TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
VŨ NHƯ THƯ HƯƠNG – NGÔ HOÀNG LONG
PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

TOÁN

12

TẬP HAI

Chân trời sáng tạo

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Mỗi bài học trong sách **Toán 12** thường có các phần như sau:

Hoạt động khởi động	Gợi mở, kết nối người học vào chủ đề bài học.
Hoạt động khám phá	Gợi ý để người học tìm ra kiến thức mới.
Kiến thức trọng tâm	Nội dung kiến thức cần lĩnh hội.
Thực hành	Các bài tập cơ bản theo yêu cầu cần đạt.
Vận dụng	Ứng dụng kiến thức để giải quyết vấn đề.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng các em học sinh lớp sau!

Lời nói đầu

Sách ***Toán 12*** thuộc bộ sách giáo khoa ***Chân trời sáng tạo*** được biên soạn theo Chương trình giáo dục phổ thông năm 2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Cấu trúc sách ***Toán 12*** được chia thành hai tập.

Tập hai bao gồm ba chương:

Chương IV: *Nguyên hàm. Tích phân.*

Chương V: *Phương trình mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu.*

Chương VI: *Xác suất có điều kiện.*

Đầu mỗi chương đều có nêu rõ các kiến thức cơ bản sẽ học và các yêu cầu cần đạt của chương. Các bài học đều xây dựng theo tinh thần định hướng phát triển năng lực và thường được thống nhất theo các bước: *khởi động*, *khám phá*, *thực hành*, *vận dụng*. Sách sẽ tạo nên một môi trường học tập và giảng dạy tương tác tích cực nhằm đảm bảo tính dễ dạy, dễ học đồng thời hỗ trợ các phương pháp giảng dạy hiệu quả.

Nội dung sách thể hiện tính tích hợp, gắn bó môn Toán với các môn học khác. Những hoạt động trải nghiệm được tăng cường giúp người học có thêm cơ hội vận dụng Toán học vào thực tiễn, đồng thời ứng dụng công nghệ thông tin vào việc học Toán.

Chúng tôi tin tưởng rằng với cách biên soạn này, sách giáo khoa ***Toán 12*** sẽ hỗ trợ quý thầy, cô giáo một cách tích cực và hiệu quả trong quá trình dạy học, đồng thời giúp các bạn học sinh hứng thú hơn khi học tập bộ môn Toán.

Rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô giáo và các bạn học sinh để sách được ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

Mục lục

Trang

Phần MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương IV NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN

Nguyên hàm và tích phân là hai khái niệm toán học cho phép biểu thị và tính toán nhiều đại lượng khác nhau xuất hiện trong khoa học và cuộc sống.

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về hai khái niệm nói trên và một số tính chất cơ bản của chúng, vận dụng chúng để giải một số bài toán thực tiễn liên quan đến những đại lượng quen thuộc như diện tích, thể tích, quãng đường chuyển động, ...

Nếu biết tốc độ của xe trong quá trình chuyển động thì xác định được quãng đường đã đi được tại mọi thời điểm của quá trình đó.

Học xong chương này, bạn có thể:

– Nhận biết được khái niệm và tính chất cơ bản của nguyên hàm.

– Xác định được nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp; tính được nguyên hàm trong những trường hợp đơn giản.

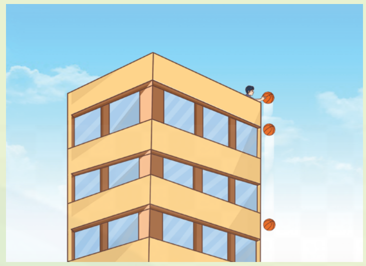
– Nhận biết được khái niệm và các tính chất của tích phân; tính được tích phân trong những trường hợp đơn giản.

– Sử dụng được tích phân để tính diện tích hình phẳng, thể tích hình khối và giải quyết những bài toán liên quan đến thực tiễn.

Bài 1. Nguyên hàm

Từ khoá: Nguyên hàm.

Khi được thả từ độ cao 20 m, một vật rơi với gia tốc không đổi $a = 10$ m/s^2. Sau khi rơi được t giây thì vật có tốc độ bao nhiêu và đi được quãng đường bao nhiêu?



1. Khái niệm nguyên hàm

1 Cho hàm số $f(x) = 2x$ xác định trên $\mathbb{R}$. Tìm một hàm số $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$.

Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng của $\mathbb{R}$.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là ***nguyên hàm*** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng:

a) $F(x) = 5x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5 + 2x$ trên $\mathbb{R}$.

b) $G(x) = \tan x$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Giải

a) Ta có $F'(x) = (5x + x^2)' = 5 + 2x = f(x)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Vậy $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

b) Ta có $G'(x) = (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = g(x)$ với mọi x thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Vậy $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2 Cho hàm số $f(x) = 3x^2$ xác định trên $\mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

b) Với C là hằng số tuỳ ý, hàm số $H(x) = F(x) + C$ có là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ không?

c) Giả sử $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tìm đạo hàm của hàm số $G(x) - F(x)$. Từ đó, có nhận xét gì về hàm số $G(x) - F(x)$?

Tổng quát, ta có:

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

• Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x) + C$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K;

• Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K.

Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số. Ta gọi $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K, kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$ và viết

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Chú ý: Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, kí hiệu là $\mathrm{d}F(x)$.

Vậy $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 2. Tìm:

a) $\int x^2\mathrm{d}x$ trên $\mathbb{R}$;

b) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$ trên $(0; \pi)$.

Giải

a) Vì $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ nên $F(x) = \frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của x^2 trên $\mathbb{R}$.

Vậy $\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$ trên $\mathbb{R}$.

b) Vì $(-\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$ với mọi x thuộc $(0; \pi)$ nên $F(x) = -\cot x$ là một nguyên hàm của $\frac{1}{\sin^2 x}$ trên $(0; \pi)$. Vậy $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$ trên $(0; \pi)$.

Chú ý:

a) Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Bài toán tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ khoảng K thì được hiểu là tìm nguyên hàm trên từng khoảng xác định của hàm số đó.

b) Từ định nghĩa nguyên hàm, ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$.

1 Chứng minh rằng $F(x) = e^{2x+1}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2e^{2x+1}$ trên $\mathbb{R}$.

2. Nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số luỹ thừa

3 a) Giải thích tại sao $\int 0\,\mathrm{d}x = C$ và $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$.

b) Tìm đạo hàm của hàm số $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$. Từ đó, tìm $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x$.

Từ 3, ta có:

- $\int 0\,\mathrm{d}x = C$;
- $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$;
- $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$.

Chú ý: Người ta thường viết $\int \mathrm{d}x$ thay cho $\int 1\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 3. Tìm: a) $\int x^6\mathrm{d}x$; b) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int x^6\mathrm{d}x = \dfrac{1}{7}x^7 + C$;

b) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$.

2 Tìm: a) $\int x^4\mathrm{d}x$; b) $\int \dfrac{1}{x^3}\mathrm{d}x$; c) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{x}$

4 Cho hàm số $F(x) = \ln|x|$ với $x \neq 0$.

a) Tìm đạo hàm của $F(x)$.

b) Từ đó, tìm $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Từ 4, ta có:

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ với $x \neq 0$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thoả mãn $F(-2) = 0$.

Giải

Ta có $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$ nên $F(x) = \ln|x| + C$ $(x \neq 0)$.

Do $F(-2) = 0$ nên $\ln|-2| + C = 0$ hay $C = -\ln 2$.

Vậy $F(x) = \ln|x| - \ln 2$ $(x \neq 0)$.

Nguyên hàm của một số hàm số lượng giác

5 a) Tìm đạo hàm của các hàm số $y = \sin x$, $y = -\cos x$, $y = \tan x$, $y = -\cot x$.

b) Từ đó, tìm $\int \cos x\,dx$, $\int \sin x\,dx$, $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$ và $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$.

Từ 5, ta có:

- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$;
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$.

Ví dụ 5. Tìm $\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$.

Giải

$$\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx = \int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

3 Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos x$ thoả mãn $F(0) + F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Nguyên hàm của hàm số mũ

6 a) Tìm đạo hàm của các hàm số $y = e^x$, $y = \frac{a^x}{\ln a}$ với $a > 0$, $a \neq 1$.

b) Từ đó, tìm $\int e^x dx$ và $\int a^x dx$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Từ 6, ta có:

- $\int e^x dx = e^x + C$;
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Ví dụ 6. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2^x$ thoả mãn $F(0) = 1$.

Giải

Ta có $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ nên $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Do $F(0) = 1$ nên $\frac{2^0}{\ln 2} + C = \frac{1}{\ln 2} + C = 1$ hay $C = 1 - \frac{1}{\ln 2}$.

Vậy $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + 1 - \frac{1}{\ln 2}$.

4 Tìm: a) $\int 3^x dx$; b) $\int e^{2x} dx$.

3. Tính chất cơ bản của nguyên hàm

Nguyên hàm của tích một số với một hàm số

7 Ta có $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ và $(x^3)' = 3x^2$.

a) Tìm $\int x^2 \mathrm{d}x$ và $3\int x^2 \mathrm{d}x$.

b) Tìm $\int 3x^2 \mathrm{d}x$.

c) Từ các kết quả trên, giải thích tại sao $\int 3x^2 \mathrm{d}x = 3\int x^2 \mathrm{d}x$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x, \text{ với } k \in \mathbb{R}, k \neq 0.$$

Ví dụ 7. Tìm:

a) $\int \frac{2\sin x}{3}\mathrm{d}x$; b) $\int \frac{3^{x-1}}{2}\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int \frac{2\sin x}{3}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \sin x\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\cos x + C$;

b) $\int \frac{3^{x-1}}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{3^x}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int 3^x\mathrm{d}x = \frac{3^x}{6\ln 3} + C$.

5 Tìm: a) $\int\left(-\frac{\cos x}{4}\right)\mathrm{d}x$; b) $\int 2^{2x+1}\mathrm{d}x$.

Nguyên hàm của tổng, hiệu hai hàm số

8 Ta có $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, $(x^2)' = 2x$ và $\left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)' = x^2 + 2x$.

a) Tìm $\int x^2\mathrm{d}x$, $\int 2x\mathrm{d}x$ và $\int x^2\mathrm{d}x + \int 2x\mathrm{d}x$.

b) Tìm $\int (x^2 + 2x)\mathrm{d}x$.

c) Từ các kết quả trên, giải thích tại sao $\int (x^2 + 2x)\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x + \int 2x\mathrm{d}x$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

- $\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$;
- $\int [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 8. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x)=3\cos x-\dfrac{4}{x}$; b) $g(x) = (2x + 1)^3$.

Giải

a) $\displaystyle\int\left(3\cos x-\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x=3\int\cos x\,\mathrm{d}x-4\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=3\sin x-4\ln|x|+C$;

b) $\displaystyle\int(2x+1)^3\,\mathrm{d}x=\int(8x^3+12x^2+6x+1)\mathrm{d}x=8\int x^3\mathrm{d}x+12\int x^2\mathrm{d}x+6\int x\,\mathrm{d}x+\int 1\mathrm{d}x$

$= 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + C.$

6 Tìm: a) $\displaystyle\int\left(3x^3+\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right)\mathrm{d}x\ (x>0)$; b) $\displaystyle\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x.$

Ví dụ 9. Trả lời câu hỏi trong (trang 6).

Giải

Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của vật, $s(t)$ là quãng đường vật đi được cho đến thời điểm t giây kể từ khi vật bắt đầu rơi.

Vì $a(t) = v'(t)$ nên

$$v(t)=\int a(t)\,\mathrm{d}t=\int 10\,\mathrm{d}t=10t+C.$$

Ta có

Vì $v(0) = 0$ nên $10.0 + C = 0$ hay $C = 0$. Vậy $v(t) = 10t$ (m/s).

Vì $v(t) = s'(t)$ nên

$$s(t)=\int v(t)\,\mathrm{d}t=\int 10t\,\mathrm{d}t=5t^2+C.$$

ta có

Vì $s(0) = 0$ nên $5.0^2 + C = 0$ hay $C = 0$. Vậy $s(t) = 5t^2$ (m).

Vật rơi từ độ cao 20 m nên $s(t) \le 20$, suy ra $0 \le t \le 2$.

Vậy sau khi vật rơi được t giây ($0 \le t \le 2$) thì vật có tốc độ $v(t) = 10$ m/s và đi được quãng đường $s(t) = 5t^2$ mét.

7 Một ô tô đang chạy với tốc độ 19 m/s thì hãm phanh và chuyển động chậm dần với tốc độ $v(t) = 19 - 2t$ (m/s). Kể từ khi hãm phanh, quãng đường ô tô đi được sau 1 giây, 2 giây, 3 giây là bao nhiêu?

BÀI TẬP

1. Tính đạo hàm của hàm số $F(x) = xe^x$, suy ra nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x + 1)e^x$.

2. Tìm:

a) $\displaystyle\int x^5\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x\ (x>0)$; c) $\displaystyle\int 7^x\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int\frac{3^x}{5^x}\mathrm{d}x.$

3. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ thoả mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

4. Tìm:

a) $\displaystyle\int(2x^5+3)\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int(5\cos x-3\sin x)\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int\left(e^{x-2}-\frac{2}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x.$

5. Tìm:

a) $\int x(2x-3)^2\,dx$; b) $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx$; c) $\int \tan^2 x\,dx$; d) $\int 2^{3x}.3^x\,dx$.

6. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 2 m. Trong 10 năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(x)=\frac{1}{x}$ (m/năm).

a) Xác định chiều cao của cây sau x năm ($1 \le x \le 11$).

b) Sau bao nhiêu năm cây cao 3 m?

7. Một chiếc xe đang chuyển động với tốc độ $v_0 = 10$ m/s thì tăng tốc với gia tốc không đổi $a = 2$ m/s^2. Tính quãng đường xe đó đi được trong 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

Bài 2. Tích phân

Từ khoá: **Hình thang cong; Tích phân; Cận tích phân; Biểu thức dưới dấu tích phân; Hàm số dưới dấu tích phân.**

Một ô tô đang di chuyển với tốc độ 20 m/s thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) của xe thay đổi theo thời gian *t* (giây) được tính theo công thức

$$v(t) = 20 - 5t\ (0 \le t \le 4).$$

Kể từ khi hãm phanh đến khi dừng, ô tô đi được quãng đường bao nhiêu?

1. Diện tích hình thang cong

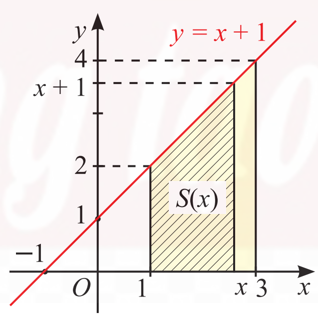
1 Cho hàm số $y = f(x) = x + 1$. Với mỗi $x \ge 1$, kí hiệu $S(x)$ là diện tích của hình thang giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng vuông góc với Ox tại các điểm có hoành độ 1 và x.

a) Tính $S(3)$.

b) Tính $S(x)$ với mỗi $x \ge 1$.

c) Tính $S'(x)$ và so sánh với $f(x)$. Từ đó suy ra $S(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[1; +\infty)$.

d) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Chứng tỏ rằng $F(3) - F(1) = S(3)$. Từ đó nhận xét về cách tính $S(3)$ khi biết một nguyên hàm của $f(x)$.



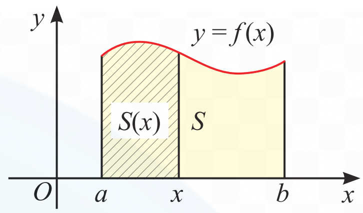
Hình 1

Trong 1, ta thấy diện tích $S(3)$ có thể tính được thông qua một nguyên hàm bất kì của hàm số $y = f(x)$. Ta sẽ mở rộng kết quả này cho trường hợp diện tích hình thang cong.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được gọi là *hình thang cong*.

Ta sẽ đưa ra công thức tính diện tích S của hình thang cong này.

Kí hiệu $S(x)$ là diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ là a và x. Ta được hàm số $S(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$.



Hình 2

Tổng quát kết quả của 1c, người ta chứng minh được rằng:

$S(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b]$. Khi đó, tồn tại hằng số C sao cho $S(x) = F(x) + C$. Vì $S(a) = 0$ nên $F(a) + C = 0$ hay $C = -F(a)$.

Từ đó, $S = S(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$.

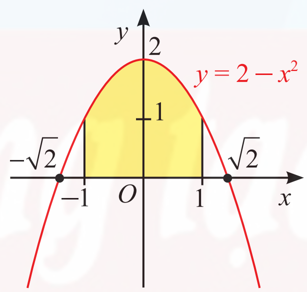
Vậy ta có kết quả sau:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi

$$S = F(b) - F(a),$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Ví dụ 1. Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = 2 - x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$ (Hình 3).



Hình 3

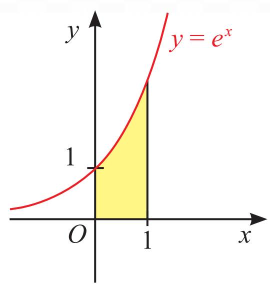
Giải

Hàm số $y = f(x) = 2 - x^2$ liên tục, dương trên đoạn $[-1; 1]$ và có một nguyên hàm là $F(x) = 2x - \dfrac{x^3}{3}$.

Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là

$$S = F(1) - F(-1) = \left(2 - \frac{1}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}.$$

1 Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = e^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$ (Hình 4).



Hình 4

2. Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f(x) = 2x - 1$. Lấy hai nguyên hàm tuỳ ý $F(x)$ và $G(x)$ của $f(x)$, rồi tính $F(3) - F(0)$ và $G(3) - G(0)$. Nhận xét về kết quả nhận được.

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, $G(x) = F(x) + C$ với hằng số C nào đó. Do đó,

$$G(b) - G(a) = F(b) + C - \left[(F(a) + C)\right] = F(b) - F(a).$$

Như vậy, hiệu số $F(b) - F(a)$ không phụ thuộc vào việc chọn nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ gọi là ***tích phân*** từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x)\Big|_a^b$.

Vậy $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Ta gọi $\int\limits_a^b$ là *dấu tích phân*, a và b là *cận tích phân*, a là *cận dưới*, b là *cận trên*, $f(x)\mathrm{d}x$ là *biểu thức dưới dấu tích phân* và $f(x)$ là *hàm số dưới dấu tích phân*.

