Ta có: $T_{\vec{u}}(M) = M'$ nên $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, suy ra $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$, do đó $T_{-\vec{u}}(M') = M$.

Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $-\vec{u}$ biến điểm $M'$ thành điểm $M$.

***Ví dụ 2.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho phép biến hình $f$ biến điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x'; y')$ thoả mãn:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$ với $a$, $b$ là hai số không đổi cho trước.

Chứng minh $f$ là một phép tịnh tiến và tìm toạ độ của vectơ tịnh tiến.




*Hình 3*

***Giải***

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (x' - x; y' - y) = (a; b)$. Đặt $\vec{u} = (a; b)$. Vậy $f$ là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (a; b)$.

***Chú ý:*** Người ta gọi $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ là biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (a; b)$.

Chứng minh phép đồng nhất là một phép tịnh tiến.

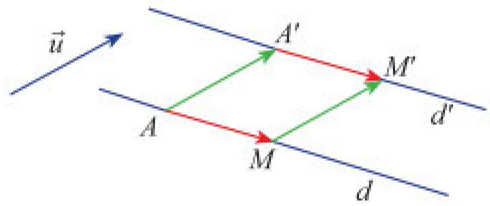
Tìm độ dài vectơ tịnh tiến của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến các điểm $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ thành $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ trong 1 (biết cạnh mỗi ô vuông là 1 đơn vị).

## 2. Tính chất

Cho vectơ $\vec{u}$ và đường thẳng $d$. $A$ và $M$ là hai điểm bất kì trên $d$. Gọi $A'$ và $M'$ lần lượt là ảnh của $A$ và $M$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$.

a) Hai vectơ $\overrightarrow{A'M'}$, $\overrightarrow{AM}$ có bằng nhau không?

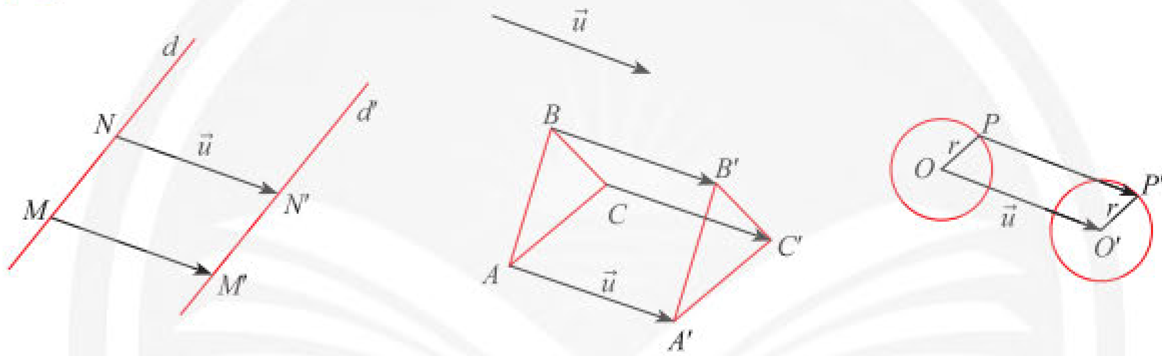
b) Khi điểm $M$ thay đổi trên $d$ thì điểm $M'$ thay đổi như thế nào? Giải thích.




Hình 4

– Phép tịnh tiến là một phép dời hình.
– Phép tịnh tiến có đầy đủ các tính chất của phép dời hình.
– Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

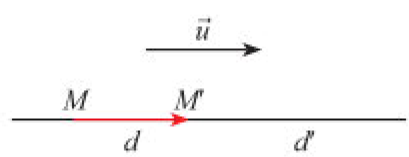
### Cách xác định ảnh của đoạn thẳng, đường thẳng, tam giác, đường tròn qua phép tịnh tiến




Hình 5

| Hình $\mathscr{H}$ | Cách xác định ảnh $\mathscr{H}'$ của $\mathscr{H}$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ |
|---|---|
| Đoạn thẳng $MN$ | Xác định ảnh $M'$, $N'$ của hai đầu mút $M$, $N$. Vẽ đoạn thẳng $M'N'$. |
| Đường thẳng $d$ đi qua $M$ | Xác định ảnh $M'$ của $M$. Vẽ $d'$ đi qua $M'$ và song song hoặc trùng với $d$. |
| Tam giác $ABC$ | Xác định ảnh $A'$, $B'$, $C'$ của ba đỉnh $A$, $B$, $C$. Vẽ tam giác $A'B'C'$. |
| Đường tròn tâm $O$, bán kính $r$ | Xác định ảnh $O'$ của tâm $O$. Vẽ đường tròn tâm $O'$, bán kính $r$. |

***Chú ý:*** Nếu $\vec{u}$ có giá song song hoặc trùng với $d$ thì phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến $d$ thành chính nó, kí hiệu $T_{\vec{u}}(d) = d$.




Hình 6

***Ví dụ 3.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho vectơ $\vec{v} = (1; 2)$. Tìm ảnh qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ của

a) điểm $A(2; 3)$;

b) đường thẳng $d$: $x - y - 5 = 0$.

***Giải***

a) Đặt $A'(x'; y') = T_{\vec{v}}(A)$. Ta có $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$ nên $\begin{cases} x' - 2 = 1 \\ y' - 3 = 2 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 5. \end{cases}$

Vậy $A'(3; 5)$.

b) Lấy điểm $M(5; 0)$ thuộc $d$. Gọi $M'(x'; y')$ và $d'$ lần lượt là ảnh của $M$ và $d$ qua $T_{\vec{v}}$.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ nên $\begin{cases} x' - 5 = 1 \\ y' - 0 = 2 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x' = 6 \\ y' = 2. \end{cases}$

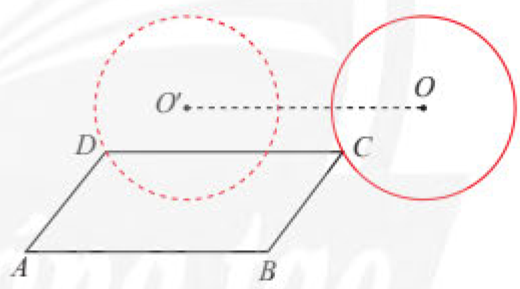
Vậy $M'(6; 2)$.

Ta có $d'$ là đường thẳng đi qua $M'$ và có cùng vectơ pháp tuyến với $d$, suy ra $d'$ có phương trình $(x - 6) - (y - 2) = 0$ hay $x - y - 4 = 0$.

***Ví dụ 4.*** Cho đường tròn $(O; R)$ có tâm $O$, bán kính $R$. Cho hai điểm $A$, $B$ cố định sao cho đường thẳng $AB$ không có điểm chung với $(O; R)$, $C$ là điểm trên $(O; R)$. Vẽ hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng khi $C$ thay đổi trên $(O; R)$, thì điểm $D$ nằm trên một đường tròn cố định.

***Giải***

Do $A$, $B$ cố định nên $\overrightarrow{BA}$ là vectơ không đổi. Trong hình bình hành $ABCD$, ta có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, suy ra $D$ là ảnh của $C$ qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$. Khi $C$ thay đổi trên đường tròn $(O; R)$ thì $D$ nằm trên ảnh của $(O; R)$ là đường tròn $(O'; R)$ qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$.



*Hình 7*

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, xét phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v} = (3; 2)$.

a) Biết ảnh của điểm $M$ qua $T_{\vec{v}}$ là điểm $M'(-8; 5)$. Tìm toạ độ điểm $M$.

b) Tìm ảnh của đường tròn $(C)$: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ qua $T_{\vec{v}}$.

Trong Hình 8, người thợ sửa xe đã dùng kích nâng thuỷ lực để đưa ô tô từ mặt đất đến vị trí cần thiết thông qua phép biến hình nào?

*Hình 8*

## BÀI TẬP

**1.** Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$. Với điểm $M$ bất kì, $T_{\vec{u}}$ biến $M$ thành $M'$, $T_{\vec{v}}$ biến $M'$ thành $M''$. Hỏi có phép tịnh tiến nào biến điểm $M$ thành $M''$ không?

**2.** Cho đường tròn $(O)$ và hai điểm $A$, $B$. Khi điểm $M$ thay đổi trên đường tròn $(O)$ thì điểm $M'$ thay đổi trên đường nào để $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$?

**3.** Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ trong đó $\vec{u} = (3; 5)$.

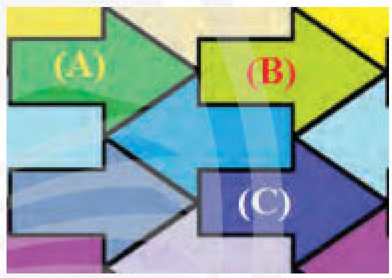
a) Tìm ảnh của các điểm $A(-3; 4)$, $B(2; -7)$ qua $T_{\vec{u}}$.

b) Biết rằng $M'(2; 6)$ là ảnh của điểm $M$ qua $T_{\vec{u}}$. Tìm toạ độ của điểm $M$.

c) Tìm ảnh của đường thẳng $d$: $4x - 3y + 7 = 0$ qua $T_{\vec{u}}$.

**4.** Cho hai điểm $B$, $C$ cố định trên đường tròn $(O; R)$ và một điểm $A$ thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh trực tâm $H$ của tam giác $ABC$ luôn nằm trên một đường tròn cố định.

**5.** Trong Hình 9, tìm các vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ sao cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến hình mũi tên $(A)$ thành hình mũi tên $(B)$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến hình mũi tên $(A)$ thành hình mũi tên $(C)$.

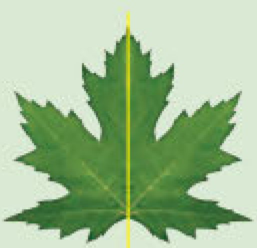


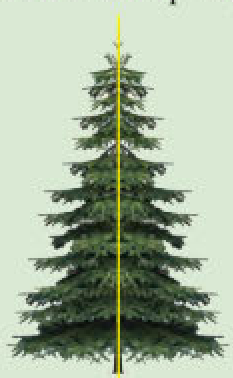

*Hình 9*

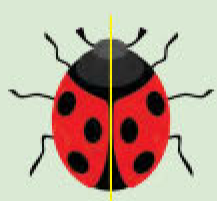
# Bài 3. Phép đối xứng trục

**Từ khoá:** Phép đối xứng trục; Trục đối xứng; Hình có trục đối xứng.

Trong các hình sau, hình nào có trục đối xứng?
Có phép biến hình nào biến một nửa mỗi hình phẳng sau đây thành nửa còn lại không?







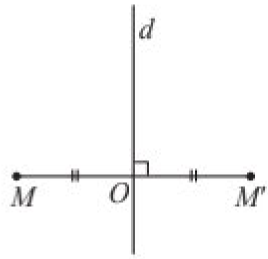
## 1. Định nghĩa

Cho đường thẳng $d$. Gọi $f$ là quy tắc xác định như sau:

a) Với điểm $M$ không thuộc $d$, xác định điểm $M'$ sao cho $d$ là đường trung trực của $MM'$ (Hình 1).

b) Với điểm $M$ thuộc $d$ thì $f$ biến điểm $M$ thành chính nó.

Hỏi $f$ có phải là phép biến hình hay không?



*Hình 1*

Cho đường thẳng $d$, phép biến hình biến mỗi điểm $M$ không thuộc $d$ thành điểm $M'$ sao cho $d$ là đường trung trực của $MM'$ và biến mỗi điểm $M$ thuộc $d$ thành chính nó được gọi là ***phép đối xứng qua đường thẳng*** $d$ hay gọi tắt là ***phép đối xứng trục*** $d$, kí hiệu là $Đ_d$. Đường thẳng $d$ được gọi là ***trục đối xứng***.

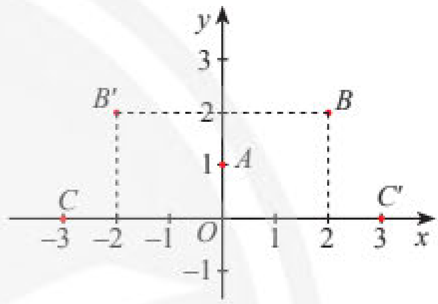
***Chú ý:*** Nếu $M'$ là ảnh của điểm $M$ qua phép đối xứng trục $Đ_d$ thì ta kí hiệu $M' = Đ_d(M)$.

***Ví dụ 1.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho ba điểm $A(0; 1)$, $B(2; 2)$ và $C(-3; 0)$. Tìm toạ độ các điểm $A' = Đ_{Oy}(A)$, $B' = Đ_{Oy}(B)$, $C' = Đ_{Oy}(C)$.

**Giải**

Do $A(0; 1) \in Oy$ nên $Đ_{Oy}(A) = A$. Vậy $A \equiv A'$.

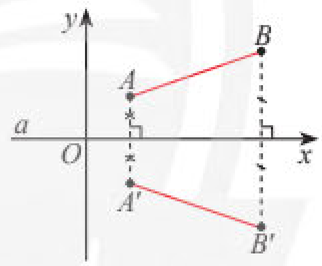
Vẽ $B'$, $C'$ lần lượt đối xứng với $B$, $C$ qua $Oy$, ta được $B'(-2; 2)$, $C'(3; 0)$ (Hình 2).



*Hình 2*

## 2. Tính chất

Giả sử $Đ_a$ là phép đối xứng trục qua đường thẳng $a$. Ta chọn hệ toạ độ $Oxy$ sao cho trục $Ox$ trùng với $a$. Lấy hai điểm tuỳ ý $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Gọi $A'$, $B'$ lần lượt là ảnh của $A$, $B$ qua phép đối xứng trục $a$ (Hình 3). Xác định toạ độ của $A'$ và $B'$ rồi dùng công thức tính khoảng cách để so sánh $A'B'$ và $AB$.

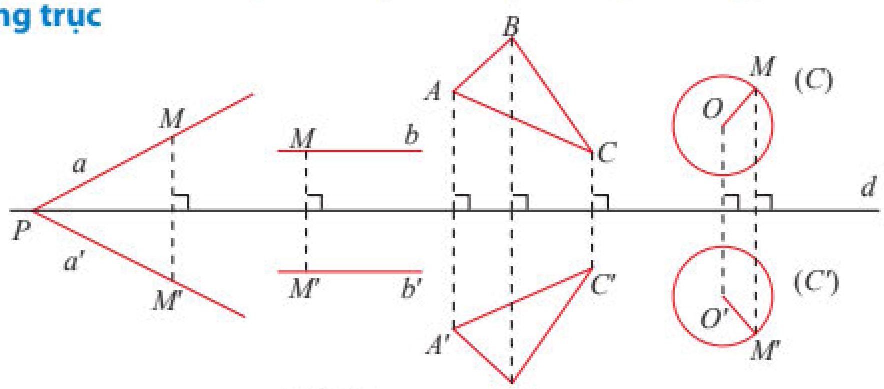


*Hình 3*

– Phép đối xứng trục là một phép dời hình.

– Phép đối xứng trục có đầy đủ các tính chất của phép dời hình.

### Cách xác định ảnh của đoạn thẳng, đường thẳng, tam giác, đường tròn qua phép đối xứng trục



*Hình 4*

| Hình $\mathscr{H}$ | Cách xác định ảnh $\mathscr{H}'$ của $\mathscr{H}$ qua phép đối xứng trục $d$ |
|---|---|
| Đoạn thẳng $MN$ | Xác định ảnh $M'$, $N'$ của hai đầu mút $M$, $N$. Vẽ đoạn thẳng $M'N'$. |
| Đường thẳng $a$ đi qua $M$ và cắt $d$ tại $P$ | Xác định ảnh $M'$ của $M$. Vẽ $a'$ đi qua $M'$ và $P$. |
| Đường thẳng $b$ đi qua $M$ và song song với $d$ | Xác định ảnh $M'$ của $M$. Vẽ $b'$ đi qua $M'$ và song song với $d$. |
| Tam giác $ABC$ | Xác định ảnh $A'$, $B'$, $C'$ của ba đỉnh $A$, $B$, $C$. Vẽ tam giác $A'B'C'$. |
| Đường tròn $(C)$ tâm $O$, bán kính $r$ | Xác định ảnh $O'$ của tâm $O$. Vẽ đường tròn tâm $O'$, bán kính $r$. |

***Ví dụ 2.*** Cho phép $Đ_d$, hãy cho biết ảnh $M'$ của điểm $M$ qua $Đ_d$ nằm trên đường nào khi $M$ di động trên các đường sau:

a) Đường thẳng $EF$;

b) Đường thẳng $a$ cắt $d$ tại $P$;

c) Đường thẳng $b \,//\, d$;

d) Đường tròn $(O; r)$.

*Giải*

a) Nếu điểm $M$ thuộc đường thẳng $EF$ thì điểm $M'$ thuộc đường thẳng $E'F'$, với $E'$, $F'$ lần lượt là ảnh của $E$, $F$ qua $Đ_d$.

b) Nếu điểm $M$ thuộc đường thẳng $a$ cắt $d$ tại $P$ thì điểm $M'$ thuộc đường thẳng $a'$ cắt $d$ tại $P$.

c) Nếu điểm $M$ thuộc đường thẳng $b \,//\, d$ thì điểm $M'$ thuộc đường thẳng $b' \,//\, d$.

d) Nếu điểm $M$ thuộc đường tròn $(O; r)$ thì điểm $M'$ thuộc đường tròn $(O'; r)$.

***Nhận xét:***

– Ta có $Đ_d(M) = M$ khi và chỉ khi $M \in d$.

– Nếu $Đ_d(M) = M'$ thì $Đ_d(M') = M$.

– Nếu $Đ_d$ biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$ thì nó biến hình $\mathscr{H}'$ thành hình $\mathscr{H}$.

***Ví dụ 3.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho điểm $M(x_0; y_0)$.

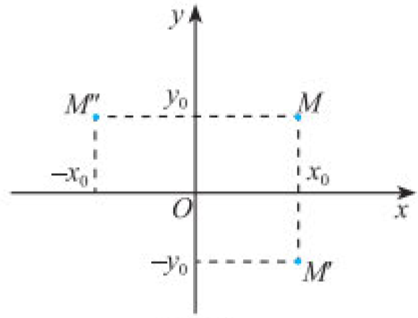
a) Tìm toạ độ điểm $M' = Đ_{Ox}(M)$.

b) Tìm toạ độ điểm $M'' = Đ_{Oy}(M)$.

**Giải**

a) Vì $Ox$ là đường trung trực của $MM'$ nên ta có hai điểm $M$ và $M'$ có cùng hoành độ và có tung độ đối nhau, suy ra toạ độ điểm $M'$ là $(x_0; -y_0)$.

b) Vì $Oy$ là đường trung trực của $MM''$ nên ta có hai điểm $M$ và $M''$ có cùng tung độ và có hoành độ đối nhau, suy ra toạ độ điểm $M''$ là $(-x_0; y_0)$.



Hình 5

***Ví dụ 4.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x-2)^2+(y-3)^2=4$.

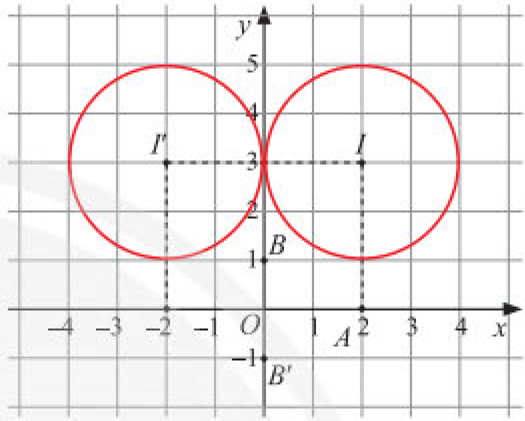
Tìm ảnh của đường tròn $(C)$ qua $Đ_{Oy}$.

**Giải**

Đường tròn $(C)$ có tâm $I(2; 3)$ và bán kính $r=2$.
Ta có $Đ_{Oy}(I) = I'(-2; 3)$.

Ảnh của đường tròn $(C)$ qua $Đ_{Oy}$ là đường tròn $(C')$ có tâm $I'(-2; 3)$ và bán kính $r=2$.

Vậy $(C')$ có phương trình: $(x+2)^2+(y-3)^2=4$.



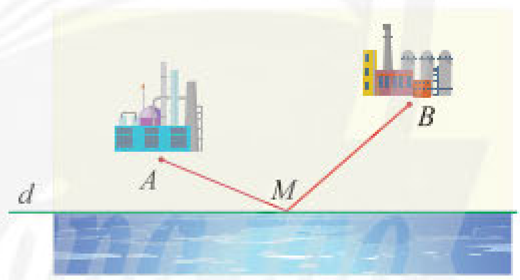
Hình 6

1 Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường thẳng $d$: $x-y+3=0$ và đường tròn $(C)$: $(x+1)^2+(y+2)^2=9$.

a) Tìm ảnh của đường thẳng $d$ qua $Đ_{Oy}$.

b) Tìm ảnh của đường tròn $(C)$ qua $Đ_{Ox}$.

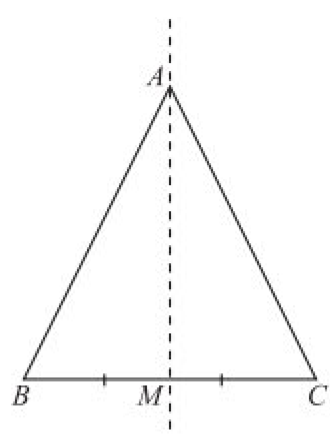
1 Cho hai điểm $A$, $B$ là vị trí của hai nhà máy nằm cùng một phía bờ sông là đường thẳng $d$. Tìm trên bờ sông một địa điểm $M$ để xây dựng một trạm bơm sao cho tổng chiều dài đường ống dẫn nước từ trạm bơm về hai nhà máy là ngắn nhất (Hình 7).



Hình 7

## 3. Trục đối xứng của một hình

3 Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ và $M$ là trung điểm của $BC$. Tìm ảnh của tam giác $ABC$ qua phép đối xứng trục $AM$.



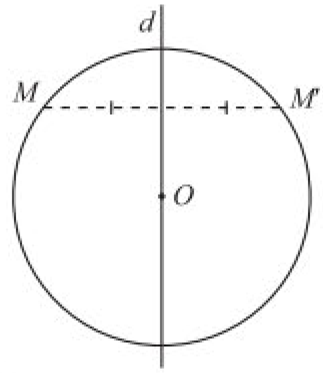
Hình 8

Đường thẳng $d$ gọi là ***trục đối xứng*** của hình $\mathscr{H}$ nếu phép đối xứng trục qua $d$ biến $\mathscr{H}$ thành chính nó, tức là $Đ_d(\mathscr{H}) = \mathscr{H}$.

***Ví dụ 5.*** Chứng minh đường thẳng $d$ đi qua tâm $O$ của một đường tròn $(C)$ là trục đối xứng của $(C)$.

**_Giải_**

Do $d$ đi qua tâm $O$ của đường tròn $(C)$ nên ta có $Đ_d(O) = O$, suy ra phép đối xứng trục qua $d$ biến đường tròn $(C)$ thành chính nó. Vậy đường thẳng $d$ đi qua tâm $O$ của một đường tròn $(C)$ là trục đối xứng của $(C)$.




*Hình 9*

Tìm trục đối xứng của một hình thang cân $ABCD$ có hai đáy là $AB$ và $CD$.

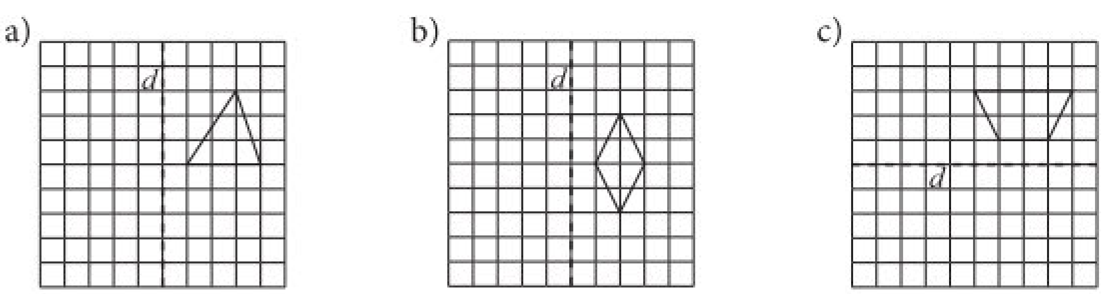
Tìm trục đối xứng trong các hình ở Hình 10.

*Hình 10*



## BÀI TẬP

1. Vẽ các hình sau đây vào giấy kẻ ô vuông và tìm ảnh của các hình đã cho qua phép đối xứng trục $d$.




*Hình 11*

2. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường thẳng $d$ có phương trình $x - y = 0$ và cho điểm $M(x_0; y_0)$. Tìm toạ độ điểm $M' = Đ_d(M)$.

3. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho ba điểm $A(3; 2)$, $B(4; -3)$ và $M(-8; 5)$.

a) Tìm ảnh của $A$ qua $Đ_{Ox}$ và ảnh của $B$ qua $Đ_{Oy}$.

b) Biết $M$ là ảnh của $N$ qua $Đ_{Oy}$. Xác định toạ độ của $N$.

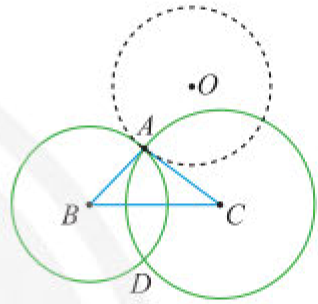
4. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ và đường thẳng $\Delta$: $2x + 3y + 4 = 0$.

a) Tìm ảnh của $(C)$ và $\Delta$ qua phép đối xứng trục $Ox$.

b) Tìm ảnh của $(C)$ và $\Delta$ qua phép đối xứng trục $Oy$.

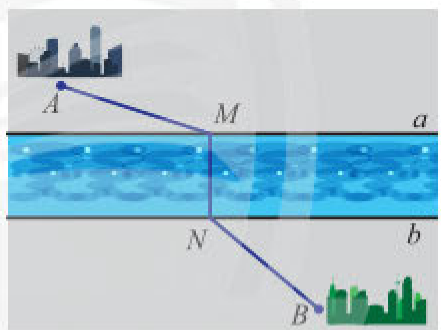
c) Tìm ảnh của $(C)$ và $\Delta$ qua phép đối xứng trục $d$: $x - y - 3 = 0$.

5. Cho tam giác $ABC$ với $B$ và $C$ cố định. Vẽ hai đường tròn có tâm lần lượt là $B$, $C$ và đi qua $A$. Gọi $D$ là giao điểm thứ hai của hai đường tròn nói trên (Hình 12). Khi $A$ di động trên một đường tròn cố định $(O)$ thì điểm $D$ di động trên đường nào?



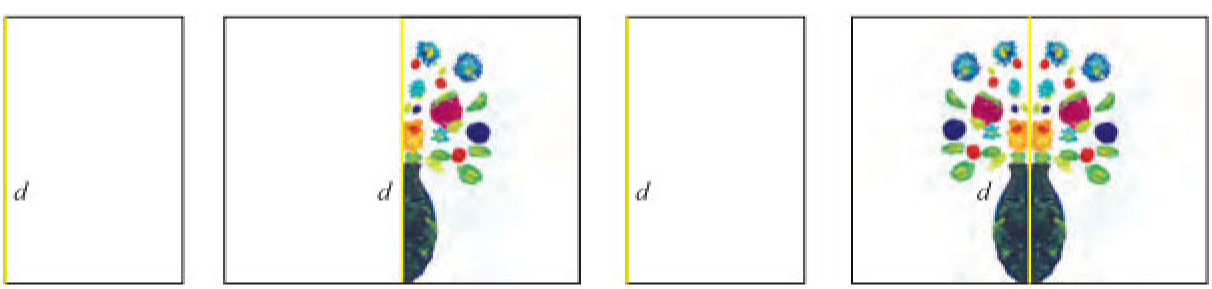
Hình 12

6. Hai thành phố $A$, $B$ nằm ở hai bên bờ của một con sông (Hình 13). Giả sử hai bờ sông là hai đường thẳng song song $a$, $b$. Tìm vị trí điểm $M$ bên bờ $a$ và $N$ bên bờ $b$ để xây dựng một chiếc cầu $MN$ sao cho $MN$ vuông góc với $a$, $b$ và tổng khoảng cách $AM + NB$ ngắn nhất.



Hình 13

7. Vận dụng phép đối xứng trục để vẽ nhanh bình hoa theo hướng dẫn trong Hình 14.
– Gấp đôi một tờ giấy trắng A4 theo nếp gấp $d$.
– Mở tờ giấy ra, ở một phía của nếp gấp $d$, nhỏ vài giọt màu nước có màu khác nhau làm hoa và một giọt màu đen làm bình hoa.
– Gấp lại tờ giấy theo nếp gấp $d$, chà nhẹ để màu thấm đều sang hai bên.
– Mở tờ giấy ra, ta có một bình hoa đẹp.
Tìm trục đối xứng của hình vừa vẽ.

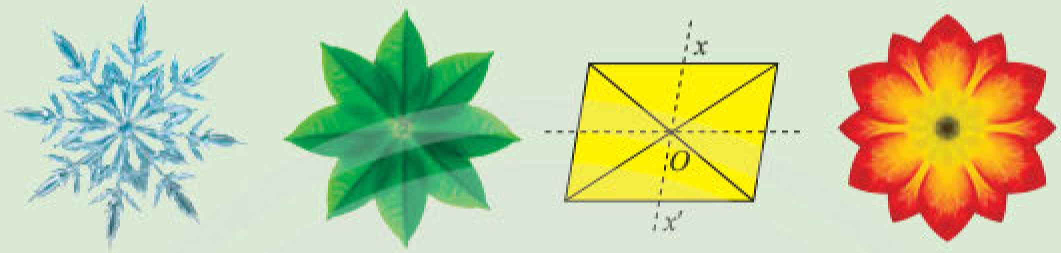


Hình 14

# Bài 4. Phép đối xứng tâm

**Từ khoá:** **Phép đối xứng tâm; Tâm đối xứng; Hình có tâm đối xứng.**

Trong các hình sau, hình nào có tâm đối xứng?
Tồn tại hay không phép biến hình biến mỗi hình phẳng sau đây thành chính nó?



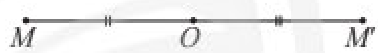

## 1. Định nghĩa

Cho điểm $O$. Gọi $f$ là quy tắc xác định như sau:

a) Với điểm $M$ khác $O$, xác định điểm $M'$ sao cho $O$ là trung điểm của $MM'$ (Hình 1).

b) Với điểm $M$ trùng với $O$ thì $f$ biến điểm $M$ thành chính nó.

Hỏi $f$ có phải là phép biến hình hay không?




*Hình 1*

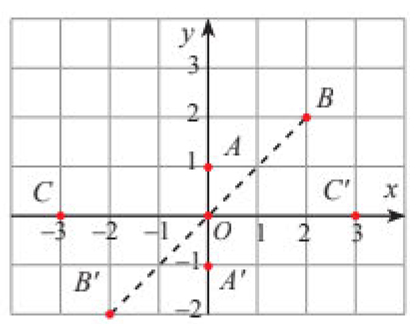
Cho điểm $O$, phép biến hình biến điểm $O$ thành chính nó và biến mỗi điểm $M$ khác $O$ thành điểm $M'$ sao cho $O$ là trung điểm của đoạn $MM'$ được gọi là ***phép đối xứng tâm*** $O$, kí hiệu $Đ_O$. Điểm $O$ gọi là tâm đối xứng.

***Chú ý:*** Nếu $M'$ là ảnh của điểm $M$ qua phép đối xứng tâm $O$ thì ta kí hiệu $M' = Đ_O(M)$.

***Ví dụ 1.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho ba điểm $A(0; 1)$, $B(2; 2)$ và $C(-3; 0)$. Tìm toạ độ các điểm $A' = Đ_O(A)$, $B' = Đ_O(B)$, $C' = Đ_O(C)$.

***Giải***

Vẽ $A'$, $B'$, $C'$ lần lượt đối xứng với $A$, $B$, $C$ qua $O$, ta được $A'(0; -1)$, $B'(-2; -2)$, $C'(3; 0)$ (Hình 2).




*Hình 2*

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho các điểm $I(1; 1)$, $M(2; 2)$, $N(0; -3)$ và $P(-1; -2)$. Tìm toạ độ các điểm $M' = Đ_I(M)$, $N' = Đ_I(N)$, $P' = Đ_I(P)$.

Tìm phép đối xứng tâm biến mỗi hình sau thành chính nó.

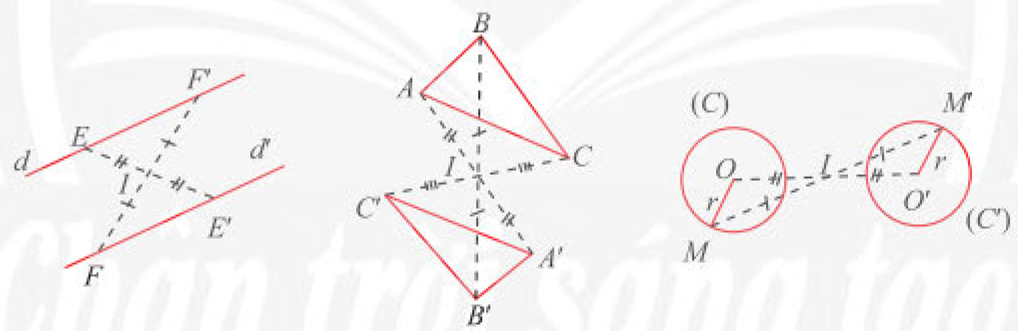
*Hình 3*

## 2. Tính chất

Giả sử $Đ_O$ là phép đối xứng tâm $O$. Lấy hai điểm tuỳ ý $A$, $B$ sao cho ba điểm $O$, $A$, $B$ không thẳng hàng. Gọi $A'$, $B'$ lần lượt là ảnh của $A$, $B$ qua $Đ_O$. So sánh tam giác $OAB$ và tam giác $O'A'B'$ rồi so sánh $A'B'$ và $AB$.

– Phép đối xứng tâm là một phép dời hình.
– Phép đối xứng tâm có đầy đủ các tính chất của phép dời hình.
– Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

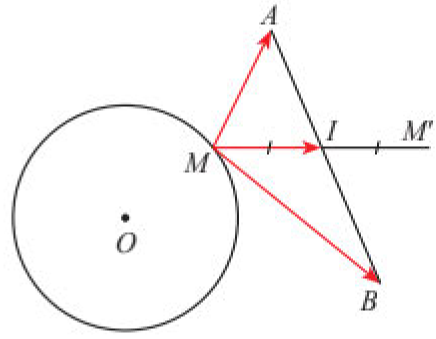
### Cách xác định ảnh của đoạn thẳng, đường thẳng, tam giác, đường tròn qua phép đối xứng tâm




*Hình 4*

| Hình $\mathscr{H}$ | Cách xác định ảnh $\mathscr{H}'$ của $\mathscr{H}$ qua phép đối xứng tâm $I$ |
|---|---|
| Đoạn thẳng $MN$ | Xác định ảnh $M'$, $N'$ của hai đầu mút $M$, $N$. Vẽ đoạn thẳng $M'N'$. |
| Đường thẳng $d$ đi qua $M$ | Xác định ảnh $M'$ của $M$. Vẽ $d'$ đi qua $M'$ và song song hoặc trùng với $d$. |
| Tam giác $ABC$ | Xác định ảnh $A'$, $B'$, $C'$ của ba đỉnh $A$, $B$, $C$. Vẽ tam giác $A'B'C'$. |
| Đường tròn $(C)$ tâm $O$, bán kính $r$ | Xác định ảnh $O'$ của tâm $O$. Vẽ đường tròn tâm $O'$, bán kính $r$. |

***Ví dụ 2.*** Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm $A$, $B$ cố định. Với mỗi điểm $M$ ta xác định điểm $M'$ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng điểm $M'$ di động trên một đường tròn khi $M$ di động trên $(O; R)$.



*Hình 5*

**Giải**

Gọi $I$ là trung điểm của đường thẳng $AB$ ta có $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$. Do đó $I$ là trung điểm $MM'$. Suy ra $Đ_I(M) = M'$. Vậy khi $M$ di động trên $(O; R)$ thì $M'$ di động trên $(O'; R)$ với $O'$ đối xứng với $O$ qua tâm $I$.

***Ví dụ 3.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho hai điểm $A(5; -2)$ và $B(-4; 3)$.

a) Tìm ảnh của điểm $A$ qua $Đ_B$.

b) Tìm ảnh của đường thẳng $d$: $2x - 3y + 6 = 0$ qua $Đ_O$.

c) Tìm ảnh của đường tròn $(C)$: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ qua $Đ_O$.