Chú ý:

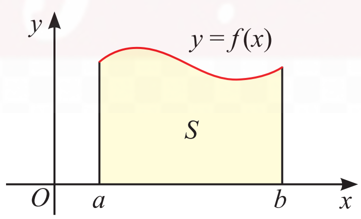
a) Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước

$$\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{và} \quad \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Người ta chứng minh được rằng, tích phân chỉ phụ thuộc vào hàm số f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến số x hay t, nghĩa là $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

c) *Ý nghĩa hình học của tích phân*

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.



Hình 5

Vậy

$$S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^2 x^2 dx$; b) $\int_1^e \frac{1}{t} dt$; c) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$.

Giải

a) $\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$; b) $\int_1^e \frac{1}{t} dt = \ln t\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$;

c) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -(\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -2.$

Chú ý:

a) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx.$$

b) Ta đã biết rằng, đạo hàm của quãng đường di chuyển theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mỗi thời điểm ($v(t) = s'(t)$). Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức

$$s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t)\, dt.$$

Lưu ý: Tốc độ chuyển động $v(t)$ luôn nhận giá trị không âm.

Ví dụ 3.

a) Tính quãng đường xe di chuyển từ khi hãm phanh đến khi dừng trong tình huống ở (trang 12).

b) Tính tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian đó.

Giải

a) Xe dừng khi $v(t) = 20 - 5t = 0$ hay $t = 4$ ($v(t) = 20 - 5t \geq 0$ với mọi $t \in [0; 4]$).

Từ đó, quãng đường xe di chuyển từ khi bắt đầu hãm phanh đến khi dừng là

$$s = \int_0^4 v(t)\, dt = \int_0^4 (20 - 5t)\, dt = \left.\left(20t - \frac{5t^2}{2}\right)\right|_0^4 = 40 \text{ (m)}.$$

b) Tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian đó là:

$$v_{tb} = \frac{s}{4} = \frac{40}{4} = 10 \text{ (m/s)}.$$

Nhận xét: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^3 2x\,\mathrm{d}x$; b) $\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t$; c) $\int_0^{\ln 2} e^u\,\mathrm{d}u$.

Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ

$$v(t) = 2t - 0{,}03t^2 \ (0 \le t \le 10),$$

trong đó $v(t)$ tính theo m/s, thời gian t tính theo giây với $t = 0$ là thời điểm xe xuất phát.

a) Tính quãng đường xe đi được sau 5 giây, sau 10 giây.

b) Tính tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 10$.

3. Tính chất của tích phân

Tính chất 1

a) Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x^5$. Từ đó, tính $I = \int_0^2 6x^5\mathrm{d}x$.

b) Tính $J = \int_0^2 x^5\mathrm{d}x$.

c) Có nhận xét gì về giá trị của I và $6J$?

Từ 3, một cách tổng quát ta có:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, k là số thực. Khi đó:

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^2 \frac{1}{4x^2}\mathrm{d}x$; b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2}{3\sin^2 x}\mathrm{d}x$; c) $\int_0^2 2^{x+3}\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int_1^2 \frac{1}{4x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_1^2 x^{-2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-1}x^{-1}\Big|_1^2 = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}\Big|_1^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{8}$;

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2}{3\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}(-\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\left(\cot\frac{\pi}{2} - \cot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}(0-1) = -\frac{2}{3}$;

c) $\int_0^2 2^{x+3}\mathrm{d}x = \int_0^2 2^x.2^3\mathrm{d}x = 8\int_0^2 2^x\mathrm{d}x = 8\cdot\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 = \frac{8}{\ln 2}(4-1) = \frac{24}{\ln 2}$.

Tính các tích phân sau:

a) $\int_{-1}^{1} 4x^7 dx$;
b) $\int_{-2}^{-1} \frac{-3}{10x} dx$;
c) $\int_{0}^{2} \frac{5^{x-1}}{2} dx$.

Tính chất 2

a) Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x^2 + e^x$. Từ đó, tính $\int_{0}^{1} (x^2 + e^x) dx$.

b) Tính $\int_{0}^{1} x^2 dx + \int_{0}^{1} e^x dx$.

c) Có nhận xét gì về hai kết quả trên?

Từ 4, một cách tổng quát ta có:

Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó:

$$\int_{a}^{b} [f(x) + g(x)] dx = \int_{a}^{b} f(x) dx + \int_{a}^{b} g(x) dx;$$

$$\int_{a}^{b} [f(x) - g(x)] dx = \int_{a}^{b} f(x) dx - \int_{a}^{b} g(x) dx.$$

Ví dụ 5. Tính các tích phân sau:

a) $\int_{-1}^{2} (3x^2 - 8x) dx$;
b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} \right) dx$.

Giải

a) $$\int_{-1}^{2} (3x^2 - 8x) dx = \int_{-1}^{2} 3x^2 dx - \int_{-1}^{2} 8x dx = 3\int_{-1}^{2} x^2 dx - 8\int_{-1}^{2} x dx$$

$$= 3.\left(\frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{2} - 8.\left(\frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{-1}^{2} = [2^3 - (-1)^3] - 4[2^2 - (-1)^2] = -3;$$

b) $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx = (\tan x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \sqrt{3}(-\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{3}\left(\cot\frac{\pi}{3} - \cot\frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \left(\sqrt{3} - 1 \right) - \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right) = 2\sqrt{3} - 2.$$

Ví dụ 6. Tại một nhà máy, gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu đồng) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó, đạo hàm $C'(x)$, gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ gia tăng tổng chi phí theo lượng gia tăng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức

$$C'(x) = 5 - 0,06x + 0,00072x^2 \text{ với } 0 \le x \le 150.$$

Biết rằng $C(0) = 30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định. Tính tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng.

Giải

Ta có:

$$C(100) - C(0) = \int_0^{100} C'(x)\mathrm{d}x = \int_0^{100} (5 - 0,06x + 0,00072x^2)\mathrm{d}x$$

$$= 5\int_0^{100} \mathrm{d}x - 0,06\int_0^{100} x\mathrm{d}x + 0,00072\int_0^{100} x^2\mathrm{d}x$$

$$= 5x\Big|_0^{100} - 0,03x^2\Big|_0^{100} + 0,00024x^3\Big|_0^{100} = 440.$$

Suy ra $C(100) = C(0) + 440 = 30 + 440 = 470$ (triệu đồng).

Vậy khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng thì tổng chi phí là 470 triệu đồng.

4 Tính các tích phân sau:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x^2}\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(1 + 2\sin^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x-2)^2\mathrm{d}x + \int_{-2}^{1} (4x - x^2)\mathrm{d}x$.

2 Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón, gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x tấn sản phẩm trong một tuần. Khi đó, đạo hàm $P'(x)$, gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức

$$P'(x) = 16 - 0,02x \text{ với } 0 \le x \le 100.$$

Tính lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 90 tấn sản phẩm trong tuần. Biết rằng nhà máy lỗ 25 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.

Tính chất 3

5 Cho hàm số $f(x) = 2x$. Tính và so sánh kết quả:

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \text{ và } \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

> Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, $c \in (a; b)$. Khi đó,
>
> $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 7. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x$.

Giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-(0-1)+(1-0)=2.$$

Ví dụ 8. Tính $\int_0^3|x^2-2x|\,\mathrm{d}x$.

Giải

Ta có: $|x^2-2x|=\begin{cases}-(x^2-2x), & 0\le x\le 2\\ x^2-2x, & 2<x\le 3.\end{cases}$

Do đó, $\int_0^3|x^2-2x|\,\mathrm{d}x=\int_0^2|x^2-2x|\,\mathrm{d}x+\int_2^3|x^2-2x|\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^2(-x^2+2x)\,\mathrm{d}x+\int_2^3(x^2-2x)\,\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_0^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_2^3=\frac{8}{3}.$$

5 Tính:

a) $\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(4x^3-5)\,\mathrm{d}x-\int_1^{\frac{1}{2}}(4x^3-5)\,\mathrm{d}x$; b) $\int_0^3|x-1|\,\mathrm{d}x$; c) $\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$.

3 Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t)=\begin{cases}0,5t, & 0\le t<2,\\ 1, & 2\le t<15,\\ 4-0,2t, & 15\le t\le 20.\end{cases}$$

Tính quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 đến 20 phút.

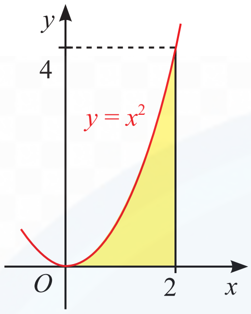
Hình 6

BÀI TẬP

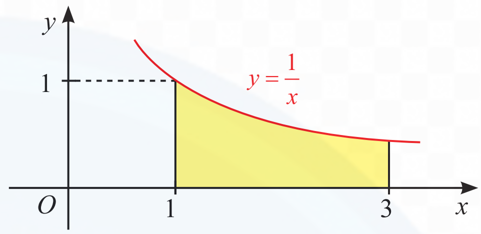
1. Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ (Hình 7);

b) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$ (Hình 8).



Hình 7



Hình 8

2. Tính các tích phân sau:

a) $\displaystyle\int_1^2 x^4\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$.

3. Tính các tích phân sau:

a) $\displaystyle\int_{-2}^4 (x+1)(x-1)\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x - 2)\,\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

4. Tính các tích phân sau:

a) $\displaystyle\int_{-2}^1 |2x+2|\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^4 |x^2-4|\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,\mathrm{d}x$.

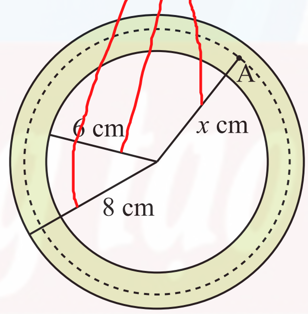
đổi màu khác màu đen

5. Mặt cắt ngang của một ống dẫn khí nóng là hình vành khuyên như Hình 9. Khí bên trong ống được duy trì ở 150 °C. Biết rằng nhiệt độ T (°C) tại điểm A trên thành ống là hàm số của khoảng cách x (cm) từ A đến tâm của mặt cắt và

$$T'(x) = -\frac{30}{x} \quad (6 \le x \le 8).$$

(*Nguồn:* Y.A.Çengel, A.I.Gahjar, Heat and Mass Transfer, Mc Graw Hill, 2015)

Tìm nhiệt độ mặt ngoài của ống.



Hình 9

6. Tốc độ v (m/s) của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức:

$$v(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 2, \\ 2, & 2 < t \le 20, \\ 12 - 0,5t, & 20 < t \le 24. \end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và tốc độ trung bình của thang máy.

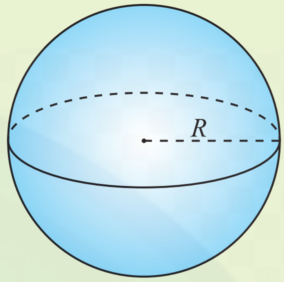
Bài 3. Ứng dụng hình học của tích phân

Từ khoá: Khối tròn xoay.

Ta đã biết công thức tính thể tích của hình cầu bán kính R là

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Làm thế nào để tìm ra công thức đó?



1. Tính diện tích hình phẳng

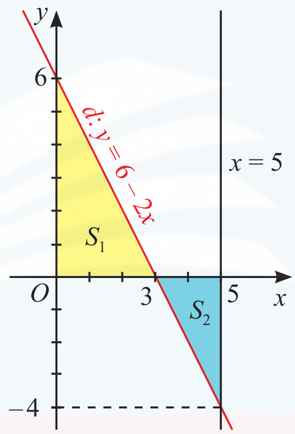
Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

1 Gọi d là đồ thị của hàm số $f(x) = 6 - 2x$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, trục hoành và trục tung; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, trục hoành và đường thẳng $x = 5$ (Hình 1).

a) Tính S_1 và so sánh với $\int_0^3 f(x)\,dx$.

b) Tính S_2 và so sánh với $\int_3^5 f(x)\,dx$.

c) So sánh $\int_0^5 f(x)\,dx$ với $S_1 + S_2$.



Hình 1

Ta đã biết, nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi $S = \int_a^b f(x)dx$.

Một cách tổng quát, ta có kết quả sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$.

Giải

Diện tích cần tìm là $S = \int_0^3 \left|x^2 - 4x + 3\right| \mathrm{d}x$.

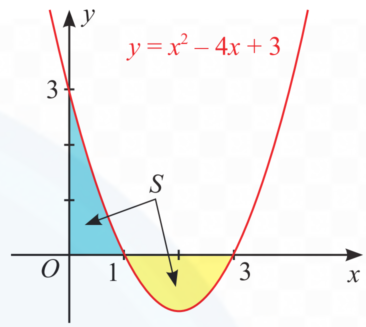
Ta có: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Với $x \in [0; 1]$ thì $f(x) \geq 0$. Với $x \in [1; 3]$ thì $f(x) \leq 0$.

Vậy $S = \int_0^3 \left|x^2 - 4x + 3\right| \mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 [-(x^2 - 4x + 3)]\,\mathrm{d}x$$

$$= \left.\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\right|_0^1 - \left.\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\right|_1^3 = \frac{8}{3}.$$



Hình 2

Chú ý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

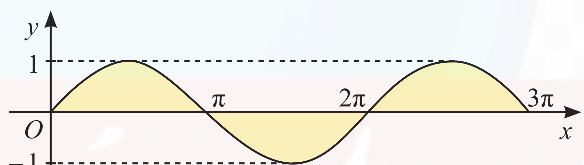
Nếu phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(a; b)$ thì công thức trên vẫn đúng.

Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3\pi$.

Giải

Diện tích cần tìm là $S = \int_0^{3\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$.

Trên khoảng $(0; 3\pi)$, phương trình $\sin x = 0$ chỉ có hai nghiệm là $x = \pi$ và $x = 2\pi$.



Hình 3

Vậy $S = \int_0^{3\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{3\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$

$$= \left|\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{2\pi}^{3\pi} \sin x\,\mathrm{d}x\right| = \left|(-\cos x)\Big|_0^{\pi}\right| + \left|(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right| + \left|(-\cos x)\Big|_{2\pi}^{3\pi}\right|$$

$$= |2| + |-2| + |2| = 6.$$

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x - x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$.

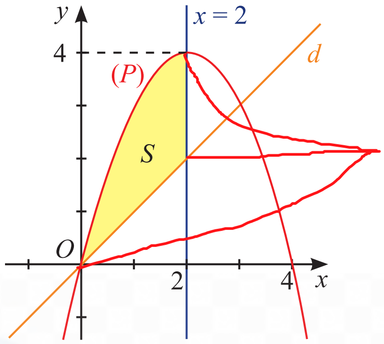
2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \cos x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$.

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Cho hai hàm số $y = 4x - x^2$ và $y = x$ lần lượt có đồ thị (P) và d như Hình 4.

a) Tính diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi (P), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

b) Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi (P), d và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

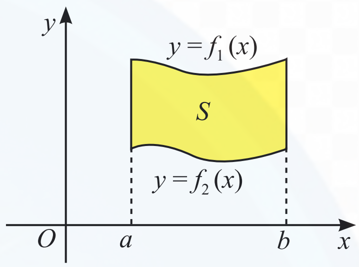


Bổ sung dấu chấm

Hình 4

Cho hai hàm số $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

Xét trường hợp $f_1(x) \geq f_2(x)$ với mọi $x \in [a; b]$. Kí hiệu S_1, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ và đồ thị của hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ tương ứng. Khi đó,



Hình 5

$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Trong trường hợp tổng quát, ta có kết quả sau:

Cho hai hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x) \right| \mathrm{d}x.$$

Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2$, $y = 2 - x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

Giải

Diện tích cần tìm là

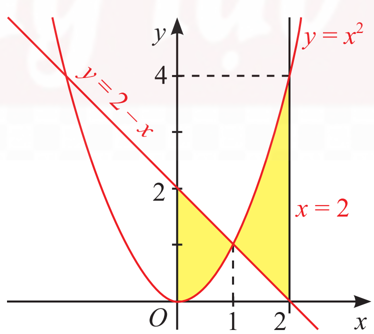
$$S = \int_0^2 |x^2 - (2 - x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^2 |x^2 + x - 2|\,\mathrm{d}x.$$

Ta có $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$.

Vậy $S = \int_0^1 |x^2 + x - 2|\,\mathrm{d}x + \int_1^2 |x^2 + x - 2|\,\mathrm{d}x$

$$= \left| \int_0^1 (x^2 + x - 2)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_1^2 (x^2 + x - 2)\,\mathrm{d}x \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^1 \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 \right| = \left| -\frac{7}{6} \right| + \left| \frac{11}{6} \right| = 3.$$



Hình 6

Ví dụ 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^3 - 3x$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 3$.

Giải

Diện tích cần tìm là $S = \int_{-1}^{3} |x^3 - 3x - x| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} |x^3 - 4x| \mathrm{d}x.$

Ta có $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$ hoặc $x = 2$.

Phương trình chỉ có hai nghiệm thuộc đoạn $[-1; 3]$ là $x = 0$ và $x = 2$.

Vậy $S = \int_{-1}^{3} |x^3 - 4x| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} |x^3 - 4x| \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} |x^3 - 4x| \mathrm{d}x + \int_{2}^{3} |x^3 - 4x| \mathrm{d}x$

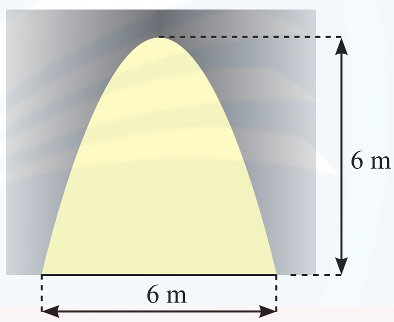
$$= \left| \int_{-1}^{0} (x^3 - 4x) \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{0}^{2} (x^3 - 4x) \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{2}^{3} (x^3 - 4x) \mathrm{d}x \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Bigg|_{-1}^{0} \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Bigg|_{0}^{2} \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Bigg|_{2}^{3} \right| = \left| \frac{7}{4} \right| + |-4| + \left| \frac{25}{4} \right| = 12.$$

3 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2 - 2x - 1$, $y = x - 1$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$.

4 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = 5x - x^2$, $y = x^2 - x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

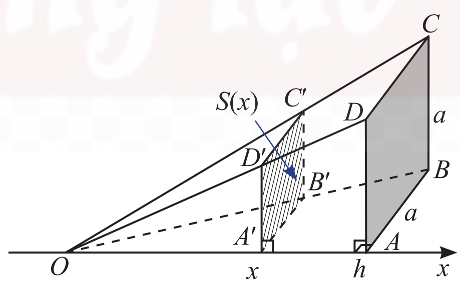
1 Mặt cắt của một cửa hầm có dạng là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang như Hình 7. Tính diện tích của cửa hầm.



Hình 7

2. Tính thể tích hình khối

3 Trong không gian, cho hình chóp $O.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $OA \perp (ABCD)$, $OA = h$. Đặt trục số Ox như Hình 8. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 < x \leq h)$, cắt hình chóp $O.ABCD$ theo mặt cắt là hình vuông $A'B'C'D'$. Kí hiệu $S(x)$ là diện tích của hình vuông $A'B'C'D'$.

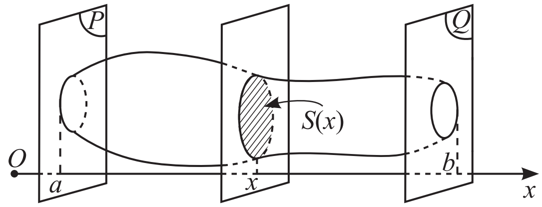


Hình 8

a) Tính $S(x)$ theo a, h và x.

b) Tính $\int_{0}^{h} S(x) \mathrm{d}x$ và so sánh với thể tích của khối chóp $O.ABCD$.

Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \le x \le b$) cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$ (Hình 9).



Hình 9

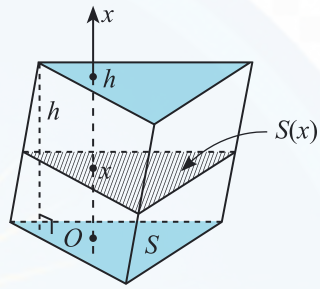
Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ thì thể tích của vật thể được tính bằng công thức:

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 5. Cho khối lăng trụ tam giác có diện tích đáy S và chiều cao h. Sử dụng tích phân, tính thể tích của khối lăng trụ theo S và h.

Giải

Chọn trục Ox song song với đường cao của khối lăng trụ sao cho hai đáy nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x = 0$ và $x = h$ (Hình 10).



Hình 10

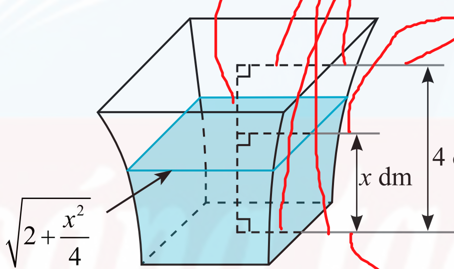
Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \le x \le h$) cắt lăng trụ theo mặt cắt có diện tích không đổi $S(x) = S$. Do đó, thể tích khối lăng trụ là

Đổi màu khác màu đen cho đỡ nhầm

$$V = \int_0^h S(x)\mathrm{d}x = \int_0^h S\mathrm{d}x = Sx\Big|_0^h = Sh.$$

5 Một bình chứa nước có hình dạng như Hình 11. Biết rằng khi nước trong bình có chiều cao x (dm) ($0 \le x \le 4$) thì mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2 + \frac{x^2}{4}}$ (dm). Tính dung tích của bình.

Đổi thành nét đứt như Hình 7



Hình 11

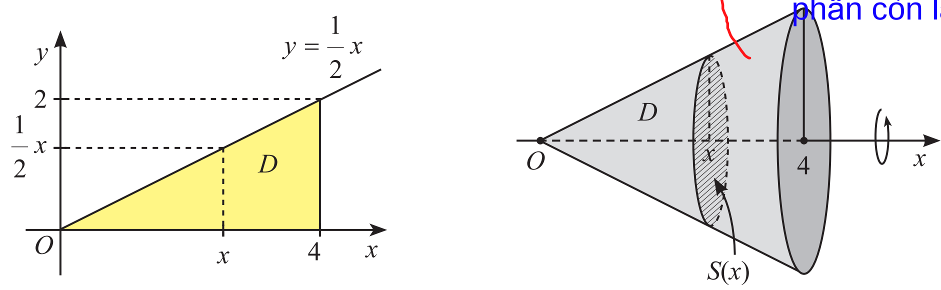
Thể tích khối tròn xoay

4 Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x$, trục hoành và đường thẳng $x = 4$ (Hình 12a). Quay hình D xung quanh trục Ox thì được một khối nón, kí hiệu là N (Hình 12b).

a) Cắt khối N bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \le x \le 4$) thì mặt cắt là hình gì? Tính diện tích $S(x)$ của mặt cắt đó.

b) Sử dụng công thức tính thể tích hình khối, tính thể tích của khối nón N.

Cho miền hình D vàng nhẹ cho phân biệt một tí so với phần còn lại



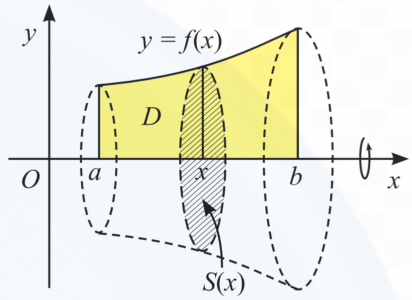
a) b)

Hình 12

Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a;\, b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

Quay D xung quanh trục Ox ta được một hình khối gọi là *khối tròn xoay*.

Cắt khối tròn xoay trên bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x \in [a;\, b]$, ta được mặt cắt là hình tròn có bán kính bằng $f(x)$ và diện tích là $S(x) = \pi f^2(x)$.



Hình 13

Vậy khối tròn xoay có thể tích là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

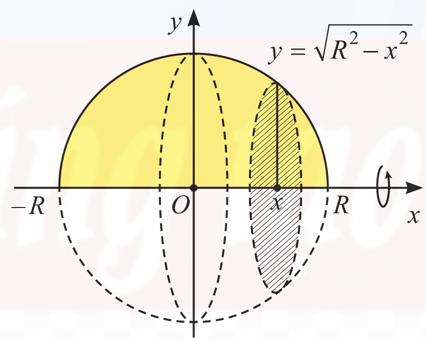
Ví dụ 6. Tính thể tích khối cầu có bán kính R để trả lời câu hỏi ở (trang 21).

Giải

Khối cầu có bán kính R là khối tròn xoay nhận được khi quay nửa hình tròn giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R \le x \le R)$ và trục Ox quanh trục Ox (Hình 14).

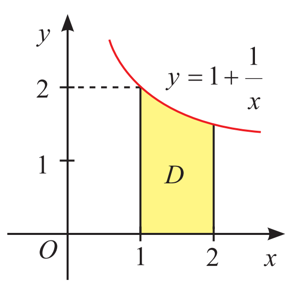
Từ đó, thể tích khối cầu là

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$



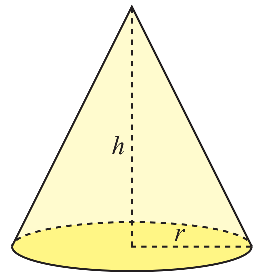
Hình 14

6 Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 1 + \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ (Hình 15). Tính thể khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox.



Hình 15

2 Sử dụng tích phân, tính thể tích khối nón có bán kính đáy r và chiều cao h (Hình 16).



Hình 16

BÀI TẬP

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) Đồ thị của hàm số $y = e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.

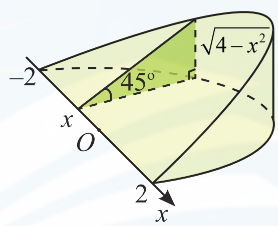
b) Đồ thị của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3 - x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{x}$, $y = -x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$.

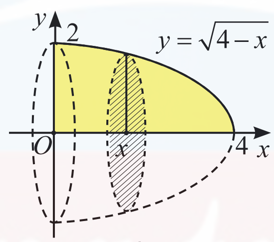
4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^3 + 1$, $y = 2$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.

5. Khi cắt một vật thể hình chiếc nêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-2 \le x \le 2)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4-x^2}$ (dm) (Hình 17). Tính thể tích của vật thể.



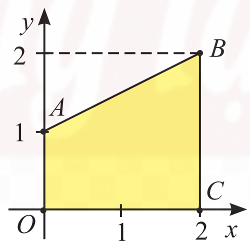
Hình 17

6. Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4-x}$ $(x \le 4)$, trục tung và trục hoành (Hình 18). Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox.



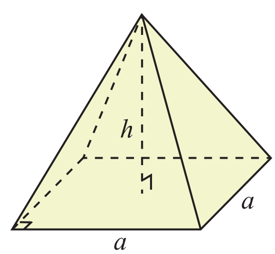
Hình 18

7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình thang $OABC$ có $A(0; 1)$, $B(2; 2)$ và $C(2; 0)$ (Hình 19). Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình thang $OABC$ quanh trục Ox.



Hình 19

8. Sử dụng tích phân, tính thể tích của hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h (Hình 20).



Hình 20

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = x^4$?

A. $-\frac{x^5}{5}$.

B. $4x^3$.

C. $\frac{x^5}{5}+1$.

D. $-4x^3 - 1$.

2. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x^2}$?

A. $\frac{1}{x^3}$.

B. $-\frac{1}{x}$.

C. $\frac{1}{x}$.

D. $-\frac{1}{x^3}$.

3. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int(\cos x - 2\sin x)\,dx = \sin x + 2\cos x + C$.

B. $\int(\cos x - 2\sin x)\,dx = -\sin x + 2\cos x + C$.

C. $\int(\cos x - 2\sin x)\,dx = \sin x - 2\cos x + C$.

D. $\int(\cos x - 2\sin x)\,dx = -\sin x - 2\cos x + C$.

4. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C$.

B. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{1}{x} + C$.

C. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3 + C$.

D. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + C$.

5. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int 3^{2x}\,dx = \frac{9^x}{\ln 9} + C$.

B. $\int 3^{2x}\,dx = 9^x.\ln 9 + C$.

C. $\int 3^{2x}\,dx = \left(\frac{3^x}{\ln 3}\right)^2 + C$.

D. $\int 3^{2x}\,dx = 3^x.\ln 3 + C$.

6. Giá trị của

$$\int_{-2}^{1}(4x^3+3x^2+8x)dx + \int_{1}^{2}(4x^3+3x^2+8x)dx$$

bằng

A. 16.

B. –16.

C. 52.

D. 0.

7. Biết rằng $\int_0^2 f(x)dx = -4$.

Giá trị của $\int_0^2 [3x - 2f(x)]dx$ bằng

A. –2.

B. 12.

C. 14.

D. 22.

8. Giá trị của $\int_0^2 |x^2 - x|\,dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{3}$.

D. 2.

9. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^3, y = x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ bằng

A. 2.

B. $\frac{5}{2}$.

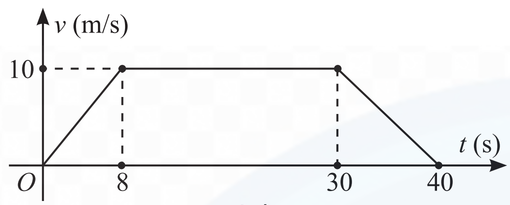
C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{1}{4}$.

10. Tốc độ chuyển động v (m/s) của một ca nô trong khoảng thời gian 40 giây được thể hiện như Hình 1. Quãng đường đi được của ca nô trong khoảng thời gian này là

A. 400 m. B. 350 m.

C. 310 m. D. 200 m.



Hình 1

11. Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+1}$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = 2$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng

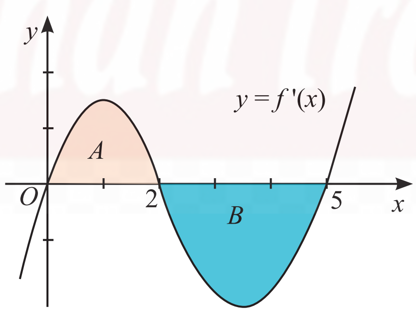
A. 6π. B. 2π.

C. 3π. D. 4π.

12. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ là đường cong trong Hình 2. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A = 2$ và $S_B = 3$. Nếu $f(0) = 4$ thì giá trị của $f(5)$ bằng

A. 3. B. 5.

C. 9. D. –1.



Hình 2

BÀI TẬP TỰ LUẬN

13. Tìm:

a) $\int[4(2-3x)^2-3\cos x]\mathrm{d}x$;

b) $\int\left(3x^3-\dfrac{1}{2x^3}\right)\mathrm{d}x$;

c) $\int\left(\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{3\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$;

d) $\int(3^{2x-2}+4\cos x)\,\mathrm{d}x$;

e) $\int\left(4\sqrt[5]{x^4}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x$;

g) $\int\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$.

14. Tính đạo hàm của $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Từ đó suy ra nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

15. Cho $f(x)=x^2\ln x$ và $g(x)=x\ln x$. Tính $f'(x)$ và $\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

16. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^1(4x^3+x)\,\mathrm{d}x$; b) $\int_1^2\dfrac{x-2}{x^2}\mathrm{d}x$;

c) $\int_0^4 2^{2x}\,\mathrm{d}x$; d) $\int_1^2(e^{x-1}+2^{x+1})\,\mathrm{d}x$.

17. Tính các tích phân sau:

a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan x)\cos x\,\mathrm{d}x$.

18. Một vật chuyển động với tốc độ $v(t) = 3t + 4$ (m/s), với thời gian t tính theo giây, $t \in [0; 5]$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 5$.

19. Một chất điểm đang chuyển động với tốc độ $v_0 = 1$ m/s thì tăng tốc với gia tốc không đổi $a = 3$ m/s^2. Hỏi tốc độ của chất điểm là bao nhiêu sau 10 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc?

20. Tốc độ tăng dân số của một thành phố trong một số năm được ước lượng bởi công thức

$$P'(t) = 20\,.\,(1{,}106)^t \text{ với } 0 \le t \le 7,$$

trong đó t là thời gian tính theo năm và $t = 0$ ứng với đầu năm 2015, $P(t)$ là dân số của thành phố tính theo nghìn người. Cho biết dân số của thành phố đầu năm 2015 là 1 008 nghìn người.

a) Tính dân số của thành phố ở thời điểm đầu năm 2020 (làm tròn đến nghìn người).

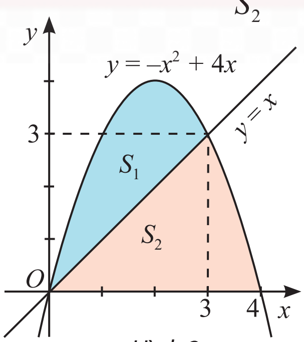
b) Tính tốc độ tăng dân số trung bình hằng năm của thành phố trong giai đoạn từ đầu năm 2015 đến đầu năm 2020.

21. Sau khi được thả rơi tự do từ độ cao 100 m, một vật rơi xuống với tốc độ $v(t) = 10t$ (m/s), trong đó t là thời gian tính theo giây kể từ khi thả vật.

a) Tính quãng đường $s(t)$ vật di chuyển được sau thời gian t giây (trong khoảng thời gian vật đang rơi).

b) Sau bao nhiêu giây thì vật chạm đất? Tính tốc độ rơi trung bình của vật.

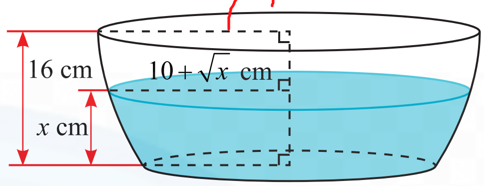
22. Cho S_1, S_2 là diện tích các hình phẳng được mô tả trong Hình 3. Tính $\dfrac{S_1}{S_2}$.



Hình 3

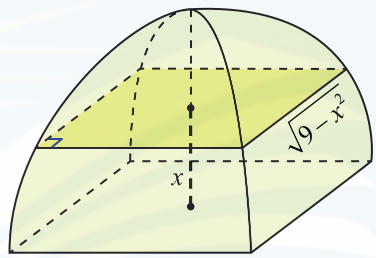
23. Nếu cắt chậu nước có hình dạng như Hình 4 bằng mặt phẳng song song và cách mặt đáy x (cm) $(0 \le x \le 16)$ thì mặt cắt là hình tròn có bán kính $(10 + \sqrt{x})$ (cm). Tính dung tích của chậu.

Sửa lại như sửa Hình 11



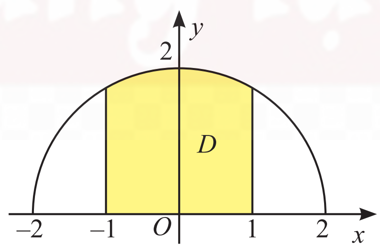
Hình 4

24. Một chiếc lều mái vòm có hình dạng như Hình 5. Nếu cắt lều bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng x (m) $(0 \le x \le 3)$ thì được hình vuông có cạnh $\sqrt{9 - x^2}$ (m). Tính thể tích của lều.



Hình 5

25. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ nửa đường tròn tâm O, bán kính $r = 2$ nằm phía trên trục Ox. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox.



Hình 6

Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương V PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU

Phương trình mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu có nhiều ứng dụng trong thiết kế, định vị, sản xuất, ... Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về phương trình của mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu trong không gian *Oxyz* cùng cách vận dụng chúng để tính khoảng cách, góc trong không gian và giải quyết một số vấn đề thực tiễn.

Phương trình mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu giúp xác định vị trí và tính toán chính xác trong thiết kế xây dựng.

Học xong chương này, bạn có thể:

– Thiết lập được phương trình tổng quát của mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu trong không gian *Oxyz*.

– Xác định được điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc với nhau; điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau, cắt nhau, song song hoặc vuông góc với nhau.

– Tính được khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng bằng phương pháp toạ độ.

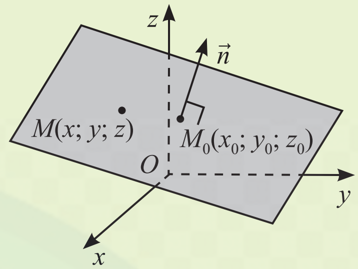
– Thiết lập được công thức tính góc giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng.

– Vận dụng được kiến thức về các phương trình nói trên để giải một số bài toán thực tiễn.

Bài 1. Phương trình mặt phẳng

Từ khoá: Cặp vectơ chỉ phương; Vectơ pháp tuyến; Phương trình tổng quát của mặt phẳng.

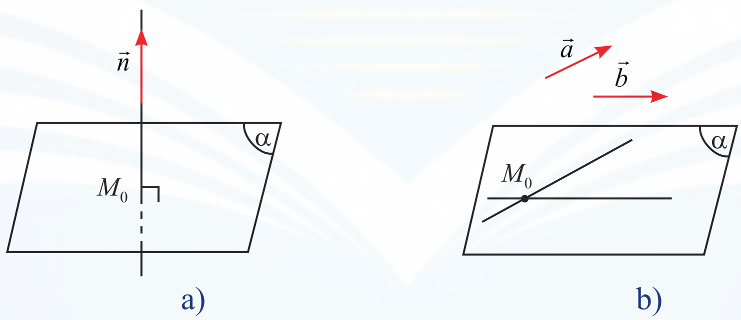
Trong không gian *Oxyz*, làm thế nào để biểu diễn một mặt phẳng bằng phương pháp toạ độ?



1. Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

1 a) Cho vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$. Qua một điểm M_0 cố định trong không gian, có bao nhiêu mặt phẳng (α) vuông góc với giá của vectơ $\vec{n}$?

b) Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Qua một điểm M_0 cố định trong không gian, có bao nhiêu mặt phẳng (α) song song hoặc chứa giá của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$?



Hình 1

Cho mặt phẳng (α).

- Nếu vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là ***vectơ pháp tuyến*** của (α).
- Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{a}, \vec{b}$ được gọi là ***cặp vectơ chỉ phương*** của (α).

Chú ý:

a) Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến hoặc một điểm và một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng đó.

b) Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

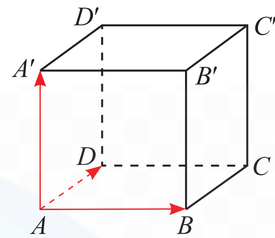
a) Tìm một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tìm một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.

Giải

a) Vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ không cùng phương và có giá nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ là một cặp vectơ chỉ phương của $(ABCD)$.

b) Vì $AA' \perp (ABCD)$ nên $\overrightarrow{AA'}$ là một vectơ pháp tuyến của $(ABCD)$.



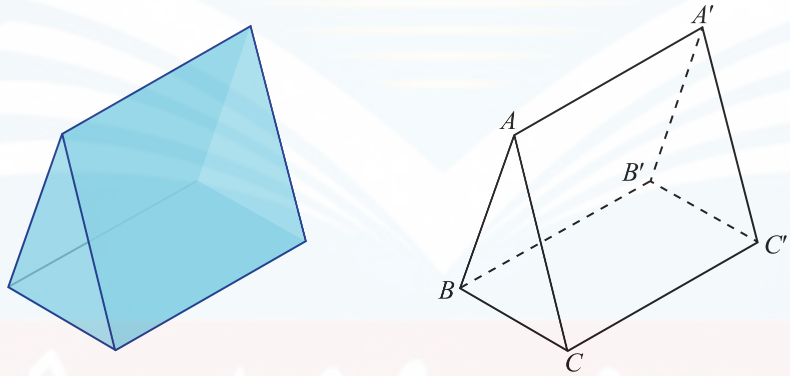
Hình 2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 5)$.

a) Tìm toạ độ của một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC).

b) Tìm toạ độ của một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (OAB).

Một lăng kính có dạng hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều ở Hình 3a được vẽ lại như Hình 3b. Tìm một cặp vectơ chỉ phương và một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'C')$.



a) b)

Hình 3

2. Xác định vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vectơ chỉ phương

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Xét vectơ $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$.

a) Vectơ $\vec{n}$ có khác $\vec{0}$ hay không?

b) Tính $\vec{a}.\vec{n}$; $\vec{b}.\vec{n}$.

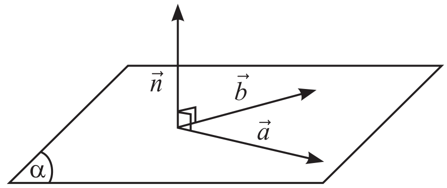
c) Vectơ $\vec{n}$ có phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) không?

Từ 2, ta có:

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận vectơ

$$\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

làm vectơ pháp tuyến.



Hình 4

Chú ý:

a) Vectơ $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ được gọi là *tích có hướng* của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$.

b) Biểu thức $a_1b_2 - a_2b_1$ thường được kí hiệu là $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Tương tự, $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$, $\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = a_3b_1 - a_1b_3$. Như vậy, ta có thể viết:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

c) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

Ví dụ 2. Cho mặt phẳng (P) nhận $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (4; 1; 5)$ làm cặp vectơ chỉ phương. Tìm một vectơ pháp tuyến của (P).

Giải

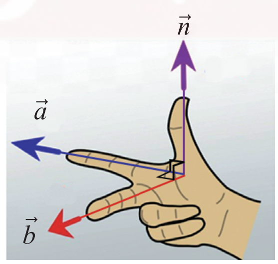
Ta có tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (2.5 - 3.1; 3.4 - 1.5; 1.1 - 2.4) = (7; 7; -7).$$

Do đó, mặt phẳng (P) nhận $\vec{n} = \frac{1}{7}[\vec{a}, \vec{b}] = (1; 1; -1)$ làm một vectơ pháp tuyến.

2 Cho mặt phẳng (Q) đi qua ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 5)$, $C(10; 7; -1)$. Tìm một cặp vectơ chỉ phương và một vectơ pháp tuyến của (Q).

2 Cho biết hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 1)$, $\vec{b} = (1; -2; 0)$ có giá lần lượt song song với ngón trỏ và ngón giữa của bàn tay trong Hình 5. Tìm vectơ $\vec{n}$ có giá song song với ngón cái. (Xem như ba ngón tay nói trên tạo thành ba đường thẳng đôi một vuông góc.)

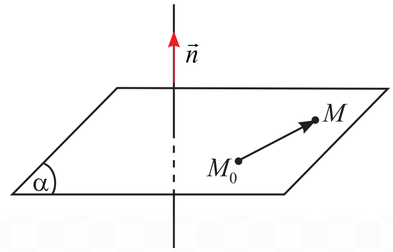


Hình 5

3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng

3 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(1; 2; 3)$ và nhận $\vec{n} = (7; 5; 2)$ làm vectơ pháp tuyến. Gọi $M(x; y; z)$ là một điểm tuỳ ý trong không gian. Tính tích vô hướng $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M}$ theo x, y, z.



Hình 6

Điều kiện cần và đủ để $M \in (\alpha)$ là $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M} = 0$ hay toạ độ của điểm $M(x; y; z)$ thoả mãn $7x + 5y + 2z - 23 = 0$ (*).

Phương trình (*) gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng (α).

Một cách tổng quát, ta có:

Trong không gian $Oxyz$, phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là ***phương trình tổng quát*** của mặt phẳng.

Nhận xét:

a) Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó:

- Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.
- $N(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

b) Mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0) đều là phương trình của một mặt phẳng xác định.

Ví dụ 3. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) có phương trình tổng quát là

$$(P): 3x - 5y + 7z + 5 = 0 \text{ và } (Q): x + y - 2 = 0.$$

a) Tìm một vectơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng (P), (Q).

b) Tìm điểm thuộc mặt phẳng (P) trong số các điểm: $A(1; 3; 1)$, $B(1; 2; 3)$.

Giải

a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -5; 7)$.

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}' = (1; 1; 0)$.

b) Thay toạ độ điểm A vào phương trình của (P), ta được:

$$3 . 1 - 5 . 3 + 7 . 1 + 5 = 0.$$

Vậy A thuộc (P).

Thay toạ độ điểm B vào phương trình của (P), ta được:

$$3 . 1 - 5 . 2 + 7 . 3 + 5 = 19 \neq 0.$$

Vậy B không thuộc (P).

3 Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình tổng quát là

$$(\alpha): 2x + 2y - 3z - 4 = 0 \text{ và } (\beta): x + 4z - 12 = 0.$$

a) Tìm một vectơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng (α), (β).

b) Tìm điểm thuộc mặt phẳng (α) trong số các điểm: $M(1; 0; 1)$, $N(1; 1; 0)$.

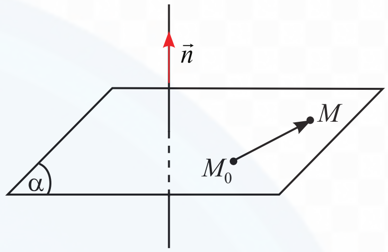
Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một vectơ pháp tuyến

4 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm vectơ pháp tuyến. Gọi $M(x; y; z)$ là một điểm tuỳ ý trong không gian.

a) Tìm toạ độ của $\overrightarrow{M_0M}$.

b) Tính tích vô hướng $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M}$.

c) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α).



Hình 7

Từ 4, ta có:

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

hay $Ax + By + Cz + D = 0$ với $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Ví dụ 4. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 1)$.

Giải

Vì (P) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 1)$ nên phương trình của (P) là

$$1(x - 1) + 2(y - 2) + 1(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 8 = 0.$$

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một cặp vectơ chỉ phương

5 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(0; 2; 1)$ và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; 3; 1)$, $\vec{b} = (2; 0; 1)$.

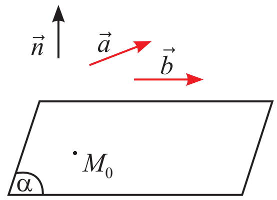
a) Tìm toạ độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

b) Lập phương trình của mặt phẳng (α).

Từ 5, ta có:

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$, ta thực hiện như sau:

- Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.
- Viết phương trình (α) đi qua $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.



Hình 8

Ví dụ 5. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $N(4;\, 0;\, 1)$ và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1;\, 2;\, 1)$, $\vec{b} = (2;\, 1;\, 3)$.

Giải

(P) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1;\, 2;\, 1)$, $\vec{b} = (2;\, 1;\, 3)$, suy ra (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (2.3 - 1.1;\, 1.2 - 1.3;\, 1.1 - 2.2) = (5;\, -1;\, -3)$.

Phương trình của (P) là

$$5(x-4) - 1(y-0) - 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow 5x - y - 3z - 17 = 0.$$

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

6 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(0;\, 1;\, 1)$, $B(2;\, 4;\, 3)$, $C(5;\, 3;\, 1)$.

a) Tìm toạ độ một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α).

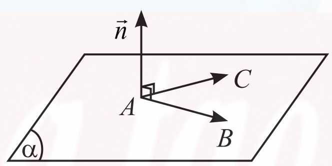
b) Tìm toạ độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

c) Lập phương trình của mặt phẳng (α).

Từ 6, ta có:

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:

- Tìm cặp vectơ chỉ phương, chẳng hạn $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
- Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.
- Viết phương trình (α) đi qua $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.



Hình 9

Ví dụ 6. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;\, 1;\, 1)$, $B(1;\, 2;\, 2)$, $C(4;\, 1;\, 0)$.

Giải

(P) đi qua ba điểm $A(1;\, 1;\, 1)$, $B(1;\, 2;\, 2)$, $C(4;\, 1;\, 0)$ nên có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0;\, 1;\, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (3;\, 0;\, -1)$, suy ra (P) có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1.(-1) - 1.0;\, 1.3 - 0.(-1);\, 0.0 - 1.3) = (-1;\, 3;\, -3).$$

Phương trình của (P) là

$$-1(x-1) + 3(y-1) - 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 3z - 1 = 0.$$

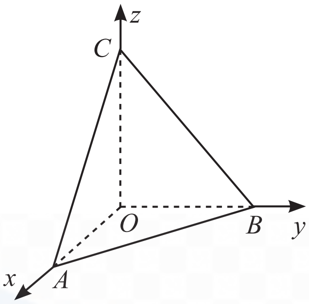
Ví dụ 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với a, b, c đều khác 0. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C.

Giải

(P) có một cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (-a; b; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$, do đó (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (bc; ac; ab)$. Suy ra (P) có phương trình:

$$bc(x - a) + ac(y - 0) + ab(z - 0) = 0$$

hay $bcx + acy + abz - abc = 0$.



Hình 10

Nhận xét: Do a, b, c đều khác 0 nên có thể viết lại phương trình trên thành $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Phương trình này gọi là *phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn*.

Viết phương trình mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau:

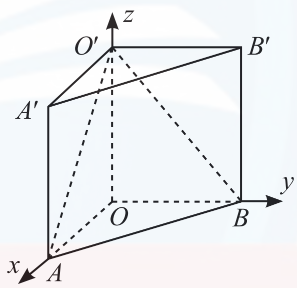
a) (P) đi qua điểm $A(2; 0; -1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5; -2; 7)$.

b) (P) đi qua điểm $B(-2; 3; 0)$ và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 2; -1)$, $\vec{v} = (3; 1; 0)$.

c) (P) đi qua ba điểm $A(2; 1; 5)$, $B(3; 2; 7)$, $C(4; 1; 6)$.

d) (P) đi qua ba điểm $M(7; 0; 0)$, $N(0; -2; 0)$, $P(0; 0; 9)$.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ $OAB.O'A'B'$. Biết O là gốc toạ độ, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $O'(0; 0; 5)$. Viết phương trình các mặt phẳng $(O'AB)$ và $(O'A'B')$.



Hình 11

4. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình là

$$(\alpha): x - 2y + 3z + 1 = 0 \text{ và } (\beta): 2x - 4y + 6z + 1 = 0.$$

a) Nêu nhận xét về các vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng trên.

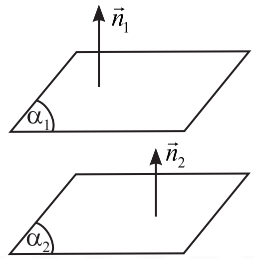
b) Cho điểm $M(-1; 0; 0)$. Hãy cho biết các mặt phẳng (α), (β) có đi qua M không.

c) Giải thích tại sao (α) song song với (β).

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (α_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và (α_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó

$$(\alpha_1) \mathbin{/\!/} (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

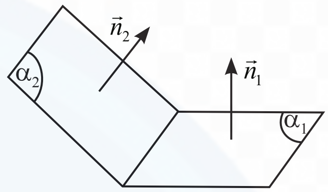


Hình 12

Chú ý:

$$(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

(α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.



Hình 13

Ví dụ 8. Mặt phẳng (P): $4x + 3y + z + 5 = 0$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

a) (Q): $8x + 6y + 2z + 9 = 0$; b) (R): $8x + 6y + 2z + 10 = 0$; c) (S): $4x + 2y + z + 5 = 0$.

Giải

Các mặt phẳng (P), (Q), (R), (S) có các vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (4; 3; 1)$, $\vec{n}_2 = (8; 6; 2)$, $\vec{n}_3 = (8; 6; 2)$, $\vec{n}_4 = (4; 2; 1)$.

a) Xét (P) và (Q), ta có $\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$, $9 \neq 2.5$. Vậy $(P) \mathbin{/\!/} (Q)$.

b) Xét (P) và (R), ta có $\vec{n}_3 = 2\vec{n}_1$, $10 = 2.5$. Vậy $(P) \equiv (R)$.

c) Xét (P) và (S), ta có $\frac{4}{4} \neq \frac{3}{2}$ suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_4$ không cùng phương. Vậy (P) cắt (S).

Ví dụ 9. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và song song với mặt phẳng (P): $2x + y + z + 12 = 0$.

Giải

Dễ thấy điểm M không nằm trên (P). Vì $(Q) \mathbin{/\!/} (P)$ nên (Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 1; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ là:

$$2(x - 1) + (y - 2) + (z - 3) = 0 \text{ hay } 2x + y + z - 7 = 0.$$

5 Mặt phẳng (E): $2x - y + 8z + 1 = 0$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

a) (F): $8x - 4y + 32z + 7 = 0$;

b) (H): $6x - 3y + 24z + 3 = 0$;

c) (G): $10x - 5y + 41z + 1 = 0$.

4 Trên bản thiết kế đồ hoạ 3D của một cánh đồng điện mặt trời trong không gian $Oxyz$, một tấm pin nằm trên mặt phẳng (P): $6x + 5y + z + 2 = 0$; một tấm pin khác nằm trên mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và song song với (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q).

Hình 14

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

8 Cho hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình là

$$(\alpha): 3x + 2y + z + 1 = 0 \text{ và } (\beta): 5x - 10y + 5z + 9 = 0.$$

a) Chỉ ra hai vectơ $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (α) và (β).

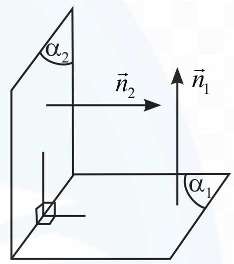
b) Tính tích vô hướng $\vec{n}_1.\vec{n}_2$ và nêu nhận xét về hai mặt phẳng (α) và (β).

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

(α_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và (α_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

Khi đó $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.



Hình 15

Ví dụ 10. Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) có phương trình là:

$$(P): x - 4y + 3z + 2 = 0; (Q): 4x + y + 88 = 0 \text{ và } (R): x + y + z + 9 = 0.$$

Chứng minh rằng $(P) \perp (Q)$ và $(P) \perp (R)$.

Giải

Các mặt phẳng (P), (Q), (R) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (1; -4; 3)$, $\vec{n}_2 = (4; 1; 0)$, $\vec{n}_3 = (1; 1; 1)$.

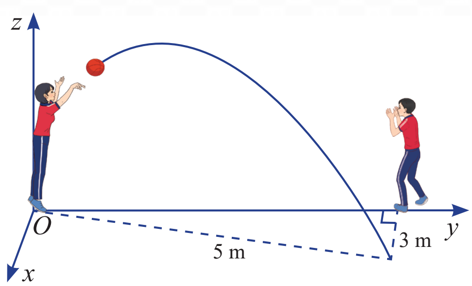
Xét (P) và (Q), ta có $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 1 . 4 + (-4) . 1 + 3 . 0 = 0$. Vậy $(P) \perp (Q)$.

Xét (P) và (R), ta có $\vec{n}_1.\vec{n}_3 = 1 . 1 + (-4) . 1 + 3 . 1 = 0$. Vậy $(P) \perp (R)$.

6 Tìm các cặp mặt phẳng vuông góc trong các mặt phẳng sau:

(F): $3x + 2y + 5z + 3 = 0$, (H): $x - 4y + z + 23 = 0$, (G): $x - y + 3z + 24 = 0$.

5 Hai học sinh đang chuyền bóng. Bạn nữ ném bóng cho bạn nam. Quả bóng bay trên không, lệch sang phải và rơi xuống tại vị trí cách bạn nam 3 m, cách bạn nữ 5 m (Hình 16). Cho biết quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với mặt đất. Hãy viết phương trình của (P) trong không gian $Oxyz$ được mô tả như trong hình vẽ.

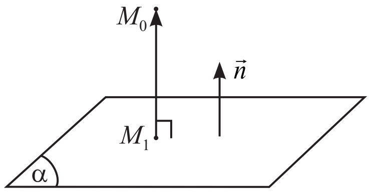


Hình 16

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

9

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Gọi $M_1(x_1; y_1; z_1)$ là hình chiếu vuông góc của M_0 trên (α) (Hình 17).