**Giải**

a) Đặt $A'(x_{A'}; y_{A'}) = Đ_B(A)$. Ta có $B$ là trung điểm của $AA'$, do đó

$$\begin{cases} \dfrac{x_{A'} + x_A}{2} = x_B \\ \dfrac{y_{A'} + y_A}{2} = y_B \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x_{A'} = 2x_B - x_A = -13 \\ y_{A'} = 2y_B - y_A = 8. \end{cases}$$

Vậy $A'(-13; 8)$.

b) Lấy điểm $M(0; 2)$ trên $d$: $2x - 3y + 6 = 0$. Qua $Đ_O$, điểm $M$ có ảnh là $M'(0; -2)$, suy ra ảnh của $d$ là đường thẳng $d'$ đi qua $M'$ song song hoặc trùng với $d$. Vậy $d'$ có phương trình: $2x - 3(y + 2) = 0$ hay $2x - 3y - 6 = 0$.

c) Đường tròn $(C)$: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ có tâm $I(-2; 1)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có $I'(2; -1) = Đ_O(I)$, suy ra ảnh của $(C)$ là đường tròn $(C')$ có tâm $I'(2; -1)$, bán kính $R = 2$. Vậy $(C')$ có phương trình: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

2 Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, tìm ảnh qua $Đ_O$ của

a) điểm $M(3; -4)$;

b) đường thẳng $d$: $x - 3y + 6 = 0$;

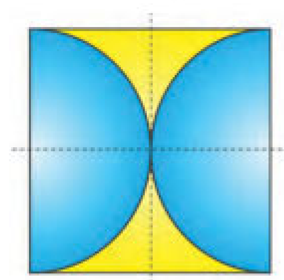
c) đường tròn $(C)$: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

*Hình 6*

2 Trong Hình 6, tìm các số ghi tại điểm đối xứng qua tâm bia với điểm ghi các số 20; 7; 9.

## 3. Tâm đối xứng của một hình

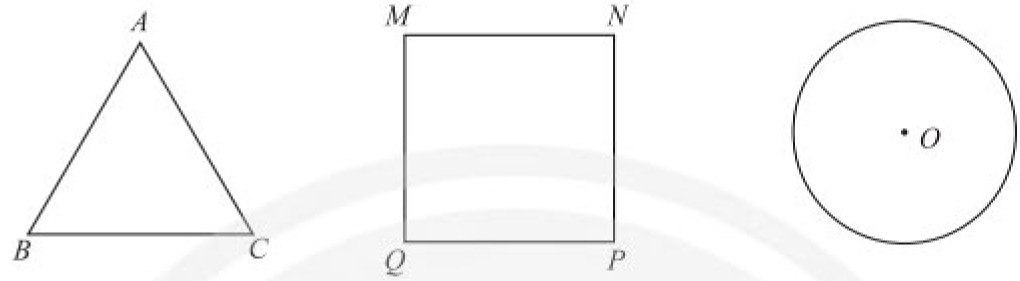
3 Tìm phép đối xứng trục và phép đối xứng tâm biến Hình 7 thành chính nó.


*Hình 7*

**Định nghĩa**

Điểm $O$ được gọi là ***tâm đối xứng*** của hình $\mathscr{H}$ nếu phép đối xứng tâm $O$ biến hình $\mathscr{H}$ thành chính nó, tức là $Đ_O(\mathscr{H}) = \mathscr{H}$.

***Ví dụ 4.*** Trong Hình 8, hình nào có tâm đối xứng? Tìm tâm đối xứng (nếu có).

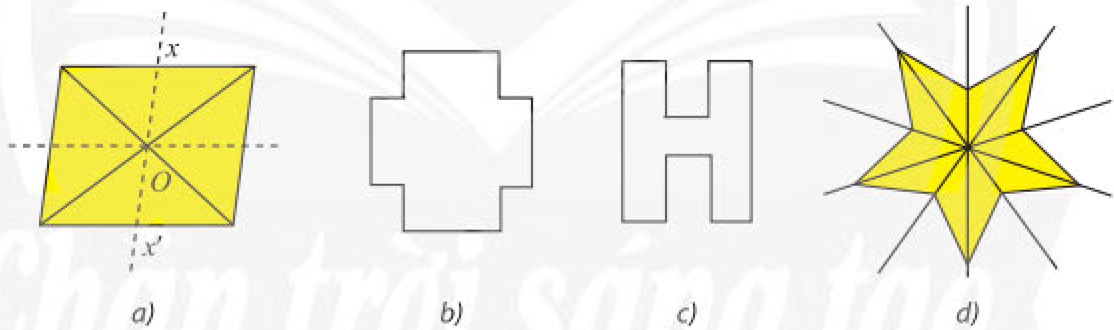



*Hình 8*

***Giải***

– Tam giác $ABC$ không có tâm đối xứng.
– Hình vuông $MNPQ$ nhận giao điểm của hai đường chéo làm tâm đối xứng.
– Đường tròn tâm $O$ bán kính $r$ nhận tâm $O$ là tâm đối xứng.

a) Trong Hình 9, hình nào có tâm đối xứng? Tìm tâm đối xứng (nếu có).




*Hình 9*

b) Nêu tên một hình có vô số tâm đối xứng.

Trong Hình 10, hình nào có tâm đối xứng? (Mỗi chữ cái là một hình.)


*Hình 10*

## BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$ có phương trình:
$(C)$: $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$. Viết phương trình ảnh của $(C)$ qua phép đối xứng tâm $O$.

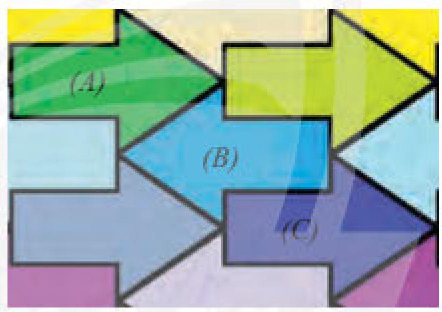
2. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm $I$ không nằm trên đường tròn. Với mỗi điểm $A$ trên $(O; R)$ ta xét hình vuông $ABCD$ có tâm là $I$. Điểm $C$ di động trên đường nào khi $A$ di động trên đường tròn $(O; R)$?

3. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AC$ cố định còn $B$ di động trên $(O; R)$. Hãy cho biết $D$ di động trên đường nào.

4. Trong Hình 11, hình nào có trục đối xứng, hình nào có tâm đối xứng?

*Hình 11*

5. Trong Hình 12, tìm phép đối xứng biến hình mũi tên $(A)$ thành hình mũi tên $(B)$ và tìm phép đối xứng biến hình mũi tên $(B)$ thành hình mũi tên $(C)$.



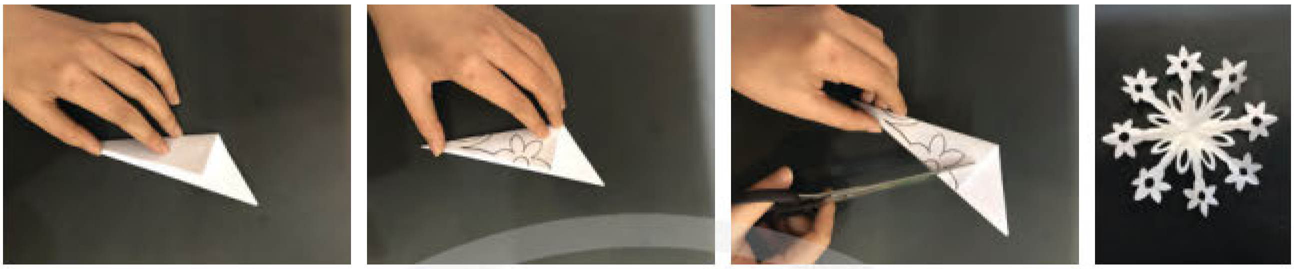

*Hình 12*

6. Nghệ thuật cắt giấy Kirigami của Nhật Bản đã sử dụng rất nhiều phép đối xứng khi cắt để tạo ra các hình đẹp. Hãy tìm trục đối xứng và tâm đối xứng của các hình trong Hình 13.

*Hình 13*

7. Vận dụng phép đối xứng tâm và đối xứng trục để cắt hoa văn trang trí theo hướng dẫn sau:
- Lấy một tờ giấy hình vuông, gấp đôi, gấp tư rồi gấp làm tám (Hình 14a).
- Vẽ hoa và lá trên bề mặt tam giác (Hình 14b).
- Dùng kéo cắt theo đường đã vẽ (Hình 14c).
- Trải phẳng tờ giấy ra để thấy hoa văn trang trí gồm hoa và lá (Hình 14d).

Tìm tâm đối xứng và trục đối xứng của hoa văn vừa làm.



a) b) c) d)

Hình 14

# Bài 5. Phép quay

**Từ khoá:** **Phép quay; Tâm quay; Góc quay.**

Vẽ mỗi hình sau ra một tờ giấy, cắt rời mỗi hình theo hình tròn. Tìm một điểm $O$ trên mỗi hình. Sau đó, ghim hình đã cắt được xuống mặt bàn tại điểm $O$, thử xoay hình một góc $\varphi$ nào đó. Có nhận xét gì về kích thước của hình trước khi xoay và sau khi xoay?

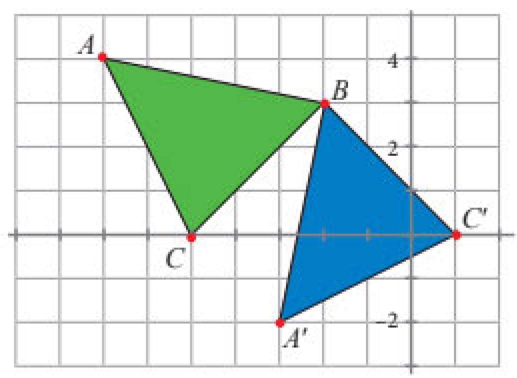
## 1. Định nghĩa

1 a) Tìm phép biến hình biến $\Delta BAC$ thành $\Delta BA'C'$ (Hình 1).

b) Trong mặt phẳng, cho điểm $O$ cố định (Hình 2).

Gọi $f$ là quy tắc ứng với mỗi điểm $M$ trùng $O$ cho ta điểm $O$ và ứng với mỗi điểm $M$ khác $O$ cho ta một điểm $M'$ xác định như sau:

– Dùng compa vẽ đường tròn $(C)$ tâm $O$ bán kính $OM$.

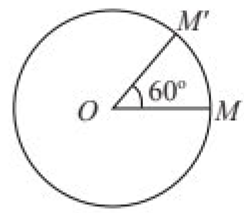



Hình 1

– Trên $(C)$ chọn điểm $M'$ sao cho góc lượng giác $(OM, OM')$ bằng $60^o$.

Quy tắc $f$ có phải là một phép biến hình không?

Hãy vẽ điểm $M'$ theo quy tắc trên nếu thay góc $60^o$ bởi góc $-30^o$.



Hình 2

Trong mặt phẳng, cho điểm $O$ cố định và góc lượng giác $\varphi$ không đổi. Phép biến hình biến điểm $O$ thành điểm $O$ và biến mỗi điểm $M$ khác $O$ thành điểm $M'$ sao cho $OM = OM'$ và góc lượng giác $(OM, OM') = \varphi$ được gọi là ***phép quay tâm O với góc quay*** $\varphi$, kí hiệu $Q_{(O,\varphi)}$. $O$ gọi là tâm quay, $\varphi$ gọi lại góc quay.

***Chú ý:*** Nếu $M'$ là ảnh của điểm $M$ qua phép quay tâm $O$ với góc quay $\varphi$ thì ta kí hiệu $M' = Q_{(O,\varphi)}(M)$.

***Ví dụ 1.*** Xét phép quay $Q_{(O,\pi)}$ biến mỗi điểm $M$ thành điểm $M'$. Khi đó ba điểm $M$, $M'$, $O$ quan hệ với nhau như thế nào?

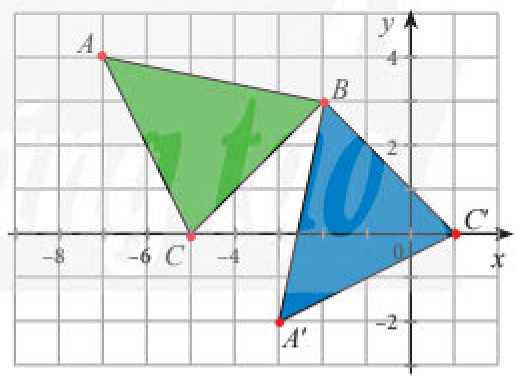
Hình 3

***Giải***

Ta có $Q_{(O,\pi)}$ biến $O$ thành $O$ và biến điểm $M$ khác $O$ thành $M'$ sao cho $OM = OM'$ và $(OM, OM') = \pi$ suy ra $O$ là trung điểm của $MM'$.

Vậy ta có $Q_{(O,\pi)}$ chính là phép đối xứng tâm $O$.

***Ví dụ 2.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho các điểm $A(-7; 4)$, $B(-2; 3)$, $C(-5; 0)$, $A'(-3; -2)$, $C'(1; 0)$. Tìm phép quay biến điểm $A$ thành $A'$ và phép quay biến điểm $C'$ thành $C$ trong Hình 4.



Hình 4

***Giải***

Ta có: $BA = BA' = \sqrt{26}, (BA, BA') = 90^o$.

Vậy phép quay $Q_{(B,\,90^o)}$ biến điểm $A$ thành điểm $A'$.

Ta có: $BC' = BC = 3\sqrt{2}$, $(BC', BC) = -90^o$.

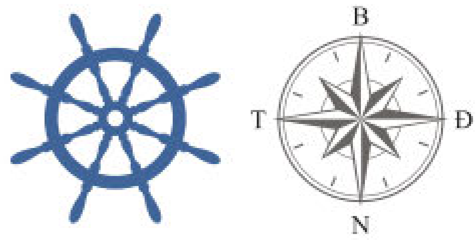
Vậy phép quay $Q_{(B,\,-90^o)}$ biến điểm $C'$ thành điểm $C$.

1 Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, tìm toạ độ của các điểm là ảnh của điểm $M(\sqrt{2};\sqrt{2})$ lần lượt qua các phép quay $Q_{(O,\,45^o)}$, $Q_{(O,\,90^o)}$, $Q_{(O,\,180^o)}$, $Q_{(O,\,360^o)}$.

Một con tàu đang di chuyển theo hướng bắc. Người lái tàu phải thực hiện phép quay nào trên bánh lái để con tàu:

a) rẽ sang hướng tây?

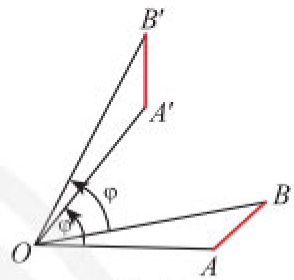
b) rẽ sang hướng đông?




*Hình 5*

## 2. Tính chất

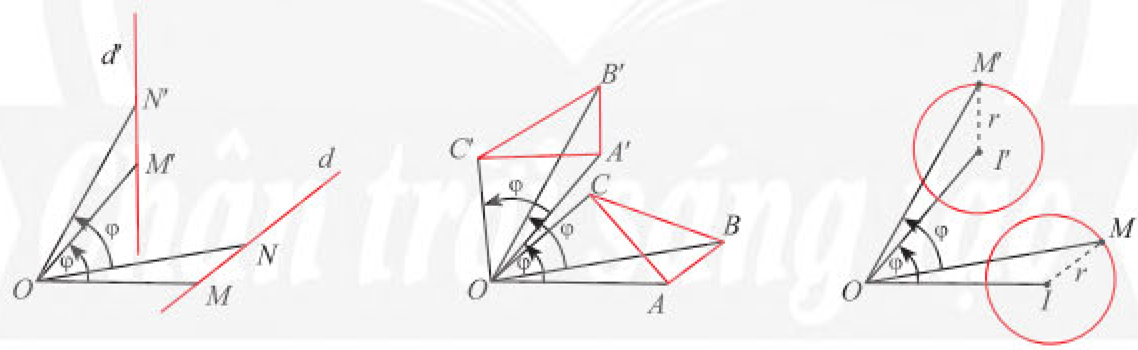
Cho phép quay $Q_{(O,\,\varphi)}$ và hai điểm tuỳ ý $A$, $B$ ($O$, $A$, $B$ không thẳng hàng) như Hình 6. Vẽ $A'$, $B'$ là ảnh của $A$, $B$ qua phép quay. Hai tam giác $OAB$ và $OA'B'$ có bằng nhau không?




*Hình 6*

– Phép quay là một phép dời hình.
– Phép quay có đầy đủ các tính chất của phép dời hình.

### Cách xác định ảnh của đoạn thẳng, đường thẳng, tam giác, đường tròn qua phép quay




*Hình 7*

| Hình $\mathscr{H}$ | Cách xác định ảnh $\mathscr{H}'$ của $\mathscr{H}$ qua phép quay $Q_{(O,\,\varphi)}$ |
|---|---|
| Đoạn thẳng $MN$ | Xác định ảnh $M'$, $N'$ của hai đầu mút $M$, $N$. Vẽ đoạn thẳng $M'N'$. |
| Đường thẳng $d$ đi qua $M$ | Xác định ảnh $M'$ của $M$. Vẽ $d'$ đi qua $M'$ và tạo với $d$ một góc $\varphi$. |
| Tam giác $ABC$ | Xác định ảnh $A'$, $B'$, $C'$ của ba đỉnh $A$, $B$, $C$. Vẽ tam giác $A'B'C'$. |
| Đường tròn $(C)$ tâm $I$, bán kính $r$ | Xác định ảnh $I'$ của tâm $I$. Vẽ đường tròn tâm $I'$, bán kính $r$. |

***Ví dụ 2.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, tìm ảnh của các đường sau đây qua phép quay $Q_{(O,\,90^{\circ})}$.

a) Đường thẳng $d$: $3x + 2y - 6 = 0$;

b) Đường tròn $(C)$: $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$.

***Giải***

a) Xét hai điểm $M(2; 0)$, $N(0; 3)$ trên $d$. Ảnh của $M$ và $N$ qua phép quay $Q_{(O,\,90^{\circ})}$ là hai điểm $M'(0; 2)$ và $N'(-3; 0)$, suy ra ảnh của đường thẳng $d$ là đường thẳng $d'$ đi qua hai điểm $M'$, $N'$. Ta có phương trình của $d'$ là $2x - 3y + 6 = 0$.

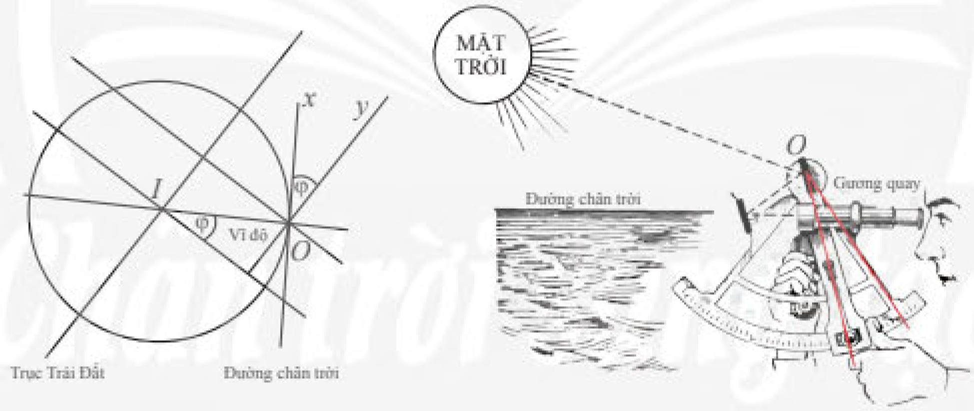
b) Đường tròn $(C)$ có tâm $M(2; 0)$ và bán kính $r = 3$, suy ra ảnh của $(C)$ qua phép quay là đường tròn $(C')$ có tâm $M'(0; 2)$ và có bán kính $r = 3$.

Vậy $(C')$ có phương trình: $x^2 + (y-2)^2 = 9$ hay $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$.

2 Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $a$ và có tâm $I$, tìm ảnh qua phép quay $Q_{(I,\,90^{\circ})}$ của các hình sau:

a) Tam giác $IAB$; b) Đường thẳng $BC$; c) Đường tròn $(B, a)$.

2 Kính lục phân là một dụng cụ quang học sử dụng gương quay để thực hiện phép quay $Q_{(O,\,\varphi)}$ biến tia $Ox$ (song song với đường chân trời) thành tia $Oy$ (song song với trục Trái Đất), nhờ đó đo được góc $\varphi$ giữa trục của Trái Đất và đường chân trời tại vị trí của người đo. Hãy giải thích tại sao góc $\varphi$ của phép quay này lại cho ta vĩ độ tại điểm sử dụng kính.




*Hình 8*

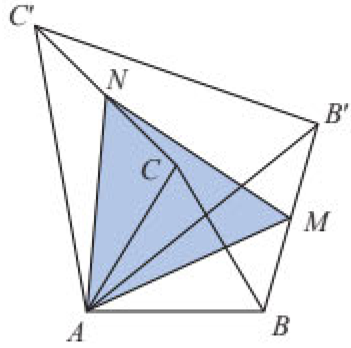
## BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho các điểm $A(-4; 2)$, $B(-4; 5)$ và $C(-1; 3)$.

a) Chứng minh các điểm $A'(2; 4)$, $B'(5; 4)$ và $C'(3; 1)$ theo thứ tự là ảnh của $A$, $B$, $C$ qua phép quay tâm $O$ với góc quay $-90^{\circ}$.

b) Gọi $\Delta A_1B_1C_1$ là ảnh của $\Delta ABC$ qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện phép quay tâm $O$ với góc quay $-90^{\circ}$ và phép đối xứng qua $Ox$. Tìm toạ độ các đỉnh của $\Delta A_1B_1C_1$.

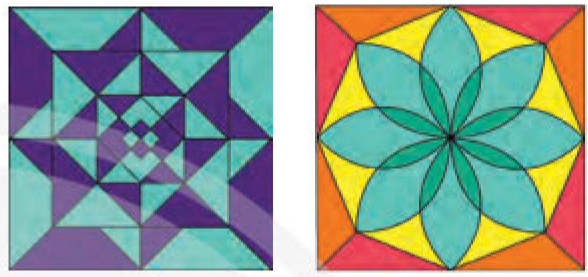
2. Cho hai tam giác đều $ABC$ và $AB'C'$ như Hình 9. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $BB'$ và $CC'$. Chứng minh $\Delta AMN$ đều.



*Hình 9*

3. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi $E$, $F$, $H$, $K$, $L$, $I$, $J$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, $KF$, $HC$, $HL$. Chứng minh hình thang $AEJK$ và hình thang $FLIC$ bằng nhau.

4. Chỉ ra phép quay có thể biến mỗi hình trong Hình 10 thành chính nó.


*a)* *b)*

*Hình 10*

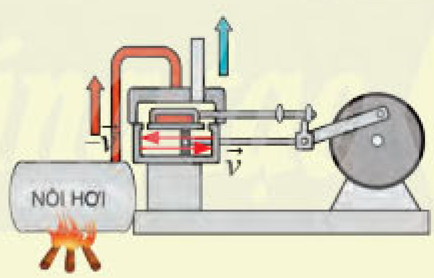
5. Cho hai tam giác vuông cân $OAB$ và $OA'B'$ có chung đỉnh $O$ sao cho $O$ nằm trên đoạn $AB'$ và nằm ngoài đoạn $A'B$. Gọi $G$ và $G'$ lần lượt là trọng tâm của $\Delta OAA'$ và $\Delta OBB'$. Chứng minh rằng $\Delta OGG'$ là tam giác vuông cân.

**Bạn có biết?**

**Phép tịnh tiến và phép quay trong một động cơ**

Động cơ hơi nước là một phát minh vĩ đại của con người vì chúng mở đầu cuộc cách mạng công nghiệp lần thứ nhất. Trong động cơ này có hai phép dời hình được thực hiện:

Ở thì thứ nhất: Pít-tông chuyển động theo phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ có độ dài bằng chiều dài của xi-lanh, nhờ các khớp nối sẽ làm bánh đà chuyển động theo phép quay $Q_{(O,\,180^\circ)}$.



*Hình 11*

Ở thì thứ hai: Pít-tông chuyển động theo phép tịnh tiến $T_{-\vec{v}}$, nhờ khớp nối sẽ làm bánh đà chuyển động theo phép quay $Q_{(O,\,180^\circ)}$. Như vậy sau một chu kì pít-tông đã thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}-\vec{v}=\vec{0}$, đây chính là phép đồng nhất và bánh đà đã thực hiện phép quay $Q_{(O,\,360^\circ)}$, cũng là phép đồng nhất.

Ta thấy khoảng cách giữa các điểm trên pít-tông hoặc trên bánh đà khi thực hiện các phép tịnh tiến hoặc phép quay đều không thay đổi vì chúng là những phép dời hình.

*(Nguồn: https://www.britannica.com/technology/steam-engine)*

# Bài 6. Phép vị tự

**Từ khoá:** Phép vị tự; Tâm vị tự; Tỉ số vị tự.

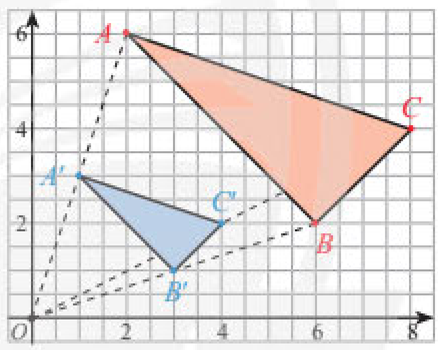
Trong sách báo, tranh ảnh hay trong thực tế có những hình ảnh với hình dạng hoàn toàn giống nhau, chỉ khác nhau về kích thước. Những hình như vậy có liên quan gì về mặt hình học và phép biến hình nào đã tạo ra hình này từ hình kia?

## 1. Định nghĩa

Trong Hình 1, cho biết $A'$, $B'$, $C'$ lần lượt là trung điểm của $OA$, $OB$, $OC$.

a) Xét xem hai tam giác $ABC$ và $A'B'C'$ đồng dạng không?

b) Thảo luận nhóm để tìm xem có phép biến hình nào biến tam giác $ABC$ thành tam giác $A'B'C'$ không?




Hình 1

**Định nghĩa**

Cho điểm $O$ cố định và một số thực $k$, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm $M$ thành điểm $M'$ sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là ***phép vị tự tâm O tỉ số k***, kí hiệu $V_{(O,\,k)}$. $O$ được gọi là ***tâm vị tự***, $k$ được gọi là tỉ số vị tự.

***Chú ý:***

a) Nếu $M'$ là ảnh của điểm $M$ qua phép vị tự tâm $O$, tỉ số $k$ thì ta kí hiệu $M' = V_{(O,\,k)}(M)$.

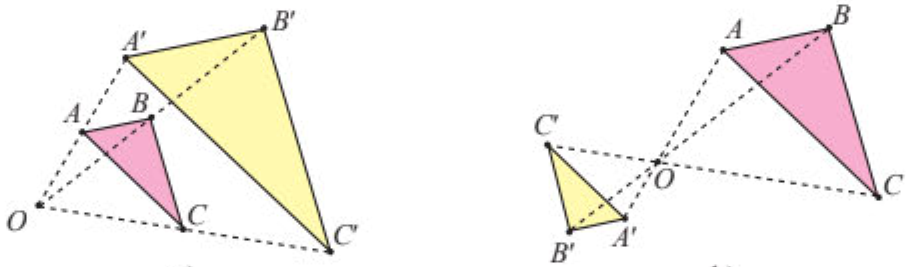
b) $V_{(O,\,k)}(O) = O$.

c) Phép vị tự còn được gọi là phép đồng dạng phối cảnh.

***Ví dụ 1.*** Cho điểm $O$ cố định và tam giác $ABC$. Tìm phép biến hình biến ba điểm $A$, $B$, $C$ thành ba điểm $A'$, $B'$, $C'$ trong hai trường hợp sau:

a) $A$, $B$, $C$ lần lượt là trung điểm của các đoạn $OA'$, $OB'$, $OC'$ (Hình 2a).

b) Trên tia đối của các tia $OA$, $OB$, $OC$ lấy các điểm $A'$, $B'$, $C'$ sao cho $\overrightarrow{OA'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ (Hình 2b).




a) b)

*Hình 2*

**Giải**

a) Ta có $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OC}$.

Vậy phép vị tự $V_{(O,\,2)}$ biến ba điểm $A$, $B$, $C$ thành ba điểm $A'$, $B'$, $C'$.

b) Ta có $\overrightarrow{OA'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

Vậy phép vị tự $V_{\left(O,-\frac{1}{2}\right)}$ biến ba điểm $A$, $B$, $C$ thành ba điểm $A'$, $B'$, $C'$.

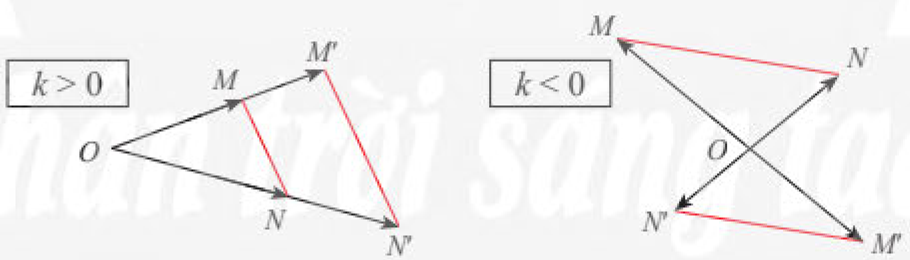
***Lưu ý:***

– Nếu $k > 0$: $M$, $M'$ cùng phía đối với $O$.

– Nếu $k < 0$: $M$, $M'$ khác phía đối với $O$.

– Nếu $k = 1$: phép vị tự là phép đồng nhất.

– Nếu $k = -1$: phép vị tự là phép đối xứng tâm $O$.




*Hình 3*

***Ví dụ 2.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho điểm cố định $I(a;\, b)$ và điểm tuỳ ý $M(x;\, y)$. Tìm toạ độ điểm $M'(x';\, y')$ là ảnh của $M$ qua phép vị tự $V_{(I,\,k)}$.

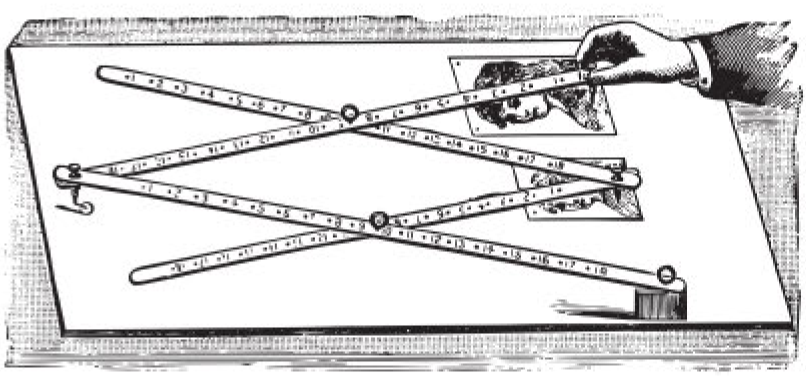
**Giải**

Ta có: $V_{(I,\,k)}(M) = M'$ nên $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ suy ra $\begin{cases} x' - a = k(x-a) \\ y' - b = k(y-b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b. \end{cases}$

Vậy $M'(kx + (1-k)a;\, ky + (1-k)b)$.

**1** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho điểm $M(3;\, 9)$. Tìm toạ độ các điểm $M_1$ và $M_2$ lần lượt là ảnh của $M$ qua các phép vị tự $V_{(O,\,3)}$ và $V_{(O,\,-2)}$.

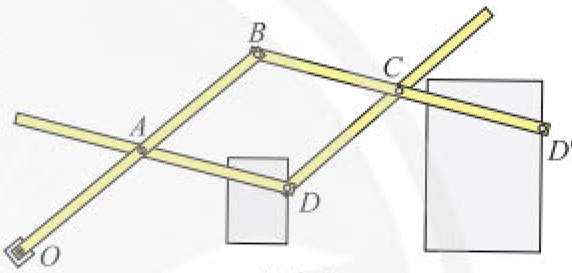
Thước vẽ truyền là một dụng cụ gồm bốn thanh gỗ hoặc kim loại được ghép với nhau nhờ bốn khớp xoay tại các điểm $A, B, C, D$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành và ba điểm $O$, $D$, $D'$ thẳng hàng. Khi sử dụng, người vẽ ghim cố định điểm $O$ xuống mặt giấy (thước vẫn có thể xoay quanh $O$). Đặt hai cây bút tại hai điểm $D$ và $D'$. Khi đầu bút $D$ vẽ hình $\mathscr{H}$, đầu bút $D'$ sẽ tự động vẽ truyền cho ta hình $\mathscr{H}'$ là ảnh của $\mathscr{H}$.



Hình 4

a) Xác định tâm và tỉ số $k$ của phép vị tự được sử dụng trong cây thước vẽ truyền ở Hình 5.

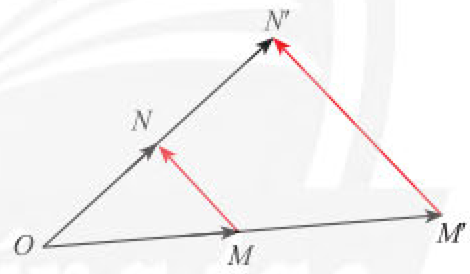
b) Nếu ngược lại cho đầu bút $D'$ vẽ hình $\mathscr{H}'$ khi đó đầu bút $D$ sẽ tự động vẽ truyền cho ta hình $\mathscr{H}$ là ảnh của $\mathscr{H}'$. Xác định phép vị tự trong trường hợp này.




Hình 5

## 2. Tính chất

Gọi $M'$ và $N'$ lần lượt là ảnh của $M$ và $N$ qua phép vị tự $V_{(O,\,k)}$. Từ các hệ thức: $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'}$. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{M'N'}$ theo vectơ $\overrightarrow{MN}$.




Hình 6

**Tính chất 1**

Nếu phép vị tự tỉ số $k$ biến hai điểm $M$ và $N$ lần lượt thành hai điểm $M'$ và $N'$ thì:

$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.

***Ví dụ 3.*** Cho phép vị tự $V_{(O,\,2)}$ biến ba điểm $A$, $B$, $C$ không thẳng hàng theo thứ tự thành ba điểm $A'$, $B'$, $C'$.

a) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

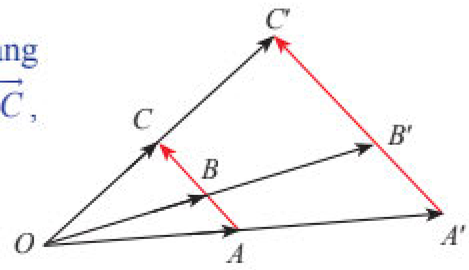
b) Tính diện tích $S'$ của tam giác $A'B'C'$ theo diện tích $S$ của tam giác $ABC$.

***Giải***

a) Áp dụng tính chất 1, ta có $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$.

b) Cũng theo tính chất 1, ta có $A'B' = 2AB$, $B'C' = 2BC$, $C'A' = 2CA$, suy ra tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác $ABC$ (tỉ số đồng dạng là 2), suy ra $S' = 4S$.

Gọi $A'$, $B'$ và $C'$ lần lượt là ảnh của ba điểm thẳng hàng $A$, $B$, $C$ qua phép vị tự $V_{(O,\,k)}$. Cho biết $\overrightarrow{BA} = m\overrightarrow{BC}$, hai vectơ $\overrightarrow{B'A'}$ và $m\overrightarrow{B'C'}$ có bằng nhau không?



Hình 7

**Tính chất 2**

Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.

**Hệ quả**

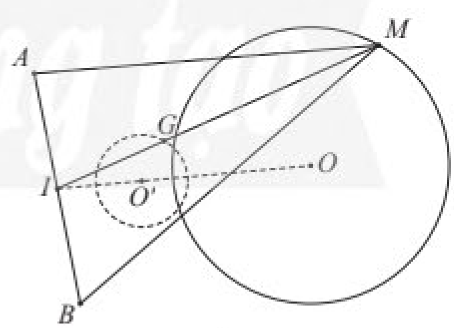
Phép vị tự tỉ số $k$ biến đường thẳng thành đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng đó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$, biến đường tròn bán kính $r$ thành đường tròn bán kính $r' = |k|\,r$.

***Chú ý:*** Qua phép $V_{(O,\,k)}$ đường thẳng $d$ biến thành chính nó khi và chỉ khi đường thẳng $d$ đi qua tâm vị tự $O$.