Hình 17

a) Nêu nhận xét về phương của hai vectơ:

$\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$ và $\vec{n} = (A; B; C)$.

b) Tính $\overrightarrow{M_1M_0}.\vec{n}$ theo A, B, C, D và toạ độ của M_0.

c) Giải thích tại sao ta lại có đẳng thức $\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|.\left|\vec{n}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_0}.\vec{n}\right|$.

d) Từ các kết quả trên suy ra cách tính $d(M_0, (\alpha)) = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_0}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ví dụ 11. Tính khoảng cách từ điểm $M(1; 2; 3)$ đến các mặt phẳng sau:

a) (P): $x + y + z + 12 = 0$; b) (Q): $4x + 3y + 10 = 0$.

Giải

a) $d(M, (P)) = \dfrac{|1.1 + 1.2 + 1.3 + 12|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$;

b) $d(M, (Q)) = \dfrac{|4.1 + 3.2 + 0.3 + 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2}} = \dfrac{20}{5} = 4$.

Ví dụ 12. Tính chiều cao của hình chóp $S.ABC$ có toạ độ các đỉnh là $S(5; 0; 1)$, $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(5; 2; 3)$.

Giải

Mặt phẳng (ABC) đi qua ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(5; 2; 3)$ nên có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (4; 1; 2)$, suy ra (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2.2 - 3.1; 3.4 - 1.2; 1.1 - 2.4) = (1; 10; -7)$.

Phương trình của (ABC) là: $1(x - 1) + 10(y - 1) - 7(z - 1) = 0$ hay $x + 10y - 7z - 4 = 0$.

Chiều cao SH của hình chóp $S.ABC$ chính là khoảng cách từ điểm S đến (ABC).

Ta có: $SH = d(S, (ABC)) = \dfrac{|1.5 + 10.0 + (-7).1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 10^2 + (-7)^2}} = \dfrac{6}{5\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{5}$.

Ví dụ 13. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) cho bởi các phương trình sau đây:

$$(P): 2x + y + 2z + 9 = 0; \qquad (Q): 2x + y + 2z + 99 = 0.$$

Giải

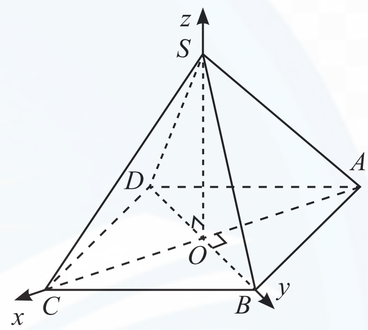
Ta lấy điểm $M(0; -9; 0)$ thuộc (P). Do hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nên khoảng cách giữa chúng là:

$$d((P), (Q)) = d(M, (Q)) = \frac{|2.0 + 1.(-9) + 2.0 + 99|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{90}{3} = 30.$$

7 a) Tính chiều cao của hình chóp $O.MNP$ với toạ độ các đỉnh là $O(0; 0; 0)$, $M(2; 1; 2)$, $N(3; 3; 3)$, $P(4; 5; 6)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (R): $8x + 6y + 70 = 0$ và (S): $16x + 12y - 2 = 0$.

6 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, chiều cao bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Bằng cách thiết lập hệ trục toạ độ $Oxyz$ như Hình 18, tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).



Hình 18

BÀI TẬP

1. Viết phương trình của mặt phẳng:

a) Đi qua điểm $A(2; 0; 0)$ và nhận $\vec{n} = (2; 1; -1)$ làm vectơ pháp tuyến;

b) Đi qua điểm $B(1; 2; 3)$ và song song với giá của mỗi vectơ $\vec{u} = (1; 2; 3)$ và $\vec{v} = (-2; 0; 1)$;

c) Đi qua ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ và $C(0; 0; 4)$.

2. a) Lập phương trình của các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oyz), (Oxz).

b) Lập phương trình của các mặt phẳng đi qua điểm $A(-1; 9; 8)$ và lần lượt song song với các mặt phẳng toạ độ trên.

3. Cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(4; 0; 2)$, $B(0; 5; 1)$, $C(4; -1; 3)$, $D(3; -1; 5)$.

a) Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ABC) và (ABD).

b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua cạnh BC và song song với cạnh AD.

4. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm $C(1; -5; 0)$ và song song với mặt phẳng (P): $3x - 5y + 4z - 2\,024 = 0$.

5. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(5; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (β): $2x - y + z - 7 = 0$.

6. Viết phương trình mặt phẳng (R) đi qua điểm $A(1; 2; -1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (P): $4x - 2y + 6z - 11 = 0$, (Q): $2x + 2y + 2z - 7 = 0$.

7. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ và từ điểm $M(1; -2; 13)$ đến mặt phẳng (P): $2x - 2y - z + 3 = 0$.

8. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P): $x - 2 = 0$ và (Q): $x - 8 = 0$.

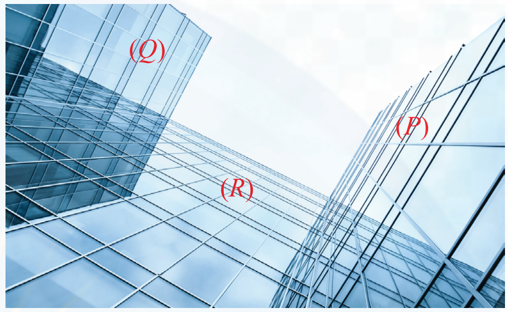
9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = 5a$, $SA = 3a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

10. Một công trường xây dựng nhà cao tầng đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$. Hãy kiểm tra tính song song hoặc vuông góc giữa các mặt kính (P), (Q), (R) (Hình 19) của một toà nhà, biết:

(P): $3x + y - z + 2 = 0$;

(Q): $6x + 2y - 2z + 11 = 0$;

(R): $x - 3y + 1 = 0$.



Hình 19

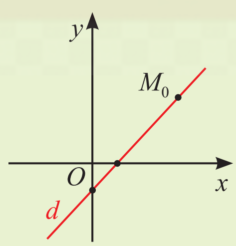
Bài 2. Phương trình đường thẳng trong không gian

Từ khoá: **Vectơ chỉ phương; Phương trình tham số của đường thẳng; Phương trình chính tắc của đường thẳng.**

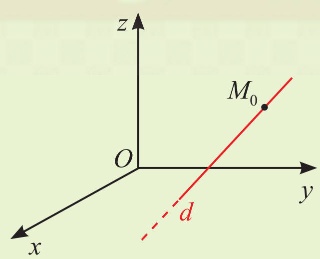
Ta đã biết trong mặt phẳng Oxy, phương trình tham số của đường thẳng có dạng:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases} (a_1^2 + a_2^2 \neq 0, t \in \mathbb{R}).$$

Còn trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng có dạng như thế nào?



a) Đường thẳng trong mặt phẳng Oxy

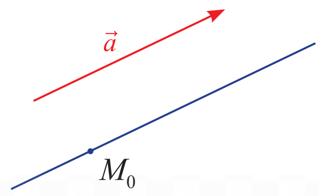


b) Đường thẳng trong không gian $Oxyz$

1. Phương trình đường thẳng trong không gian

Vectơ chỉ phương của đường thẳng

1 Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M_0 cố định và vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Có bao nhiêu đường thẳng d đi qua M_0 và song song hoặc trùng với giá của $\vec{a}$?



Hình 1

Từ **1**, ta có định nghĩa:

> Vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là ***vectơ chỉ phương*** của d.

Chú ý: Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của d thì $k\vec{a}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của d.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $O.ABC$ có $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ và $C(0; 0; 7)$.

a) Tìm toạ độ một vectơ chỉ phương của mỗi đường thẳng AB, AC.

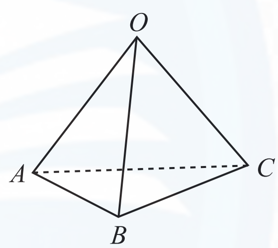
b) Vectơ $\vec{v} = (-1; 2; 0)$ có là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB không?

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 4; 0)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB;

$\overrightarrow{AC} = (-2; 0; 7)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AC.

b) Vì $\vec{v} = (-1; 2; 0) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ nên $\vec{v}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.



Hình 2

1 Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ với $A(1; 2; 1)$, $B(7; 5; 3)$, $C(4; 2; 0)$, $A'(4; 9; 9)$. Tìm toạ độ một vectơ chỉ phương của mỗi đường thẳng AB, $A'C'$ và BB'.

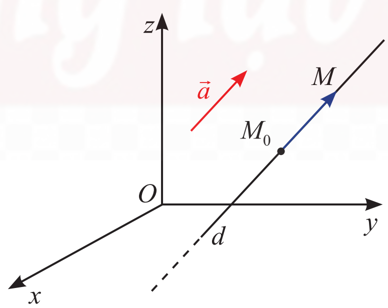
Phương trình tham số của đường thẳng

2 Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ cố định và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ khác $\vec{0}$.

a) Giải thích tại sao ta có thể viết:

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{a} \ (t \in \mathbb{R}).$$

b) Với $M(x; y; z)$ thuộc d, hãy tính x, y, z theo x_0, y_0, z_0 và a_1, a_2, a_3.



Hình 3

Từ 2, ta có định nghĩa:

Trong không gian $Oxyz$, ***phương trình tham số*** của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm vectơ chỉ phương có dạng:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{R} \text{ (}t\text{ được gọi là tham số).}$$

Ví dụ 2. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 11 + 2t \\ z = 4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

a) Tìm hai vectơ chỉ phương của d.

b) Tìm các điểm trên d ứng với t lần lượt bằng 0; 2; –3.

Giải

a) Từ phương trình tham số, ta có $\vec{a} = (6; 2; 4)$ là một vectơ chỉ phương của d.

Chọn $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} = (3; 1; 2)$, ta có $\vec{b}$ cũng là một vectơ chỉ phương của d.

b) Thay $t = 0$ vào phương trình tham số của d, ta được:

$$\begin{cases} x = -2 + 6.0 \\ y = 11 + 2.0 \\ z = 4.0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -2 \\ y = 11 \\ z = 0. \end{cases}$$

Vậy $A(-2; 11; 0)$.

Tương tự, với $t = 2$ thì $B(10; 15; 8)$, với $t = -3$ thì $C(-20; 5; -12)$.

Chú ý:

a) Trong phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$, mỗi giá trị của tham số t xác định duy nhất một điểm M trên d và ngược lại.

b) Từ nay để cho gọn, trong phương trình tham số của đường thẳng, ta không viết $t \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 3. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(1; 2; 3)$ và nhận $\vec{a} = (4; 5; -7)$ làm vectơ chỉ phương. Đường thẳng d có đi qua điểm $A(1; 1; 5)$ không?

Giải

Ta có phương trình tham số của d là:

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 - 7t. \end{cases}$$

Thay $x = 1$ vào phương trình $x = 1 + 4t$, ta được $1 = 1 + 4t$, suy ra $t = 0$.

Thay $y = 1$ và $t = 0$ vào phương trình $y = 2 + 5t$, ta thấy phương trình không thoả mãn. Suy ra đường thẳng d không đi qua điểm A.

2 Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = -4t \\ z = 3 + 12t. \end{cases}$

a) Tìm ba vectơ chỉ phương của d.

b) Tìm các điểm trên d ứng với t lần lượt bằng –1; 0; 1.

3 Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(5; 0; -7)$ và nhận $\vec{v} = (9; 0; -2)$ làm vectơ chỉ phương. Đường thẳng d có đi qua có điểm $M(-4; 0; -5)$ không?

Phương trình chính tắc của đường thẳng

3 Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$ với a_1, a_2, a_3 đều khác 0.

Lấy điểm $M(x; y; z)$ bất kì thuộc d. So sánh các biểu thức: $\dfrac{x - x_0}{a_1}$; $\dfrac{y - y_0}{a_2}$; $\dfrac{z - z_0}{a_3}$.

Từ 3, ta có định nghĩa:

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì hệ phương trình

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

gọi là ***phương trình chính tắc*** của đường thẳng d.

Ví dụ 4. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(1; 2; 3)$ và nhận $\vec{a} = (4; 5; -7)$ làm vectơ chỉ phương.

Giải

Đường thẳng d có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-3}{-7}$.

4 Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(5; 0; -6)$ và nhận $\vec{a} = (3; 2; -4)$ làm vectơ chỉ phương.

Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm

Cho đường thẳng d đi qua hai điểm $A(2; 2; 1)$ và $B(4; 5; 3)$.

a) Tìm một vectơ chỉ phương của d.

b) Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của d.

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ và có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t. \end{cases}$$

Nếu $x_A \neq x_B$, $y_A \neq y_B$, $z_A \neq z_B$ thì d có phương trình chính tắc:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}.$$

Ví dụ 5. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng AB, biết $A(1; 1; 5)$ và $B(3; 5; 8)$.

Giải

Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (2; 4; 3)$ nên có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 5 + 3t \end{cases}$$

và phương trình chính tắc:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-5}{3}.$$

Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng MN, biết $M(2; 0; -1)$ và $N(4; 3; 1)$.

Một mô hình cầu treo được thiết kế trong không gian $Oxyz$ như Hình 4. Viết phương trình tham số của làn đường d đi qua hai điểm $M(4; 3; 20)$ và $N(4; 1000; 20)$.

Hình 4

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng. Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

Điều kiện để hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau

5 Cho ba đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t; \end{cases} \quad d': \begin{cases} x = 2t' \\ y = 7 + 4t' \\ z = 2 + 6t' \end{cases} \quad \text{và} \quad d'': \begin{cases} x = 5 + 2t'' \\ y = 3 + 4t'' \\ z = 4 + 6t''. \end{cases}$$

a) Nêu nhận xét về ba vectơ chỉ phương của d, d' và d''.

b) Xét điểm $M(4;\ 1;\ 1)$ nằm trên d. Điểm M có nằm trên d' hoặc d'' không?

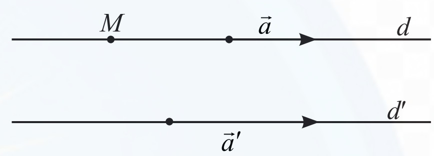
c) Từ các kết quả trên, ta có thể kết luận gì về vị trí tương đối giữa d và d', d và d''?

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Gọi $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ và $\vec{a}' = (a_1';\ a_2';\ a_3')$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng d và d'.
Gọi $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ là một điểm trên d.

Ta có: $d \,//\, d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = k\vec{a}', k \in \mathbb{R} \\ M \notin d'; \end{cases}$

$$d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = k\vec{a}', k \in \mathbb{R} \\ M \in d'. \end{cases}$$



Hình 5

Ví dụ 6. Kiểm tra tính song song hoặc trùng nhau của các cặp đường thẳng sau:

a) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 5 + 2t' \\ z = 1 + 4t'; \end{cases}$

b) $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ và $d': \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-3}{6}$.

Giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;\ 2;\ 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;\ 1;\ 2)$.

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (2;\ 2;\ 4) = 2\vec{a}$.

Thay toạ độ điểm M vào phương trình của d', ta được:

$$\begin{cases} 1 = 2 + 2t' \\ 2 = 5 + 2t' \\ 1 = 1 + 4t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -\dfrac{1}{2} \\ t' = -\dfrac{3}{2} \\ t' = 0 \end{cases} \quad \text{(vô nghiệm).}$$

Suy ra M không thuộc d'. Vậy $d \,//\, d'$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;\, 2;\, 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;\, 1;\, 2)$.

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (3;\, 3;\, 6) = 3\vec{a}$.

Thay toạ độ điểm M vào phương trình của d', ta được:

$$\frac{1-2}{3} = \frac{2-3}{3} = \frac{1-3}{6}.$$

Phương trình nghiệm đúng, suy ra M thuộc d'. Vậy $d \equiv d'$.

Chú ý: Cho đường thẳng d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$, đường thẳng d' đi qua điểm M' và có vectơ chỉ phương $\vec{a}'$.

a) Nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{a}'$, $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương thì $d \equiv d'$.

b) Nếu hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{a}'$ cùng phương và hai vectơ $\vec{a}$, $\overrightarrow{MM'}$ không cùng phương thì $d \,//\, d'$.

Vận dụng tính chất trên, ta có thể giải Ví dụ 6 theo cách sau:

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;\, 2;\, 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;\, 1;\, 2)$, đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2;\, 5;\, 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (2;\, 2;\, 4)$. Ta có $\overrightarrow{MM'} = (1;\, 3;\, 0)$.

Ta có $\vec{a}' = 2\vec{a}$, suy ra $\vec{a}$, $\vec{a}'$ cùng phương và $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{3}$, suy ra $\vec{a}$, $\overrightarrow{MM'}$ không cùng phương. Vậy $d \,//\, d'$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;\, 2;\, 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;\, 1;\, 2)$, đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2;\, 3;\, 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (3;\, 3;\, 6)$. Ta có $\overrightarrow{MM'} = (1;\, 1;\, 2)$.

Ta có $\vec{a}' = 3\vec{a} = 3\overrightarrow{MM'}$, suy ra ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{a}'$, $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương. Vậy $d \equiv d'$.

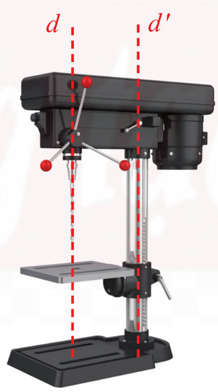
6 Kiểm tra tính song song hoặc trùng nhau của các cặp đường thẳng sau:

a) $d: \begin{cases} x = 7 + 4t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ và $d': \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-4}{-1}$;

b) $d: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ và $d': \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-5}{4}$.

2 Trên một máy khoan bàn đã thiết lập sẵn một hệ toạ độ. Nêu nhận xét về vị trí giữa trục d của mũi khoan và trục d' của giá đỡ có phương trình lần lượt là:

$$d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{và } d': \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 5 + 5t'. \end{cases}$$



Hình 6

Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau hoặc chéo nhau

6 Cho ba đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t; \end{cases} \qquad d': \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = -2 + t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases} \qquad \text{và} \qquad d'': \begin{cases} x = 2 - 2t'' \\ y = -2 + t'' \\ z = 3 + 3t''. \end{cases}$$

a) Đường thẳng d' và đường thẳng d'' có song song hay trùng với đường thẳng d không?

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1 + t = 2 - 2t' \\ 2 + 3t = -2 + t' \\ 3 - t = 1 + 3t' \end{cases}$ (ẩn t và t').

Từ đó nhận xét vị trí tương đối giữa d và d'.