***Ví dụ 4.*** Cho hai điểm cố định $A$, $B$ và đường tròn $(O; R)$ cố định và không có điểm chung với đường thẳng $AB$. Hãy chứng minh khi cho điểm $M$ chạy trên đường tròn $(O; R)$ thì trọng tâm $G$ của tam giác $MAB$ chạy trên một đường tròn cố định.

***Giải***

Gọi $I$ là trung điểm của $AB$. Theo tính chất trọng tâm của tam giác, ta có: $\overrightarrow{IM} = 3\overrightarrow{IG}$, suy ra $G$ là ảnh của $M$ qua phép vị tự $V_{\left(I,\frac{1}{3}\right)}$. Vậy khi $M$ chạy trên đường tròn $(O; R)$ thì trọng tâm $G$ của tam giác $MAB$ chạy trên đường tròn cố định $\left(O'; \dfrac{R}{3}\right)$ là ảnh của đường tròn $(O; R)$ qua $V_{\left(I,\frac{1}{3}\right)}$.



Hình 8

Cho tam giác $ABC$ có $G$, $H$, $O$ lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi $A'$, $B'$, $C'$ lần lượt là trung điểm các cạnh $BC$, $CA$, $AB$.

a) Tìm phép vị tự biến tam giác $ABC$ thành tam giác $A'B'C'$.

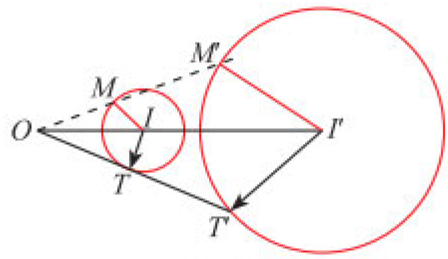
b) Chứng minh ba điểm $H$, $G$, $O$ thẳng hàng.

### Cách xác định ảnh của đoạn thẳng, đường thẳng, tam giác, đường tròn qua phép vị tự

Cho phép vị tự $V_{(O,\ k)}$ và đường tròn $(C)$ tâm $I$ bán kính $r$. Xét điểm $M$ thuộc $(C)$, gọi $I'$ và $M'$ là ảnh của $I$ và $M$ qua phép vị tự $V_{(O,\ k)}$.

a) Tính $I'M'$ theo $r$ và $k$.

b) Khi cho điểm $M$ chạy trên đường tròn $(C)$ thì $M'$ chạy trên đường nào?




*Hình 9*

| **Hình $\mathscr{H}$** | **Cách xác định ảnh $\mathscr{H}'$ của $\mathscr{H}$ qua phép vị tự $V_{(O,\ k)}$** |
|---|---|
| Đoạn thẳng $MN$ | Xác định ảnh $M'$, $N'$ của hai đầu mút $M$, $N$. Vẽ đoạn thẳng $M'N'$. |
| Đường thẳng $d$ đi qua $M$ | Xác định ảnh $M'$ của $M$. Vẽ $d'$ đi qua $M'$ và song song hoặc trùng với $d$. |
| Tam giác $ABC$ | Xác định ảnh $A'$, $B'$, $C'$ của ba đỉnh $A$, $B$, $C$. Vẽ tam giác $A'B'C'$. |
| Đường tròn $(C)$ tâm $I$, bán kính $r$ | Xác định ảnh $I'$ của tâm $I$. Vẽ đường tròn tâm $I'$, bán kính $r' = \lvert k \rvert\, r$. |

***Ví dụ 5.*** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho điểm $A(1;\ 2)$. Viết phương trình của các đường là ảnh qua phép vị tự $V_{(A,\ 2)}$ của:

a) đường thẳng $d$: $x + 5y - 3 = 0$;  b) đường tròn $(C)$: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$.

***Giải***

a) Xét điểm $M(3;\ 0)$ thuộc $d$. Gọi $M'(x';\ y')$ là ảnh của $M$ qua $V_{(A,\ 2)}$, ta có:

$$\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \begin{cases} x' - 1 = 2(3-1) \\ y' - 2 = 2(0-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 5 \\ y' = -2 \end{cases} \Rightarrow M'(5;\ -2).$$

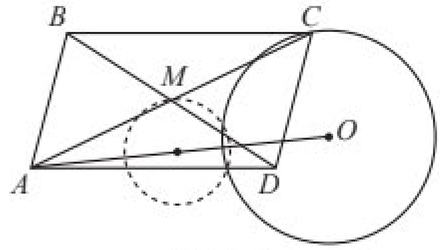
Ảnh của $d$ qua $V_{(A,\ 2)}$ là đường thẳng $d'$ đi qua $M'$ và cùng phương với $d$, suy ra $d'$ có phương trình: $(x-5) + 5(y+2) = 0$ hay $x + 5y + 5 = 0$.

b) Đường tròn $(C)$: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ có tâm $I(3;\ 4)$ và có bán kính $r = 1$. Gọi $I'(x';\ y')$ là ảnh của tâm $I$ qua $V_{(A,\ 2)}$. Ta có:

$$\overrightarrow{AI'} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow \begin{cases} x' - 1 = 2(3-1) \\ y' - 2 = 2(4-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 5 \\ y' = 6 \end{cases} \Rightarrow I'(5;\ 6).$$

Ảnh của đường tròn $(C)$ tâm $I$ bán kính $r = 1$ qua $V_{(A,\ 2)}$ là đường tròn $(C')$ tâm $I'(5;\ 6)$ bán kính $r' = 2r = 2$, suy ra $(C')$ có phương trình: $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 4$.

***Ví dụ 6.*** Cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $A$ cố định còn đỉnh $C$ nằm trên đường tròn $(O, R)$ cố định. Khi $C$ thay đổi trên $(O, R)$ thì giao điểm $M$ của hai đường chéo $AC$ và $BD$ thay đổi như thế nào?

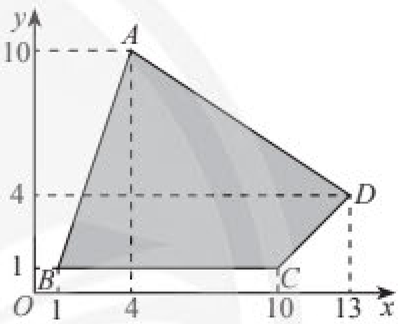


*Hình 10*

***Giải***

Giao điểm $M$ của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$ là trung điểm của $AC$. Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, suy ra $M$ là ảnh của $C$ qua phép vị tự $V_{(A, \frac{1}{2})}$. Vậy khi $C$ chạy trên đường tròn $(O; R)$ thì $M$ chạy trên đường tròn cố định $(O'; \frac{R}{2})$ là ảnh của đường tròn $(O; R)$ qua $V_{(A, \frac{1}{2})}$.

3 Vẽ Hình 11 ra giấy kẻ ô li và tìm ảnh của tứ giác $ABCD$ qua phép vị tự $V_{\left(O, -\frac{1}{2}\right)}$.



*Hình 11*

## BÀI TẬP

**1.** Các phép biến hình sau có phải là phép vị tự không: phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép đồng nhất, phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$?

**2.** Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Phép vị tự luôn có điểm bất động.

b) Phép vị tự không thể có quá một điểm bất động.

c) Nếu phép vị tự có hai điểm bất động phân biệt thì mọi điểm đều bất động.

**3.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$ có phương trình:

$(C)$: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$.

Viết phương trình ảnh của $(C)$

a) qua phép vị tự tâm $O$, tỉ số $k = 2$;

b) qua phép vị tự tâm $I(1; 1)$, tỉ số $k = -2$.

4. Hãy xác định phép vị tự biến đường tròn $(O; R)$ thành đường tròn $(O'; R')$ $(R \neq R')$ trong các trường hợp sau:

a) Hai đường tròn cắt nhau.

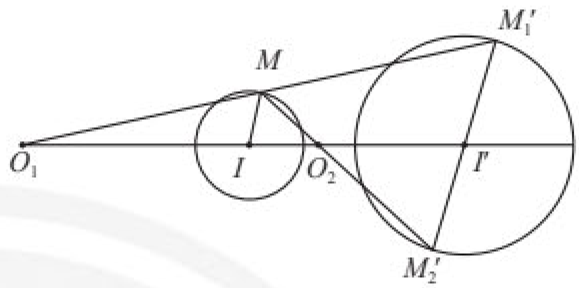
b) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

c) Hai đường tròn tiếp xúc trong.

d) Hai đường tròn đựng nhau.

e) Hai đường tròn ở ngoài nhau.

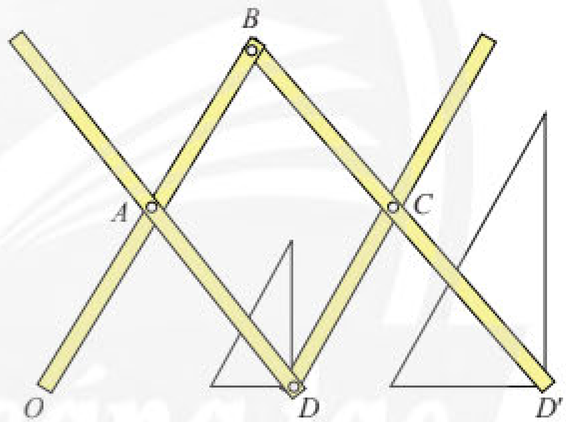
5. Cho hai đường tròn $(I; R)$ và $(I'; R')$ (Hình 12) có tâm phân biệt và bán kính khác nhau. Hãy chứng minh có hai phép vị tự biến đường tròn $(I; R)$ thành đường tròn $(I'; R')$.




*Hình 12*

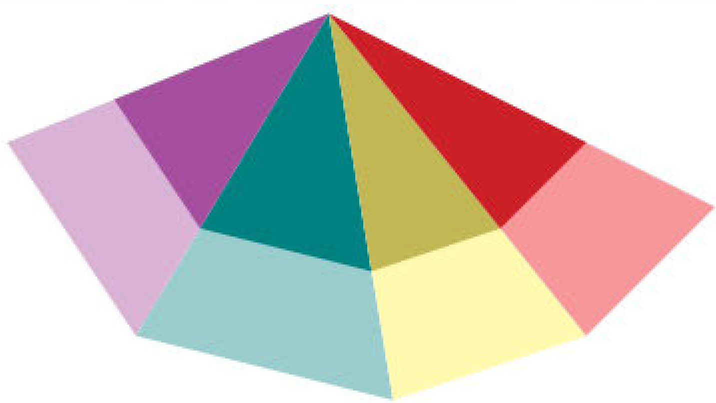
6. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là $AB$ và $CD$ với $CD = \frac{1}{2}AB$. Gọi $I$ là giao điểm của hai đường chéo $AC$ và $BD$. Tìm phép vị tự biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{CD}$.

7. Tìm các tỉ số vị tự của phép biến hình được thực hiện trên cây thước vẽ truyền trong Hình 13.




*Hình 13*

8. Trong Hình 14, tìm phép vị tự được dùng để biến 4 tam giác nhỏ thành 4 tam giác lớn.



*Hình 14*

## Bạn có biết?

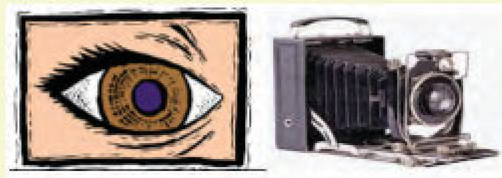
**Máy ảnh, mắt và phép vị tự**

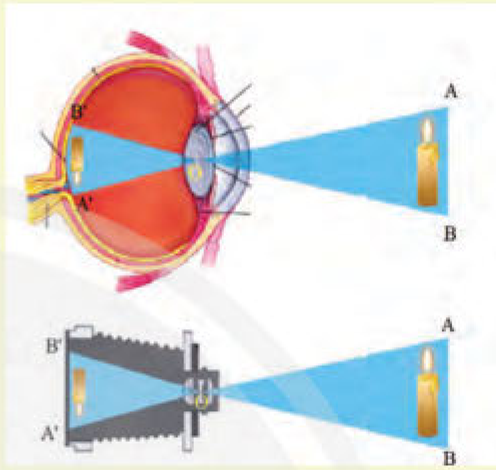
Máy ảnh và mắt của chúng ta cũng tạo ảnh theo phép vị tự.

Đối với máy ảnh: tâm $O$ của thấu kính là tâm vị tự, ảnh $A'$ và $B'$ của $A$, $B$ được ghi trên phim, tỉ số vị tự $k = -\dfrac{OA'}{OA}$ được hệ thống cơ điện điều chỉnh bằng cách thay đổi khoảng cách giữa thấu kính và phim.

Đối với mắt cũng tượng tự: tâm $O$ của thủy tinh thể là tâm vị tự, ảnh $A'$ và $B'$ của $A$, $B$ được ghi trên võng mạc và được các dây thần kinh thị giác truyền lên não, tỉ số vị tự $k = -\dfrac{OA'}{OA}$ được các cơ của mắt điều chỉnh bằng cách thay đổi khoảng cách giữa con ngươi và võng mạc.

Như vậy có thể nói mỗi ngày khi thức dậy, mở mắt ra là chúng ta đã sử dụng phép vị tự rồi phải không các bạn.



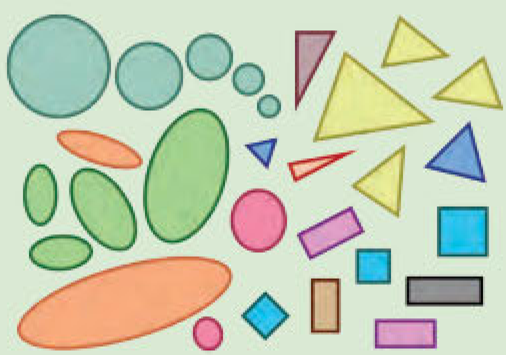



*(Nguồn: https://www.britannica.com/science/human-eye)*

# Bài 7. Phép đồng dạng

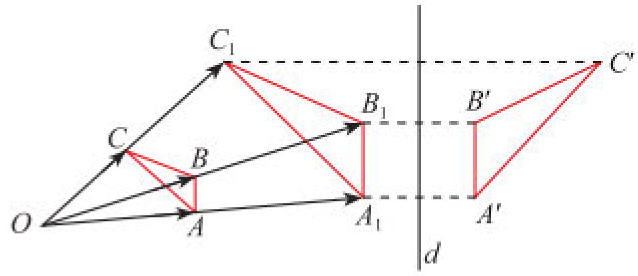
**Từ khoá:** Phép đồng dạng; Tỉ số đồng dạng; Hai hình đồng dạng.

Trong hình bên dưới, tìm các cặp hình có hình dạng giống nhau. Loại phép biến hình nào có thể biến hình này thành hình kia trong mỗi cặp?



# 1. Định nghĩa

Trong Hình 1, tìm hai phép biến hình để biến tam giác $ABC$ thành tam giác $A'B'C'$.




*Hình 1*

Phép biến hình $f$ gọi là ***phép đồng dạng tỉ số k*** ($k > 0$) nếu với hai điểm bất kì $M$, $N$ có ảnh lần lượt là $M'$, $N'$ ta có: $M'N' = kMN$.

***Nhận xét:***

– Phép dời hình là phép đồng dạng với tỉ số $k = 1$.

– Phép vị tự tỉ số $k$ là phép đồng dạng với tỉ số $|k|$.

– Nếu thực hiện liên tiếp phép đồng dạng tỉ số $k$ và phép đồng dạng tỉ số $p$ thì ta được phép đồng dạng tỉ số $kp$.

***Ví dụ 1.*** Cho điểm $O$ cố định trong mặt phẳng. Gọi $f$ là phép biến hình biến điểm $M$ thành $M'$ thoả mãn $M_1 = Q_{(O,\,90^\circ)}(M)$; $M' = V_{\left(O,\,\frac{1}{2}\right)}(M_1)$. Chứng minh $f$ là một phép đồng dạng.

***Giải***

Xét hai điểm bất kì $M$, $N$ có ảnh qua $f$ lần lượt là $M'$, $N'$ ta có:

$$M' = V_{\left(O,\,\frac{1}{2}\right)}(M_1),\ M_1 = Q_{(O,\,90^\circ)}(M);\ N' = V_{\left(O,\,\frac{1}{2}\right)}(N_1),\ N_1 = Q_{(O,\,90^\circ)}(N).$$

Do đó: $M'N' = V_{\left(O,\,\frac{1}{2}\right)}(M_1N_1) \Rightarrow M'N' = \dfrac{1}{2}\,.\,M_1N_1$;

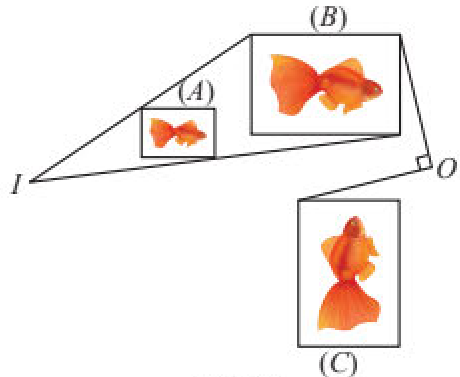
$M_1N_1 = Q_{(O,\,90^\circ)}(MN) \Rightarrow MN = M_1N_1$.

Suy ra $M'N' = \dfrac{1}{2}MN$. Vậy $f$ là phép đồng dạng tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$.

***Chú ý:*** Nếu thực hiện liên tiếp một phép dời hình và một phép vị tự ta được một phép đồng dạng.

Cho trước ba số thực $a$, $b$, $k$. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, xét phép biến hình $g$ biến điểm $M(x;\,y)$ thành điểm $M'(x';\,y')$ thoả mãn: $\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases}$. Hãy chứng minh $g$ là một phép đồng dạng.

**1** Tìm phép đồng dạng biến hình $(A)$ thành hình $(C)$.



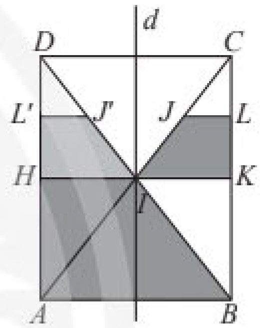

*Hình 2*

## 2. Hai hình đồng dạng

Hai hình gọi là ***đồng dạng với nhau*** nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

***Chú ý:*** Đối với các tam giác, định nghĩa trên phù hợp với khái niệm hai tam giác đồng dạng đã học ở lớp 8.

***Ví dụ 2.*** Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AC$ cắt $BD$ tại $I$. Gọi $H$, $K$, $L$, $J$ lần lượt là trung điểm của $AD$, $BC$, $KC$, $IC$. Chứng minh hai hình thang $JLKI$ và $IHAB$ đồng dạng với nhau.




*Hình 3*

***Giải***

– Gọi $d$ là đường trung trực của $HK$, qua phép đối xứng trục $d$ thì hình thang $JLKI$ có ảnh là hình thang $J'L'HI$ ($J'$, $L'$ lần lượt là trung điểm của $ID$, $HD$).

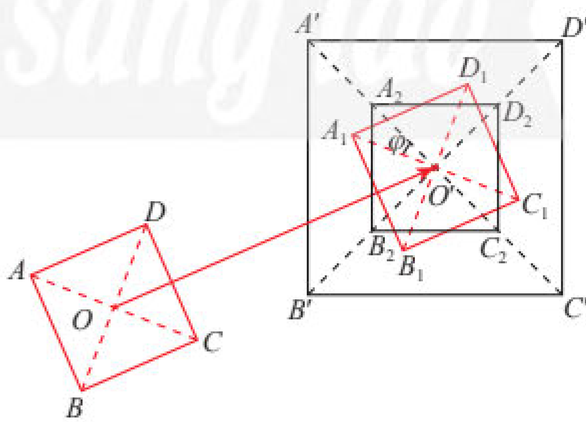
– Qua phép vị tự tâm $D$ tỉ số 2 thì $J'L'HI$ sẽ có ảnh là hình thang $IHAB$.

Do đó phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng trục $d$ và phép vị tự tâm $D$ tỉ số 2 sẽ biến hình thang $JLKI$ thành hình thang $IHAB$. Vậy hai hình thang $JLHI$ và $IHAB$ đồng dạng với nhau.

**2** Cho hai hình vuông tuỳ ý $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có giao điểm hai đường chéo lần lượt là $O$ và $O'$ (Hình 4).

a) Gọi $A_1B_1C_1D_1$ là ảnh của hình vuông $ABCD$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$. Gọi $\varphi$ là góc lượng giác $(O'A_1, O'A')$. Tìm ảnh $A_2B_2C_2D_2$ của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ qua phép quay $Q_{(O', \varphi)}$.

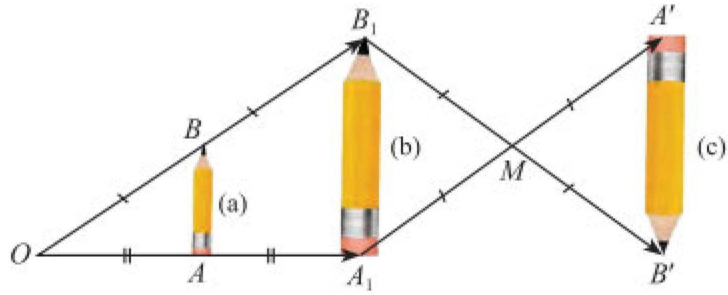
b) Cho biết $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA_2}$. Tìm ảnh của hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ qua phép vị tự $V_{(O, k)}$.




*Hình 4*

c) Từ kết quả của câu a) và b), hãy cho biết ta có thể kết luận là hai hình vuông tuỳ ý luôn đồng dạng với nhau được không. Giải thích.

2 Tìm các cặp hình đồng dạng với nhau có trong Hình 5.




*Hình 5*

## BÀI TẬP

1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AC$ cắt $BD$ tại $I$. Gọi $H$, $K$, $L$ và $J$ lần lượt là trung điểm của $AD$, $BC$, $KC$ và $IC$. Chứng minh hình thang $JLKI$ và hình thang $IHDC$ đồng dạng với nhau.

2. Cho $\Delta ABC$ đều có cạnh bằng 2. Qua ba phép biến hình liên tiếp: Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BC}}$, phép quay $Q_{(B,\,60^\circ)}$, phép vị tự $V_{(A,\,3)}$, $\Delta ABC$ biến thành $\Delta A_1B_1C_1$ .Tìm diện tích $\Delta A_1B_1C_1$.

3. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường tròn $(C)$ tâm $O$ bán kính $R = 9$ và cho điểm $A$ khác $O$. Gọi $(C')$ là ảnh của $(C)$ qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OA}$ và phép vị tự $V_{\left(O;-\frac{1}{3}\right)}$. Tìm diện tích hình tròn $(C')$.

4. Tìm các hình đồng dạng với nhau trong Hình 6.

*Hình 6*

# BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 1

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**Chọn phương án đúng.**

1. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho điểm $M(2; 5)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1; 2)$ biến $A$ thành điểm có toạ độ là

A. (3; 1). B. (1; 6). C. (3; 7). D. (4; 7).

2. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, qua phép đối xứng trục $Oy$, điểm $A(3; 5)$ biến thành điểm nào trong các điểm sau?

A. (3; 5). B. (–3; 5). C. (3; –5). D. (–3; –5).

3. Cho ba đường tròn có bán kính bằng nhau và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau tạo thành hình $\mathscr{H}$. Hỏi $\mathscr{H}$ có mấy trục đối xứng?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

4. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường thẳng $d$: $x = 2$. Trong các đường thẳng sau đường thẳng nào là ảnh của $d$ qua phép đối xứng tâm $O$?

A. $x = 2$. B. $y = 2$. C. $x = -2$. D. $y = -2$.

5. Hình gồm hai đường tròn phân biệt có cùng bán kính có bao nhiêu tâm đối xứng?

A. Không có. B. Một. C. Hai. D. Vô số.

6. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho điểm $M(1; 1)$. Hỏi các điểm sau điểm nào là ảnh của $M$ qua phép quay tâm $O$ với góc quay $45^o$?

A. $M'(1; 1)$. B. $M'(1; 0)$. C. $M'(\sqrt{2}; 0)$. D. $M'(0; \sqrt{2})$.

7. Cho tam giác đều tâm $O$. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm $O$ với góc quay $\alpha$, $0 < \alpha \leq 2\pi$, biến tam giác trên thành chính nó?

A. Một. B. Hai. C. Ba. D. Bốn.

8. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho điểm $M(-2; 4)$. Phép vị tự tâm $O$ tỉ số $k = -2$ biến điểm $M$ thành điểm nào trong các điểm sau?

A. (–3; 4). B. (–4; –8). C. (4; –8). D. (4; 8).

## BÀI TẬP TỰ LUẬN

9. Cho tam giác $ABC$. Vẽ về phía ngoài của tam giác các hình vuông $ABEF$, $ACMN$. Chứng minh $MB$ bằng và vuông góc với $AI$.

10. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm $I$ cố định khác $O$. Vẽ điểm $M$ tuỳ ý trên $(O)$. Tia phân giác của góc $MOI$ cắt $IM$ tại $N$. Điểm $N$ di động trên đường nào khi $M$ di động trên $(O)$?

11. Cho điểm $A$ chạy trên nửa đường tròn đường kính $BC$ cố định. Vẽ về phía ngoài tam giác $ABC$ hình vuông $ABEF$. Chứng minh rằng điểm $E$ chạy trên một nửa đường tròn cố định.

12. Cho đường thẳng $d$: $x + y + 2 = 0$, đường tròn $(C)$: $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$.

a) Tìm ảnh của $d$ qua phép đối xứng trục $Ox$.

b) Tìm ảnh của $(C)$ qua phép đối xứng trục $Oy$.

13. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho đường thẳng $d$: $x + 6y - 5 = 0$.

a) Tìm ảnh của đường thẳng $d$ qua phép đối xứng tâm $O$.

b) Tìm ảnh của đường thẳng $d$ qua phép đối xứng tâm $M(4; 6)$.

14. Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, cho $M(3; 2)$, $N(2; 0)$.

a) Tìm ảnh của các điểm $M$, $N$ qua phép vị tự tâm $I(-1; -1)$ tỉ số $k = -2$.

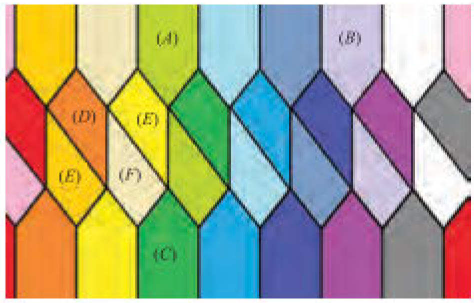
b) Tìm ảnh của các điểm $M$, $N$ qua phép vị tự tâm $O$ tỉ số $k = 3$.

15. Cho Hình 1.

a) Tìm phép biến hình $f$ biến hình $(A)$ thành hình $(B)$.

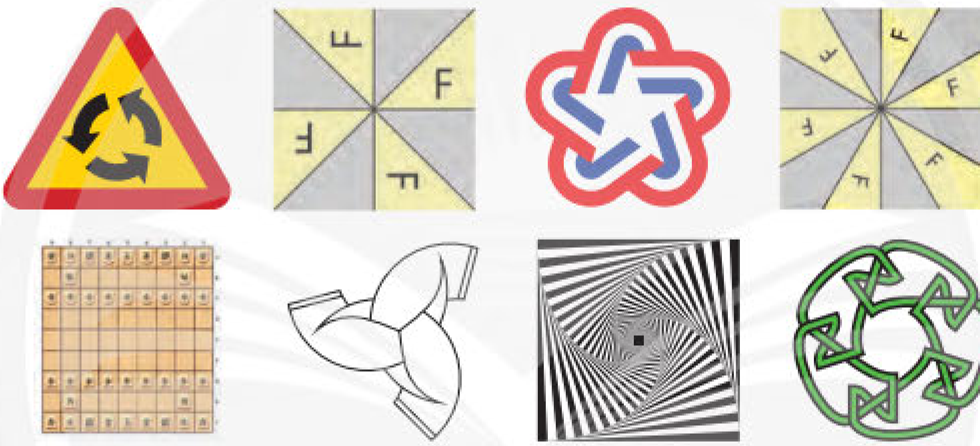
b) Tìm phép biến hình $g$ biến hình $(A)$ thành hình $(C)$.

c) Tìm các phép biến hình biến hình $(D)$ thành lần lượt các hình $(E)$, $(F)$, $(G)$.



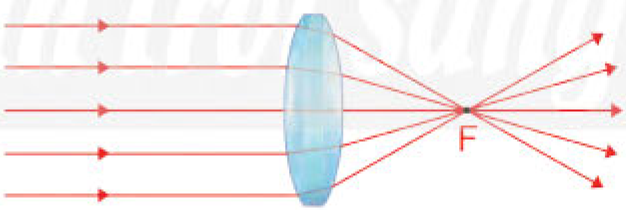

*Hình 1*

16. Điểm $O$ được gọi là tâm đối xứng quay bậc $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) của hình $\mathscr{H}$ nếu sau khi thực hiện phép quay $Q_{\left(O, \frac{360^\circ}{n}\right)}$ ta lại được chính $\mathscr{H}$. Hình có tâm đối xứng quay bậc $n$ gọi là hình đối xứng quay bậc $n$. Tìm các hình đối xứng quay trong các hình sau.

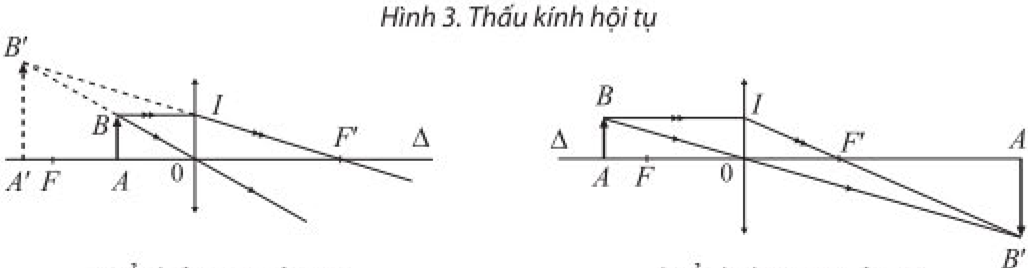


*Hình 2*

17. Thấu kính hội tụ có thể cho ảnh thật hoặc ảnh ảo $A'B'$ của vật $AB$. Tìm phép vị tự biến $AB$ thành $A'B'$ trong Hình 3 và Hình 4.




*Hình 3. Thấu kính hội tụ*




*a) Ảnh ảo A'B' của AB*

*b) Ảnh thật A'B' của AB*

*Hình 4*

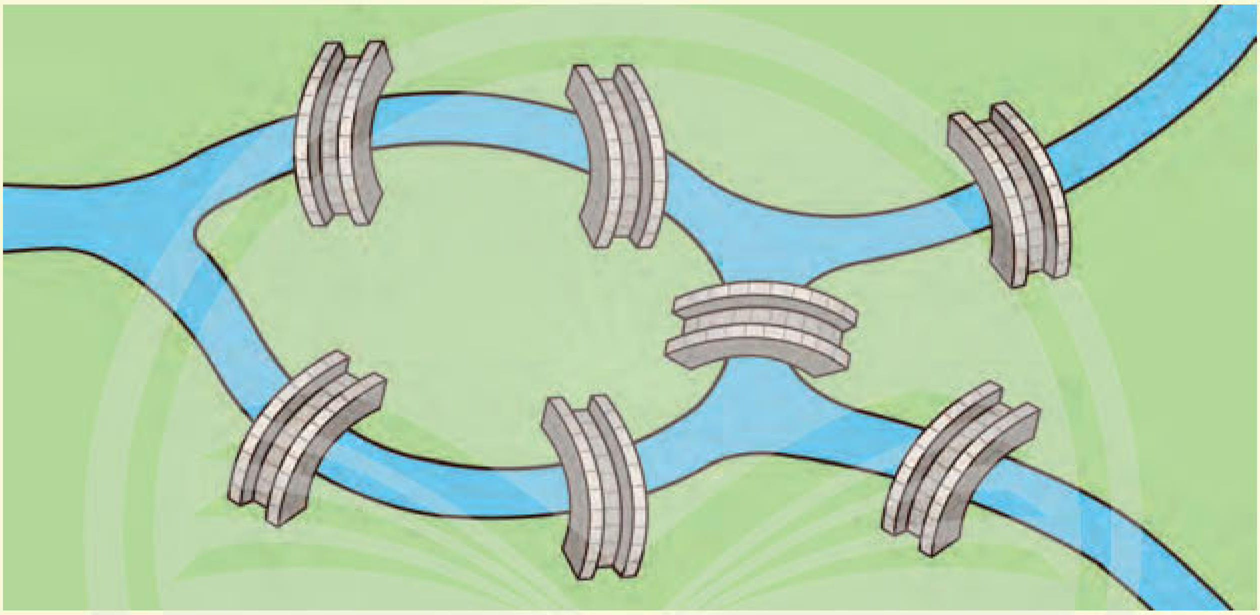
18. Cho tam giác $ABC$ có góc $B$, góc $C$ đều là góc nhọn. Nêu cách vẽ hình chữ nhật $DEFG$ có đỉnh $D$, đỉnh $E$ thuộc cạnh $BC$, đỉnh $F$, đỉnh $G$ thuộc cạnh $AC$, $AB$ và có $EF = 2DE$.

# *Chuyên đề 2*

# LÍ THUYẾT ĐỒ THỊ

**Đồ thị là công cụ phổ biến và hiệu quả để mô tả nhiều đối tượng khác nhau trong khoa học và đời sống hằng ngày. Chúng cũng được sử dụng để giải nhiều bài toán trong các lĩnh vực khác nhau.**

**Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu một số khái niệm cơ bản của lí thuyết đồ thị, bước đầu làm quen với việc ứng dụng chúng vào giải quyết vấn đề trong một số tình huống đơn giản.**



**Có thể đi qua tất cả các cây cầu, mỗi cây cầu qua đúng một lần, rồi quay trở về điểm xuất phát?**



Sau chuyên đề này, bạn có thể:

– Nhận biết khái niệm đồ thị và một số khái niệm cơ bản liên quan.

– Nhận biết đường đi Euler, đường đi Hamilton trong đồ thị.

– Tìm đường đi ngắn nhất theo thuật toán trong những trường hợp đơn giản.

– Vận dụng kiến thức về đồ thị để giải quyết vấn đề liên quan đến xác định đường đi, đường đi ngắn nhất.

# Bài 1. Đồ thị

**Từ khoá:** Đồ thị; Đỉnh; Cạnh; Kề nhau; Kề với; Đỉnh cô lập; Bậc.

Bảng 1 cho biết các đường bay (hai chiều) giữa sáu thành phố $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ và $F$ (dấu ✓ biểu thị có đường bay, dấu × biểu thị không có đường bay) của hãng hàng không X. Nếu dùng điểm để biểu thị thành phố, đoạn đường cong hoặc đường thẳng để biểu thị đường bay giữa các thành phố thì ta được sơ đồ như Hình 1.

*Bảng 1*

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | | ✓ | × | ✓ | ✓ | ✓ |
| $B$ | | | ✓ | ✓ | × | ✓ |
| $C$ | | | | ✓ | ✓ | × |
| $D$ | | | | | × | ✓ |
| $E$ | | | | | | ✓ |
| $F$ | | | | | | |


Hình 1

Có người thắc mắc: "Từ thành phố $A$, có thể đến thăm năm thành phố $B$, $C$, $D$, $E$ và $F$ bằng các chuyến bay của hãng X sao cho mỗi thành phố chỉ qua đúng một lần, rồi quay trở về $A$ không?".

Để giải đáp thắc mắc trên, nên dùng Bảng 1 hay sơ đồ ở Hình 1? Tại sao?

## 1. Đồ thị

Sử dụng sơ đồ ở Hình 1 để trả lời các câu hỏi dưới đây:

a) Từ thành phố $A$, hãng X có bao nhiêu đường bay đến năm thành phố còn lại?

b) Giữa sáu thành phố trên, có tất cả bao nhiêu đường bay của hãng X?

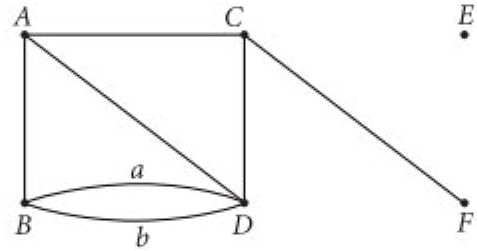
c) Có thể giải đáp thắc mắc ở ▶ không?

Sơ đồ ở Hình 1 còn được gọi là một đồ thị. Tổng quát, ta có định nghĩa sau đây.

Một ***đồ thị*** $G$ là một tập hợp gồm hữu hạn các điểm, gọi là ***đỉnh*** của đồ thị, cùng với tập hợp các đoạn đường cong hoặc thẳng có các đầu mút là các đỉnh của đồ thị, gọi là cạnh của đồ thị.

Các đỉnh của đồ thị được kí hiệu bằng các chữ in hoa $A$, $B$, $C$, …; cạnh có đầu mút là các đỉnh $A$, $B$ (cạnh nối hai đỉnh $A$, $B$) được kí hiệu là $AB$ hoặc $BA$. Đôi khi ta cũng dùng các chữ thường $a$, $b$, … để kí hiệu cạnh.

Hai cạnh khác nhau có thể có chung hai đầu mút. Chẳng hạn, hai cạnh $a$ và $b$ của đồ thị $G$ ở Hình 2 cùng chung hai đầu mút $B$ và $D$.



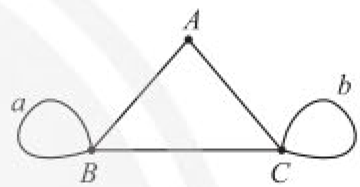

Hình 2. Đồ thị G

Hai đỉnh của đồ thị gọi là ***kề nhau*** (còn gọi đỉnh này kề với đỉnh kia) nếu chúng là hai đầu mút của một cạnh. Một đỉnh không kề với đỉnh nào (kể cả chính nó) gọi là ***đỉnh cô lập***.

**Nhận xét:**

a) Hai đầu mút của một cạnh có thể trùng nhau. Cạnh có hai đầu mút trùng nhau gọi là *khuyên*. Chẳng hạn, đồ thị ở Hình 3 có hai khuyên là hai cạnh $a$ và $b$.

b) Một đồ thị không có khuyên, trong đó hai đỉnh bất kì là đầu mút của nhiều nhất một cạnh gọi là một *đơn đồ thị*. Chẳng hạn, đồ thị ở Hình 1 là một đơn đồ thị.




Hình 3

c) Một đồ thị không có khuyên, trong đó hai đỉnh có thể nối với nhau bằng nhiều cạnh gọi là một *đa đồ thị*. Chẳng hạn, đồ thị ở Hình 2 là một đa đồ thị.

**Ví dụ 1.** Xét đồ thị $G$ ở Hình 2.

a) Chỉ ra các đỉnh và cạnh của $G$. Đồ thị này có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh?

b) Chỉ ra các đỉnh kề đỉnh $A$.

c) Đồ thị $G$ có bao nhiêu đỉnh cô lập?

***Giải***

a) Các đỉnh của $G$ là: $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ và $F$. Đồ thị có 6 đỉnh.

Các cạnh của $G$ là: $AB$, $AC$, $AD$, $a$, $b$, $CD$ và $CF$. Đồ thị có 7 cạnh.

b) Các đỉnh kề đỉnh $A$ là: $B$, $C$, $D$.

c) Đồ thị $G$ có một đỉnh cô lập, là đỉnh $E$.

**Ví dụ 2.** Năm người $A$, $B$, $C$, $D$ và $E$ cùng đến dự một bữa tiệc. Biết rằng, trước khi đến dự tiệc, mối quan hệ quen biết (người này quen người kia và ngược lại) giữa những người này như sau:

+ $A$ quen với $B$, $C$, $D$ và $E$;

+ $B$ quen với $C$ và $E$ (không tính với $A$);

+ $C$ quen với $D$ (không tính với $A$, $B$);

+ $D$ quen với $E$ (không tính với $A$, $B$, $C$).

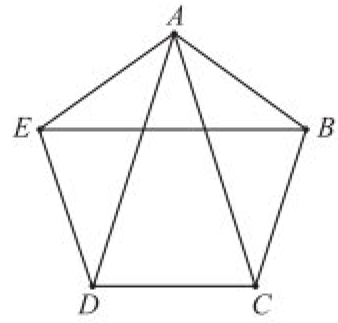
a) Vẽ một đồ thị biểu thị mối quan hệ quen biết giữa năm người này trước khi đến dự tiệc.

b) Biết rằng, tại buổi tiệc, mỗi người đều bắt tay với người đã quen và không bắt tay với người chưa quen. Có tất cả bao nhiêu lần bắt tay giữa năm người trên?

***Giải***

a) Ta vẽ đồ thị $G$ có 5 đỉnh biểu diễn năm người $A$, $B$, $C$, $D$ và $E$; hai đỉnh được nối bằng một cạnh nếu giữa hai người mà chúng biểu diễn quen nhau (Hình 4).

b) Số lần bắt tay bằng số cạnh của đồ thị $G$. Ta đếm được đồ thị có 8 cạnh. Vậy, có 8 lần bắt tay giữa năm người $A$, $B$, $C$, $D$ và $E$.



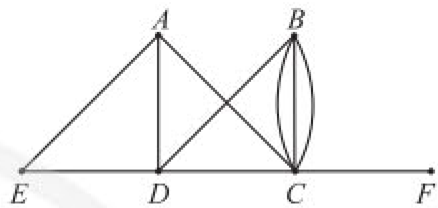
*Hình 4*

1 Cho đồ thị $G$ như Hình 5.

a) Chỉ ra các đỉnh, các cạnh, số đỉnh, số cạnh của $G$.

b) Chỉ ra các đỉnh kề đỉnh $D$, các đỉnh kề đỉnh $B$.

c) Đồ thị $G$ có đỉnh cô lập không?



*Hình 5*

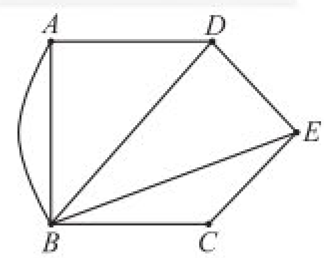
1 Một mạng cục bộ có bảy máy tính 1; 2; 3; 4; 5; 6 và 7. Bảng 2 cho biết giữa mỗi cặp máy tính có kết nối trực tiếp với nhau hay không (dấu ✓ là có kết nối, dấu × là không kết nối). Hãy vẽ đồ thị biểu diễn sự kết nối giữa các máy tính của mạng này.

*Bảng 2*

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | ✓ | × | ✓ | × | ✓ | ✓ |
| 2 | | | ✓ | × | ✓ | × | × |
| 3 | | | | × | × | × | ✓ |
| 4 | | | | | × | ✓ | × |
| 5 | | | | | | × | × |
| 6 | | | | | | | ✓ |
| 7 | | | | | | | |

## 2. Bậc của đỉnh

2 Đồ thị ở Hình 6 biểu diễn năm ngôi làng $A$, $B$, $C$, $D$ và $E$ cùng các con đường giữa chúng (mỗi cạnh biểu diễn một con đường giữa hai ngôi làng). Biết rằng mỗi con đường ra, vào làng đều phải đi qua một cổng chào; hai con đường khác nhau thì ra, vào làng qua hai cổng chào khác nhau. Ngoài ra, các ngôi làng không còn cổng chào nào khác.



*Hình 6*

a) Ngôi làng nào có ít cổng chào nhất? Ngôi làng nào có nhiều cổng chào nhất?

b) Năm ngôi làng có tất cả bao nhiêu cổng chào?

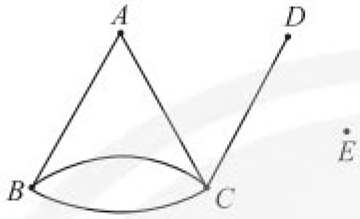
Giả sử $A$ là đỉnh của một đồ thị. Số cạnh của đồ thị có $A$ là đầu mút gọi là ***bậc*** của $A$, kí hiệu $d(A)$.

***Chú ý:***

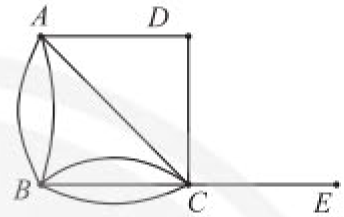
1) Đỉnh có bậc là một số chẵn còn được gọi là *đỉnh bậc chẵn*; đỉnh có bậc là một số lẻ còn được gọi là *đỉnh bậc lẻ*.

2) Đỉnh cô lập có bậc bằng 0.

***Ví dụ 3.*** Xét hai đồ thị $G$ và $H$ như Hình 7 và Hình 8. Chỉ ra bậc của các đỉnh ở mỗi đồ thị.




*Hình 7. Đồ thị G*




*Hình 8. Đồ thị H*

Với mỗi đồ thị trên, tìm số cạnh và tính tổng các bậc của các đỉnh. Có nhận xét gì về mối liên hệ giữa hai kết quả này?

***Giải***

Trong đồ thị $G$, $d(A)=2$, $d(B)=3$, $d(C)=4$, $d(D)=1$, $d(E)=0$.

Trong đồ thị $H$, $d(A)=4$, $d(B)=5$, $d(C)=6$, $d(D)=2$, $d(E)=1$.

Đồ thị $G$ có 5 cạnh.

Tổng các bậc của các đỉnh của $G$ là: $2+3+4+1+0=10$.

Đồ thị $H$ có 9 cạnh.

Tổng các bậc của các đỉnh của $H$ là: $4+5+6+2+1=18$.

Ta thấy tổng các bậc của các đỉnh của mỗi đồ thị gấp đôi số cạnh của nó.

***Nhận xét:*** Trong mọi đồ thị, mỗi cạnh đều có hai đỉnh đầu mút. Như vậy, mỗi cạnh đóng góp 2 đơn vị vào tổng các bậc của tất cả các đỉnh của đồ thị. Từ đó, ta nhận được định lí sau đây.

**Định lí**

Trong một đồ thị, tổng tất cả bậc của các đỉnh là một số chẵn và bằng hai lần số cạnh của đồ thị.

***Nhận xét:*** Từ định lí trên suy ra, số đỉnh bậc lẻ của mọi đồ thị là một số chẵn.

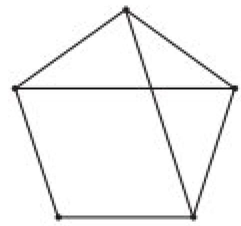
***Ví dụ 4.*** Vẽ một đồ thị (nếu có) có 5 đỉnh với bậc của các đỉnh lần lượt là:

a) 2; 3; 3; 3; 3;  b) 1; 2; 3; 4; 5.

***Giải***

a) Đồ thị như Hình 9 thoả mãn yêu cầu.

b) Không có, vì tổng $1+2+3+4+5=15$ là số lẻ.

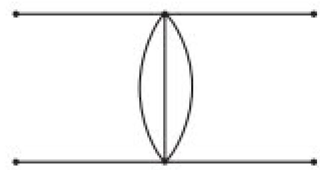


*Hình 9*

***Ví dụ 5.*** Vẽ một đồ thị có 6 đỉnh, 7 cạnh và tất cả các đỉnh đều bậc lẻ.

***Giải***

Đồ thị như Hình 10 thoả mãn yêu cầu.

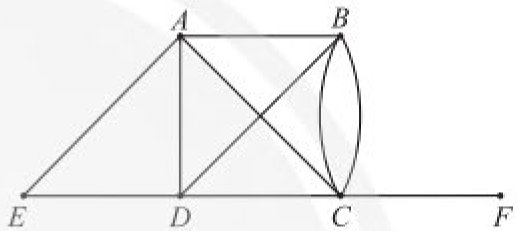


*Hình 10*

Cho đồ thị như Hình 11.

a) Hãy chỉ ra bậc của tất cả các đỉnh và tìm tổng của chúng.

b) Tìm tất cả các đỉnh kề với đỉnh $B$. Số đỉnh này có bằng bậc của đỉnh $B$ không?




*Hình 11*

Có hay không một đồ thị có ba đỉnh, trong đó hai đỉnh có bậc bằng 2 và một đỉnh có bậc bằng 3?

## BÀI TẬP

1. Hãy chỉ ra các đỉnh, các cạnh, số đỉnh, số cạnh của mỗi đồ thị như Hình 12.


a)  b)

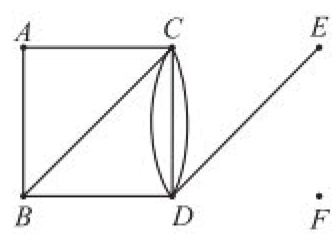
*Hình 12*

2. Cho đồ thị như Hình 13.

a) Chỉ ra bậc của các đỉnh của đồ thị.

b) Chỉ ra các đỉnh bậc lẻ của đồ thị.

c) Tính tổng tất cả các bậc của các đỉnh của đồ thị.




*Hình 13*

3. Một đồ thị có bốn đỉnh có bậc lần lượt là 2; 3; 4; 3. Tính số cạnh của đồ thị và vẽ đồ thị này.

4. Biết rằng $G$ là đồ thị có 6 đỉnh, 8 cạnh và các đỉnh của nó có bậc 2 hoặc 4. Đồ thị có bao nhiêu đỉnh bậc 4? Hãy vẽ một đồ thị như vậy.

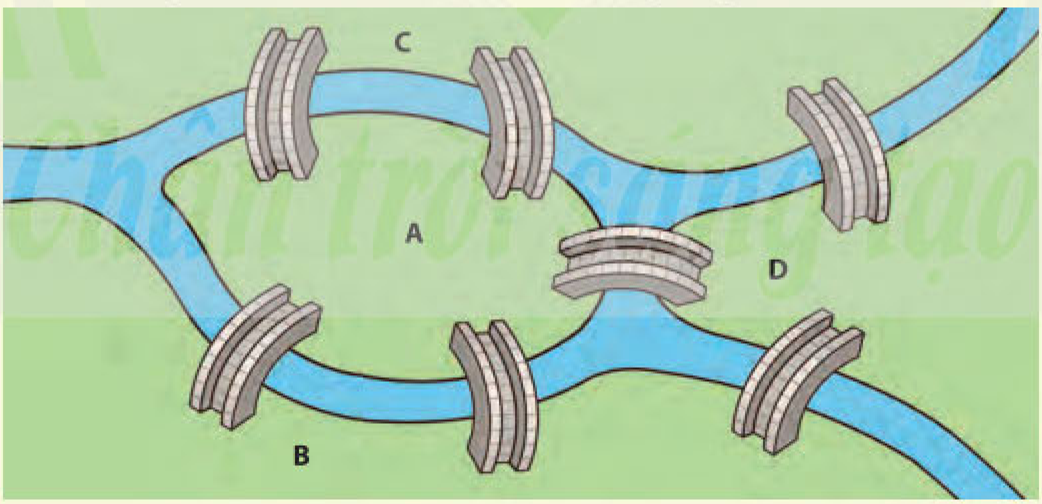
5. Có năm học sinh An, Bình, Mai, Quang, Xuân. Biết rằng An quen Bình, Bình quen Quang, An quen Mai, Mai quen Xuân, Xuân quen Quang. Các cặp không được liệt kê ở trên thì không quen nhau. Hãy vẽ đồ thị để thể hiện mối quan hệ quen nhau giữa các học sinh trên.

6. Cho tập hợp số $V = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 11; 12\}$. Hãy vẽ đồ thị có các đỉnh biểu diễn các phần tử của $V$, hai đỉnh kề nhau nếu hai số mà chúng biểu diễn nguyên tố cùng nhau (tức có ước chung lớn nhất bằng 1).

# Bài 2. Đường đi Euler và đường đi Hamilton

**Từ khoá:** Đường đi; Chu trình; Đường đi Euler; Chu trình Euler; Đường đi Hamilton; Chu trình Hamilton.

Thành phố Königsberg thuộc Phổ (nay là Kaliningrad thuộc Nga) có bảy cây cầu nối bốn vùng đất được chia bởi các nhánh sông Pregel như hình dưới.




Vào mỗi sáng Chủ nhật, người dân thành phố thường đi dạo qua các cây cầu. Họ tự hỏi không biết có thể bắt đầu từ một điểm nào đó trong thành phố, đi qua khắp các cây cầu, mỗi cầu chỉ đi qua một lần, rồi quay về điểm xuất phát.

Theo em, có hay không một cách đi như vậy?

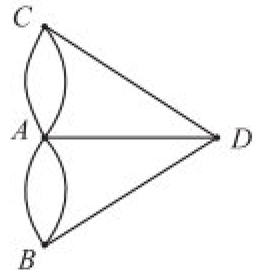
## 1. Đường đi Euler

a) Nếu coi mỗi vùng đất của thành phố Königsberg là một đỉnh, mỗi cây cầu là một cạnh nối hai đỉnh thì ta được một đồ thị $G$ như Hình 1.

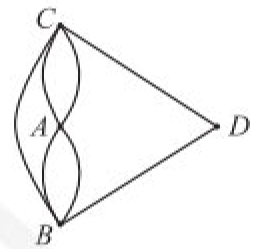
Câu hỏi của người dân thành phố trở thành: có hay không cách vẽ bằng một nét bút liền (không nhấc bút) đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đúng một lần, sao cho điểm kết thúc trùng với điểm xuất phát?

Hãy thử vẽ và đưa ra dự đoán của mình.

b) Nếu không có cây cầu nối giữa $A$ và $D$ nhưng có thêm một cây cầu nối $B$ và $C$ thì ta có đồ thị $H$ như Hình 2. Có thể vẽ một nét liền đi qua tất cả các cạnh của đồ thị này, mỗi cạnh đúng một lần không?



*Hình 1. Đồ thị G*



*Hình 2. Đồ thị H*

Trong đồ thị $G$, một dãy cạnh nối tiếp (hai cạnh nối tiếp là hai cạnh có chung một đỉnh) $AB$, $BC$, ..., $MN$, $NP$ được gọi là một ***đường đi*** từ đỉnh $A$ đến đỉnh $P$, kí hiệu $ABCD...MNP$.

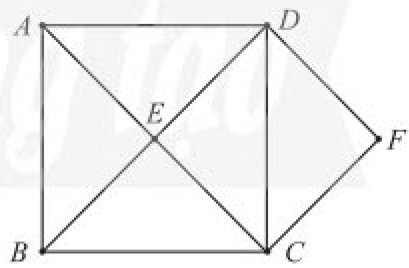
Ta cũng nói đường đi $ABCD...MNP$ bắt đầu từ đỉnh $A$, đi qua các cạnh $AB$, $BC$, ..., $NP$ và kết thúc tại đỉnh $P$.

Một đường đi được gọi là một ***chu trình*** nếu nó bắt đầu (hoặc xuất phát) và kết thúc tại cùng một đỉnh.

***Ví dụ 1.*** Xét đồ thị như Hình 3.

a) Chỉ ra ba đường đi khác nhau từ $A$ đến $D$.

b) Chỉ ra ba chu trình khác nhau bắt đầu từ $A$.



*Hình 3*

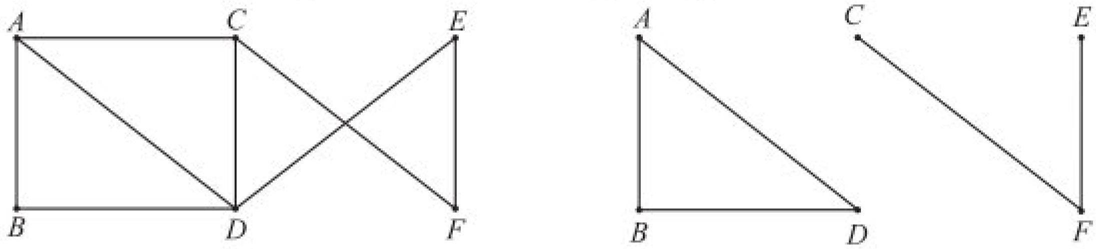
***Giải***

a) $AD$, $AED$, $ABCED$ là ba đường đi khác nhau từ $A$ đến $D$.

b) $ABEA$, $AECDA$, $ADFCBA$ là ba chu trình khác nhau bắt đầu từ $A$.

Một đồ thị được gọi là ***liên thông*** nếu mọi cặp đỉnh phân biệt của nó đều có đường đi từ đỉnh này đến đỉnh kia.

**Ví dụ 2.** Đồ thị $G$ và $H$ trong Hình 4 có liên thông không? Giải thích.



a) Đồ thị G

b) Đồ thị H

Hình 4

**Giải**

a) Đồ thị $G$ là liên thông, vì mọi cặp đỉnh phân biệt đều có đường đi từ đỉnh này đến đỉnh kia.

b) Đồ thị $H$ là không liên thông. Chẳng hạn, giữa hai đỉnh $A$ và $C$ không có đường đi từ đỉnh này đến đỉnh kia.

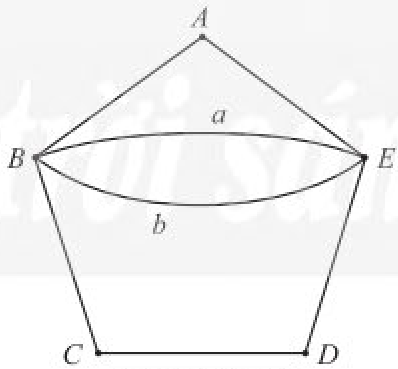
Cho $G$ là một đồ thị liên thông.

Trong đồ thị $G$, một đường đi từ đỉnh $A$ đến đỉnh $B$, đi qua tất cả các cạnh của $G$, mỗi cạnh đúng một lần, được gọi là ***đường đi Euler*** từ $A$ đến $B$.

Một chu trình đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đúng một lần, được gọi là ***chu trình Euler***.

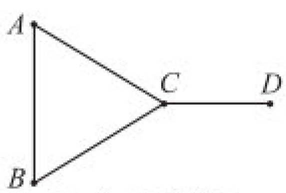
**Chú ý:** Khi $G$ là đồ thị liên thông thì mọi đường đi Euler trên $G$ (nếu có) đi qua mọi đỉnh của $G$.

2 a) Chỉ ra một chu trình Euler của đồ thị $G$ ở Hình 5. Đồ thị này có đỉnh nào bậc lẻ không?

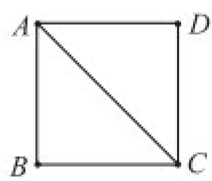


Hình 5. Đồ thị G

b) Chỉ ra rằng các đồ thị $S$ và $T$ sau đây không có chu trình Euler. Các đồ thị này có đỉnh bậc lẻ không?



Hình 6. Đồ thị S



Hình 7. Đồ thị T

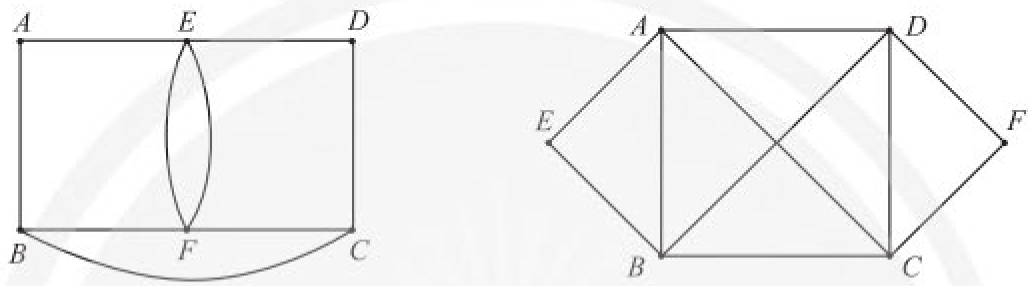
Ta thấy đồ thị $G$ có chu trình Euler và các đỉnh của đồ thị này đều có bậc chẵn; hai đồ thị $S$ và $T$ có đỉnh bậc lẻ và chúng không có chu trình Euler.

Tổng quát, người ta chứng minh được định lí sau đây.

**Định lí 1**

Đồ thị liên thông $G$ có chu trình Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

***Ví dụ 3.*** Mỗi đồ thị sau đây có chu trình Euler không? Nếu có, hãy chỉ ra một chu trình như vậy.




*a) Đồ thị G* *b) Đồ thị H*

*Hình 8*

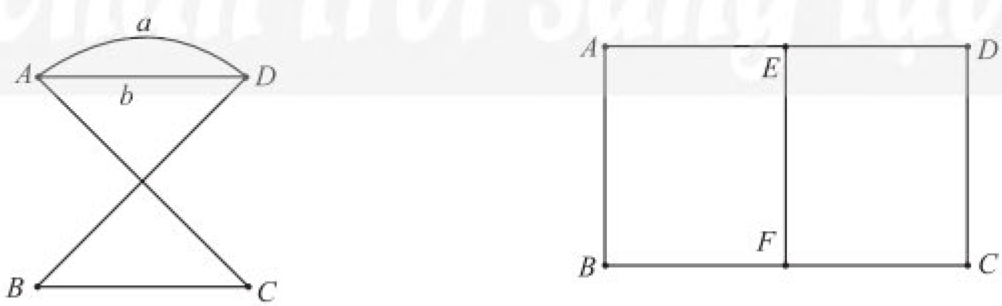
***Giải***

a) Đồ thị $G$ không có chu trình Euler, vì có đỉnh $B$ bậc 3 là bậc lẻ.

b) Ta thấy tất cả các đỉnh của đồ thị $H$ đều có bậc chẵn nên $H$ có chu trình Euler, chẳng hạn, $AEBCDFCABDA$.

Sau đây ta xét ví dụ về tìm đường đi Euler.

3 Hãy chỉ ra một đường đi Euler trên mỗi đồ thị sau. Mỗi đồ thị có bao nhiêu đỉnh bậc lẻ?




*a) Đồ thị G* *b) Đồ thị H*

*Hình 9*

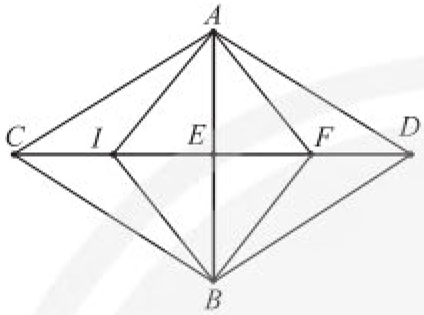
Hai đồ thị $G$ và $H$ ở 3 đều có đúng hai đỉnh bậc lẻ và chúng đều có đường đi Euler.
Tổng quát, người ta chứng minh được định lí sau.

**Định lí 2**

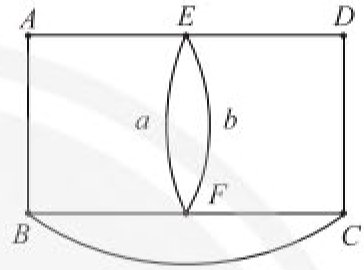
Đồ thị liên thông $G$ có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler nếu và chỉ nếu nó có đúng hai đỉnh bậc lẻ.

Khi đó, đường đi Euler đi từ đỉnh bậc lẻ này đến đỉnh bậc lẻ kia.

***Ví dụ 4.*** Mỗi đồ thị trong Hình 10 có đường đi Euler không? Nếu có, hãy chỉ ra một đường đi như vậy.




*a) Đồ thị G*




*b) Đồ thị H*

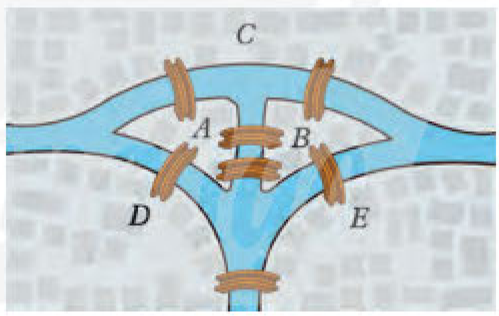
*Hình 10*

***Giải***

a) Đồ thị $G$ không có đường đi Euler, có đến 4 đỉnh bậc lẻ là $A$, $B$, $C$, $D$.

b) Đồ thị $H$ có đúng hai đỉnh bậc lẻ là $B$ và $C$ nên nó có đường đi Euler. Chẳng hạn, đường đi $BAEabEDCBFC$ là một đường đi Euler trên $H$.

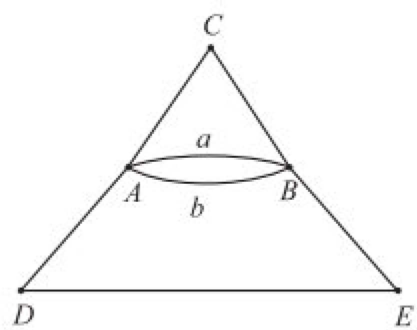
***Ví dụ 5.*** Có năm vùng đất $A$, $B$, $C$, $D$ và $E$ được nối với nhau bởi những cây cầu như Hình 11. Có hay không một cách đi qua tất cả các cây cầu, mỗi cây cầu chỉ qua một lần và quay trở lại nơi xuất phát ban đầu? Nếu có, hãy chỉ ra một cách đi như vậy.




*Hình 11*

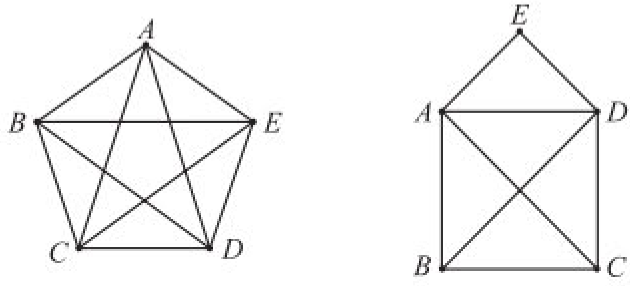
***Giải***

Biểu thị mỗi vùng đất bằng một đỉnh, mỗi cây cầu bằng một cạnh nối hai đỉnh, ta được đồ thị như Hình 12. Ta thấy các đỉnh của đồ thị đều có bậc chẵn. Do đó, đồ thị có chu trình Euler. Nói cách khác, có cách đi qua tất cả các cây cầu, mỗi cây cầu chỉ đi qua một lần và quay trở lại nơi xuất phát ban đầu. Chẳng hạn, bắt đầu từ $D$, ta có thể đi theo chu trình Euler: $DAabACBED$.




*Hình 12*

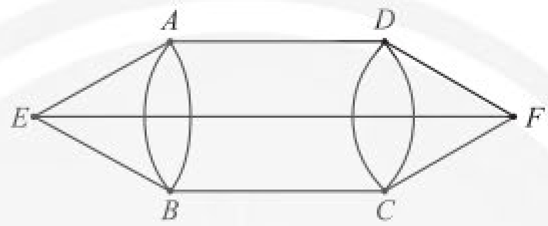
Mỗi đồ thị sau đây có chu trình Euler không? Nếu có, hãy chỉ ra một chu trình như vậy.




a) Đồ thị G b) Đồ thị H

Hình 13

Đồ thị sau có đường đi Euler không? Nếu có, hãy chỉ ra một đường đi như vậy.

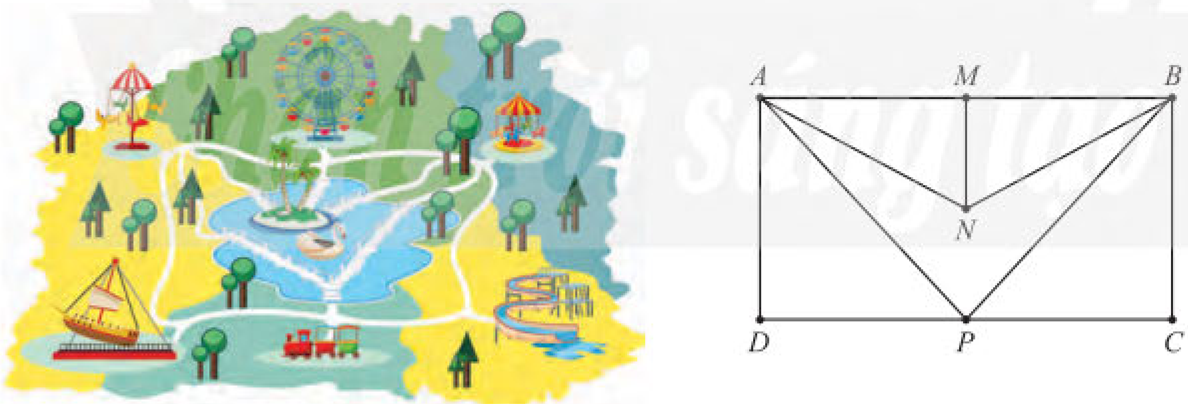



Hình 14. Đồ thị H

Hãy giải đáp câu hỏi của người dân Königsberg ở (còn gọi là bài toán Bảy cây cầu).

## 2. Đường đi Hamilton

Đồ thị ở Hình 15b biểu diễn các điểm vui chơi trong một công viên với những con đường nối giữa chúng như Hình 15a. Có thể đi theo những con đường này để thăm tất cả các điểm vui chơi mỗi điểm đúng một lần hay không? Nếu có, chỉ ra ít nhất một đường đi như vậy.




a) b)

Hình 15

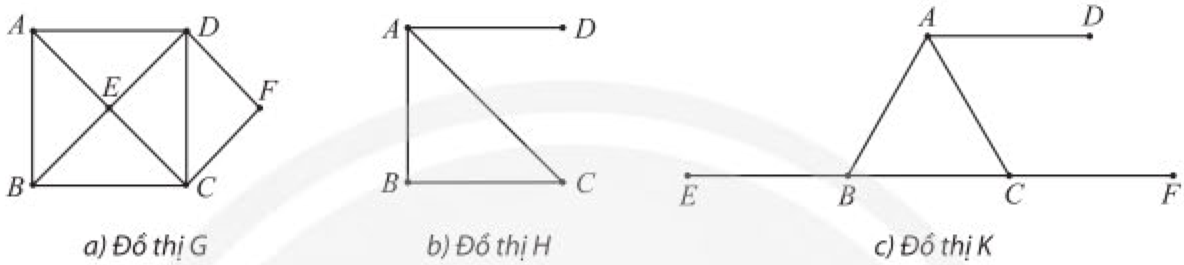
Cho đồ thị $G$.
Đường đi đi qua mọi đỉnh của $G$, mỗi đỉnh đúng một lần gọi là ***đường đi Hamilton*** trong $G$.
Đường đi bắt đầu và kết thúc tại đỉnh $A$, đi qua mọi đỉnh của $G$, mỗi đỉnh đúng một lần, trừ đỉnh $A$, được gọi là ***chu trình Hamilton*** trong $G$.

***Chú ý:***

1) Đường đi và chu trình Hamilton đi qua mỗi cạnh của đồ thị nhiều nhất một lần (không đi qua lần nào hoặc đi qua một lần).

2) Từ chu trình Hamilton, bỏ đi cạnh cuối cùng ta được đường đi Hamilton. Do đó, một đồ thị có chu trình Hamilton thì cũng có đường đi Hamilton (như vậy, một đồ thị không có đường đi Hamilton thì cũng không có chu trình Hamilton).

***Ví dụ 6.*** Mỗi đồ thị sau có chu trình Hamilton không? Nếu không, đồ thị có đường đi Hamilton không?




Hình 16

**_Giải_**

a) Đồ thị $G$ có chu trình Hamilton, chẳng hạn, $ABECFDA$.

b) Đồ thị $H$ không có chu trình Hamilton, vì một chu trình đi qua đỉnh $D$ (bậc 1) đều phải đi qua cạnh $AD$ ít nhất hai lần, tức phải qua đỉnh $A$ ít nhất hai lần.

Do đó, đồ thị $H$ có đường đi Hamilton, chẳng hạn, $DABC$.

c) Đồ thị $K$ không có đường đi Hamilton (do đó không có chu trình Hamilton). Thật vậy, nếu có một đường đi Hamilton trên $K$ thì phải có ít nhất một trong ba đỉnh $D$, $E$ và $F$ (đều có bậc 1) không phải là đỉnh bắt đầu hoặc đỉnh kết thúc của đường đi này. Nếu $D$ là đỉnh như vậy thì đường đi Hamilton đó phải đi qua cạnh $AD$ (tức đi qua đỉnh $A$) hai lần. Điều này không xảy ra. Lập luận tương tự cho trường hợp $E$ hoặc $F$ không phải là đỉnh bắt đầu hoặc kết thúc của đường đi. Vậy, đồ thị $K$ không có đường đi Hamilton.

***Nhận xét:*** Đến nay, người ta tìm ra được một số điều kiện đủ (nhưng chưa tìm được điều kiện cần và đủ nào) để một đồ thị có chu trình Hamilton. Dưới đây là hai trong số những điều kiện đủ đó.

**Định lí 3 (Định lí Dirac)**

Cho $G$ là một đơn đồ thị liên thông có $n$ đỉnh với $n \geq 3$. Khi đó, nếu mọi đỉnh của đồ thị $G$ đều có bậc lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2}$ thì đồ thị $G$ có chu trình Hamilton.