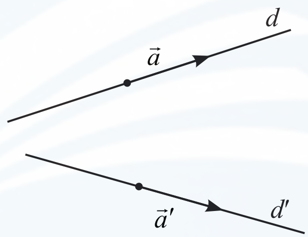
c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1 + t = 2 - 2t'' \\ 2 + 3t = -2 + t'' \\ 3 - t = 3 + 3t'' \end{cases}$ (ẩn t và t'').

Từ đó nhận xét vị trí tương đối giữa d và d''.

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Cho hai đường thẳng d và d' có phương trình tham số lần lượt là:

$$d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = x'_0 + a'_1 t' \\ y = y'_0 + a'_2 t' \\ z = z'_0 + a'_3 t'. \end{cases}$$



Hình 7

Gọi $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d và d'.

Xét hệ phương trình ẩn t và t': $\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t'. \end{cases}$

- d và d' cắt nhau khi và chỉ khi hệ trên có đúng một nghiệm.
- d và d' chéo nhau khi và chỉ khi $\vec{a}$, $\vec{a}'$ không cùng phương và hệ trên vô nghiệm.

Chú ý: Để xét vị trí tương đối của d và d', trước hết ta kiểm tra tính cùng phương của hai vectơ chỉ phương của d và d'.

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ cùng phương thì d và d' hoặc song song hoặc trùng nhau.

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương thì d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

Ví dụ 7. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau:

a) d: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 2 + 5t' \\ z = 3 + t'; \end{cases}$ b) d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và d': $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-9}{6}$.

Giải

a) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (1; 1; 1)$ và $\vec{a}' = (2; 5; 1)$.

Ta có $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{5}$, suy ra $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương. Vậy d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} t = 1 + 2t' \\ 1 + t = 2 + 5t' \\ 2 + t = 3 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2t' = 1 & (1) \\ t - 5t' = 1 & (2) \\ t - t' = 1. & (3) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $t = 1$; $t' = 0$. Thay vào (3) ta thấy phương trình thoả mãn.

Vậy d cắt d' tại điểm $M(1; 2; 3)$.

b) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (1; 1; 1)$ và $\vec{a}' = (2; 5; 6)$.

Ta có $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{5}$, suy ra $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương. Vậy d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

d' có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 2 + 5t' \\ z = 9 + 6t'. \end{cases}$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 1 + t = 1 + 2t' \\ 2 + t = 2 + 5t' \\ 3 + t = 9 + 6t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2t' = 0 & (1) \\ t - 5t' = 0 & (2) \\ t - 6t' = 6. & (3) \end{cases}$

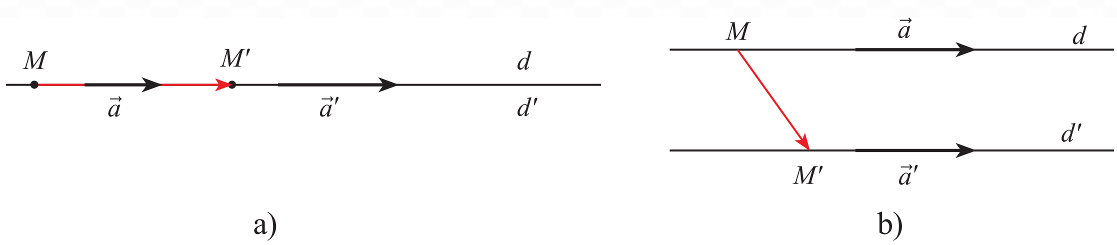
Từ (1) và (2) suy ra $t = 0$; $t' = 0$. Thay vào (3) ta thấy phương trình không thoả mãn ($0 \neq 6$).

Vậy d và d' chéo nhau.

Chú ý: Cho đường thẳng d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$, đường thẳng d' đi qua điểm M' và có vectơ chỉ phương $\vec{a}'$.

Ta có thể sử dụng tích có hướng để xét vị trí tương đối của d và d'.

a) Nếu $[\vec{a}, \vec{a}'] = \vec{0}$ thì $\vec{a}, \vec{a}'$ cùng phương, suy ra d và d' hoặc song song hoặc trùng nhau.



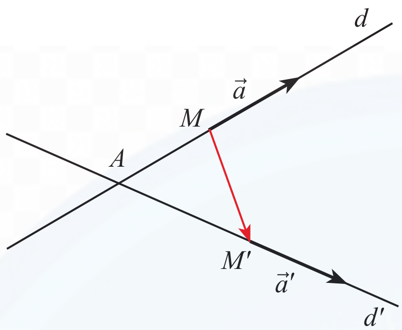
Hình 8

Để biết d và d' song song hay trùng nhau, ta xét tích có hướng $\left[\vec{a}, \overrightarrow{MM'}\right]$:

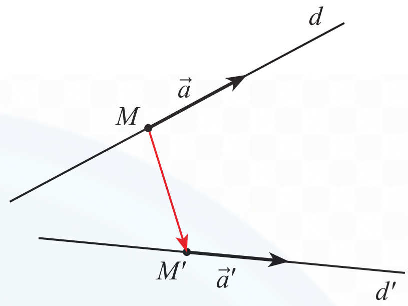
– Nếu $\left[\vec{a}, \overrightarrow{MM'}\right] = \vec{0}$ thì $d \equiv d'$.

– Nếu $\left[\vec{a}, \overrightarrow{MM'}\right] \neq \vec{0}$ thì $d \mathbin{/\!/} d'$.

b) Nếu $[\vec{a}, \vec{a}'] \neq \vec{0}$ thì $\vec{a}$, $\vec{a}'$ không cùng phương, suy ra d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.



a)



b)

Hình 9

Để biết d và d' cắt nhau hay chéo nhau, ta xét tích vô hướng $[\vec{a}, \vec{a}'].\overrightarrow{MM'}$. Người ta chứng minh được rằng:

– Nếu $[\vec{a}, \vec{a}'].\overrightarrow{MM'} = 0$ thì d và d' cắt nhau.

– Nếu $[\vec{a}, \vec{a}'].\overrightarrow{MM'} \neq 0$ thì d và d' chéo nhau.

Ví dụ 8. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau:

a) $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 3 + 4t' \\ y = 3 + 2t' \\ z = 4 + 2t'; \end{cases}$

b) $d: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{1}$ và $d': \dfrac{x-4}{9} = \dfrac{y-4}{6} = \dfrac{z-2}{3}$;

c) $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases}$ và $d': \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-4}{4}$;

d) $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{2}$ và $d': \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -2t. \end{cases}$

Giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;\ 2;\ 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2;\ 1;\ 1)$, đường thẳng d' đi qua điểm $M'(3;\ 3;\ 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (4;\ 2;\ 2)$.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (2; 1; 1)$, $[\vec{a}, \vec{a}'] = \vec{0}$, $\left[\vec{a}, \overrightarrow{MM'}\right] = \vec{0}$, suy ra ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{a}'$, $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương. Vậy $d \equiv d'$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1; 2; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (3; 2; 1)$, đường thẳng d' đi qua điểm $M'(4; 4; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a'} = (9; 6; 3)$.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (5; 2; 2)$, $\left[\vec{a}, \vec{a'}\right] = \vec{0}$, $\left[\vec{a}, \overrightarrow{MM'}\right] = (2; -1; -4) \neq \vec{0}$. Vậy $d \parallel d'$.

c) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 1; -2)$, đường thẳng d' đi qua điểm $M'(3; 0; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a'} = (2; 3; 4)$.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (2; -2; 4)$, $[\vec{a}, \vec{a'}] = (10; 0; -5) \neq \vec{0}$, $[\vec{a}, \vec{a'}].\overrightarrow{MM'} = 0$. Vậy d và d' cắt nhau.

d) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 3; 2)$, đường thẳng d' đi qua điểm $M'(1; 2; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a'} = (-1; 1; -2)$.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (0; 0; -1)$, $[\vec{a}, \vec{a'}] = (-8; 2; 5) \neq \vec{0}$, $[\vec{a}, \vec{a'}].\overrightarrow{MM'} = -5 \neq 0$. Vậy d và d' chéo nhau.

7 Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau:

a) $d: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ và $d': \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z+1}{11}$;

b) $d: \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{2}$ và $d': \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{9}$.

3 Trên phần mềm thiết kế chiếc cầu treo, cho đường thẳng d trên trụ cầu và đường thẳng d' trên sàn cầu có phương trình lần lượt là:

$$d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 50 + t \end{cases} \quad \text{và } d': \begin{cases} x = 20 \\ y = t' \\ z = 50. \end{cases}$$

Xét vị trí tương đối giữa d và d'.

Hình 10

Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

7 Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = t' \\ y = 7 + 4t' \\ z = 9t'. \end{cases}$

a) Tìm vectơ chỉ phương $\vec{a}$ và $\vec{a'}$ lần lượt của d và d'.

b) Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a'}$. Từ đó, có nhận xét gì về hai đường thẳng d và d'?

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Cho hai đường thẳng d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3)$. Ta có

$$d \perp d' \Leftrightarrow \vec{a}\,.\,\vec{a}' = 0 \Leftrightarrow a_1a'_1 + a_2a'_2 + a_3a'_3 = 0.$$

Ví dụ 9. Kiểm tra tính vuông góc của các cặp đường thẳng sau:

a) d: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-3}{1}$ và d': $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 7 + t \\ z = 9 - 8t; \end{cases}$

b) d: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-3}{1}$ và d': $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-9}{1}$.

Giải

a) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (3; 5; 1)$ và $\vec{a}' = (1; 1; -8)$.

Ta có $\vec{a}\,.\,\vec{a}' = 3 + 5 - 8 = 0$. Vậy d và d' vuông góc với nhau.

b) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (3; 5; 1)$ và $\vec{a}' = (2; 1; 1)$.

Ta có $\vec{a}\,.\,\vec{a}' = 6 + 5 + 1 \neq 0$. Vậy d và d' không vuông góc với nhau.

8 Kiểm tra tính vuông góc của các cặp đường thẳng sau:

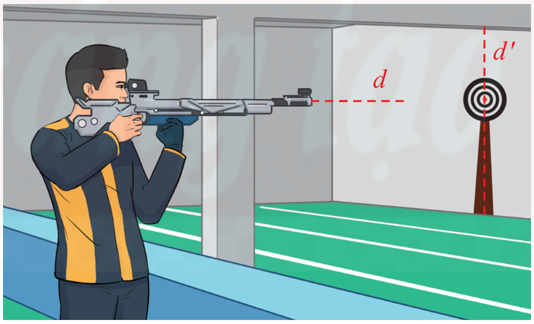
a) d: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{1}$ và d': $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = -6 + 2t; \end{cases}$

b) d: $\dfrac{x+2}{7} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+1}{1}$ và d': $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-5}{2}$.

4 Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$. Cho biết trục d của nòng súng và cọc đỡ bia d' có phương trình lần lượt là:

d: $\begin{cases} x = t \\ y = 20 \\ z = 9 \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 1 + 3t'. \end{cases}$

Xét vị trí tương đối giữa d và d', chúng có vuông góc với nhau không?



Hình 11

3. Góc

Góc giữa hai đường thẳng

8 Cho hai đường thẳng d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (2; 1; 3)$ và $\vec{a}' = (3; 2; -8)$.

a) Nhắc lại định nghĩa góc giữa hai đường thẳng d và d' trong không gian.

b) Vectơ $\vec{b} = (-2; -1; -3)$ có phải là một vectơ chỉ phương của d không?

c) Giải thích tại sao ta lại có đẳng thức $\cos(d, d') = \left|\cos(\vec{a}, \vec{a}')\right| = \left|\cos(\vec{b}, \vec{a}')\right|$.

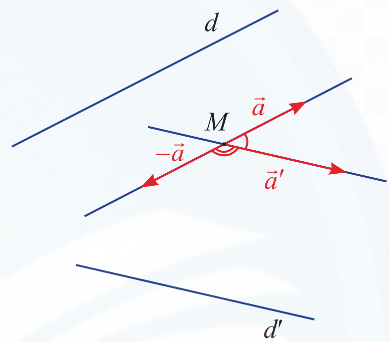
d) Nêu cách tìm côsin của góc giữa hai đường thẳng theo côsin của góc giữa hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Góc giữa hai đường thẳng d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3)$ được tính bởi công thức:

$$\cos(d, d') = \left|\cos(\vec{a}, \vec{a}')\right| = \frac{\left|\vec{a}.\vec{a}'\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a}'\right|}$$

$$= \frac{\left|a_1.a'_1 + a_2.a'_2 + a_3.a'_3\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2}}.$$



Hình 12

Ví dụ 10. Tính góc giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau:

a) d: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ và d': $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$;

b) d: $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z+1}{2}$ và d': $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t; \end{cases}$

c) d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 - t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 3 + 4t' \\ z = 10t'. \end{cases}$

Giải

a) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{a}' = (1; 1; 2)$.

Ta có $\cos(d, d') = \dfrac{|1.1 + 2.1 + 1.2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{5}{6}$.

Suy ra $(d, d') \approx 33^\circ 33'$.

b) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (1; 2; 2)$ và $\vec{a}' = (-2; -2; 1)$.

Ta có $\cos(d, d') = \dfrac{|1.(-2) + 2.(-2) + 2.1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}.\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{4}{9}$.

Suy ra $(d, d') \approx 63^\circ 36'$.

c) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (1; 2; -1)$ và $\vec{a}' = (2; 4; 10)$.

Ta có $\cos(d, d') = \dfrac{|1.2 + 2.4 + (-1).10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}.\sqrt{2^2 + 4^2 + 10^2}} = 0$.

Suy ra $(d, d') = 90^\circ$.

9 Tính góc giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau:

a) d: $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-11}{4}$ và d': $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+6}{5} = \dfrac{z-1}{-4}$;

b) d: $\dfrac{x+9}{3} = \dfrac{y+4}{6} = \dfrac{z+1}{6}$ và d': $\begin{cases} x = 9 - 10t \\ y = 7 - 10t \\ z = 15 + 5t; \end{cases}$

c) d: $\begin{cases} x = 23 + 2t \\ y = 57 + t \\ z = 19 - 5t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 24 + t' \\ y = 6 + t' \\ z = t'. \end{cases}$

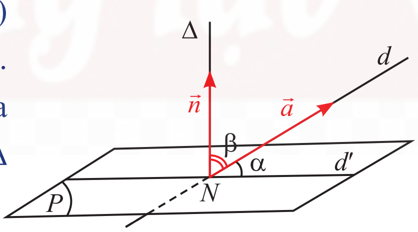
5 Trên một phần mềm đã thiết kế sân khấu 3D trong không gian $Oxyz$. Tính góc giữa hai tia sáng có phương trình lần lượt là:

d: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$ và d': $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{9}$.

Hình 13

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

9 Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$. Biết d cắt (P) tại điểm N và hình chiếu vuông góc của d lên (P) là đường thẳng d'. Qua N vẽ đường thẳng Δ vuông góc với (P).



Hình 14

a) Nhắc lại định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng trong không gian.

b) Có nhận xét gì về số đo hai góc $\alpha = (d, d')$; $\beta = (\Delta, d)$?

c) Giải thích tại sao ta lại có đẳng thức:

$$\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{a}, \vec{n})|.$$

Từ 9, ta có:

Góc giữa đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ được tính bởi công thức:

$$\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{a}, \vec{n})| = \frac{|\vec{a}.\vec{n}|}{|\vec{a}|.|\vec{n}|} = \frac{|a_1.n_1 + a_2.n_2 + a_3.n_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

Ví dụ 11. Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) $d: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z+1}{1}$ và $(P): x + z + 24 = 0$;

b) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 - t \end{cases}$ và $(P): 2x + 4y - 2z + 23 = 0$.

Giải

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 2; 1)$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Ta có $\sin(d, (P)) = \dfrac{|2.1 + 2.0 + 1.1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $(d, (P)) = 45^\circ$.

b) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 2; -1)$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 4; -2)$.

Ta có $\sin(d, (P)) = \dfrac{|1.2 + 2.4 + (-1).(-2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}.\sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2}} = 1$.

Suy ra $(d, (P)) = 90^\circ$.

Chú ý: Nếu đường thẳng d có vectơ chỉ phương cùng phương với vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) thì d vuông góc với (P).

10 Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) $d: \begin{cases} x = 11 + 3t \\ y = -11 + t \\ z = -21 - 2t \end{cases}$ và $(P): 6x + 2y - 4z + 7 = 0$;

b) $d: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z-5}{2}$ và $(P): 2x + 2y - 4z + 1 = 0$;

c) $d: \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z+11}{2}$ và $(P): 2y - 4z + 7 = 0$.

6 Trên một sân khấu đã thiết lập sẵn một hệ toạ độ $Oxyz$. Tính góc giữa tia sáng có phương trình d: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và mặt sàn sân khấu có phương trình $z = 0$.

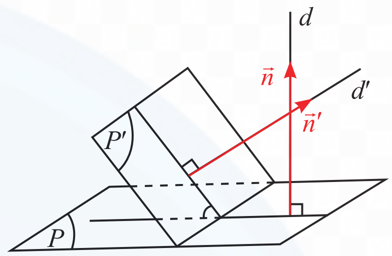
Hình 15

Góc giữa hai mặt phẳng

10 Cho hai mặt phẳng (P) và (P') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$, $\vec{n'} = (n'_1; n'_2; n'_3)$.

Gọi d và d' là hai đường thẳng lần lượt vuông góc với (P) và (P'). Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') là góc giữa hai đường thẳng d và d'.

So sánh $\cos((P), (P'))$ và $\cos(\vec{n}, \vec{n'})$.



Hình 16

Từ 10, ta có:

Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ và $\vec{n'} = (n'_1; n'_2; n'_3)$ được tính bởi công thức:

$$\cos((P), (P')) = |\cos(\vec{n}, \vec{n'})| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n'}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n'}|} = \frac{|n_1 \cdot n'_1 + n_2 \cdot n'_2 + n_3 \cdot n'_3|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \cdot \sqrt{n_1'^2 + n_2'^2 + n_3'^2}}.$$

Ví dụ 12. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') trong mỗi trường hợp sau:

a) (P): $x + y - 2z + 9 = 0$ và (P'): $3x - 5y + z + 2024 = 0$;

b) (P): $x + y + 24 = 0$ và (P'): $y + z + 24 = 0$;

c) (P): $2x + 4y - z + 23 = 0$ và (P'): $3x + 5y + 26z + 2025 = 0$.

Giải

a) (P) và (P') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (1; 1; -2)$, $\vec{n'} = (3; -5; 1)$.

Ta có $\cos((P), (P')) = \dfrac{|1.3 + 1.(-5) + (-2).1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{210}}$.