Tổng quát hơn, ta có kết quả sau:

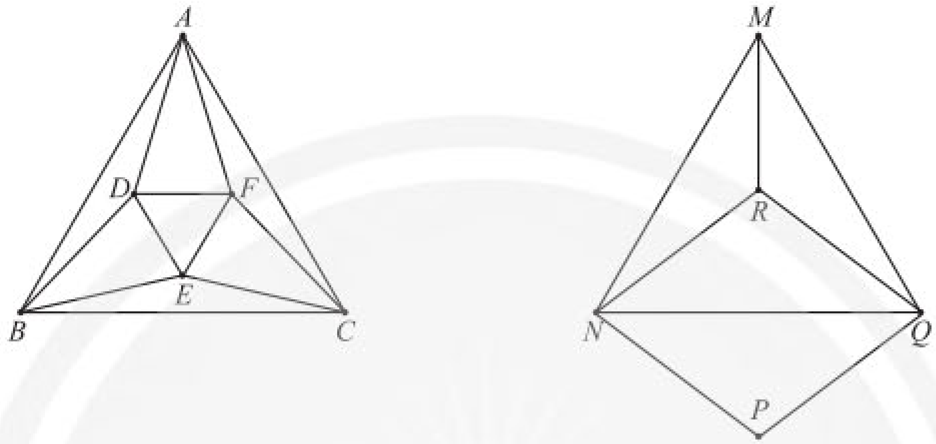
**Định lí 4 (Định lí Ore)**

Cho $G$ là một đơn đồ thị liên thông có $n$ đỉnh với $n \geq 3$. Nếu với mọi cặp đỉnh $A$, $B$ không kề nhau của $G$ đều có

$$d(A) + d(B) \geq n$$

thì đồ thị $G$ có chu trình Hamilton.

***Ví dụ 7.*** Mỗi đồ thị sau có chu trình Hamilton không? Nếu có, hãy chỉ ra một chu trình như vậy.




*a) Đồ thị G*

*b) Đồ thị H*

*Hình 17*

***Giải***

a) $G$ là một đơn đồ thị liên thông có 6 đỉnh. Mỗi đỉnh của $G$ đều có bậc $4 \geq \frac{6}{2} = 3$. Theo định lí Dirac, đồ thị $G$ có chu trình Hamilton.

Ta có $ABCEFDA$ là một chu trình Hamilton của $G$.

b) $H$ là một đơn đồ thị liên thông có 5 đỉnh. Đồ thị $H$ chỉ có hai cặp đỉnh không kề nhau là $M$, $P$ và $R$, $P$. Ta có

$$d(M) + d(P) = d(R) + d(P) = 3 + 2 = 5.$$

Theo Định lí Ore, đồ thị $H$ có chu trình Hamilton.

Ta có $MNPQRM$ là một chu trình Hamilton của $H$.

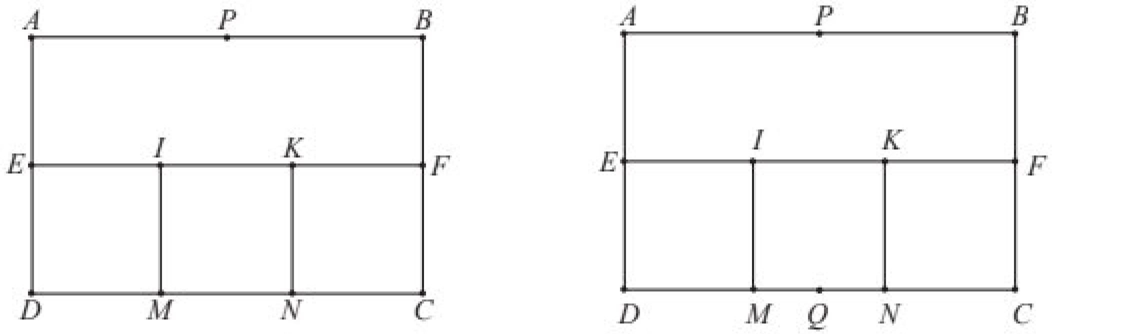
***Nhận xét:*** Nhiều đồ thị tuy không thoả mãn giả thiết của Định lí Dirac hay Định lí Ore nhưng vẫn có chu trình Hamilton. Trong một số trường hợp đơn giản, ta có thể tìm chu trình (đường đi) Hamilton của đồ thị, hoặc chứng minh rằng đồ thị không có chu trình (đường đi) Hamilton, dựa vào các quy tắc sau đây.

1) Chu trình (đường đi) Hamilton phải đi qua hai cạnh nối với đỉnh bậc 2 (trừ khi đỉnh đó là đỉnh bắt đầu hoặc đỉnh kết thúc của đường đi).

2) Nếu chu trình (đường đi) Hamilton đã qua hai cạnh nối với một đỉnh có bậc lớn hơn 2 thì nó không thể đi qua các cạnh khác nối với đỉnh đó.

3) Đường đi Hamilton phải đi qua cạnh nối với đỉnh bậc 1; các đỉnh bậc 1 phải là đỉnh bắt đầu hoặc đỉnh kết thúc của đường đi Hamilton. Đồ thị có đỉnh bậc 1 thì không có chu trình Hamilton.

***Ví dụ 8.*** Chứng tỏ rằng đồ thị $G$ (Hình 18a) có chu trình Hamilton; đồ thị $H$ (Hình 18b) không có chu trình Hamilton.

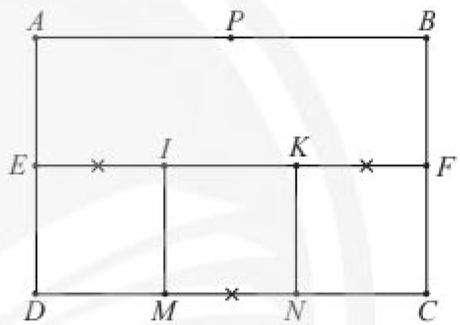



*a) Đồ thị G* *b) Đồ thị H*

*Hình 18*

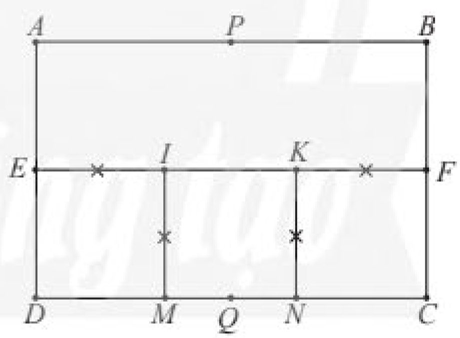
### *Giải*

a) Đồ thị $G$ có các đỉnh $A$, $P$, $B$, $C$, $D$ bậc 2 nên chu trình Hamilton $h$ (nếu có) phải đi qua các cạnh $AE$, $AP$, $BP$, $BF$, $CF$, $CN$, $DM$, $DE$ (Hình 18a). Từ đó, $h$ không thể đi qua các cạnh $EI$ và $KF$ (đánh dấu × trên Hình 19). Nếu xoá đi hai cạnh này thì các đỉnh $I$ và $K$ trở thành có bậc 2. Do đó, $h$ phải đi qua các cạnh $MI$, $IK$, $KN$. Kết quả ta được chu trình Hamilton $h$: $APBFCNKIMDEA$.



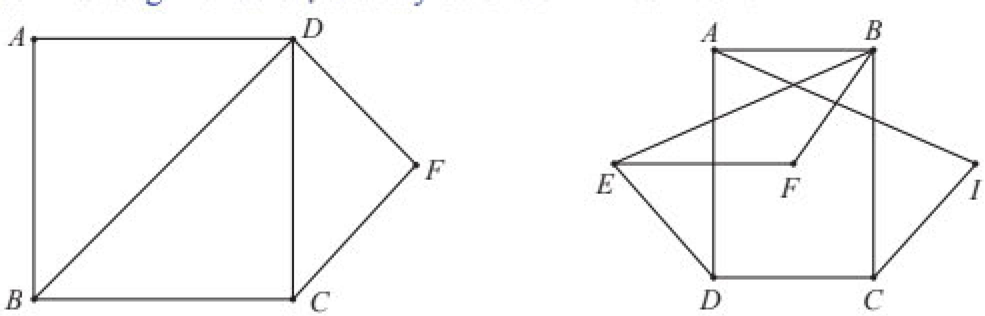

*Hình 19*

b) Đồ thị $H$ có các đỉnh $A$, $P$, $B$, $C$, $D$ và $Q$ bậc 2 nên chu trình Hamilton $k$ (nếu có) phải đi qua các cạnh $EA$, $AP$, $PB$, $BF$, $FC$, $CN$, $MD$, $DE$, $NQ$, $QM$ (Hình 18b). Từ đó, $k$ không thể đi qua các cạnh $EI$, $IM$, $KF$, $KN$ (đánh dấu × trên Hình 20). Như vậy, $k$ không thể đi qua các đỉnh $I$ và $K$. Vậy, không có chu trình Hamilton trên đồ thị $H$.




*Hình 20*

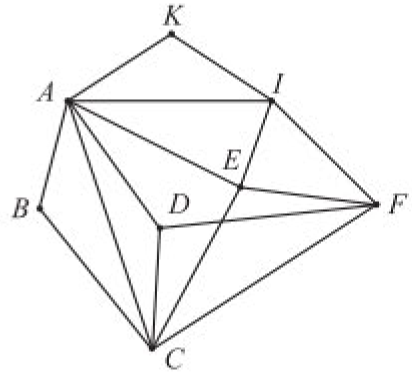
3 Hãy chỉ ra rằng mỗi đồ thị sau đây có chu trình Hamilton.




*a)* *b)*

*Hình 21*

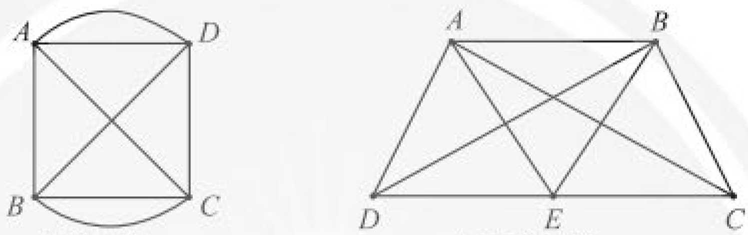
Các đỉnh của đồ thị ở Hình 22 biểu thị các điểm du lịch trong một thành phố, các cạnh biểu thị đường đi giữa các điểm du lịch này. Có hay không một cách đi tham quan tất cả các điểm du lịch của thành phố, mỗi điểm qua đúng một lần, xuất phát và kết thúc tại cùng một điểm du lịch?




Hình 22

## BÀI TẬP

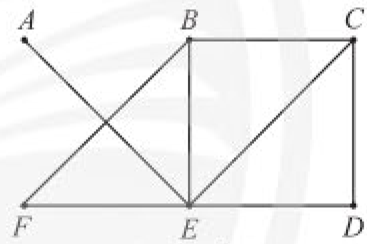
1. Mỗi đồ thị trong Hình 23 có chu trình Euler không? Nếu có hãy chỉ ra một chu trình như vậy.




a) Đồ thị G b) Đồ thị H

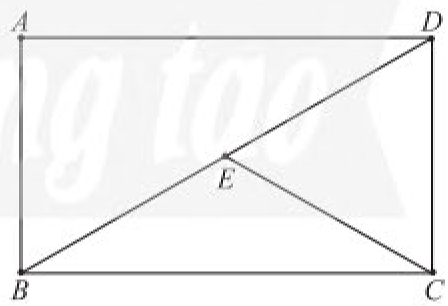
Hình 23

2. Đồ thị ở Hình 24 có đường đi Euler không? Nếu có hãy chỉ ra một đường đi như vậy.



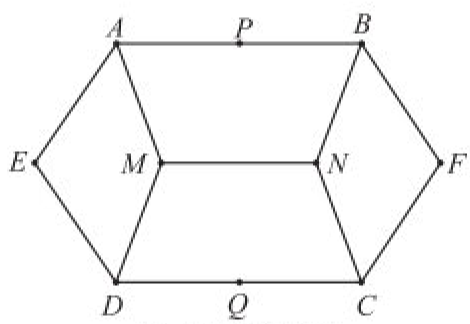

Hình 24. Đồ thị H

3. Chỉ ra một chu trình Hamilton của đồ thị ở Hình 25.



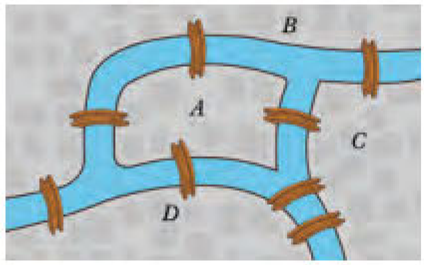

Hình 25. Đồ thị G

4. Chỉ ra một đường đi Hamilton của đồ thị ở Hình 26.



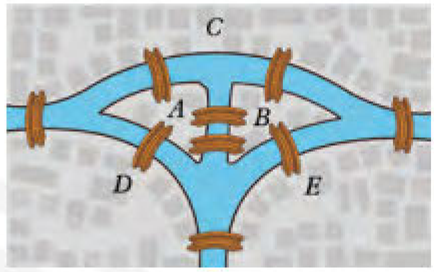

Hình 26. Đồ thị H

5. Có bốn khu phố $A$, $B$, $C$ và $D$ được nối với nhau bằng những cây cầu như Hình 27. Có hay không cách đi qua tất cả các cây cầu, mỗi cây cầu chỉ qua một lần, rồi quay trở lại nơi xuất phát? Nếu có, hãy chỉ ra một cách đi như vậy.




*Hình 27*

6. Có năm vùng đất $A$, $B$, $C$, $D$ và $E$ được nối với nhau bằng những cây cầu như Hình 28.
   a) Có hay không cách đi qua tất cả các cây cầu, mỗi cây cầu chỉ qua một lần, rồi quay trở lại nơi xuất phát?
   b) Nếu không yêu cầu quay lại nơi bắt đầu thì có cách đi như vậy không? Nếu có, hãy chỉ ra một cách đi.



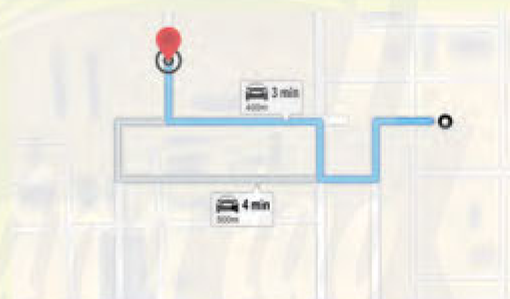

*Hình 28*

# Bài 3. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

**Từ khoá:** **Trọng số; Đồ thị có trọng số; Độ dài; Đường đi ngắn nhất.**

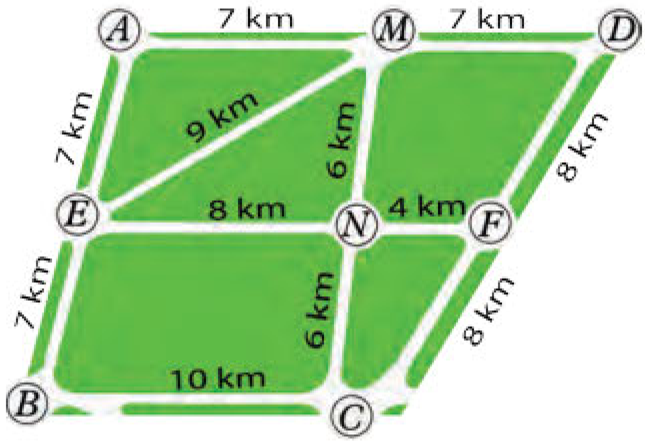
Phần mềm chỉ đường thường chỉ ra đường đi ngắn nhất khi người dùng muốn tìm đường đi từ một địa điểm đến một địa điểm khác.

Làm thế nào để tìm ra đường đi đó?

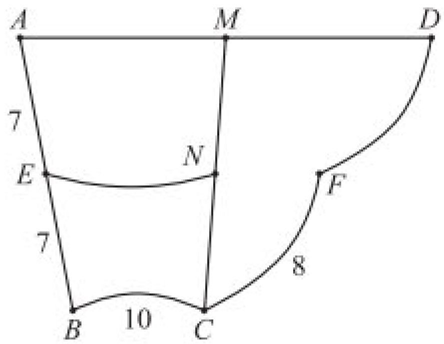



## 1. Đồ thị có trọng số và đường đi ngắn nhất

1 Để biểu diễn các con đường nối các giao lộ cùng với độ dài của chúng như sơ đồ ở Hình 1, một học sinh đã vẽ đồ thị như Hình 2. Chỉ ra các cạnh và số biểu diễn độ dài con đường còn thiếu trong Hình 2.




Hình 1




Hình 2

Một đồ thị mà mỗi cạnh được gán thêm một số được gọi là một ***đồ thị có trọng số***.

Số được gán cho mỗi cạnh được gọi là ***trọng số*** của cạnh đó. Trọng số của cạnh $a$ được kí hiệu là $w_a$.

**Nhận xét.** Ta chỉ xét đồ thị có trọng số với trọng số là các số dương. Trọng số của cạnh còn được gọi là ***độ dài*** của cạnh đó, mặc dù trong thực tế trọng số có thể biểu diễn nhiều đại lượng khác nhau (không chỉ là độ dài vật lí). Chẳng hạn, trên đồ thị biểu diễn đường đi giữa những nơi nào đó, trọng số của cạnh có thể biểu diễn độ dài của đoạn đường, hoặc số tiền cần trả, hoặc thời gian cần để đi hết đoạn đường đó.

Tổng trọng số (hay tổng độ dài) của các cạnh tạo thành đường đi gọi là ***độ dài*** của đường đi đó. Độ dài của đường đi $m$ được kí hiệu là $l_m$.

Trong đồ thị có trọng số, đường đi có độ dài bé nhất trong tất cả các đường đi từ đỉnh $A$ đến đỉnh $B$ gọi là ***đường đi ngắn nhất*** từ $A$ đến $B$.

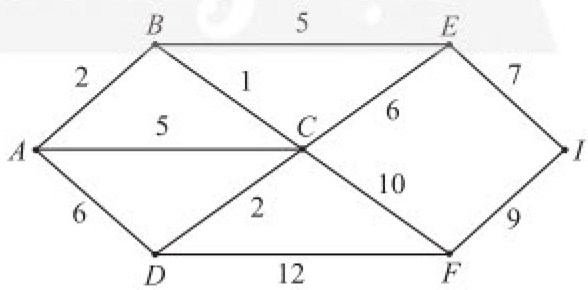
**Chú ý:** Khi xét bài toán tìm đường đi ngắn nhất, ta chỉ xét đồ thị liên thông có trọng số.

**Ví dụ 1.** Cho đồ thị có trọng số như Hình 3.

a) Chỉ ra trọng số của các cạnh $AB$, $CF$, $DF$.

b) Tính độ dài của các đường đi $AC$, $ADCF$, $BECFI$.

c) Cạnh $AD$ có phải là đường đi ngắn nhất từ $A$ đến $D$ không?




Hình 3

***Giải***

a) $w_{AB} = 2$; $w_{CF} = 10$; $w_{DF} = 12$.

b) $l_{AC} = w_{AC} = 5$.

$l_{ADCF} = w_{AD} + w_{DC} + w_{CF} = 6 + 2 + 10 = 18$.

$l_{BECFI} = w_{BE} + w_{EC} + w_{CF} + w_{FI} = 5 + 6 + 10 + 9 = 30$.

c) $ABCD$ là một đường đi từ $A$ đến $D$, mà

$$l_{ABCD} = w_{AB} + w_{BC} + w_{CD} = 2 + 1 + 2 = 5 < l_{AD} = w_{AD} = 6.$$

Do đó, cạnh $AD$ không phải là đường đi ngắn nhất từ $A$ đến $D$.

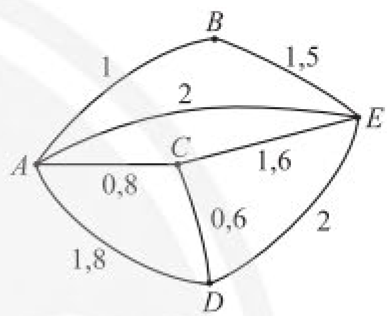
***Ví dụ 2.*** Bảng 1 cho biết giá vé chuyến bay giữa các thành phố $A$, $B$, $C$, $D$ và $E$ (số nằm tại ô giao của hàng và cột là giá vé tính bằng triệu đồng của chuyến bay giữa hai thành phố trên hàng và cột tương ứng, dấu × biểu thị không có chuyến bay giữa hai thành phố). Hãy vẽ một đồ thị có trọng số biểu diễn các chuyến bay cùng với giá vé giữa các thành phố này.

*Bảng 1*

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | | 1 | 0,8 | 1,8 | 2 |
| $B$ | | | × | × | 1,5 |
| $C$ | | | | 0,6 | 1,6 |
| $D$ | | | | | 2 |
| $E$ | | | | | |

**Giải**

Đồ thị có trọng số như Hình 4 thoả mãn yêu cầu, ở đó các đỉnh biểu diễn các thành phố, các cạnh biểu diễn đường bay giữa các thành phố này (nếu có), trọng số của mỗi cạnh biểu diễn giá vé máy bay của đường bay tương ứng.



*Hình 4*

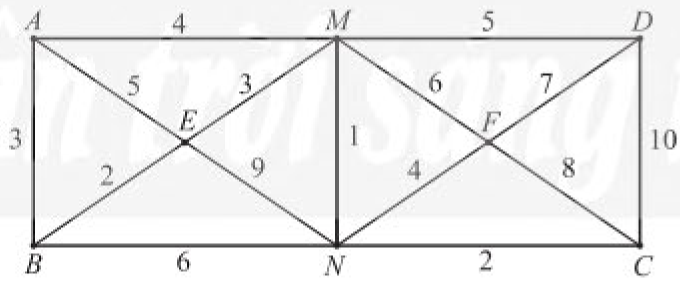
Cho đồ thị có trọng số như Hình 5.

a) Chỉ ra trọng số của các cạnh $AE$, $MN$, $CN$.

b) Tính độ dài của các đường đi $ABEN$, $EMFNE$.

c) Chỉ ra ba đường đi khác nhau từ $A$ đến $D$ và tính độ dài của chúng.

d) Đường đi $EMF$ có phải là đường đi ngắn nhất từ $E$ đến $F$ không?



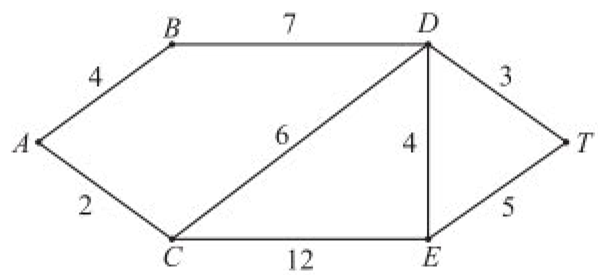
*Hình 5*

## 2. Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất

Cho đồ thị có trọng số như Hình 6.

a) Tìm tất cả các đường đi từ $A$ đến $T$ (đi qua mỗi đỉnh nhiều nhất một lần) và tính độ dài của mỗi đường đi đó.

b) Từ đó, tìm đường đi ngắn nhất từ $A$ đến $T$.



*Hình 6*

Qua , ta thấy có thể dễ dàng tìm được đường đi ngắn nhất từ $A$ đến $T$ bằng cách tính độ dài của tất các đường đi từ $A$ đến $T$ (không đi qua đỉnh nào quá một lần) rồi so sánh các độ dài đó. Tuy nhiên, cách này kém hiệu quả và khó thực hiện khi đồ thị có nhiều cạnh.

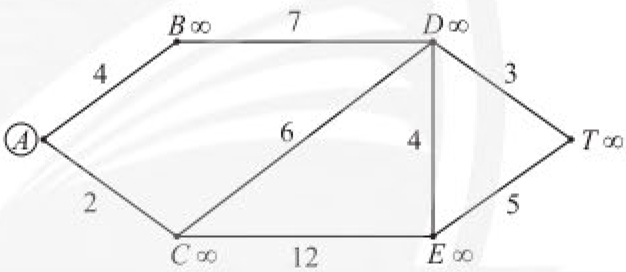
Để giải quyết vấn đề đó, người ta đã xây dựng những thuật toán giải bài toán tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị có trọng số một cách hiệu quả. Dưới đây, chúng ta sẽ tìm đường đi ngắn nhất từ $A$ đến $T$ trong đồ thị có trọng số ở  bằng thuật toán Dijkstra (Edsger Dijkstra, 11/5/1930 – 6/8/2002, nhà khoa học máy tính người Hà Lan, đề xuất thuật toán này vào năm 1959).

Nguyên lí cơ bản của thuật toán này là: Tìm lần lượt các đỉnh (khác $A$) gần $A$ nhất, gần $A$ thứ hai, gần $A$ thứ ba, … (tức là độ dài đường đi ngắn nhất từ $A$ đến lần lượt đến các đỉnh đó bé nhất, bé thứ hai, bé thứ ba, …) cho đến khi $T$ là một trong các đỉnh đó.

Để tìm ra các đỉnh này, đầu tiên ta gán cho mỗi đỉnh của đồ thị một số, gọi là *nhãn* của đỉnh đó (nhãn của đỉnh $M$ được kí hiệu là $n_M$). Tiếp đó, ta thực hiện các bước lặp lần lượt điều chỉnh nhãn (còn gọi là nhãn tạm thời) của từng đỉnh về nhãn cố định đúng bằng độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh đó đến đỉnh $A$.

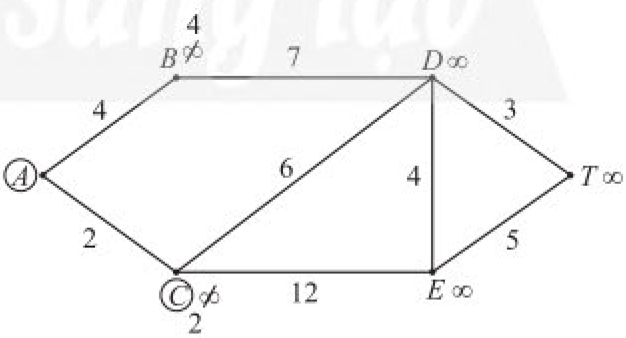
Cụ thể ta thực hiện như sau:

Đầu tiên, gán nhãn cho đỉnh $A$ bằng 0 ($n_A = 0$), cho các đỉnh khác đều bằng $\infty$ (coi $\infty$ là một số lớn hơn mọi số thực). Khoanh tròn đỉnh $A$ và viết nhãn của mỗi đỉnh khác bên cạnh đỉnh đó (Hình 7). Dưới đây, mỗi lần thay đổi nhãn của đỉnh thì ta gạch nhãn cũ và viết thêm nhãn mới.



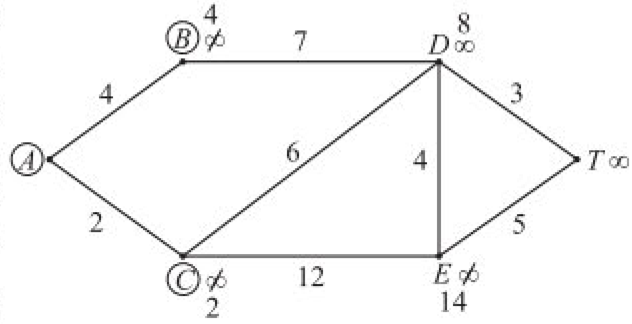

Hình 7

**Bước 1.** Tìm đỉnh (khác $A$) gần $A$ nhất. Ta chỉ cần tìm trong các đỉnh kề với $A$, gồm hai đỉnh $B$ và $C$. Ta tính $n_A + w_{AB} = 0 + 4 = 4$. Số này nhỏ hơn nhãn hiện tại của $B$ (bằng $\infty$), nên ta đổi nhãn của $B$ thành $n_B = 4$ (bằng $l_{AB}$). Tương tự, tính $n_A + w_{AC} = 0 + 2 = 2$ và đổi nhãn của $C$ thành $n_C = 2$ (bằng $l_{AC}$). Ta thấy đỉnh $C$ có nhãn nhỏ nhất trong các đỉnh khác $A$ nên $C$ là đỉnh gần $A$ nhất. Ta cố định nhãn và khoanh tròn đỉnh $C$ (Hình 8).



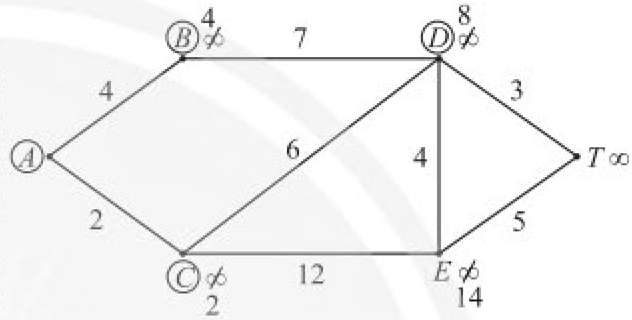

Hình 8

**Bước 2.** Tìm đỉnh gần $A$ thứ hai. Trước hết, xét các đỉnh kề với $C$ (là đỉnh vừa được khoanh tròn ở cuối bước trước) trong các đỉnh chưa khoanh tròn, gồm $D$ và $E$. Ta tính $n_C + w_{CD} = 2 + 6 = 8$. Số này nhỏ hơn nhãn hiện tại của $D$ (là $\infty$), nên ta đổi nhãn của $D$ thành $n_D = 8$ (bằng $l_{ACD}$). Tương tự, tính $n_C + w_{CE} = 2 + 12 = 14$ và đổi nhãn $E$ thành $n_E = 14$. Ta thấy, trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh $B$ có nhãn nhỏ nhất, nên nó là đỉnh gần $A$ thứ hai. Ta cố định nhãn và khoanh tròn đỉnh $B$ (Hình 9).



*Hình 9*

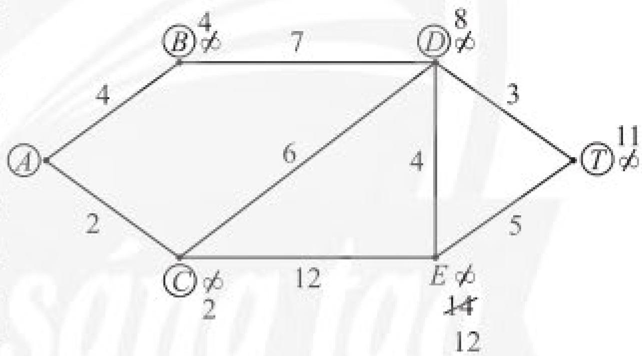
**Bước 3.** Tìm đỉnh gần $A$ thứ ba. Trước hết, trong các đỉnh chưa khoanh tròn, chỉ có đỉnh $D$ kề với $B$. Tính $n_B + w_{BD} = 4 + 7 = 11$. Số này lớn hơn nhãn hiện tại $n_D = 8$ của $D$ nên ta giữ nguyên nhãn này. Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh $D$ có nhãn nhỏ nhất, nên nó là đỉnh gần $A$ thứ ba. Ta cố định nhãn và khoanh tròn đỉnh $D$ (Hình 10).



*Hình 10*

**Bước 4.** Tìm đỉnh gần $A$ thứ tư. Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, xét các đỉnh kề với $D$, gồm $E$ và $T$. Tính $n_D + w_{DE} = 8 + 4 = 12$. Số này nhỏ hơn nhãn hiện tại của $E$ (là 14) nên ta đổi nhãn của $E$ thành $n_E = 12$.

Tính $n_D + w_{DT} = 8 + 3 = 11$. Số này nhỏ hơn nhãn hiện tại của $T$ (là $\infty$), nên đổi nhãn của $T$ thành $n_T = 11$. Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh $T$ có nhãn nhỏ nhất, nên $T$ là đỉnh gần $A$ thứ tư. Ta cố định nhãn và khoanh tròn đỉnh $T$. Nhìn ngược lại lên trên ta thấy $n_T = 11 = w_{AC} + w_{CD} + w_{DT} = l_{ACDT}$.



*Hình 11*

Đến đây suy ra, đường đi ngắn nhất từ $A$ đến $T$ là $ACDT$, với độ dài bằng 11 (Hình 11).

***Chú ý:*** Về sau, khi giải bài toán tìm đường đi ngắn nhất, ta chỉ cần vẽ trên một hình chung cho tất cả các bước. Chẳng hạn, trong lời giải trên, ta chỉ cần vẽ lần lượt trên cùng một hình để cuối cùng nhận được Hình 11.

Từ lời giải trên, ta có thể mô tả khái quát thuật toán (thuật toán Dijkstra) tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh $A$ đến đỉnh $T$ trên một đồ thị có trọng số như sau.

**Thuật toán** (tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh $A$ đến đỉnh $T$)

**Mở đầu** (cũng gọi là Bước 0)

Gán nhãn của $A$ bằng 0, các đỉnh khác bằng $\infty$. Khoanh tròn đỉnh $A$.

**Các bước lặp**

Trong mỗi bước lặp thực hiện các thao tác dưới đây:

– Gọi $U$ là đỉnh vừa được khoanh tròn ở bước trước. Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, xét lần lượt từng đỉnh $V$ kề với đỉnh $U$, tính $n_U + w_{UV}$, rồi so sánh số này với nhãn hiện tại $n_V$ của $V$. Nếu số đó nhỏ hơn thì đổi nhãn $n_V$ bằng số đó.

– So sánh nhãn của tất cả các đỉnh chưa khoanh tròn. Đỉnh nào có nhãn nhỏ nhất thì khoanh tròn đỉnh đó (nếu có nhiều đỉnh như vậy thì khoanh một đỉnh tùy ý trong số đó).

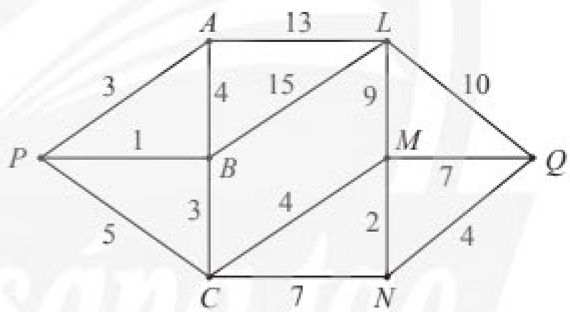
– Nếu đỉnh $T$ chưa được khoanh tròn thì thực hiện bước lặp tiếp theo, trái lại thì kết thúc các bước lặp.

**Kết luận**

Dò lại các bước lặp để viết được nhãn $n_T$ của $T$ dưới dạng tổng độ dài các cạnh. Từ đó nhận được đường đi ngắn nhất từ $A$ đến $T$ cùng với độ dài của nó.

***Chú ý:*** Dưới đây, để hình vẽ dễ nhìn, ta bỏ qua việc ghi nhãn $\infty$ cho các đỉnh trên hình vẽ.

***Ví dụ 3.*** Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh $P$ đến đỉnh $Q$ trong đồ thị có trọng số ở Hình 12.



*Hình 12*

***Giải***

Gán nhãn cho $P$ bằng 0 ($n_P = 0$), các đỉnh khác bằng $\infty$. Khoanh tròn đỉnh $P$.

Tại các đỉnh kề với $P$, gồm $A$, $B$ và $C$, lần lượt ghi các nhãn 3, 1 và 5 (lần lượt bằng $n_P + w_{PA}$, $n_P + w_{PB}$, $n_P + w_{PC}$). Trong các đỉnh khác $P$, đỉnh có nhãn bé nhất là $B$. Khoanh tròn đỉnh $B$ (đỉnh gần đỉnh $P$ nhất, chỉ tính các đỉnh khác đỉnh $P$).

Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh kề với $B$ gồm $A$, $L$ và $C$. Tại $A$ giữ nguyên nhãn 3, do $n_B + w_{BA} = 1 + 4 = 5 > 3$. Tại $L$, ghi nhãn 16 (bằng $n_B + w_{BL}$). Tại $C$, đổi nhãn 5 thành 4 (bằng $n_B + w_{BC}$). Lúc này, trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh $A$ có nhãn nhỏ nhất. Khoanh tròn đỉnh $A$ (đỉnh khác $P$ gần đỉnh $P$ thứ hai).

Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh kề với $A$ chỉ có $L$. Tại $L$, giữ nguyên nhãn 16, do $n_A + w_{AL} = 3 + 13 = 16$. Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh $C$ có nhãn nhỏ nhất. Khoanh tròn đỉnh $C$ (đỉnh gần đỉnh $P$ thứ ba).

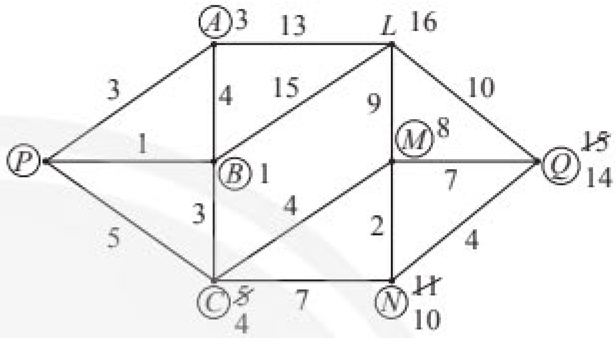
Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh kề với $C$ gồm $M$ và $N$. Tại $M$, ghi nhãn 8 (bằng $n_C + w_{CM}$). Tại $N$, ghi nhãn 11 (bằng $n_C + w_{CN}$). Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh $M$ có nhãn nhỏ nhất. Khoanh tròn đỉnh $M$ (đỉnh gần đỉnh $P$ thứ tư).

Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh kề với $M$ gồm $L$, $N$ và $Q$. Tại $L$, giữ nguyên nhãn 16, do $n_M + w_{ML} = 8 + 9 = 17 > 16$. Tại $N$, đổi nhãn 11 thành 10 (bằng $n_M + w_{MN}$). Tại $Q$, ghi nhãn 15 (bằng $n_M + w_{MQ}$). Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh $N$ có nhãn nhỏ nhất. Khoanh tròn đỉnh $N$ (đỉnh gần đỉnh $P$ thứ năm).

Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh kề với $N$ chỉ có $Q$. Tại $Q$, đổi nhãn 15 thành 14 (bằng $n_N + w_{NQ}$). Chỉ còn hai đỉnh $L$ và $Q$ chưa khoanh tròn, đỉnh $Q$ có nhãn nhỏ hơn. Khoanh tròn đỉnh $Q$ (đỉnh gần đỉnh $P$ thứ sáu).

Nhìn ngược lại các bước ở trên, ta thấy

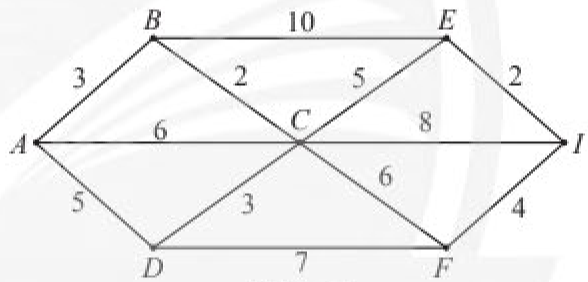
$$n_Q = 14 = w_{PB} + w_{BC} + w_{CM} + w_{MN} + w_{NQ} = l_{PBCMNQ}.$$



Hình 13

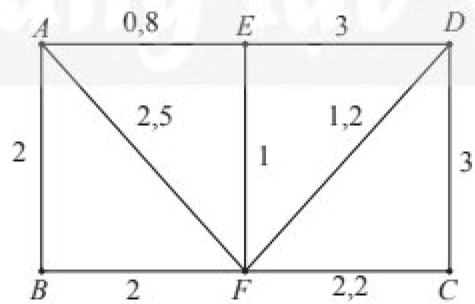
Suy ra $PBCMNQ$ là đường đi ngắn nhất từ $P$ đến $Q$, với độ dài bằng 14 (xem Hình 13).

Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh $A$ đến đỉnh $I$ trong đồ thị có trọng số ở Hình 14.



Hình 14

Trong đồ thị có trọng số ở Hình 15, mỗi cạnh biểu diễn một tuyến xe buýt giữa hai bến trong các bến xe $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ và $F$, trọng số của mỗi cạnh biểu diễn thời gian tính bằng giờ của tuyến xe buýt tương ứng. Một người cần ít nhất bao nhiêu thời gian để di chuyển từ bến $A$ đến bến $C$ bằng xe buýt của các tuyến trên? Biết rằng thời gian tại bến để chuyển tiếp từ tuyến này qua tuyến kia là không đáng kể.



Hình 15

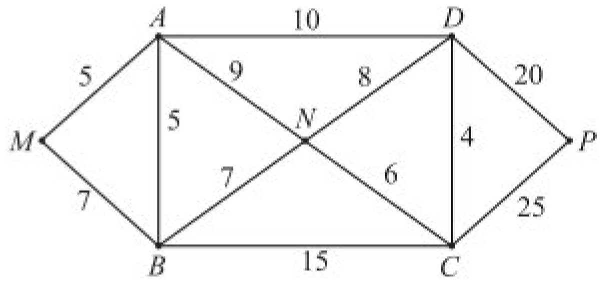
## BÀI TẬP

**1.** Cho đồ thị có trọng số như Hình 16.

a) Tính độ dài các đường đi *ABCD*, *MBNCP*.

b) Chỉ ra ba đường đi khác nhau từ *M* đến *N* và tính độ dài của chúng.

c) *MBC* có phải là đường đi ngắn nhất từ *M* đến *C* không?



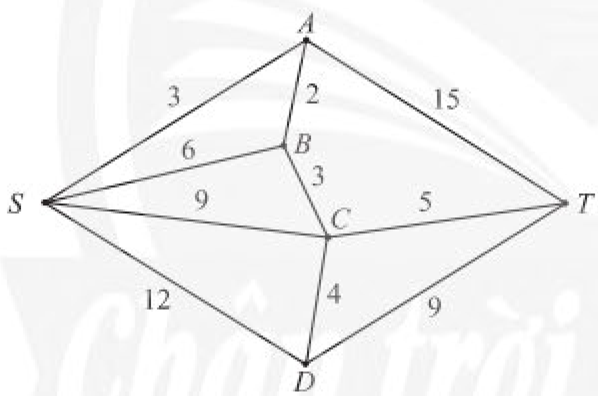

Hình 16

**2.** Bảng 2 cho biết thời gian di chuyển tính bằng giờ của các tuyến xe buýt giữa các bến xe *A*, *B*, *C*, *D*, *E* (số nằm tại ô giao của hàng và cột là số giờ cần để xe buýt đi từ bến này đến bến kia, dấu × biểu thị giữa hai bến này không có tuyến xe buýt). Hãy vẽ một đồ thị có trọng số biểu diễn các tuyến xe buýt cùng thời gian di chuyển của mỗi tuyến.

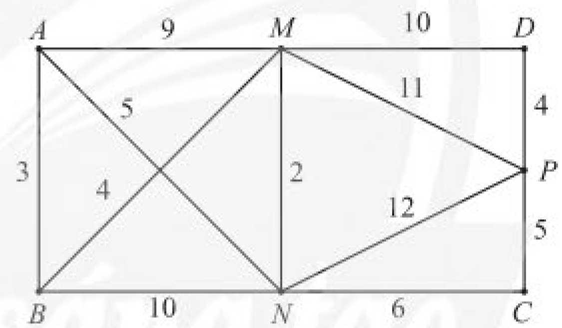
Bảng 2

| | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* |
|---|---|---|---|---|---|
| *A* | | 2,5 | 4 | 3 | 1,5 |
| *B* | | | 3 | × | 2 |
| *C* | | | | 3,5 | 3 |
| *D* | | | | | 2,5 |
| *E* | | | | | |

**3.** Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh *S* đến *T* trong đồ thị có trọng số ở Hình 17.



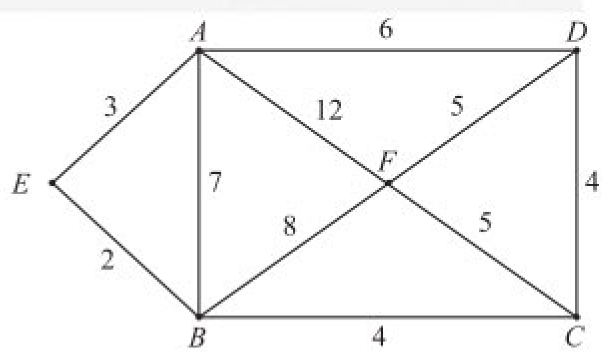

Hình 17




Hình 18

**4.** Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh *A* đến *P* trong đồ thị có trọng số ở Hình 18.

**5.** Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh *A* đến từng đỉnh (khác *A*) trong đồ thị có trọng số ở Hình 19.




Hình 19

# BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 2

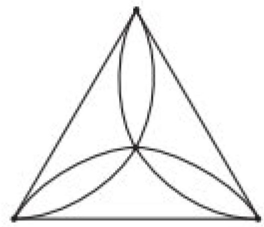
## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**Chọn phương án đúng.**

1. Số đỉnh, số cạnh của đồ thị ở Hình 1 lần lượt là

A. 3 đỉnh, 8 cạnh. B. 4 đỉnh, 8 cạnh.

C. 3 đỉnh, 9 cạnh. D. 4 đỉnh; 9 cạnh.



*Hình 1*

2. Tổng tất cả bậc của các đỉnh của đồ thị ở Hình 1 là

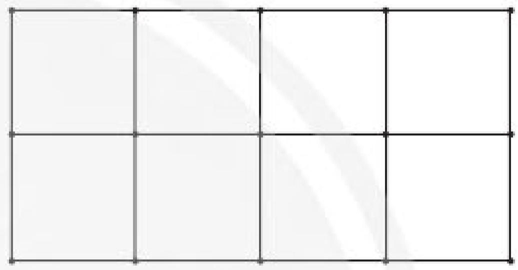
A. 20. B. 18.

C. 12. D. 9.

3. Đồ thị ở Hình 2 có bao nhiêu đỉnh bậc lẻ?

A. 6. B. 7.

C. 8. D. 9.



*Hình 2*

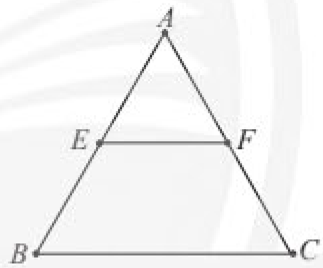
4. Cho đồ thị như Hình 3, phát biểu nào sau đây đúng?

A. Đồ thị có chu trình Euler.

B. Đồ thị đường đi Euler xuất phát từ đỉnh $A$.

C. Đồ thị đường đi Euler xuất phát từ đỉnh $E$.

D. Đồ thị không có đường đi Euler.




*Hình 3*

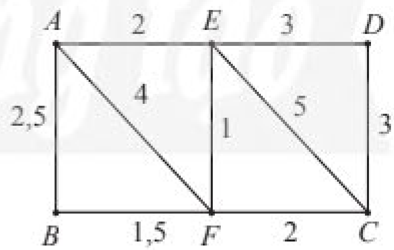
5. Cho đồ thị có trọng số như Hình 4. Đường đi ngắn nhất từ $A$ đến $C$ là

A. $AEC$.

B. $AEFC$.

C. $AC$.

D. $AFC$.

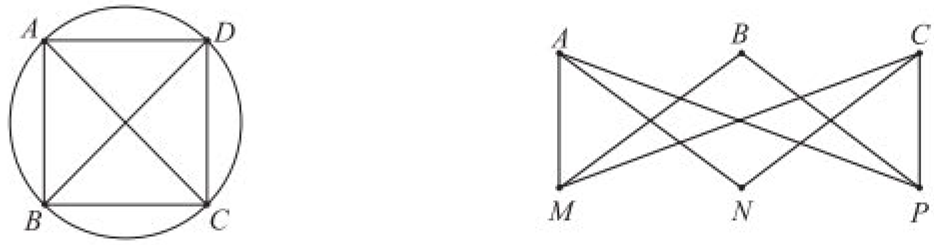



*Hình 4*

## BÀI TẬP TỰ LUẬN

6. Cho tập hợp số $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Hãy vẽ đồ thị $G$ có các đỉnh biểu diễn các phần tử của $V$, hai đỉnh biểu diễn hai số $m$ và $n$ kề nhau nếu $m + n$ là bội của 3.

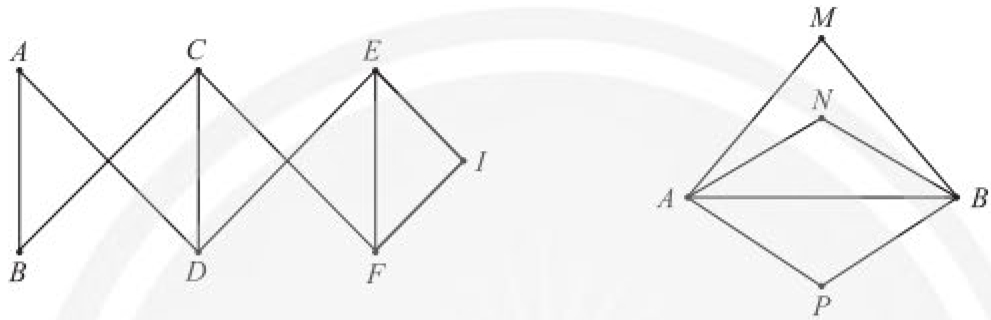
7. Mỗi đồ thị trong Hình 5 có chu trình Euler không? Nếu có hãy chỉ ra một chu trình như vậy. Nếu không, đồ thị có đường đi Euler không? Nếu có, hãy chỉ ra một đường đi như vậy.




a) Đồ thị G b) Đồ thị H

Hình 5

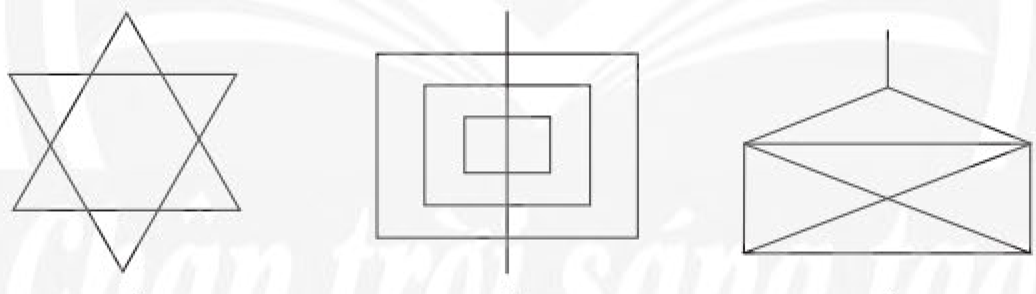
**8.** Mỗi đồ thị trong Hình 6 có chu trình Hamilton không? Nếu có hãy chỉ ra một chu trình như vậy. Nếu không, đồ thị có đường đi Hamilton không? Nếu có, hãy chỉ ra một đường đi như vậy.




a) Đồ thị G b) Đồ thị H

Hình 6

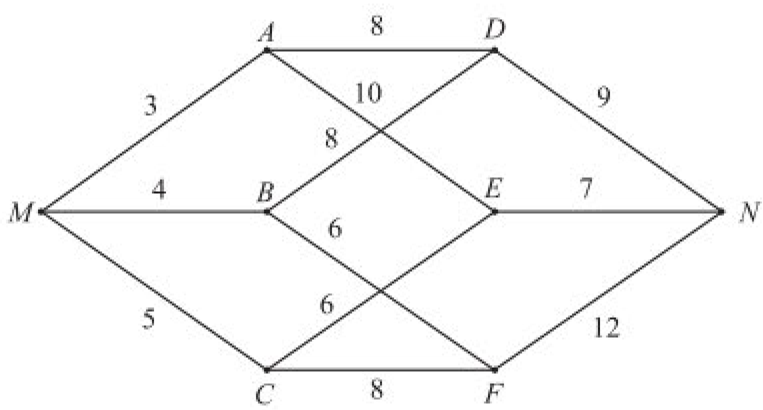
**9.** Có thể vẽ mỗi hình sau đây bằng một nét liền, không nhấc bút khỏi giấy, không vẽ lại đoạn đường nào hai lần không? Nếu có, hãy chỉ ra một cách vẽ.



a) b) c)

Hình 7

**10.** Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh $M$ đến $N$ trong đồ thị có trọng số sau:

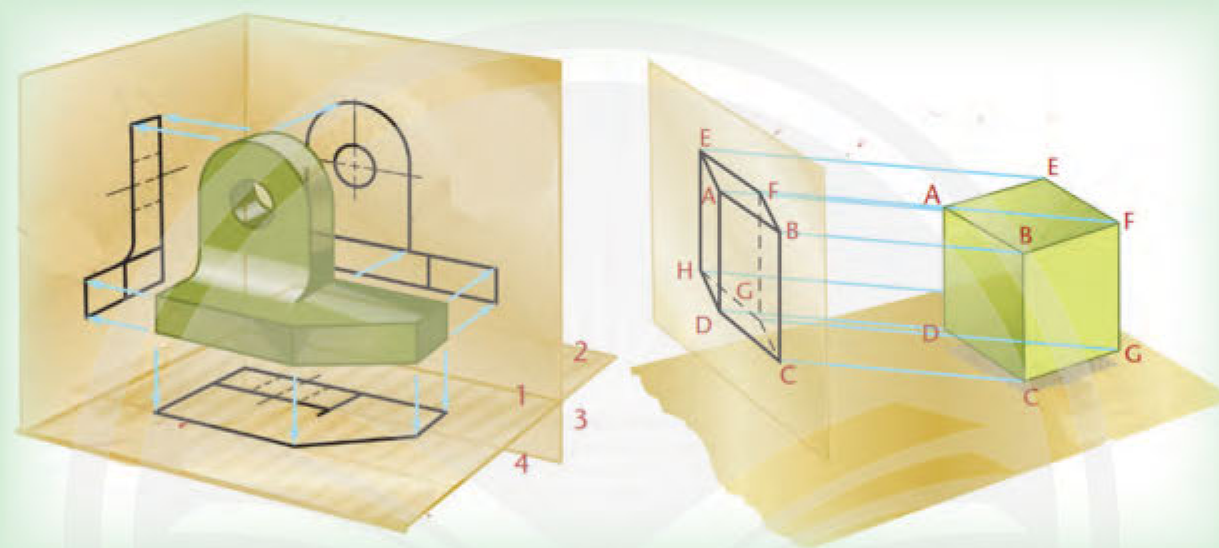



Hình 8

# *Chuyên đề 3*

# MỘT SỐ YẾU TỐ VẼ KĨ THUẬT

**Vẽ kĩ thuật thường được xem là ngôn ngữ của những người làm kĩ thuật. Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ bước đầu tìm hiểu về một số yếu tố vẽ kĩ thuật như: hình biểu diễn của một hình, khối; một số nguyên tắc cơ bản của vẽ kĩ thuật và cách đọc thông tin từ một số bản vẽ kĩ thuật đơn giản. Chúng ta cũng sẽ học cách vẽ được các bản vẽ kĩ thuật đơn giản của các hình, khối đã học qua phép chiếu song song và phép chiếu vuông góc.**




Sau chuyên đề này, bạn có thể:

– Nhận biết được hình biểu diễn của một hình, khối.

– Nhận biết được một số nguyên tắc cơ bản của vẽ kĩ thuật.

– Đọc được thông tin từ một số bản vẽ kĩ thuật đơn giản.

– Vẽ được bản vẽ kĩ thuật đơn giản (gắn với phép chiếu song song và phép chiếu vuông góc).

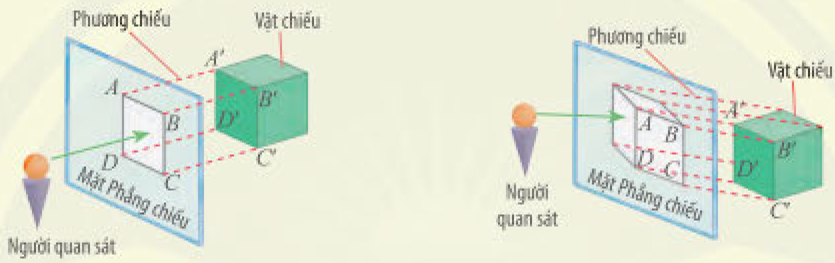
# Bài 1. Hình biểu diễn của một hình, khối

**Từ khoá:** **Phép chiếu vuông góc; Phép chiếu song song; Hình biểu diễn; Hình chiếu vuông góc; Hình chiếu trục đo.**

Trong thực tế, người ta thường phải biểu diễn các vật thể lên mặt giấy để mô tả, giải thích, diễn đạt ý tưởng thiết kế cho người thi công. Trong hai hình biểu diễn của khối lập phương dưới đây:

– Hình nào giúp người thi công dễ hình dung được vật thật trong không gian?

– Hình nào giúp người thi công biết được kích thước một mặt của vật thật?

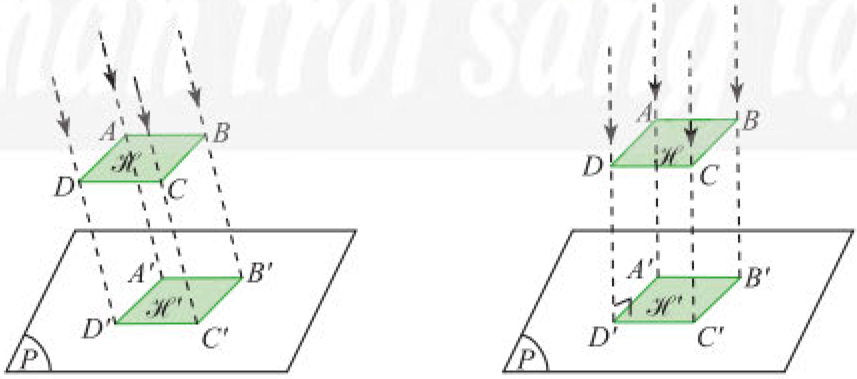



a) b)

## 1. Phép chiếu và hình biểu diễn

### Phép chiếu song song và phép chiếu vuông góc

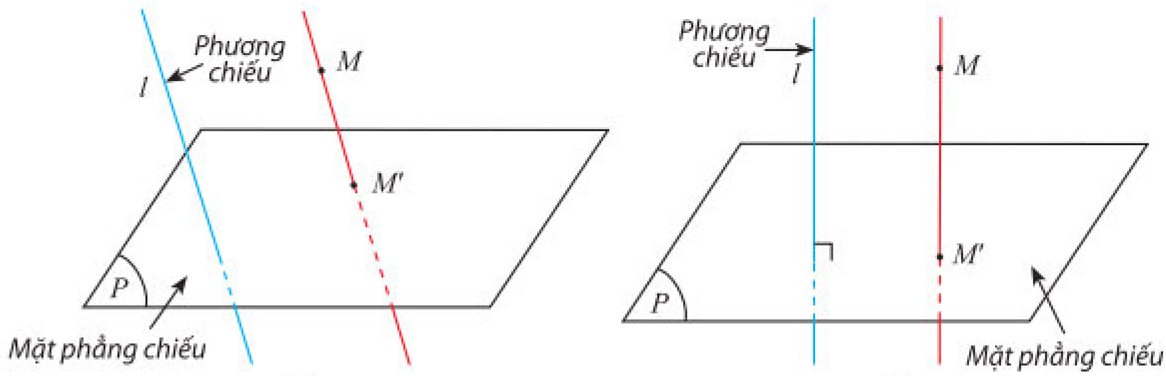
Hình 1 thể hiện hai cách chiếu hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$ lên mặt phẳng $(P)$. Mô tả cách vẽ các đỉnh của hình chiếu $\mathscr{H}'$ trong mỗi trường hợp.




a) b)

*Hình 1*

Ở 1, ta dùng các phép chiếu song song và phép chiếu vuông góc để chiếu hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$ lên mặt phẳng $(P)$. Tương tự, trong cuộc sống, phép chiếu song song và phép chiếu vuông góc thường được ứng dụng để vẽ các hình, khối trong các bản vẽ kĩ thuật.



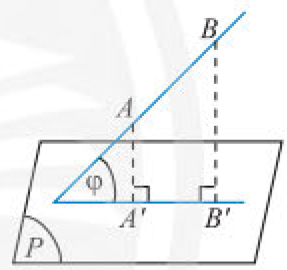

a) b)

Hình 2

– Trong không gian, cho mặt phẳng $(P)$ và đường thẳng $l$ cắt $(P)$. Với mỗi điểm $M$ trong không gian, vẽ một đường thẳng đi qua $M$ và song song hoặc trùng với $l$. Đường thẳng này cắt $(P)$ tại $M'$. Phép cho tương ứng mỗi điểm $M$ trong không gian với điểm $M'$ trong $(P)$ được gọi là ***phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l***. Khi đó, mặt phẳng $(P)$ được gọi là ***mặt phẳng chiếu*** và đường thẳng $l$ được gọi là ***phương chiếu*** của phép chiếu song song.

– Nếu phương chiếu vuông góc với mặt phẳng chiếu $(P)$ thì phép chiếu song song được gọi là ***phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P)***.

***Chú ý:*** Phép chiếu vuông góc có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song. Ngoài ra, do phép chiếu vuông góc có phương chiếu vuông góc với mặt phẳng chiếu nên phép chiếu vuông góc có thêm một số tính chất. Chẳng hạn như: Nếu đường thẳng đi qua hai điểm $A$, $B$ hợp với mặt phẳng chiếu $(P)$ một góc $\varphi$. Gọi $A'$ và $B'$ là hình chiếu vuông góc của $A$ và $B$ xuống $(P)$ thì ta có $A'B' = AB.\cos\varphi$.



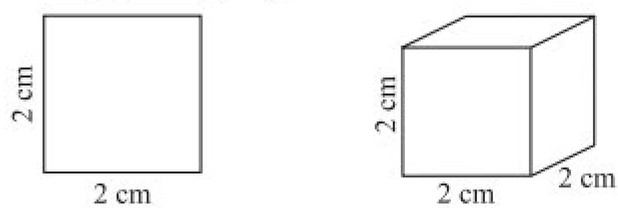

Hình 3

### Hình biểu diễn của một hình, khối

***Hình biểu diễn*** của một hình, khối $\mathscr{H}$ trong không gian là ***hình chiếu*** song song hoặc ***hình chiếu*** vuông góc của $\mathscr{H}$ lên mặt phẳng.

***Chú ý:*** Khi tạo hình biểu diễn, ta cần chú ý ba yếu tố:
– Đối tượng cần chiếu (vật chiếu);
– Mặt phẳng chiếu;
– Phương chiếu.

***Ví dụ 1.*** Dưới đây là hai hình biểu diễn của hình lập phương có độ dài cạnh bằng 2 cm. Chỉ ra phép chiếu được sử dụng tương ứng với mỗi hình.




a) b)

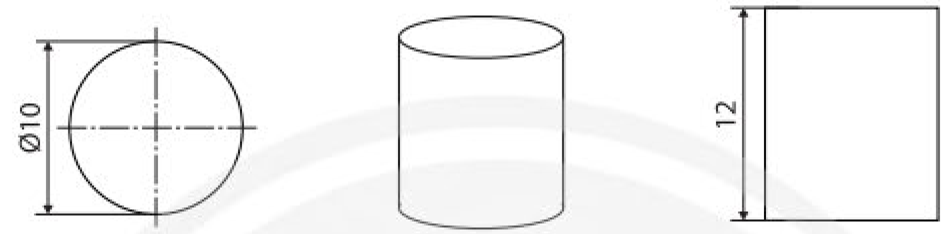
Hình 4

*Giải*

a) Hình 4a là hình vuông có cạnh 2 cm nên nó là hình chiếu của hình lập phương qua phép chiếu vuông góc có mặt phẳng chiếu song song với một mặt của hình lập phương.

b) Đối với Hình 4b phép chiếu được sử dụng là phép chiếu song song, vì bảo toàn tính song song của các cạnh.

1 Dưới đây là ba hình biểu diễn của hình trụ có độ dài đường kính đáy bằng 10 cm và chiều cao bằng 12 cm. Chỉ ra phép chiếu được sử dụng tương ứng với mỗi hình.




a) b) c)

*Hình 5*

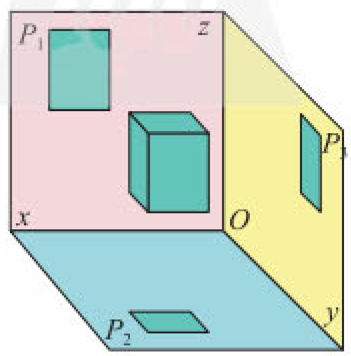
1 Phép chiếu nào được sử dụng để vẽ các hình biểu diễn của bàn làm việc trong Hình 6?

a) b) c)

*Hình 6*

## 2. Phương pháp chiếu vuông góc

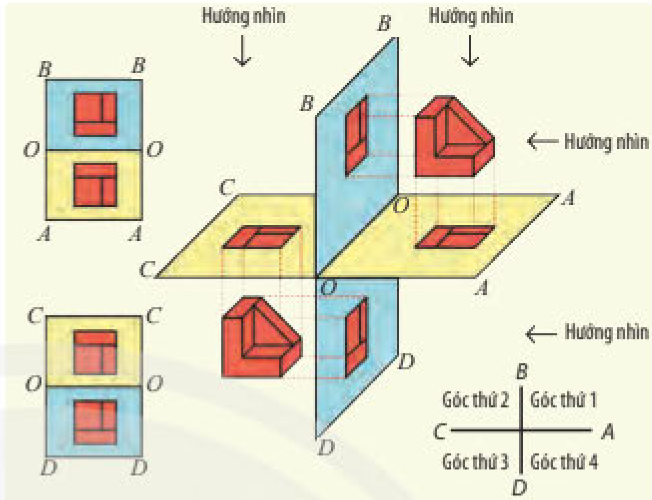
2 Trong Hình 7, theo em, nếu chỉ dùng một hình chiếu vuông góc của hình hộp chữ nhật $\mathscr{H}$ trên một trong ba mặt phẳng đôi một vuông góc $(P_1)$, $(P_2)$, $(P_3)$ có đủ để chế tạo được $\mathscr{H}$ không?




*Hình 7*

Trong vẽ kĩ thuật, việc biểu diễn các hình, khối lên bản vẽ thông qua các phép chiếu vuông góc thường sẽ gặp một số hạn chế nhất định. Chẳng hạn như hình biểu diễn chỉ thể hiện được một mặt của vật thật dẫn đến thi công không chính xác. Để khắc phục, người ta thường giải quyết bằng cách chiếu vuông góc vật cần biểu diễn lên ba mặt phẳng đôi một vuông góc để được ba hình chiếu vuông góc và sắp đặt ba hình chiếu này lên cùng một mặt phẳng, hình biểu diễn được tạo ra theo cách này được gọi là hình chiếu vuông góc của vật thể.

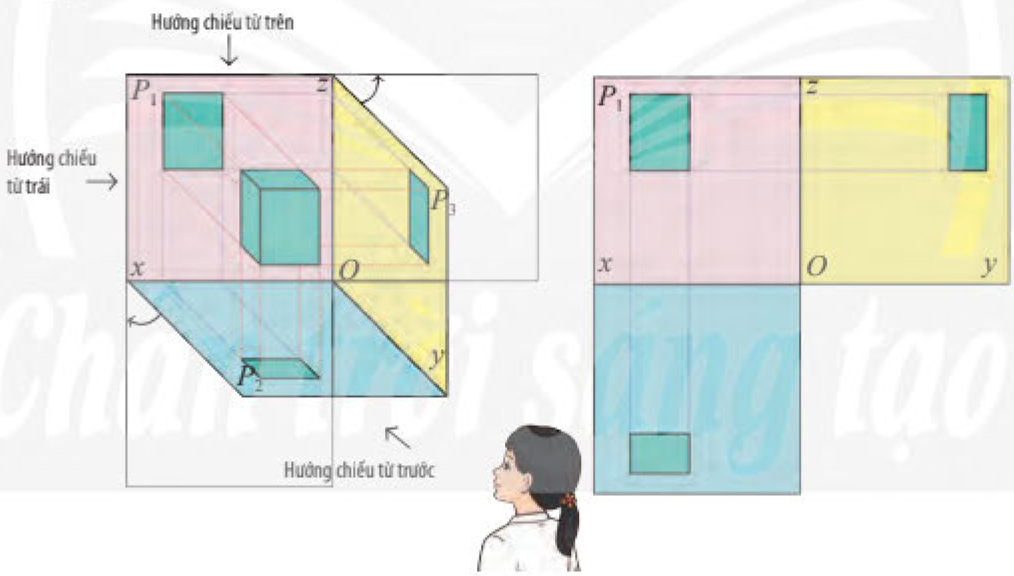
Vẽ hai mặt phẳng vuông góc chia không gian thành bốn góc nhị diện vuông (gọi đơn giản là góc phần tư). Tuỳ theo cách đặt vật vào góc phần tư mà người ta quy ước thành những phương pháp chiếu góc. Hiện nay có hai phương pháp chiếu vuông góc thông dụng là phương pháp chiếu góc thứ nhất và phương pháp chiếu góc thứ ba (Hình 8). Trong cuốn sách này, ta sử dụng phương pháp chiếu góc thứ nhất theo tiêu chuẩn Quốc gia Việt Nam (TCVN) và ISO.



*Hình 8*

## Phương pháp chiếu góc thứ nhất (PPCG1)

Để sử dụng PPCG1 người ta sẽ dùng ba hình chiếu là ***chiếu đứng*** (hướng chiếu từ mặt trước ra sau), ***chiếu cạnh*** (hướng chiếu từ trái sang) và ***chiếu bằng*** (hướng chiếu từ trên nhìn xuống).



*Hình 9. Phương pháp chiếu góc thứ nhất (PPCG1)*

Để có được các hình chiếu đứng, hình chiếu cạnh, hình chiếu bằng cần chú ý:

– Hình, khối được đặt giữa người quan sát và mặt phẳng chiếu.

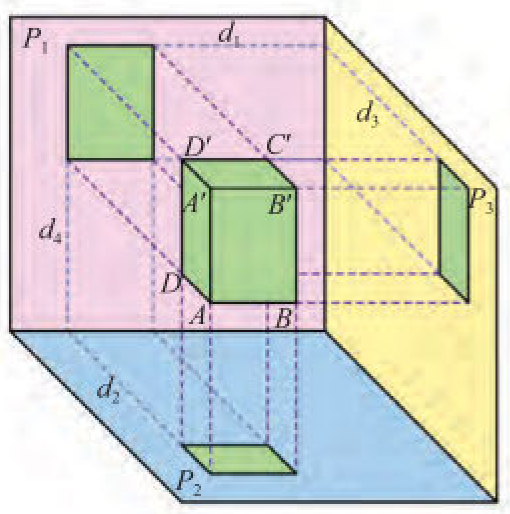
– Hình, khối được đặt trong một góc tạo thành bởi các mặt phẳng hình chiếu đứng, hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh vuông góc với nhau từng đôi một.

– Mặt phẳng chiếu bằng mở xuống dưới, mặt phẳng chiếu cạnh mở sang phải để các hình chiếu cùng nằm trên mặt phẳng chiếu đứng là mặt phẳng bản vẽ. Hình chiếu bằng được đặt dưới hình chiếu đứng, hình chiếu cạnh được đặt bên phải hình chiếu đứng.

Quan sát Hình 10 và cho biết:

– Trong ba cạnh $AB$, $AA'$ và $AD$ của hình hộp chữ nhật, cạnh nào song song với một trong ba mặt phẳng chiếu $(P_1)$, $(P_2)$, $(P_3)$?

– Tìm hai giao tuyến của $(P_1)$ và $(P_2)$ với mặt phẳng đi qua điểm $D$ và vuông góc với cả $(P_1)$ và $(P_2)$.



*Hình 10*

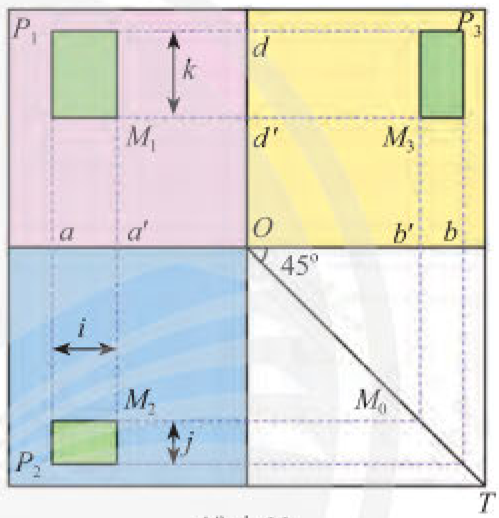
**Kích thước và đường gióng trên bản vẽ (Hình 11)**

Trong hình chiếu vuông góc của khối hộp chữ nhật $(\mathscr{H})$ (Hình 11).

– Các cạnh của khối song song với mặt phẳng chiếu nào thì được bảo toàn kích thước trên hình chiếu trong mặt phẳng đó của bản vẽ.

– Giao tuyến của một mặt phẳng đi qua đỉnh của khối $(\mathscr{H})$ và vuông góc với 2 mặt phẳng chiếu được biểu diễn thành một đường thẳng trên bản vẽ và được gọi là đường gióng, các đường gióng song song hoặc vuông góc với nhau.

– Khoảng cách giữa các đường gióng song song cho ta kích thước thật của khối và được biểu diễn bởi các mũi tên nhọn hai đầu (các mũi tên $i$, $j$, $k$ trên Hình 11).



*Hình 11*

– Đối với một số hình, khối đơn giản, khi biết hai trong ba hình chiếu, ta có thể dùng các đường gióng kết hợp với đường phân giác $OT$ trên bản vẽ để vẽ hình chiếu còn lại.

***Ví dụ 2.***

a) Trên Hình 10, độ dài cạnh $AB$ được bảo toàn trên các hình chiếu nào của bản vẽ ở Hình 11? Giải thích.

b) Trên Hình 10, hai giao tuyến $d_1$ và $d_3$ được biểu diễn thành đường gióng nào trên bản vẽ ở Hình 11?

c) Trên Hình 11, nêu cách vẽ điểm $M_3$ trên bản vẽ khi cho biết điểm $M_1$ và $M_2$ trên hình chiếu đứng và hình chiếu bằng.