Suy ra $((P), (P')) \approx 73^\circ 59'$.

b) (P) và (P') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (1; 1; 0)$, $\vec{n'} = (0; 1; 1)$.

Ta có $\cos((P), (P')) = \dfrac{|1.0 + 1.1 + 0.1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $((P), (P')) = 60^\circ$.

c) (P) và (P') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (2; 4; -1)$, $\vec{n'} = (3; 5; 26)$.

Ta có $\cos((P), (P')) = \dfrac{|2.3+4.5+(-1).26|}{\sqrt{2^2+4^2+(-1)^2}.\sqrt{3^2+5^2+26^2}} = 0$.

Suy ra $((P), (P')) = 90^\circ$.

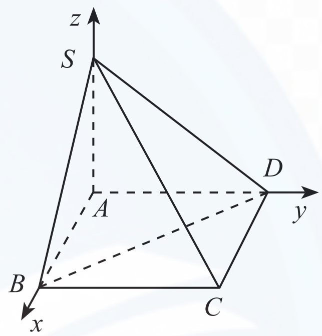
Chú ý: Nếu hai mặt phẳng (P) và (P') có hai vectơ pháp tuyến vuông góc thì $(P) \perp (P')$.

Ví dụ 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Cho biết $AB = 2a$, $AD = 3a$ và $SA = 2a$. Tính góc giữa:

a) hai đường thẳng SC và BD;

b) mặt phẳng (SBD) và mặt đáy;

c) đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD).



Hình 17

Giải

Chọn hệ toạ độ $Oxyz$ sao cho các điểm có toạ độ như sau: $A(0; 0; 0)$, $B(2a; 0; 0)$, $D(0; 3a; 0)$, $S(0; 0; 2a)$. Trong không gian $Oxyz$ vừa chọn, ta có $C(2a; 3a; 0)$, $\overrightarrow{SC} = (2a; 3a; -2a)$; $\overrightarrow{BD} = (-2a; 3a; 0)$.

a) Hai đường thẳng SC và BD có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u} = (2; 3; -2)$, $\vec{v} = (-2; 3; 0)$.

Ta có $\cos(SC, BD) = \dfrac{|\vec{u}\,.\,\vec{v}|}{|\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|} = \dfrac{|2.(-2)+3.3+(-2).0|}{\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}.\sqrt{(-2)^2+3^2+0^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{221}}$.

Suy ra $(SC, BD) \approx 70^\circ 21'$.

b) Ta có phương trình mặt phẳng (SBD) theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{2a} + \dfrac{y}{3a} + \dfrac{z}{2a} = 1$ hay $3x + 2y + 3z - 6a = 0$.

Mặt phẳng (SBD) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 2; 3)$, mặt đáy $(ABCD)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy.

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}\,.\,\vec{k}|}{|\vec{n}|\,.\,|\vec{k}|} = \dfrac{|3.0+2.0+3.1|}{\sqrt{3^2+2^2+3^2}.\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{22}}$.

Suy ra $((SBD), (ABCD)) \approx 50^\circ 14'$.

c) Gọi β là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD).

Ta có $\sin\beta = \dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \dfrac{|2.3+3.2+(-2).3|}{\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}.\sqrt{3^2+2^2+3^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{374}}$.

Suy ra $(SC, (SBD)) \approx 18^\circ 4'$.

11 Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') trong mỗi trường hợp sau:

a) (P): $3x + 7y - z + 4 = 0$ và (P'): $x + y - 10z + 2025 = 0$;

b) (P): $x + y - 2z + 9 = 0$ và (P'): $3x - 5y + z + 2024 = 0$;

c) (P): $x + z + 3 = 0$ và (P'): $3y + 3z + 5 = 0$.

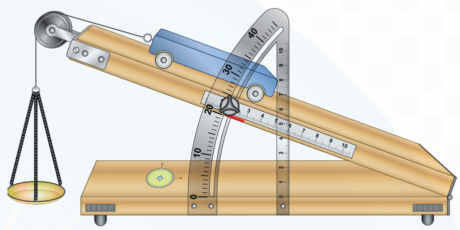
12 Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 5a$ và $AA' = 3a$. Tính góc giữa:

a) hai đường thẳng AC và BA';

b) hai mặt phẳng $(BB'D'D)$ và $(AA'C'C)$;

c) đường thẳng AC' và mặt phẳng $(A'BD)$.

7 Để làm thí nghiệm về chuyển động trong mặt phẳng nghiêng, người làm thí nghiệm đã thiết lập sẵn một hệ toạ độ $Oxyz$. Tính góc giữa mặt phẳng nghiêng (P): $4x + 11z + 5 = 0$ và mặt sàn (Q): $z - 1 = 0$.



Hình 18

BÀI TẬP

1. Viết phương trình tham số của đường thẳng a trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường thẳng a đi qua điểm $M(0; -2; -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; -5; 0)$.

b) Đường thẳng a đi qua hai điểm $A(0; 0; 2)$ và $B(3; -2; 5)$.

2. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng b trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường thẳng b đi qua điểm $M(1; -2; -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (5; -3; 2)$.

b) Đường thẳng b đi qua hai điểm $A(4; 7; 1)$ và $B(6; 1; 5)$.

3. Cho đường thẳng d có phương trình chính tắc $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z-2}{7}$.

a) Tìm một vectơ chỉ phương của d và một điểm trên d.

b) Viết phương trình tham số của d.

4. Trong trò chơi mô phỏng bắn súng 3D trong không gian $Oxyz$, một xạ thủ đang ngắm với toạ độ khe ngắm và đầu ruồi lần lượt là $M(3; 3; 1,5)$, $N(3; 4; 1,5)$. Viết phương trình tham số của đường ngắm bắn của xạ thủ (xem như đường thẳng MN).

Hình 19

5. Xét vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng sau:

a) d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 3 + 4t' \\ z = 2t'; \end{cases}$

b) d: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{2}$ và d': $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-1}{1}$.

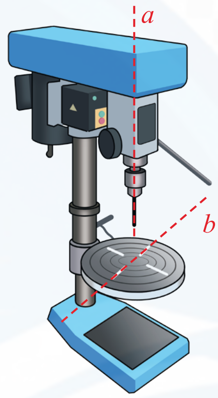
6. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 0; 1)$ và song song với đường thẳng d': $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{4}$.

7. Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian $Oxyz$, cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan (Hình 20) lần lượt là:

$$a: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases} \text{ và } b: \begin{cases} x = 1 + 4t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 6. \end{cases}$$

a) Chứng minh a, b vuông góc và cắt nhau.

b) Tìm giao điểm của a và b.



Hình 20

8. Tính góc giữa hai đường thẳng d: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-7}{2}$ và d': $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+7}{3} = \dfrac{z-12}{6}$.

9. Tính góc giữa đường thẳng d: $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng (P): $3y - 3z + 1 = 0$.

10. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P): $4y + 4z + 1 = 0$ và (P'): $7x + 7z + 2 = 0$.

11. Trên một cánh đồng điện mặt trời, người ta đã thiết lập sẵn một hệ toạ độ $Oxyz$. Hai tấm pin năng lượng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (P): $2x + 2z + 1 = 0$ và (P'): $x + z + 7 = 0$.

a) Tính góc giữa (P) và (P').

b) Tính góc hợp bởi (P) và (P') với mặt đất (Q) có phương trình $z = 0$.

Hình 21

12. Cho hình lăng trụ đứng $OBC.O'B'C'$ có đáy là tam giác OBC vuông tại O và có $OB = 3a$, $OC = a$, $OO' = 2a$. Tính góc giữa:

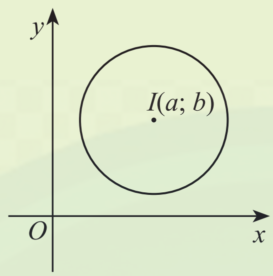
a) hai đường thẳng BO' và $B'C$;

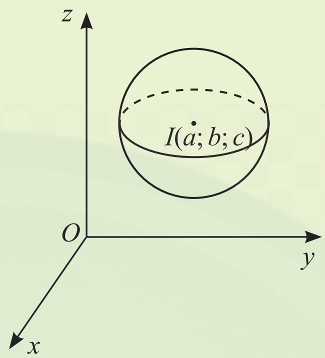
b) hai mặt phẳng $(O'BC)$ và (OBC);

c) đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(O'BC)$.

Bài 3. Phương trình mặt cầu

Từ khoá: **Toạ độ tâm của mặt cầu; Bán kính của mặt cầu; Phương trình của mặt cầu.**





Ta đã biết trên mặt phẳng toạ độ *Oxy*, phương trình đường tròn tâm *I*(*a*; *b*), bán kính *R* có dạng:

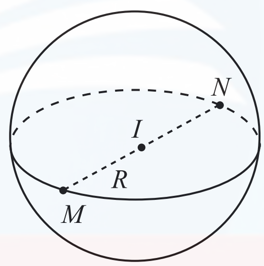
$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Còn trong không gian *Oxyz*, phương trình mặt cầu có dạng như thế nào?

1. Phương trình mặt cầu trong không gian

Khái niệm mặt cầu

Trong không gian, cho điểm I và số dương R. Mặt cầu tâm I, bán kính R, kí hiệu $S(I;\ R)$, là tập hợp các điểm M trong không gian thoả mãn $IM = R$. Đoạn thẳng nối hai điểm thuộc mặt cầu và đi qua tâm I gọi là đường kính của mặt cầu.



Hình 1

Chú ý: Cho mặt cầu $S(I;\ R)$.

Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.

Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.

Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

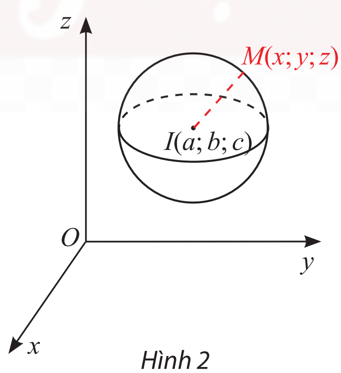
Phương trình của mặt cầu

1 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $S(I;\ R)$ có tâm $I(a;\ b;\ c)$ và bán kính R.

Xét một điểm $M(x;\ y;\ z)$ thay đổi.

a) Tính khoảng cách IM theo x, y, z và a, b, c.

b) Nêu điều kiện cần và đủ của x, y, z để điểm $M(x;\ y;\ z)$ nằm trên mặt cầu $S(I;\ R)$.



Hình 2

Từ 1, ta có:

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Ví dụ 1. Viết phương trình mặt cầu (S):

a) Có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 5$;

b) Có đường kính AB với $A(1; 3; 7)$ và $B(3; 5; 1)$;

c) Có tâm $A(1; 0; -2)$ và đi qua điểm $B(2; 4; 1)$.

Giải

a) Mặt cầu (S) có phương trình: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$.

b) Mặt cầu (S) có đường kính AB nên có tâm $J(2; 4; 4)$ là trung điểm của AB và bán kính $R = JA = \sqrt{11}$.

Vậy (S) có phương trình: $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=11$.

c) Mặt cầu (S) có tâm $A(1; 0; -2)$ và đi qua điểm $B(2; 4; 1)$ nên có bán kính $R = AB = \sqrt{26}$.

Vậy (S) có phương trình: $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=26$.

1 Viết phương trình mặt cầu (S):

a) Có tâm $I(3; -2; -4)$, bán kính $R = 10$;

b) Có đường kính EF với $E(3; -1; 8)$ và $F(7; -3; 0)$;

c) Có tâm $M(-2; 1; 3)$ và đi qua điểm $N(2; -3; -4)$.

1 Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục toạ độ là mét), các nhà nghiên cứu khí tượng dùng một phần mềm mô phỏng bề mặt của một quả bóng thám không có dạng hình cầu bằng phương trình $(x-300)^2+(y-400)^2+(z-2\,000)^2=1$. Tìm toạ độ tâm, bán kính của quả bóng và tính khoảng cách từ tâm của quả bóng đến mặt đất có phương trình $z = 0$.

Hình 3

2 a) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(x; y; z)$ thay đổi có toạ độ luôn thoả mãn phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. (*)

i) Biến đổi (*) về dạng: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$.

ii) Chứng tỏ $M(x; y; z)$ luôn thuộc một mặt cầu (S). Tìm tâm và bán kính của (S).

b) Bằng cách biến đổi phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+15=0$ (**) về dạng $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=-1$, hãy cho biết phương trình (**) có thể là phương trình mặt cầu hay không.

Nhận xét: Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Ví dụ 2. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu? Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z - 10 = 0$; b) $x^2 + y^2 + z^2 + x + y - 6z + 33 = 0$.

Giải

a) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z - 10 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a = -4$; $b = 3$; $c = -1$; $d = -10$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = 16 + 9 + 1 + 10 = 36 > 0$.

Suy ra phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I(-4; 3; -1)$, bán kính $R = 6$.

b) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + x + y - 6z + 33 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a = -\frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{2}$; $c = 3$; $d = 33$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 9 - 33 = -\frac{47}{2} < 0$.

Suy ra phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

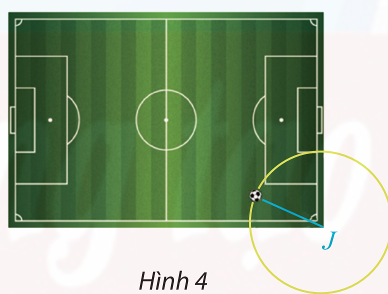
2 Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu? Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 4z - 32 = 0$; b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 2z + 4 = 0$.

2. Vận dụng của phương trình mặt cầu

Phương trình mặt cầu trong không gian có nhiều ứng dụng trong thiết kế, định vị, sản xuất, …

Ví dụ 3. Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ toạ độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M. Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z = 0$, đồng thời thuộc mặt cầu (S): $(x - 32)^2 + (y - 50)^2 + (z - 10)^2 = 109$ (đơn vị độ dài tính theo mét).



Hình 4

a) Tìm toạ độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

b) Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc J của tâm I trên mặt sân.

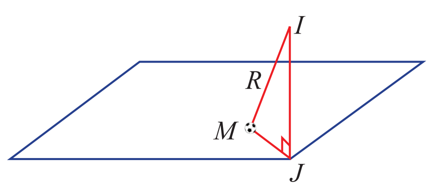
c) Tính khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J.

Giải

a) Mặt cầu (S) có phương trình

$$(x - 32)^2 + (y - 50)^2 + (z - 10)^2 = 109$$

nên có tâm $I(32; 50; 10)$ và bán kính $R = \sqrt{109}$.



Hình 5

b) Trong không gian $Oxyz$, mặt sân có phương trình $z = 0$ trùng với mặt phẳng toạ độ (Oxy), suy ra hình chiếu vuông góc của điểm $I(32; 50; 10)$ xuống mặt sân có toạ độ $J(32; 50; 0)$.

c) Trong tam giác vuông IJM, ta có $IJ = 10$, $IM = R$, suy ra

$$JM = \sqrt{IM^2 - IJ^2} = \sqrt{109 - 100} = 3.$$

Vậy khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là 3 m.

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục toạ độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6; -1; 4)$.

a) Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

Hình 6

b) Một người sử dụng điện thoại tại điểm $M(-5; -2; 5)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không.

c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng điện thoại ở điểm $N(-1; 0; 1)$.

Giải

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-6; -1; 4)$ và bán kính $R = 2$ nên có phương trình:

$$(x + 6)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 4.$$

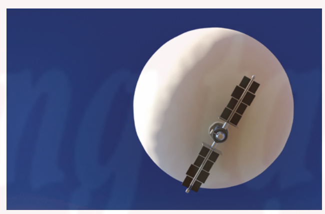
b) Ta có $IM = \sqrt{3} < R$, suy ra điểm M nằm trong mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên.

c) Ta có $IN = \sqrt{35} > R$, suy ra điểm N nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó không thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên.

2 Bề mặt của một bóng thám không dạng hình cầu có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 200x - 600y - 4\,000z + 4\,099\,900 = 0.$$

Tìm toạ độ tâm và bán kính mặt cầu.

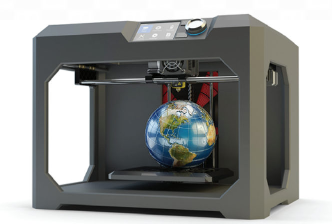


Hình 7

3 Đầu in phun của một máy in 3D đang in bề mặt của một mặt cầu có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}y - z + \frac{1}{16} = 0.$$

Tính khoảng cách từ đầu in phun đến tâm mặt cầu.



Hình 8

BÀI TẬP

1. Viết phương trình mặt cầu (S):

a) Có tâm $I(7; -3; 0)$, bán kính $R = 8$;

b) Có tâm $M(3; 1; -4)$ và đi qua điểm $N(1; 0; 1)$;

c) Có đường kính AB với $A(4; 6; 8)$ và $B(2; 4; 4)$.

2. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu? Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 5x - 7y + z - 1 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z + 100 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + \dfrac{1}{2} = 0$.

3. Cho hai điểm $A(1; 0; 0)$ và $B(5; 0; 0)$. Chứng minh rằng nếu điểm $M(x; y; z)$ thoả mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ thì M thuộc một mặt cầu (S). Tìm tâm và bán kính của (S).

4. Phần mềm mô phỏng thiết bị thám hiểm đại dương có dạng hình cầu trong không gian $Oxyz$. Cho biết toạ độ tâm mặt cầu là $I(360; 200; 400)$ và bán kính $r = 2$ m. Viết phương trình mặt cầu.

Hình 9

5. Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hoá lỏng hình cầu bằng phần mềm 3D. Cho biết phương trình bề mặt của bồn chứa là (S): $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2 = 25$. Phương trình mặt phẳng chứa nắp là (P): $z = 10$.

a) Tìm tâm và bán kính của bồn chứa.

b) Tính khoảng cách từ tâm bồn chứa đến mặt phẳng chứa nắp.

a) b)

Hình 10

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Cho mặt phẳng (P): $x + 2y + 3z - 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n_1} = (1; 3; -1)$. B. $\vec{n_2} = (2; 3; -1)$.

C. $\vec{n_3} = (1; 2; -1)$. D. $\vec{n_4} = (1; 2; 3)$.

2. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz)?

A. $y = 0$. B. $x = 0$.

C. $y - z = 0$. D. $z = 0$.

3. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$?