***Giải***

a) Độ dài cạnh $AB$ được bảo toàn trên các hình chiếu đứng và hình chiếu bằng vì $AB$ song song với $(P_1)$ và $(P_2)$.

b) Hai giao tuyến $d_1$ và $d_2$ được biểu diễn thành đường gióng $d$ trên bản vẽ.

c)

– Từ $M_1$ vẽ đường gióng $d'$ vuông góc với $M_1M_2$;

– Phác hoạ đường gióng qua $M_2$, song song với $d'$ và cắt $OT$ tại $M_0$;

– Phác hoạ đường gióng $b'$ qua $M_0$, song song với $M_1M_2$. Giao điểm giữa $b'$ và $d'$ là điểm cần vẽ.

2 a) Trên Hình 10, độ dài cạnh $AD$ được bảo toàn trên các hình chiếu nào của bản vẽ? Tại sao?

b) Trên Hình 11, tìm hai giao tuyến được biểu diễn thành đường gióng $a$ trên bản vẽ.

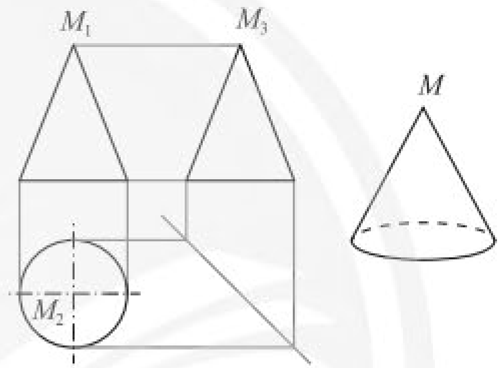
c) Trên Hình 11, khoảng cách giữa hai đường gióng nào cho ta chiều cao $AA'$ của vật ở Hình 10?

2 Trong bản vẽ biểu diễn hình nón trong Hình 12.

a) Khoảng cách giữa hai đường gióng nào cho ta biết chiều cao của hình chóp?

b) Khoảng cách giữa hai đường gióng nào cho ta biết độ dài đường kính đáy của hình chóp?

c) Nêu cách xác định điểm $M_3$ biểu diễn đỉnh $M$ của hình chóp trong hình chiếu cạnh khi biết hai điểm $M_1$ và $M_2$ biểu diễn $M$ trong hình chiếu đứng và hình chiếu bằng.

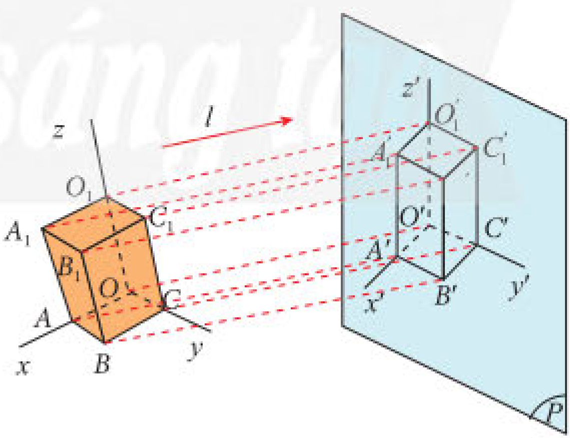


Hình 12

## 3. Phương pháp chiếu trục đo

### Hình chiếu trục đo

4 Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O_1A_1B_1C_1$. Ba tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ lần lượt chứa ba cạnh $OA$, $OC$, $OO_1$. Cho mặt phẳng ($P$) và đường thẳng $l$ không song song với ($P$). Tìm ảnh của hình hộp chữ nhật $OABC.O_1A_1B_1C_1$ và ảnh của các tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ qua phép chiếu song song theo phương $l$ lên mặt phẳng ($P$).



Hình 13

Phép chiếu vuông góc xuống ba mặt phẳng vuông góc sẽ khó cho ta hình dung được hình ảnh ba chiều của vật chiếu như nhìn bằng mắt thường. Để khắc phục, người ta tìm cách chiếu song song vật xuống một mặt phẳng theo phương chiếu để có thể tính toán được độ biến dạng theo ba trục thể hiện ba chiều của vật. Hình biểu diễn được tạo ra theo cách này gọi là hình chiếu trục đo.

Cho một hình, khối $\mathscr{H}$ có gắn ba tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ đôi một vuông góc biểu diễn theo ba chiều dài, rộng và cao của $\mathscr{H}$. Cho mặt phẳng $(P)$ và cho một đường thẳng $l$ không song song với $(P)$ và không song song với các tia $Ox$, $Oy$, $Oz$.

***Hình chiếu trục đo*** của một hình, khối $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng $(P)$ theo phương chiếu $l$ là ảnh $\mathscr{H}'$ của $\mathscr{H}$ gắn với ảnh $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ của ba tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ qua phép chiếu song song theo phương $l$ lên mặt phẳng $(P)$.

***Ví dụ 3.*** Tìm hình chiếu trục đo của hình hộp chữ nhật $OABC.O_1A_1B_1C_1$ gắn với ba tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ đôi một vuông góc biểu diễn theo chiều dài, rộng và cao của hộp chữ nhật đã cho (Hình 13).

***Giải***

Hình chiếu trục đo của hình hộp chữ nhật $OABC.O_1A_1B_1C_1$ gắn với 3 tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ đôi một vuông góc trên mặt phẳng $(P)$ theo phương $l$ trong Hình 13 được biểu diễn bởi các điểm $O'A'B'C'.O_1'A_1'B_1'C_1'$ gắn với ba tia $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$.

### Các thông số cơ bản của hình chiếu trục đo

Trong một phép chiếu trục đo:

- Các tia $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ (hình chiếu của các tia $Ox$, $Oy$, $Oz$) được gọi là các *trục đo*. Góc giữa các trục đo ($\widehat{x'O'y'}$; $\widehat{y'O'z'}$; $\widehat{z'O'x'}$) gọi là các *góc trục đo*.
- Tỉ số giữa độ dài hình chiếu của các đoạn thẳng nằm trên các tia $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ và độ dài thực của nó gọi là *hệ số biến dạng*, có ba hệ số biến dạng như sau:

$$\frac{O'A'}{OA} = p \text{ là hệ số biến dạng theo tia } O'x',$$

$$\frac{O'C'}{OC} = q \text{ là hệ số biến dạng theo tia } O'y',$$

$$\frac{O'O_1'}{OO_1} = r \text{ là hệ số biến dạng theo tia } O'z'.$$

*Góc trục đo* và *hệ số biến dạng* là hai thông số cơ bản của hình chiếu trục đo. Nhờ vào việc thay đổi các thông số cơ bản này mà ta có được nhiều hình chiếu trục đo khác nhau. Trong bản vẽ kĩ thuật, người ta thường dùng hình chiếu trục đo vuông góc đều.

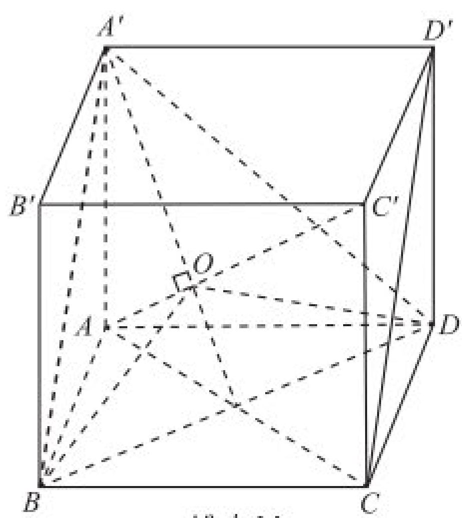
### Hình chiếu trục đo vuông góc đều

5 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng đơn vị (Hình 14).

a) Chỉ ra rằng $AC' \perp (A'BD)$.

b) Gọi $O$ là tâm của tam giác đều $A'BD$. Hình chiếu vuông góc của ba đoạn $AB$, $AD$ và $AA'$ lên $(A'BD)$ có bằng nhau không?

c) Chỉ ra rằng $\widehat{BOD} = \widehat{DOA'} = \widehat{A'OB} = 120^\circ$.



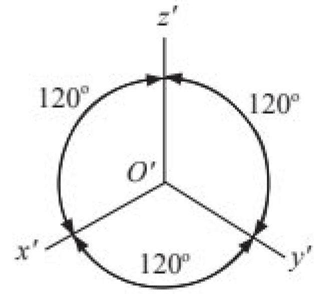
Hình 14

Hình chiếu trục đo gọi là ***vuông góc đều*** nếu phương chiếu vuông góc với mặt phẳng hình chiếu ($l \perp (P)$) và có các thông số cơ bản như sau:

– Ba hệ số biến dạng bằng nhau ($p = q = r$).

– Số đo ba góc trục đo:

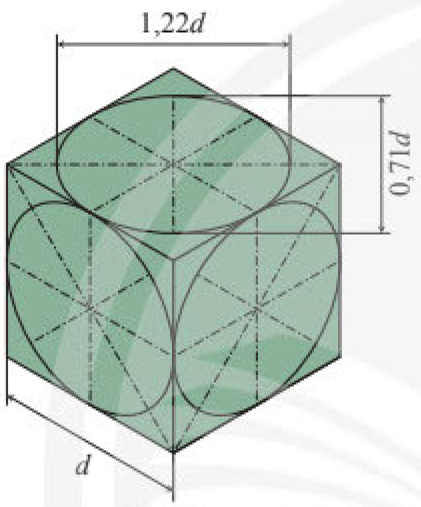
$$\widehat{x'O'y'} = \widehat{y'O'z'} = \widehat{z'O'x'} = 120^\circ.$$



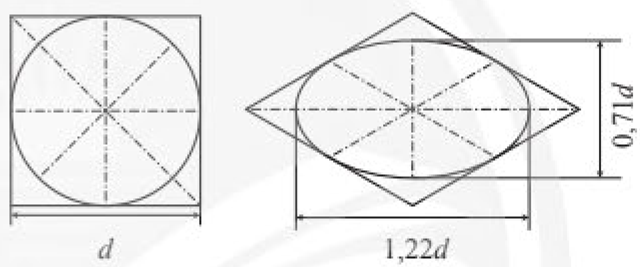

$p : q : r = 1 : 1 : 1$

*Hình 15. Góc trục đo và hệ số biến dạng của hình chiếu trục đo vuông góc đều*

***Ví dụ 4.*** Trong hình chiếu trục đo vuông góc đều biểu diễn hình lập phương cạnh $d$ với ba mặt có ba đường tròn nội tiếp (Hình 16). Chứng minh elip biểu diễn các đường tròn này có kích thước trục lớn và trục bé gần bằng $1{,}22d$ và $0{,}71d$.




*Hình 16*




*Hình 17*

**Giải**

Gọi tên các điểm như Hình 18. Ta cần chứng minh $A_1A_2 \approx 1{,}22d$ và $B_1B_2 \approx 0{,}71d$.

Do phép chiếu song song bảo toàn tỉ số các đoạn thẳng cùng phương nên ta có: $\dfrac{A_1A_2}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Do đó, $A_1A_2 = \dfrac{AC}{\sqrt{2}}$.

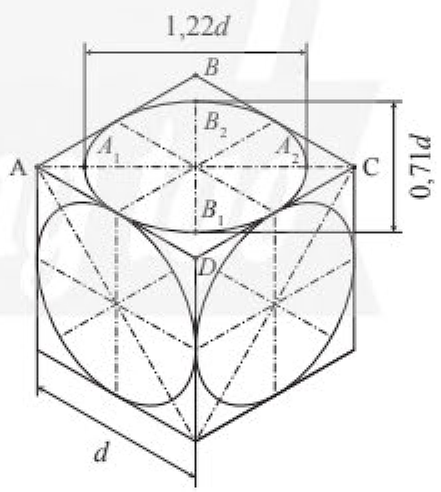
Tam giác cân $ADC$ có $\widehat{ADC} = 120^\circ$, $DA = DC = d$, suy ra $AC = d\sqrt{3}$.

Vậy $A_1A_2 = d\sqrt{\dfrac{3}{2}} \approx 1{,}22d$.

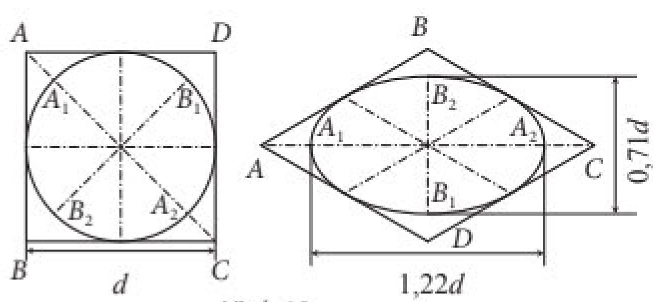
Tương tự, ta cũng có: $B_1B_2 = \dfrac{BD}{\sqrt{2}}$.

Tam giác $ABD$ là tam giác đều có $BD = AD = AB = d$,

suy ra $B_1B_2 = \dfrac{d}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71d$.



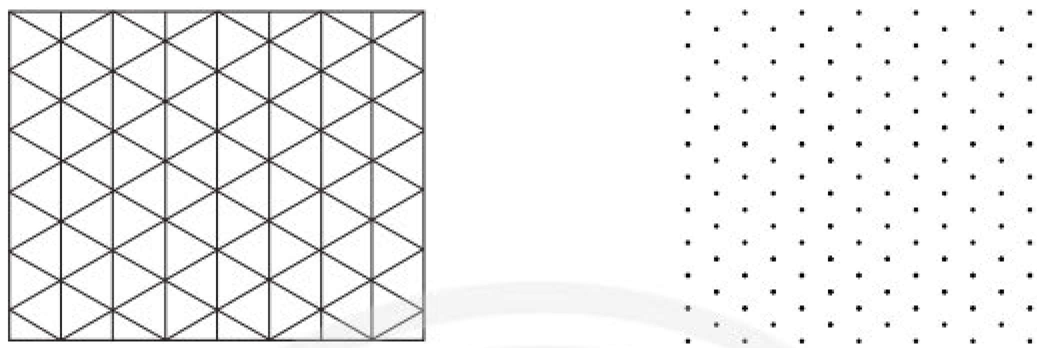

*Hình 18*




*Hình 19*

### Giấy kẻ ô li vẽ hình chiếu trục đo vuông góc đều

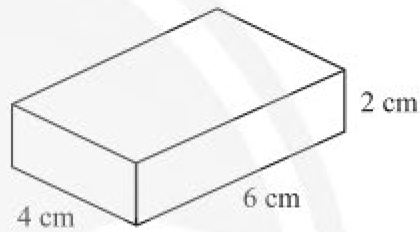
Để dễ hình dung các hình chiếu, người ta dùng giấy kẻ ô li có vẽ sẵn lưới tam giác đều (Hình 20a) hoặc có chấm đỉnh các tam giác đều của lưới (Hình 20b) để vẽ hình đồng dạng với các hình chiếu trục đo vuông góc đều của các vật thể. Mỗi cạnh của tam giác đều quy ước biểu diễn một độ dài cụ thể.



a) b)

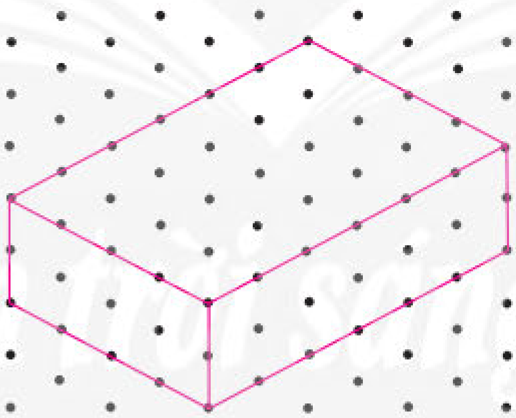
*Hình 20*

***Ví dụ 5.*** Vẽ hình biểu diễn của hình hộp chữ nhật với ba kích thước như trong Hình 21 lên giấy kẻ ô li với quy ước khoảng cách giữa hai chấm biểu diễn độ dài 1 cm.

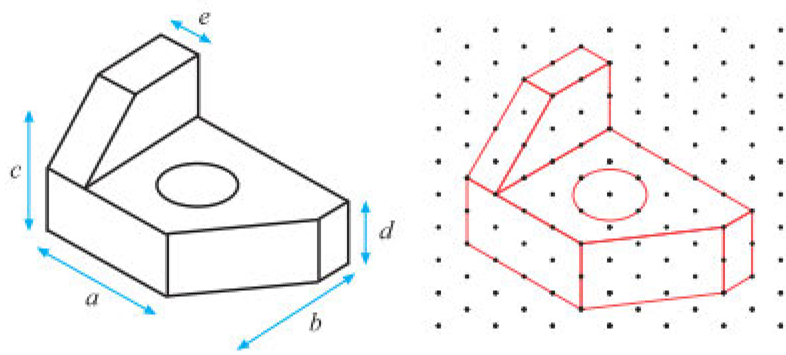



*Hình 21*

***Giải***



***Ví dụ 6.*** Tìm các kích thước $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ của chi tiết cơ khí trong Hình 22a có hình biểu diễn được vẽ trên giấy kẻ ô li trên Hình 22b với quy ước mỗi cạnh của tam giác đều biểu diễn độ dài 1 cm.




a) b)

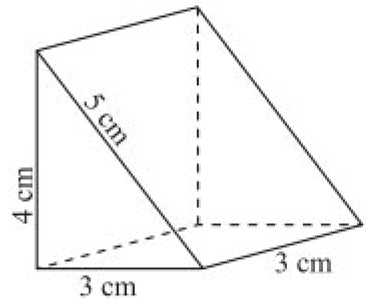
*Hình 22*

*Giải*

Do mỗi cạnh tam giác biểu diễn độ dài 1 cm nên ta có:

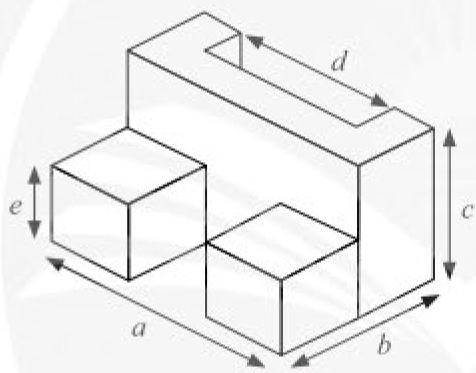
Chiều dài $a = 4$ cm; chiều rộng $b = 4$ cm; chiều cao $c = 4$ cm; bề dày $d = 2$ cm; bề dày $e = 1$ cm.

**3** Vẽ trên giấy kẻ ô li hình biểu diễn của hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông với các kích thước được cho như trong Hình 23 (quy ước mỗi cạnh của tam giác đều biểu diễn độ dài 1 cm).

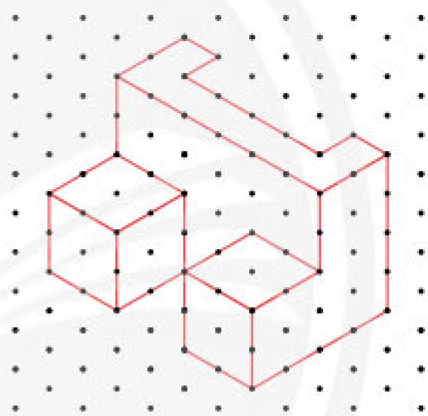



*Hình 23*

**3** Tìm các kích thước $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ của chi tiết cơ khí trong Hình 24a có hình biểu diễn được vẽ trên giấy kẻ ô li là Hình 24b với quy ước mỗi cạnh của tam giác đều biểu diễn độ dài 1 cm.




*a)*



*b)*

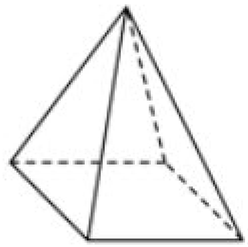
*Hình 24*

## BÀI TẬP

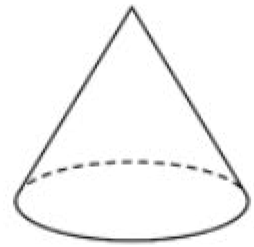
**1.** Vẽ phác hoạ hình chiếu vuông góc của:

a) Khối chóp tứ giác đều (Hình 25).

b) Khối nón tròn xoay (Hình 26).

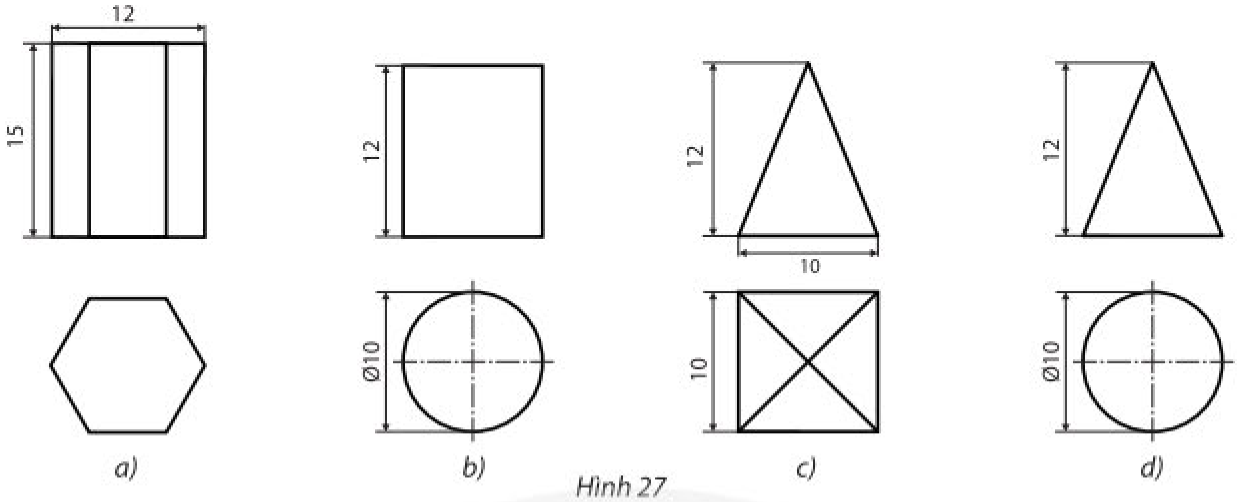


*Hình 25*



*Hình 26*

**2.** Mô tả vật thể trong không gian có hai hình chiếu vuông góc trong Hình 27.



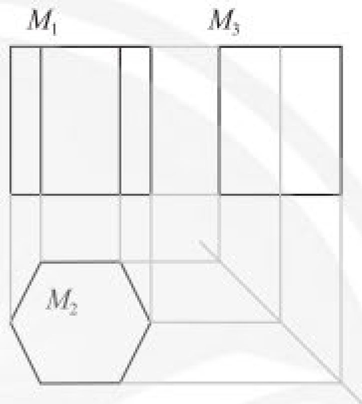

Hình 27

**3.** Trong bản vẽ biểu diễn hình lăng trụ lục giác đều trong Hình 28.

a) Khoảng cách giữa hai đường gióng nào cho ta biết chiều cao của lăng trụ?

b) Khoảng cách giữa hai đường gióng nào cho ta biết độ dài cạnh đáy của lăng trụ?

c) Nêu cách xác định điểm $M_3$ biểu diễn đỉnh $M$ của đáy trên của lăng trụ khi biết $M_1$ và $M_2$ biểu diễn $M$ trong hình chiếu đứng và hình chiếu bằng.



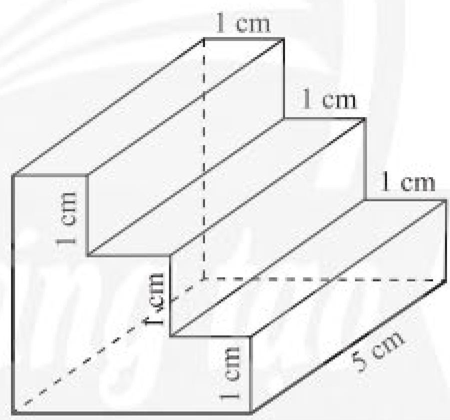

Hình 28

**4.** Vẽ hình chiếu vuông góc của các hình sau:

a) Hình hộp chữ nhật có ba kích thước 2 cm; 4 cm; 6 cm.

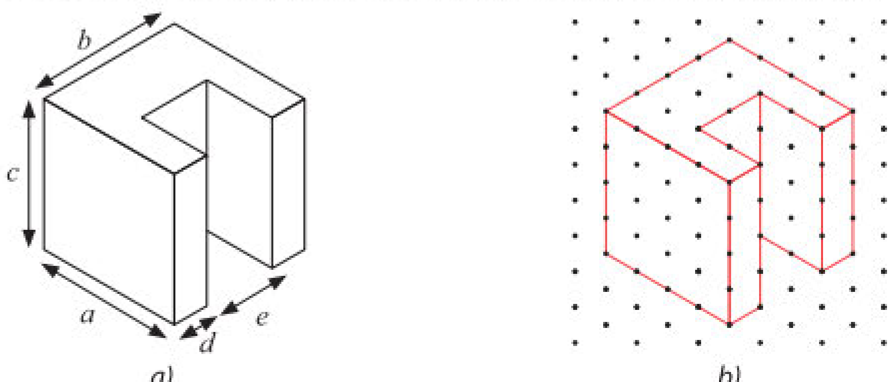
b) Hình trụ rỗng tròn xoay có chiều cao 6 cm và bán kính đáy ngoài 6 cm, bán kính đáy trong 4 cm.

**5.** Dùng giấy kẻ ô li với quy ước mỗi cạnh của tam giác đều biểu diễn độ dài 1 cm, vẽ hình biểu diễn của chi tiết cơ khí có hình dạng và các kích thước như trong Hình 29.




Hình 29

**6.** Tìm các kích thước *a, b, c, d, e* của chi tiết cơ khí trong Hình 30a có hình biểu diễn được vẽ trên giấy kẻ ô li trên Hình 30b với quy ước mỗi cạnh của tam giác đều biểu diễn độ dài 10 mm.




Hình 30

# Bài 2. Bản vẽ kĩ thuật

**Từ khoá:** Bản vẽ kĩ thuật; Loại khổ giấy; Tỉ lệ; Nét vẽ.

Thảo luận nhóm về nhận định sau đây của các chuyên gia kĩ thuật: "Vẽ kĩ thuật là tiếng nói của kĩ thuật, bản vẽ cần phải thể hiện đầy đủ, chính xác và rõ ràng các nội dung muốn truyền tải."


## 1. Một số nguyên tắc cơ bản của vẽ kĩ thuật

1

– Thế nào là tình huống người "nói" một đằng, người "làm" một nẻo trong thiết kế và thi công?

– Tại sao phải đặt ra các tiêu chuẩn trình bày một bản vẽ kĩ thuật?

– Nêu những hạn chế và sai sót xảy ra trong quá trình thực hiện khi người làm kĩ thuật hiểu sai hoặc không nắm các quy định về tiêu chuẩn bản vẽ kĩ thuật.

### a) Các nguyên tắc chung khi trình bày bản vẽ kĩ thuật

Bản vẽ kĩ thuật là một công cụ dùng để giao tiếp giữa người thiết kế với người thi công, do vậy cần trình bày theo các nguyên tắc sau:

***– Rõ ràng, dễ hiểu:*** Đối với mọi đối tượng liên quan chỉ có một cách hiểu duy nhất (không được hiểu theo nhiều nghĩa).

***– Đầy đủ:*** Kích thước ba chiều của các chi tiết phải được biểu diễn đầy đủ trên bản vẽ.

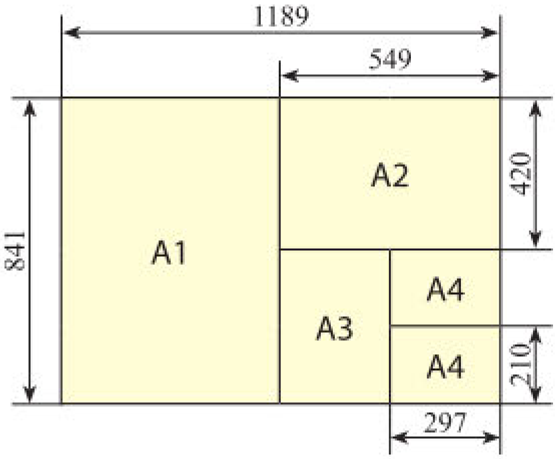
***– Có tỉ lệ:*** Các đường nét bên ngoài và các chi tiết bên trong phải có tỉ lệ, giá trị cho các kích thước của một đối tượng phải được thể hiện rõ ràng trong bản vẽ.

### b) Tiêu chuẩn trình bày bản vẽ kĩ thuật

Để đảm bảo các nguyên tắc nói trên người ta đặt ra một số tiêu chuẩn trình bày bản vẽ kĩ thuật. Cụ thể như sau:

**Khổ giấy**

Các khổ giấy sẽ được lập ra từ khổ giấy A0 (Hình 1). Cụ thể, sẽ có 5 loại khổ giấy với các kích thước như trong Bảng 1.



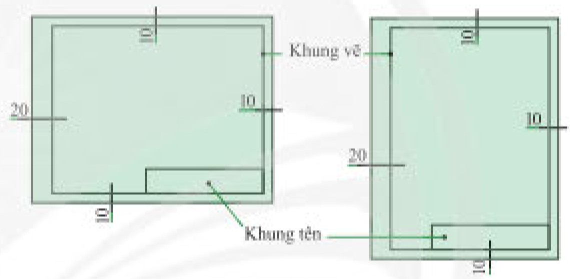

*Hình 1*

*Bảng 1*

| Khổ giấy | Kích thước (mm) |
|---|---|
| A0 | $1189 \times 841$ |
| A1 | $841 \times 594$ |
| A2 | $594 \times 420$ |
| A3 | $420 \times 297$ |
| A4 | $297 \times 210$ |

**Quy định về khung vẽ và khung tên**

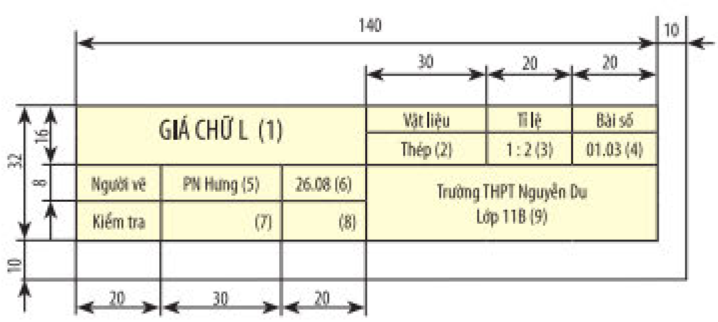
Mỗi bản vẽ bắt buộc phải có khung vẽ và khung tên (Hình 2).




*Hình 2. Khung vẽ và khung tên*

Khung tên dùng để đặt tên bản vẽ, bao gồm những nội dung của sản phẩm được thể hiện và những người có liên quan đến bản vẽ.

Khung tên được đặt dọc theo cạnh của khung vẽ ở góc bên phải phía dưới bản vẽ theo kích thước như Hình 3.




(1) Tên gọi của vật thể

(2) Tên vật liệu

(3) Tỉ lệ bản vẽ

(4) Kí hiệu số bài tập

(5) Họ tên người vẽ

(6) Ngày lập bản vẽ

(7) Chữ kí của người kiểm tra

(8) Ngày kiểm tra

(9) Tên trường lớp

*Hình 3. Kích thước và nội dung khung tên*

**Quy định về tỉ lệ**

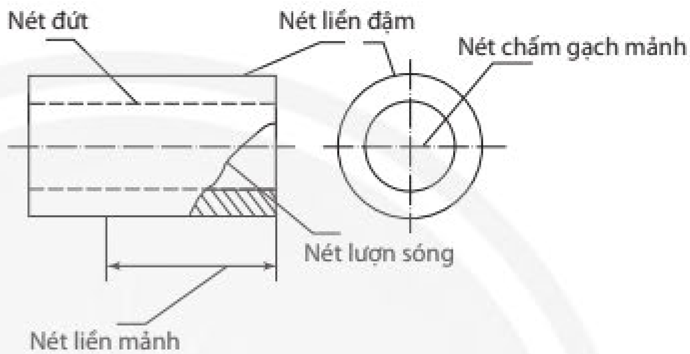
Tỉ lệ là tỉ số của kích thước dài đo được trên hình biểu diễn của vật thể với kích thước thực tế tương ứng đo được trên vật thể đó. Quy định tỉ lệ dùng trên các bản vẽ kĩ thuật như sau:

– Tỉ lệ 1:1 (tỉ lệ nguyên hình).
– Tỉ lệ 1:*X* (tỉ lệ thu nhỏ).
– Tỉ lệ *X*:1 (tỉ lệ phóng to).

Trong đó, *X* ưu tiên sử dụng các giá trị: 2; 5; 10; 20; 50; …

**Quy định về nét vẽ**

Tiêu chuẩn nét vẽ trong bản vẽ kĩ thuật được quy định trong Bảng 2.




*Hình 4. Quy định về nét vẽ*

*Bảng 2. Các loại nét vẽ thường dùng*

| Tên gọi | Hình dạng | Ứng dụng |
|---|---|---|
| Nét liền đậm | ——————— | $A_1$: Đường bao thấy<br>$A_2$: Cạnh thấy |
| Nét liền mảnh | ——————— | $B_1$: Đường kích thước<br>$B_2$: Đường gióng<br>$B_3$: Đường gạch gạch trên mặt cắt |
| Nét lượn sóng | ∼∼∼ | $C_1$: Đường giới hạn một phần hình cắt |
| Nét đứt mảnh | — — — — — — — — — | $F_1$: Đường bao khuất, cạnh khuất |
| Nét gạch chấm mảnh | ——.——.——.——.—— | $G_1$: Đường tâm<br>$G_2$: Đường trục đối xứng |

***Chú ý:***

a) *d* là chiều rộng nét vẽ đậm. Nét vẽ mảnh lấy chiều rộng bằng $\frac{d}{2}$. Tiêu chuẩn quy định chiều rộng của nét vẽ lấy theo kích thước sau: 0,13; 0,18; 0,25; 0,35 ; 0,5; 0,7; 1; 1,4; 2 (mm).

b) Các gạch dài lấy khoảng 24*d*, các gạch thường lấy khoảng 12*d*, các khe hở lấy khoảng 3*d* và các chấm lấy không quá 0,5*d*.

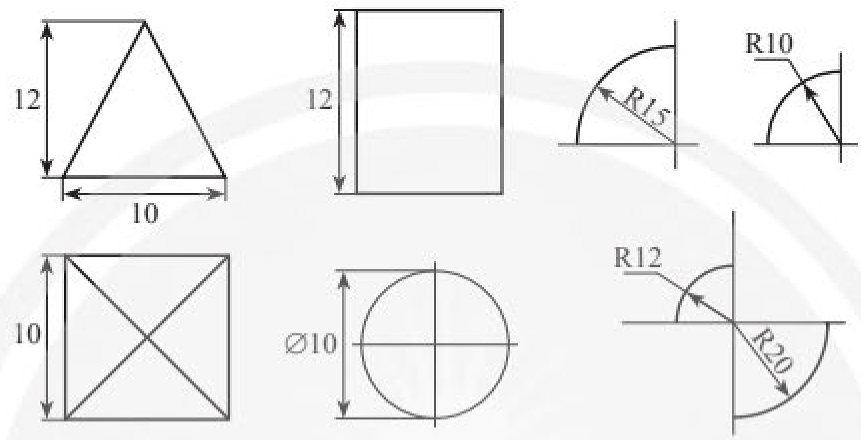
**Quy định về ghi kích thước**

Cách ghi kích thước trong bản vẽ kĩ thuật thể hiện một độ lớn của vật thể biểu diễn. Kích thước trên bản vẽ phải đầy đủ chế tạo và kiểm tra được các vật thể, mỗi bản vẽ chỉ được ghi kích thước một lần. Số lượng kích thước ghi phải đủ để chế tạo vật thể.

Đường kích thước được vẽ bằng nét liền mảnh, thường song song với kích thước được ghi. Ở đầu mút đường kích thước thường có vẽ mũi tên.

Đường dóng kích thước được vẽ bằng nét liền mảnh và vượt quá đường kích thước từ 2 mm đến 4 mm. Đường dóng thường được kẻ vuông góc với đường kích thước.

Số ghi kích thước chỉ kích thước thật, không phụ thuộc vào tỉ lệ bản vẽ. Trước số ghi kích thước đường kính của đường tròn ghi kí hiệu ∅ và bán kính của cung tròn ghi kí hiệu R.




*Hình 5*

## 2. Cách đọc được thông tin từ một số bản vẽ kĩ thuật đơn giản

2 Tìm các thông tin có trong bản vẽ kĩ thuật ở Hình 6.

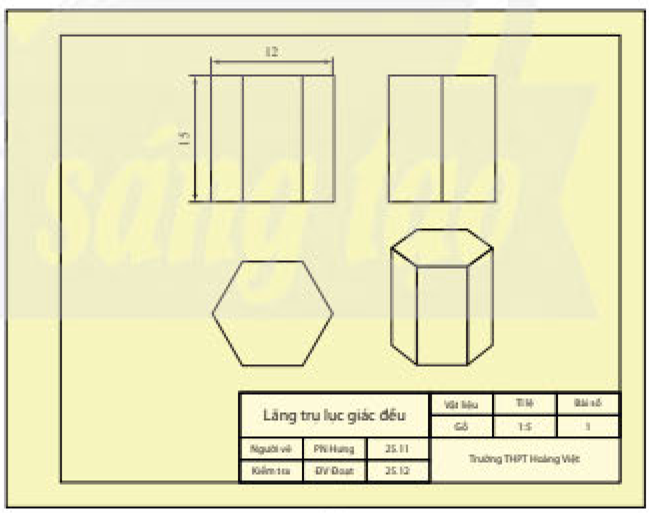
**Hướng dẫn cách đọc bản vẽ kĩ thuật**

Dưới đây là trình tự đọc bản vẽ kĩ thuật:

– Đọc khung tên của bản vẽ để biết được tên gọi của bản vẽ, tỉ lệ và những nội dung khác được trình bày tại khung tên bản vẽ.

– Xác định các hình chiếu có trong bản vẽ.

– Phân tích hình chiếu và các hình biểu diễn để hình dung được chi tiết những khối hình học tạo thành và những số liệu đã thu được.




*Hình 6*

– Đọc bản vẽ hình chiếu trục đo (nếu có) để hình dung tổng thể hình, khối cần biểu diễn.

– Đọc bản vẽ mặt đứng, mặt bằng và mặt ngang để hiểu về cấu trúc, kích thước thật các mặt của vật.

***Ví dụ 1.*** Đọc bản vẽ kĩ thuật trong Hình 6 và dùng các thông tin đọc được để trả lời các câu hỏi sau:

– Cho biết tên gọi của bản vẽ và tỉ lệ.

– Liệt kê các loại hình chiếu đã sử dụng.

– Liệt kê kích thước ba chiều của vật và kích thước các khối hình học tạo thành.

***Giải***

– Bản vẽ lăng trụ lục giác đều với tỉ lệ 1:5.

– Có hai loại hình chiếu đã sử dụng: Hình chiếu vuông góc và hình chiếu trục đo.

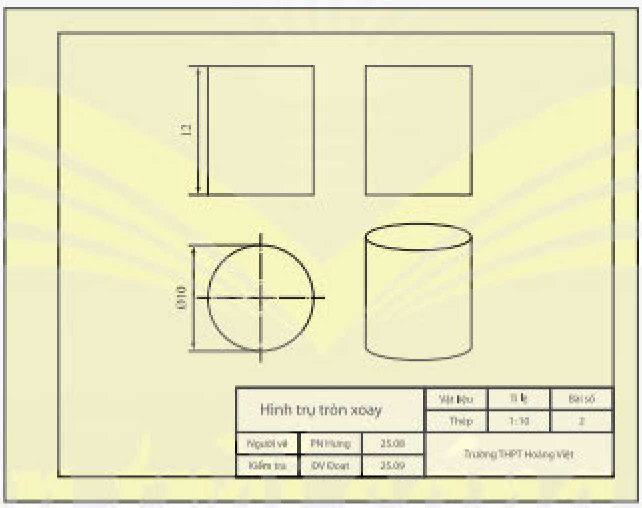
– Liệt kê kích thước ba chiều của vật: chiều dài 12 cm, chiều rộng 12 cm, chiều cao 15 cm, cạnh lục giác đều 6 cm.

Đọc bản vẽ kĩ thuật trong Hình 7 và dùng các thông tin đọc được để trả lời các câu hỏi sau:

– Cho biết tên gọi của của bản vẽ và tỉ lệ.

– Liệt kê các loại hình chiếu đã sử dụng.

– Liệt kê kích thước ba chiều của vật và kích thước các khối hình học tạo thành.



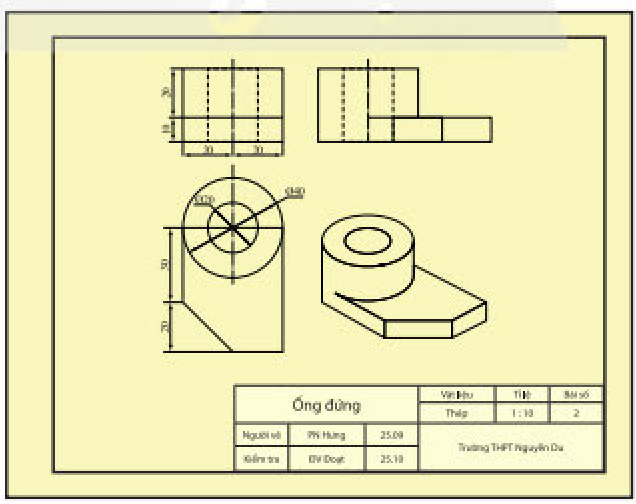

*Hình 7*

Đọc bản vẽ kĩ thuật trong Hình 8 và dùng các thông tin đọc được để trả lời các câu hỏi sau:

– Cho biết tên gọi của của bản vẽ và tỉ lệ.

– Liệt kê các loại hình chiếu đã sử dụng.

– Liệt kê kích thước ba chiều của vật và kích thước các khối hình học tạo thành.




*Hình 8*

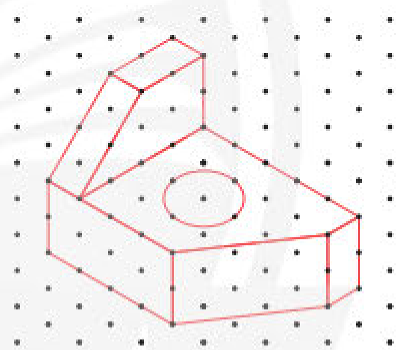
## 3. Cách thực hiện một bản vẽ kĩ thuật đơn giản (gắn với phép chiếu song song và phép chiếu vuông góc)

Để bản vẽ kĩ thuật thể hiện đúng ý tưởng thiết kế một vật thể, ta cần thực hiện bản vẽ theo các bước như thế nào?

Để lập bản vẽ kĩ thuật cho một vật thể người ta thường thực hiện theo các bước sau:

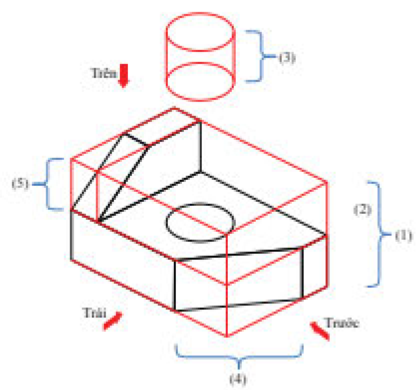
– Quan sát vật thể, phân tích hình dạng và chọn các hướng chiếu vuông góc với các mặt của vật thể.
– Chọn tỉ lệ thích hợp với khổ giấy và kích thước vật thể. Bố trí ba hình chiếu cân đối trên bản vẽ theo các hình chữ nhật bao ngoài các hình chiếu.
– Vẽ ba hình chiếu từng phần của vật thể với các đường gióng tương ứng từ tổng quát đến chi tiết.
– Tô đậm các nét thấy của vật thể trên các hình chiếu, dùng nét đứt để biểu diễn các đường bao khuất.
– Kẻ các đường gióng kích thước, đường kích thước và ghi số kích thước trên các hình chiếu.
– Kẻ khung vẽ, khung tên, ghi các nội dung của khung tên.

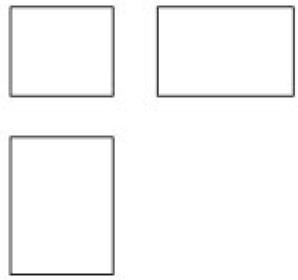
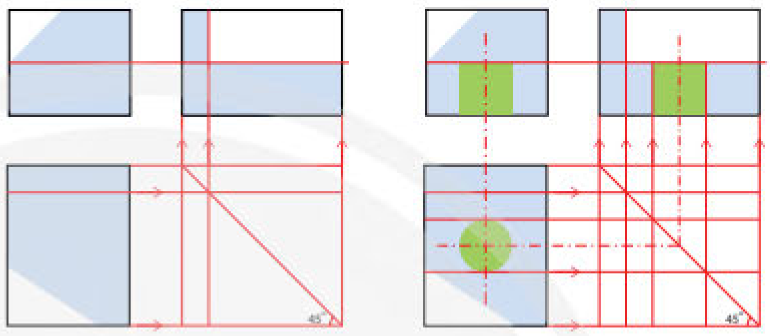
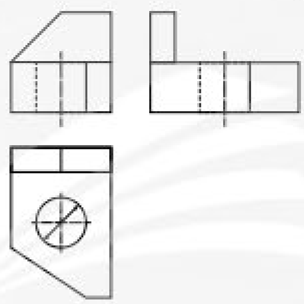
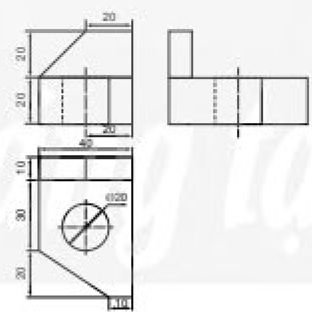
***Ví dụ 2.*** Lập bản vẽ kĩ thuật trên khổ giấy A4 gồm ba hình chiếu và các kích thước của chi tiết cơ khí "Giá vát nghiêng" có hình chiếu trục đo như Hình 9. Cho biết mỗi cạnh của tam giác biểu diễn độ dài 1 cm.



*Hình 9*

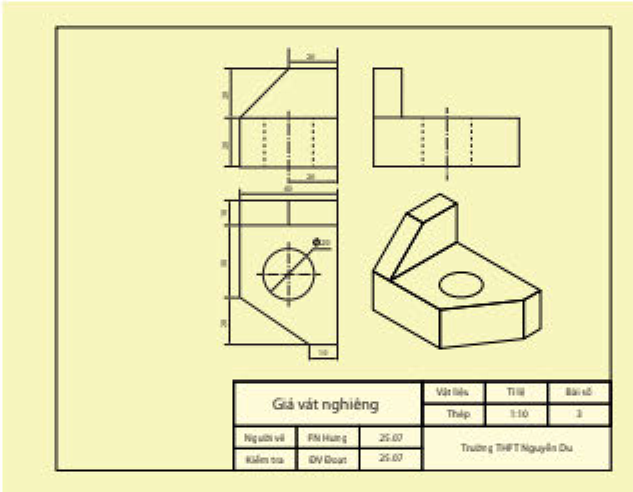
***Giải***

| Bước | Thao tác | Hình vẽ minh hoạ |
|---|---|---|
| 1 | – Quan sát vật thể.<br>– Phân tích hình dạng:<br>(1) và (2): Khối hộp chữ nhật.<br>(3): Khối trụ tròn xoay.<br>(4) và (5): Khối lăng trụ tam giác.<br>– Chọn các hướng chiếu vuông góc với các mặt của vật thể. |  |

| Bước | Thao tác | Hình vẽ minh hoạ |
|---|---|---|
| 2 | Chọn tỉ lệ thích hợp với khổ giấy A4 và kích thước vật thể. Bố trí ba hình chiếu cân đối trên bản vẽ theo các hình chữ nhật bao ngoài các hình chiếu. |  |
| 3 | Vẽ ba hình chiếu từng phần của vật thể với các đường gióng tương ứng từ tổng quát đến chi tiết. |  |
| 4 | Tô đậm các nét thấy của vật thể trên các hình chiếu, dùng nét đứt để biểu diễn các đường bao khuất. |  |
| 5 | Kẻ các đường gióng kích thước, đường kích thước và ghi số kích thước trên các hình chiếu. |  |
| 6 | Kẻ khung vẽ, khung tên, ghi các nội dung của khung tên. |  |

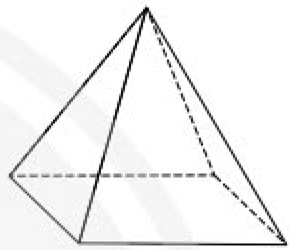
***Chú ý:*** Có thể bổ sung thêm vào bản vẽ hình chiếu trục đo để tăng tính trực quan.

Sản phẩm cuối cùng là bản vẽ:



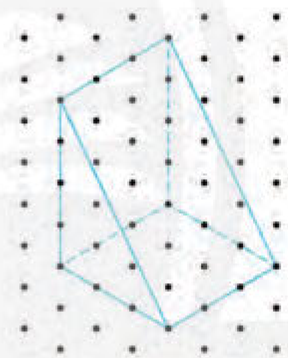

*Hình 10*

Lập bản vẽ kĩ thuật trên khổ giấy A4 gồm ba hình chiếu và các kích thước của chi tiết cơ khí "Chóp tứ giác đều" có chiều cao 12 cm và cạnh đáy 10 cm (Hình 11).



*Hình 11*

Lập bản vẽ kĩ thuật trên khổ giấy A4 gồm ba hình chiếu và các kích thước của cái "nêm gỗ hình lăng trụ đứng" có hình chiếu trục đo như Hình 12. Cho biết khoảng cách giữa hai chấm biểu diễn độ dài 1 dm.



*Hình 12*

## BÀI TẬP

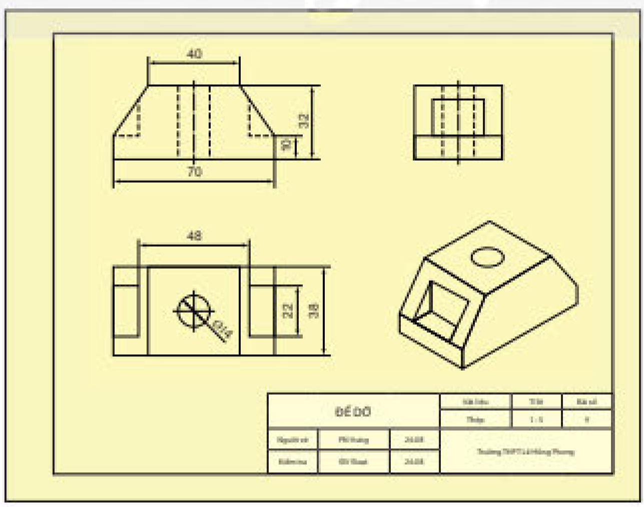


**1.** Đọc bản vẽ kĩ thuật trong Hình 13 và dùng các thông tin đọc được để trả lời các câu hỏi sau:

– Cho biết tên gọi của của bản vẽ và tỉ lệ.

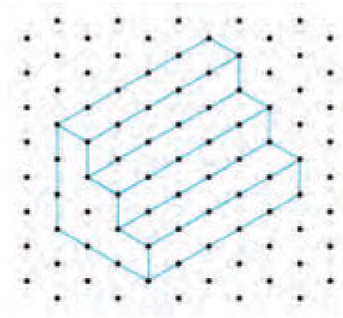
– Liệt kê các loại hình chiếu đã sử dụng.

– Liệt kê kích thước ba chiều của vật và kích thước các khối hình học tạo thành.



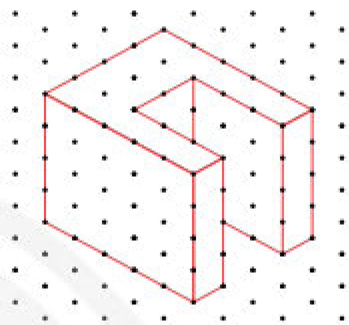

*Hình 13*

2. Lập bản vẽ kĩ thuật trên khổ giấy A4 gồm ba hình chiếu và các kích thước của cái bục gỗ có hình chiếu trục đo như Hình 14. Cho biết khoảng cách giữa hai chấm biểu diễn độ dài 20 cm.



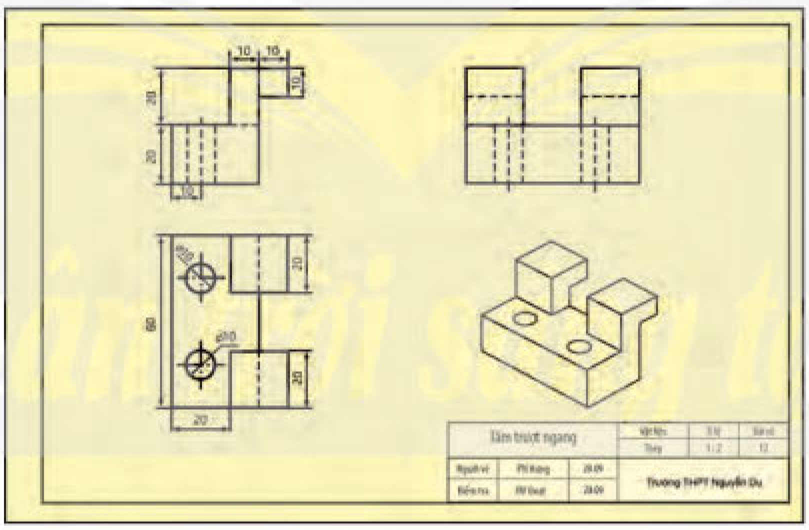
*Hình 14*

3. Lập bản vẽ kĩ thuật trên khổ giấy A4 gồm ba hình chiếu và các kích thước của chi tiết cơ khí "Tấm trượt dọc" có hình chiếu trục đo như Hình 15. Cho biết mỗi hình thoi biểu diễn một hình vuông có cạnh 10 mm.



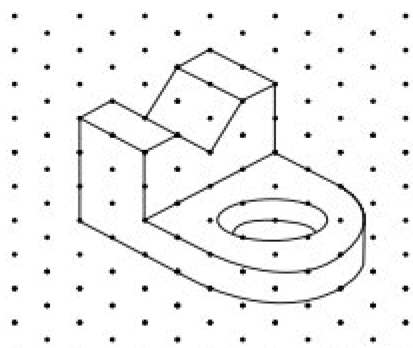
*Hình 15*

4. Đọc bản vẽ kĩ thuật trong Hình 16 và dùng các thông tin đọc được để trả lời các câu hỏi sau:
   – Cho biết tên gọi của của bản vẽ và tỉ lệ.
   – Liệt kê các loại hình chiếu đã sử dụng.
   – Liệt kê kích thước ba chiều của vật và kích thước các khối hình học tạo thành.




*Hình 16*

5. Lập bản vẽ kĩ thuật trên khổ giấy A4 gồm ba hình chiếu và các kích thước của chi tiết cơ khí "Giá đỡ chữ V" có hình chiếu trục đo như Hình 17. Cho biết mỗi hình thoi biểu diễn một hình vuông có cạnh 10 mm.



*Hình 17*

# BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 3

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

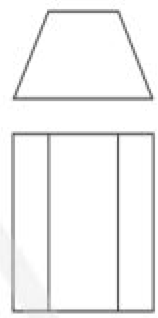
**Chọn phương án đúng.**

1. Khẳng định nào sau đây là đúng với ba hệ số biến dạng $p$, $q$, $r$ của hình chiếu trục đo vuông góc đều?

A. $p = q \neq r$. B. $p = q \neq r$.
C. $q = r \neq p$. D. $p = q = r$.

2. Số đo ba góc trục đo của hình chiếu trục đo vuông góc đều bằng nhau và bằng

A. $60^o$. B. $90^o$.
C. $120^o$. D. $135^o$.



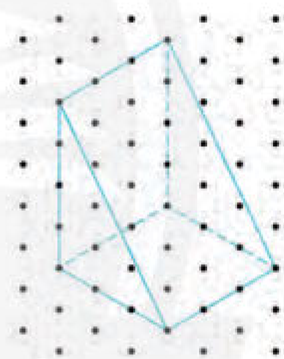
Hình 1

3. Mô tả nào sau đây đúng với hình, khối có hai hình chiếu vuông góc ở Hình 1?

A. Hình chóp cụt. B. Hình lăng trụ.
C. Hình nón. D. Hình nón cụt.

4. Tính thể tích của cái nêm có hình chiếu trục đo vuông góc đều trong Hình 2, cho biết khoảng cách giữa hai chấm biểu diễn độ dài thật 1 dm.

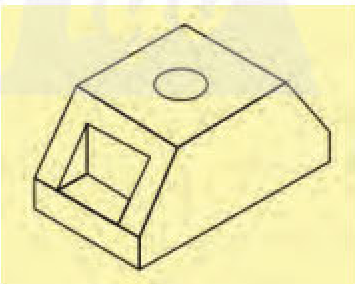
A. 36 $dm^3$. B. 24 $dm^3$.
C. 18 $dm^3$. D. 9 $dm^3$.



Hình 2

5. Hình, khối nào không được sử dụng để thiết kế chi tiết "đế đứng" có hình biểu diễn trong Hình 3.

A. Lăng trụ. B. Hình hộp.
C. Hình chóp. D. Hình trụ.



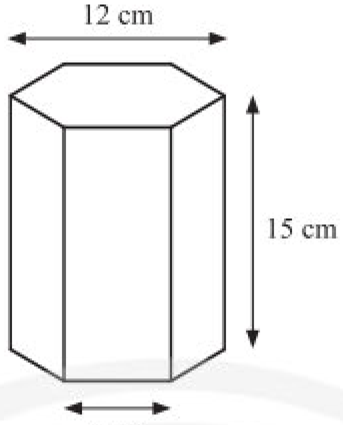
Hình 3

6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng đối với phép chiếu vuông góc?

A. Bảo toàn tính song song của các cạnh của vật chiếu.
B. Bảo toàn diện tích các mặt của vật chiếu.
C. Bảo toàn góc giữa các cạnh của vật chiếu.
D. Bảo toàn kích thước các cạnh của vật song song với mặt phẳng chiếu.

## BÀI TẬP TỰ LUẬN

**7.** Vẽ hình chiếu vuông góc của vật thể có hình biểu diễn như Hình 4.



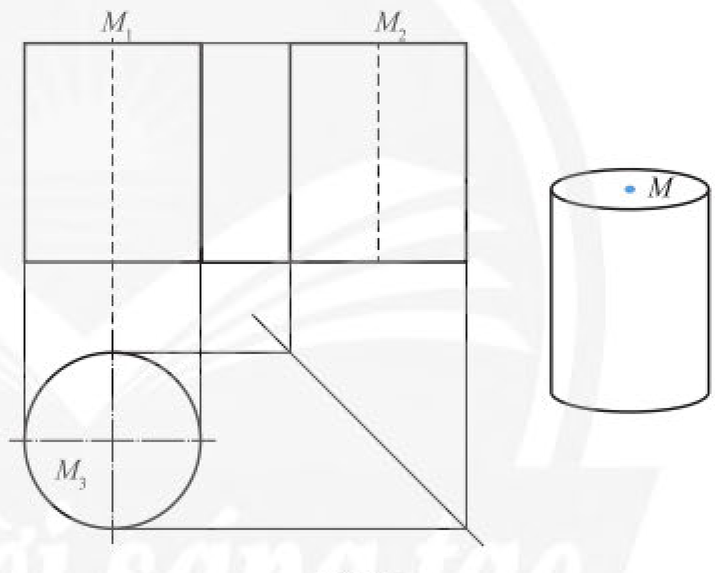

*Hình 4*

**8.** Trong bản vẽ biểu diễn hình trụ của Hình 5.

a) Khoảng cách giữa hai đường gióng nào cho ta biết chiều cao của hình trụ?

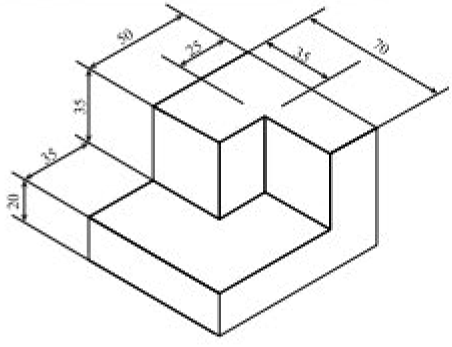
b) Khoảng cách giữa hai đường gióng nào cho ta biết độ dài đường kính đáy của hình trụ?

c) Nêu cách xác định điểm $M_3$ biểu diễn tâm $M$ của đáy trên hình chiếu bằng khi biết các điểm $M_1$ và $M_2$ biểu diễn $M$ trong hình chiếu đứng và hình chiếu cạnh.




*Hình 5*

**9.** Vẽ hình chiếu vuông góc của vật thể có hình chiếu trục đo được cho trong Hình 6.



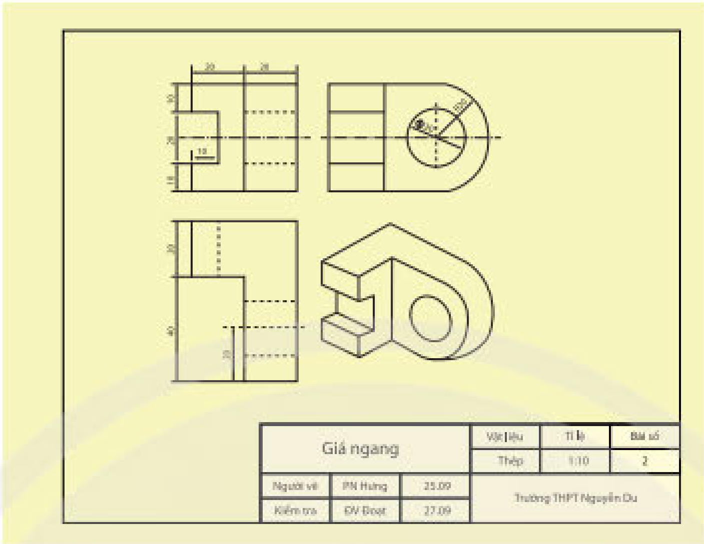

*Hình 6*

**10.** Đọc bản vẽ kĩ thuật trong Hình 7 và dùng các thông tin đọc được để trả lời các câu hỏi sau:

– Cho biết tên gọi của của bản vẽ và tỉ lệ.

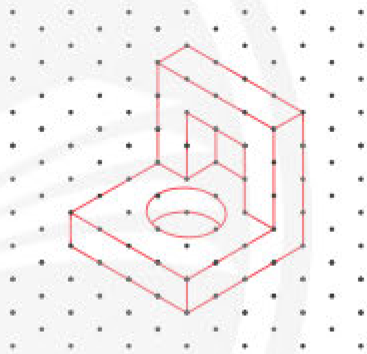
– Liệt kê các loại hình chiếu đã sử dụng.

– Liệt kê kích thước ba chiều của vật và kích thước khối hình học tạo thành.




*Hình 7*

**11.** Lập bản vẽ kĩ thuật trên khổ giấy A4 gồm ba hình chiếu và các kích thước của chi tiết cơ khí "Giá chữ L" có hình chiếu trục đo như Hình 8. Cho biết mỗi hình thoi biểu diễn một hình vuông có cạnh 10 mm.



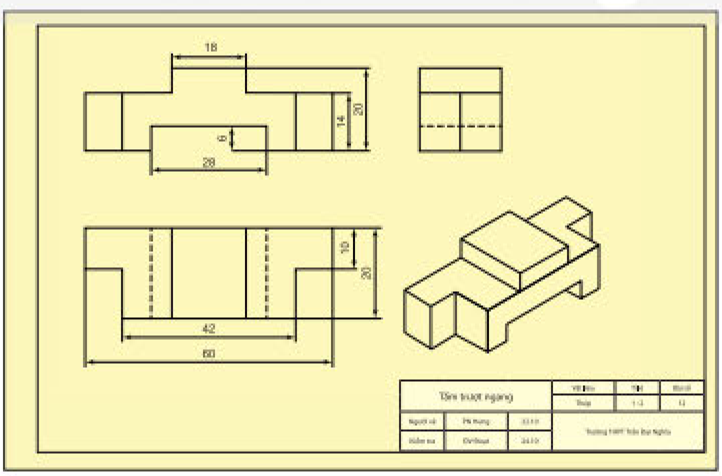
*Hình 8*

**12.** Đọc bản vẽ kĩ thuật trong Hình 9 và dùng các thông tin đọc được để trả lời các câu hỏi sau:

– Cho biết tên gọi của của bản vẽ và tỉ lệ.

– Liệt kê các loại hình chiếu đã sử dụng.

– Liệt kê kích thước ba chiều của vật và kích thước các khối hình học tạo thành.




*Hình 9*

# BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

## B

**Bản vẽ kĩ thuật**

Là phương tiện thông tin diễn tả hình dáng, kích thước, vật liệu, đặc tính kĩ thuật, … của sản phẩm, giúp tiến hành chế tạo thi công thành công vật thật và nhiều ứng dụng khác. Bản vẽ kĩ thuật cần tuân theo các quy tắc được quy định trong các tiêu chuẩn về bản vẽ kĩ thuật.

**Bậc của đỉnh**

Bằng số cạnh của đồ thị nối với đỉnh đó.

## C

**Chu trình**

Đường đi bắt đầu và kết thúc ở cùng một đỉnh.

**Chu trình Euler**

Chu trình đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đúng một lần.

**Chu trình Hamilton**

Chu trình đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị.

## Đ

**Độ dài của cạnh**

Cách gọi khác của trọng số của cạnh.

**Độ dài đường đi**

Tổng trọng số (hay độ dài) của các cạnh của đường đi.

**Đồ thị**

Gồm các đỉnh (hữu hạn và khác rỗng) và các cạnh, mỗi cạnh nối hai đỉnh.

**Đồ thị có trọng số**

Đồ thị mà mỗi cạnh được gán thêm một số.

**Đường đi**

Đường đi từ đỉnh này đến đỉnh kia là một dãy các cạnh nối tiếp từ bắt đầu từ đỉnh này và kết thúc ở đỉnh kia.

**Đường đi Euler**

Đường đi đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đúng một lần.

**Đường đi Hamilton**

Đường đi đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần.

**Đường đi ngắn nhất**

Đường đi có độ dài ngắn nhất trong tất các các đường đi nối hai đỉnh cho trước.

## H

**Hệ số biến dạng**

Tỉ số giữa độ dài hình chiếu của các đoạn thẳng nằm trên ba tia đôi một vuông góc và độ dài thực của nó.

**Hình chiếu trục đo**

Cho một hình, khối $\mathscr{H}$ có gắn ba tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ đôi một vuông góc biểu diễn theo chiều dài, chiều rộng và chiều cao của $\mathscr{H}$. Cho mặt phẳng $(P)$ và cho một đường thẳng $l$ không song song với $(P)$ và không song song với các tia $Ox$, $Oy$, $Oz$.
Hình chiếu trục đo của một hình khối $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng $(P)$ theo phương chiếu $l$ là ảnh $\mathscr{H}'$ của H gắn với ảnh $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ của ba tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ qua phép chiếu song song theo phương $l$ lên mặt phẳng $(P)$.

**Hình chiếu trục đo vuông góc đều**

Hình chiếu trục đo có phương chiếu vuông góc với mặt phẳng chiếu, có ba hệ số biến dạng bằng nhau và có số đo ba góc trục đo bằng $120^{\circ}$.

| | |
|---|---|
| I | **ISO**<br>Tổ chức Tiêu chuẩn hoá Quốc tế (International Organization for Standardization, viết tắt là ISO) là cơ quan thiết lập và ban hành các tiêu chuẩn quốc tế trong tất cả các lĩnh vực trên phạm vi toàn thế giới. ISO đã ban hành Tiêu chuẩn Quốc tế thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau, trong đó có các tiêu chuẩn về các bản vẽ kĩ thuật. |
| P | **Phép biến hình**<br>Quy tắc để ứng với mỗi điểm $M$ thuộc mặt phẳng $(P)$, xác định được một điểm duy nhất $M'$ thuộc $(P)$.<br>**Phép dời hình**<br>Phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.<br>**Phép đối xứng tâm *O***<br>Phép biến hình biến điểm $O$ thành điểm $O$ và biến mỗi điểm $M$ khác $O$ thành điểm $M'$ sao cho $O$ là trung điểm của đoạn $MM'$.<br>**Phép đối xứng trục *d***<br>Phép biến hình biến mỗi điểm $M$ thành điểm $M'$ đối xứng với $M$ qua đường thẳng $d$.<br>**Phép đồng dạng tỉ số *k***<br>Phép biến hình biến hai điểm bất kì $M$, $N$ thành $M'$, $N'$ thoả mãn $M'N' = kMN$.<br>**Phép quay tâm *O* góc quay φ**<br>Trong mặt phẳng cho điểm $O$ cố định và góc lượng giác $\varphi$ không đổi. Phép biến hình biến: điểm $O$ thành điểm $O$; mỗi điểm $M \neq O$ thành điểm $M'$ sao cho: $OM = OM'$ và góc lượng giác $(OM, OM') = \varphi$.<br>**Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$**<br>Phép biến hình biến điểm $M$ thành điểm $M'$ sao cho $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.<br>**Phép vị tự tâm *O* hệ số *k***<br>Phép biến hình biến mỗi điểm $M$ thành điểm $M'$ sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ với điểm $O$ cố định và một số thực $k$ không đổi, $k \neq 0$.<br>**Phương pháp chiếu vuông góc**<br>Chiếu vuông góc vật cần chiếu lên ba mặt phẳng vuông góc để được hình chiếu đứng, hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh và sắp đặt ba hình chiếu này trên cùng một mặt phẳng. |
| T | **Tâm đối xứng của một hình**<br>Điểm $O$ được gọi là tâm đối xứng của hình $\mathscr{H}$ nếu phép đối xứng tâm $O$ biến hình $\mathscr{H}$ thành chính nó, tức là $Đ_O(\mathscr{H}) = \mathscr{H}$.<br>**Tiêu chuẩn Quốc gia Việt Nam (TCVN)**<br>Là các văn bản do bộ Khoa học và Công nghệ ban hành để tự nguyện áp dụng, quy định về đặc tính kĩ thuật và yêu cầu quản lí dùng làm chuẩn để phân loại, đánh giá sản phẩm, hàng hoá, dịch vụ, quá trình, môi trường và các đối tượng khác trong hoạt động kinh tế – xã hội nhằm nâng cao chất lượng và hiệu quả của các đối tượng này.<br>**Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất**<br>Một thuật toán cho phép tìm đường đi ngắn nhất nối hai đỉnh của đồ thị có trọng số (các trọng số đều dương), do nhà toán học người Hà Lan Edsger Dijkstra, 11/5/1930 – 6/8/2002, đề xuất năm 1959.<br>**Trọng số của cạnh**<br>Số được gán cho cạnh của đồ thị. |

# BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

*Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.*

**Chịu trách nhiệm xuất bản:**
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

**Chịu trách nhiệm nội dung:**
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: VŨ NHÂN KHÁNH – MÃ TRƯỜNG VINH
Biên tập mĩ thuật: BÙI XUÂN DƯƠNG
Thiết kế sách: BÙI XUÂN DƯƠNG – HOÀNG CAO HIỀN
Trình bày bìa: ĐẶNG NGỌC HÀ – TỐNG THANH THẢO
Minh hoạ: BÙI XUÂN DƯƠNG – LÊ TRỌNG SƠN
Sửa bản in: VŨ NHÂN KHÁNH – MÃ TRƯỜNG VINH
Chế bản: CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH



**CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP TOÁN 11** (CHÂN TRỜI SÁNG TẠO)

**Mã số: .........**
In ......... bản, (QĐ in số ....) khổ 19 x 26,5 cm
Đơn vị in: ........................
Địa chỉ: .........................
Số ĐKXB: .........
Số QĐXB: ........., ngày .... tháng .... năm 20...
In xong và nộp lưu chiểu tháng .... năm 20...
Mã số ISBN: .........

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

## BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 11 – CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

1. Toán 11, Tập một
2. Toán 11, Tập hai
3. Chuyên đề học tập Toán 11
4. Ngữ văn 11, Tập một
5. Ngữ văn 11, Tập hai
6. Chuyên đề học tập Ngữ văn 11
7. Tiếng Anh 11
   Friends Global - Student Book
8. Lịch sử 11
9. Chuyên đề học tập Lịch sử 11
10. Địa lí 11
11. Chuyên đề học tập Địa lí 11
12. Giáo dục kinh tế và pháp luật 11
13. Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 11
14. Vật lí 11
15. Chuyên đề học tập Vật lí 11
16. Hoá học 11
17. Chuyên đề học tập Hoá học 11
18. Sinh học 11
19. Chuyên đề học tập Sinh học 11
20. Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng
21. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng
22. Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính
23. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính
24. Âm nhạc 11
25. Chuyên đề học tập Âm nhạc 11
26. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11 (1)
27. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11 (2)
28. Giáo dục quốc phòng và an ninh 11


### Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

**Sách điện tử:** http://hanhtrangso.nxbgd.vn