A. $x - 2y + 3z - 12 = 0$.

B. $x - 2y - 3z + 6 = 0$.

C. $x - 2y + 3z + 12 = 0$.

D. $x - 2y - 3z - 6 = 0$.

4. Cho mặt phẳng (P): $3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Khoảng cách từ A đến (P) bằng

A. $\frac{5}{\sqrt{29}}$. B. $\frac{5}{29}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{5}{9}$.

5. Cho ba mặt phẳng (α): $x + y + 2z + 1 = 0$, (β): $x + y - z + 2 = 0$ và (γ): $x - y + 5 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $(\alpha) \perp (\beta)$. B. $(\gamma) \perp (\beta)$.

C. $(\alpha) // (\beta)$. D. $(\alpha) \perp (\gamma)$.

6. Cho đường thẳng d: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$.

Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u_1} = (2; 1; -3)$. B. $\vec{u_2} = (-2; -1; 3)$.

C. $\vec{u_3} = (-1; 2; 1)$. D. $\vec{u_4} = (-1; 2; -1)$.

7. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$?

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2}$.

8. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = -2 - t. \end{cases}$

Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào vuông góc với d?

A. d_1: $\begin{cases} x = 3t' \\ y = 1 + t' \\ z = 5t'. \end{cases}$ B. d_2: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t' \\ z = 1 + t'. \end{cases}$

C. d_3: $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-5}$.

D. d_4: $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

9. Cho hai mặt phẳng (P): $2x - y - z - 3 = 0$ và (Q): $x - z - 2 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

10. Cho mặt cầu (S):

$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Toạ độ tâm I và bán kính R của (S) là

A. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 3$.

B. $I(1; -2; -1)$ và $R = 3$.

C. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 9$.

D. $I(1; -2; -1)$ và $R = 9$.

11. Mặt cầu tâm $I(-3; 0; 4)$ và đi qua điểm $A(-3; 0; 0)$ có phương trình là

A. $(x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 4$.

B. $(x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 16$.

C. $(x+3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16$.

D. $(x+3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 4$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

12. Cho bốn điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(-2; 1; -1)$.

a) Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chóp.

b) Tìm góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

c) Tính độ dài đường cao của hình chóp $A.BCD$.

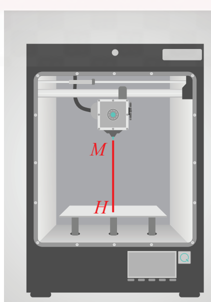
13. Cho bốn điểm $A(-2; 6; 3)$, $B(1; 0; 6)$, $C(0; 2; -1)$, $D(1; 4; 0)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (BCD). Suy ra $ABCD$ là một tứ diện.

b) Tính chiều cao AH của tứ diện $ABCD$.

c) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD.

14. Phần mềm điều khiển máy in 3D cho biết đầu in phun của máy đang đặt tại điểm $M(3; 4; 24)$ (đơn vị: cm). Tính khoảng cách từ đầu in đến khay đặt vật in có phương trình $z - 4 = 0$.



Hình 1

15. Cho hai mặt phẳng (P): $x - y - 6 = 0$ và (Q). Biết rằng điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc toạ độ $O(0; 0; 0)$ xuống mặt phẳng (Q). Tính góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q).

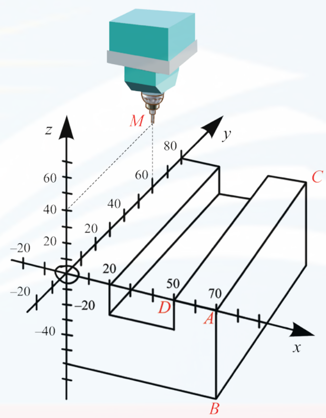
16. Phần mềm của máy tiện kĩ thuật số CNC (Computer Numerical Control) đang biểu diễn một chi tiết máy như Hình 2.

a) Tìm toạ độ các điểm A, B, C, D.

b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (ACD).

c) Viết phương trình tham số của đường thẳng AC.

d) Cho biết đầu mũi tiện đang đặt tại điểm $M(0; 60; 40)$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABC).



Hình 2

17. Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$, với O là gốc toạ độ, $A(2; 0; 0)$, $C(0; 6; 0)$, $O'(0; 0; 4)$. Viết phương trình:

a) mặt phẳng $(O'AC)$;

b) đường thẳng CO';

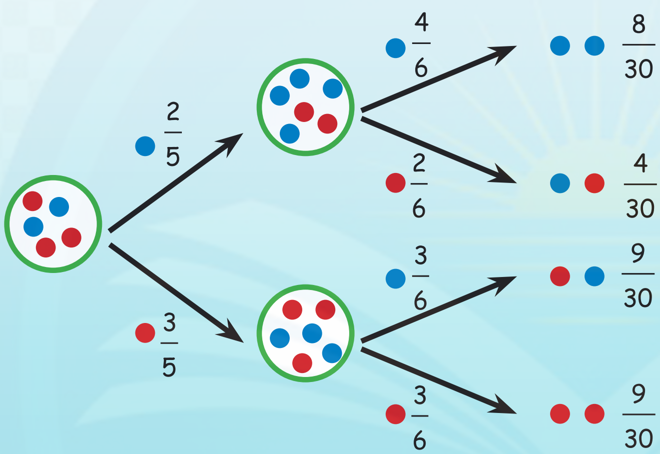
c) mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp.

18. Cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ và $C(0; 0; 3)$. Chứng minh rằng nếu điểm $M(x; y; z)$ thoả mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ thì M thuộc một mặt cầu (S). Tìm tâm và bán kính của (S).

Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Chương VI XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu khái niệm xác suất có điều kiện, các quy tắc tính xác suất liên quan đến xác suất có điều kiện và học cách vận dụng các điều này vào một số tình huống thực tiễn.



Thomas Bayes (1701 – 1761)

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Học xong chương này, bạn có thể:

– Nhận biết được khái niệm về xác suất có điều kiện.

– Giải thích được ý nghĩa của xác suất có điều kiện trong những tình huống thực tiễn quen thuộc.

– Mô tả được công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes thông qua bảng dữ liệu thống kê 2×2 và sơ đồ hình cây.

– Sử dụng được công thức Bayes để tính xác suất có điều kiện và vận dụng vào một số bài toán thực tiễn.

– Sử dụng được sơ đồ hình cây để tính xác suất có điều kiện trong một số bài toán thực tiễn liên quan tới thống kê.

Bài 1. Xác suất có điều kiện

Từ khoá: Xác suất có điều kiện; Công thức nhân xác suất.

Bạn Thuỷ gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Nếu biết rằng xuất hiện mặt chẵn chấm thì xác suất xuất hiện mặt 6 chấm là bao nhiêu?

1. Xác suất có điều kiện

1 Hộp thứ nhất chứa 2 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ. Hộp thứ hai chứa 2 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Thanh lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai.

Gọi A là biến cố "Viên bi lấy ra lần thứ nhất là bi xanh";

B là biến cố "Viên bi lấy ra lần thứ hai là bi đỏ".

a) Biết rằng biến cố A xảy ra, tính xác suất của biến cố B.

b) Biết rằng biến cố A không xảy ra, tính xác suất của biến cố B.

Trong phép thử trên, ta thấy khả năng xảy ra của biến cố B phụ thuộc vào việc biến cố A có xảy ra hay không.

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố B khi biến cố A đã xảy ra được gọi là ***xác suất của B với điều kiện A***, kí hiệu là $P(B\,|\,A)$.

Ví dụ 1. Một hộp chứa ba tấm thẻ cùng loại được ghi số lần lượt từ 1 đến 3. Bạn Hà lấy ra một cách ngẫu nhiên một thẻ từ hộp, bỏ thẻ đó ra ngoài và lại lấy ra một cách ngẫu nhiên thêm một thẻ nữa. Xét các biến cố:

A: "Thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số 1";

B: "Thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số 2";

C: "Thẻ lấy ra lần thứ hai ghi số lẻ".

a) Xác định không gian mẫu của phép thử. Viết tập hợp các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố A, B, C.

b) Tính xác suất để thẻ lấy ra lần thứ hai ghi số lẻ, biết rằng thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số 1.

c) Tính xác suất để thẻ lấy ra lần thứ hai ghi số lẻ, biết rằng thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số 2.

Giải

a) Không gian mẫu của phép thử:

$$\Omega = \{(1; 2); (1; 3); (2; 1); (2; 3); (3; 1); (3; 2)\},$$

trong đó $(i; j)$ là kết quả lần thứ nhất lấy được thẻ ghi số i, lần thứ hai lấy được thẻ ghi số j.

Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $\{(1; 2); (1; 3)\}$.

Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố B là: $\{(2; 1); (2; 3)\}$.

Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố C là: $\{(2; 1); (3; 1); (1; 3); (2; 3)\}$.

b) Khi biến cố A xảy ra thì kết quả của phép thử là $(1; 2)$ hoặc $(1; 3)$. Trong hai kết quả đồng khả năng này chỉ có kết quả $(1; 3)$ là thuận lợi cho biến cố C.

Vậy xác suất để thẻ lấy ra lần thứ hai ghi số lẻ, biết rằng thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số 1 là $P(C|A) = \frac{1}{2}$.

c) Khi biến cố B xảy ra thì kết quả của phép thử là $(2; 1)$ hoặc $(2; 3)$. Cả hai kết quả này đều thuận lợi cho biến cố C.

Vậy xác suất để thẻ lấy ra lần thứ hai ghi số lẻ, biết rằng thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số 2 là $P(C|B) = 1$.

1 Xét phép thử lấy thẻ ở Ví dụ 1. Gọi D là biến cố "Thẻ lấy ra lần thứ hai ghi số lớn hơn 1". Tính $P(D|A)$ và $P(D|B)$.

Ví dụ 2. Câu lạc bộ cờ của nhà trường gồm 35 thành viên, mỗi thành viên biết chơi ít nhất một trong hai môn cờ vua hoặc cờ tướng. Biết rằng có 25 thành viên biết chơi cờ vua và 20 thành viên biết chơi cờ tướng. Chọn ngẫu nhiên 1 thành viên của câu lạc bộ. Tính xác suất thành viên được chọn biết chơi cờ vua, biết rằng thành viên đó biết chơi cờ tướng.

Giải

Gọi A là biến cố "Thành viên được chọn biết chơi cờ tướng" và B là biến cố "Thành viên được chọn biết chơi cờ vua".

Số thành viên của câu lạc bộ biết chơi cả hai môn cờ là $20 + 25 - 35 = 10$.

Do đó, trong số 20 thành viên biết chơi cờ tướng, có đúng 10 thành viên biết chơi cờ vua.

Vậy nên xác suất thành viên được chọn biết chơi cờ vua, biết rằng thành viên đó biết chơi cờ tướng là $P(B|A) = \frac{10}{20} = 0,5$.

2 Xét phép thử ở Ví dụ 2. Tính xác suất thành viên được chọn không biết chơi cờ tướng, biết rằng thành viên đó biết chơi cờ vua.

1 Tính xác suất có điều kiện ở ▶ (trang 70).

2. Công thức tính xác suất có điều kiện

2 Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm", B là biến cố "Tổng số chấm của hai mặt xuất hiện bằng 8" và C là biến cố "Xuất hiện ít nhất một mặt có 6 chấm".

a) Tính $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ và $P(A|B)$.

b) Tính $\frac{P(C \cap A)}{P(A)}$ và $P(C|A)$.

Hình 1

Ở 2, ta nhận thấy $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$ và $\frac{P(C \cap A)}{P(A)} = P(C|A)$.

Một cách tổng quát, ta có ***công thức tính xác suất có điều kiện*** như sau:

Cho A và B là hai biến cố, trong đó $P(B) > 0$. Khi đó

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Chú ý:

a) Ta cũng kí hiệu biến cố giao của hai biến cố A và B là AB.

b) Trong thực tế, người ta thường dùng tỉ lệ phần trăm để mô tả xác suất. Chẳng hạn, phát biểu "Khả năng xảy ra một sự kiện là 20%" cũng có nghĩa là "Xác suất xảy ra sự kiện đó là 0,2", phát biểu "Tỉ lệ phế phẩm của một lô hàng là 5%" cũng có nghĩa là "Nếu chọn ra ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ lô hàng, xác suất sản phẩm đó là phế phẩm là 0,05".

Ví dụ 3. Một công ty bảo hiểm nhận thấy có 48% số người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ và có 36% số người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ trên 45 tuổi. Biết một người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ, tính xác suất người đó trên 45 tuổi.

Giải

Gọi A là biến cố "Người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ", B là biến cố "Người mua bảo hiểm ô tô trên 45 tuổi". Ta cần tính $P(B|A)$.

Do có 48% người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ nên $P(A) = 0{,}48$.

Do có 36% số người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ trên 45 tuổi nên $P(AB) = 0{,}36$.

Vậy $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0{,}36}{0{,}48} = 0{,}75$.

Chú ý:

– Từ công thức xác suất có điều kiện, với $P(B) > 0$, ta có $P(AB) = P(B)P(A|B)$.

– Trong trường hợp tổng quát, người ta chứng minh được rằng

$$P(AB) = P(B)P(A|B).$$

Công thức trên được gọi là ***công thức nhân xác suất*** cho hai biến cố bất kì.

Ví dụ 4. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}5$ và $P(A|B) = 0{,}4$. Tính $P(\overline{A}B)$ và $P(\overline{A}|B)$.

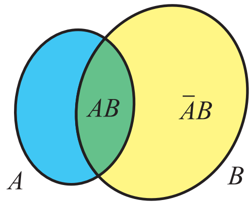
Giải

Theo công thức nhân xác suất, ta có $P(AB) = P(B)P(A|B) = 0{,}2$.

Vì $\overline{A}B$ và AB là hai biến cố xung khắc và $\overline{A}B \cup AB = B$ nên theo tính chất của xác suất, ta có $P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = 0{,}3$.

Theo công thức tính xác suất có điều kiện,

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6.$$



Hình 2

Chú ý:

a) Với mọi biến cố ngẫu nhiên A và B, trong đó $P(B) > 0$, ta có

$$P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B).$$

b) Nếu A và B là hai biến cố độc lập, trong đó $0 < P(B) < 1$, người ta chứng minh được rằng

$$P(A|B) = P(A|\overline{B}) = P(A).$$

Từ đẳng thức trên, ta thấy khi A và B độc lập thì việc biến cố B xảy ra hay không xảy ra không làm ảnh hưởng đến xác suất của biến cố A.

3 Một nhóm 5 học sinh nam và 4 học sinh nữ tham gia lao động trên sân trường. Cô giáo chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 bạn trong nhóm đi tưới cây. Tính xác suất để hai bạn được chọn có cùng giới tính, biết rằng có ít nhất 1 bạn nam được chọn.


Hình 3

2 Kết quả khảo sát những bệnh nhân bị tai nạn xe máy về mối liên hệ giữa việc đội mũ bảo hiểm và khả năng bị chấn thương vùng đầu cho thấy:

– Tỉ lệ bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn là 80%;

– Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách khi gặp tai nạn là 90%;

– Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách bị chấn thương vùng đầu là 18%.

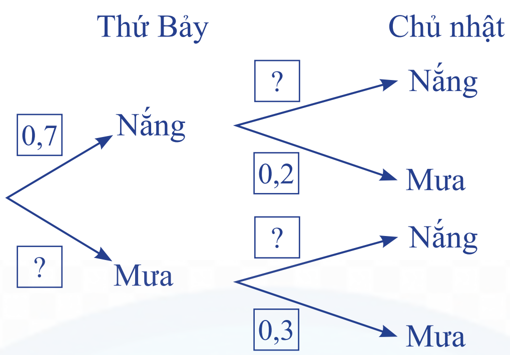

Hình 4

Hỏi theo kết quả điều tra trên, việc đội mũ bảo hiểm đúng cách sẽ làm giảm khả năng bị chấn thương vùng đầu bao nhiêu lần?

3. Sơ đồ hình cây

3 Bạn Việt chuẩn bị đi tham quan một hòn đảo trong hai ngày thứ Bảy và Chủ nhật. Ở hòn đảo đó, mỗi ngày chỉ có nắng hoặc mưa, nếu một ngày là nắng thì khả năng xảy ra mưa ở ngày tiếp theo là 20%, còn nếu một ngày là mưa thì khả năng ngày hôm sau vẫn mưa là 30%. Theo dự báo thời tiết, xác suất trời sẽ nắng vào thứ Bảy là 0,7.

Hãy tìm các giá trị thích hợp thay vào $\boxed{?}$ ở sơ đồ hình cây sau:



Ở 3, gọi A là biến cố "Ngày thứ Bảy trời nắng" và B là biến cố "Ngày Chủ nhật trời mưa".

Ta có $P(A) = 0,7$; $P(B|A) = 0,2$; $P(B|\overline{A}) = 0,3$.

Do đó $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,3$; $P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A) = 0,8$; $P(\overline{B}|\overline{A}) = 1 - P(B|\overline{A}) = 0,7$.

Áp dụng công thức nhân xác suất, ta có xác suất trời nắng vào thứ Bảy và trời mưa vào Chủ nhật là

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = 0,7\ .\ 0,2 = 0,14.$$

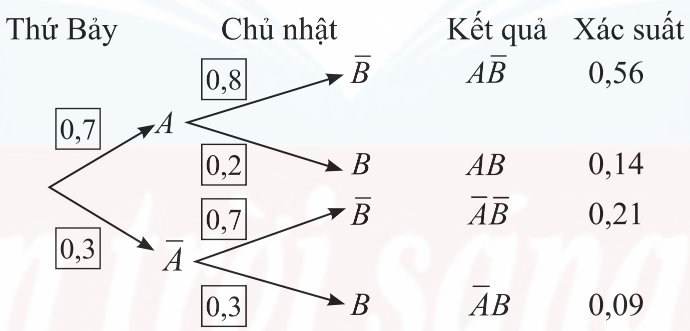
Tương tự, ta có

$$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}|A) = 0,7\ .\ 0,8 = 0,56;$$

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = 0,3\ .\ 0,3 = 0,09;$$

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,3\ .\ 0,7 = 0,21.$$

Ta có thể biểu diễn các kết quả trên theo sơ đồ hình cây như sau:



Nhận xét: Trên sơ đồ hình cây:

– Xác suất của các nhánh trong sơ đồ hình cây từ đỉnh thứ hai là xác suất có điều kiện.

– Xác suất xảy ra của mỗi kết quả bằng tích các xác suất trên các nhánh của cây đi đến kết quả đó.

Ví dụ 5. Ở một sân bay, người ta sử dụng một loại máy soi tự động phát hiện hàng cấm trong hành lí kí gửi. Máy phát chuông cảnh báo với 95% các kiện hành lí có chứa hàng cấm và 2% các kiện hành lí không chứa hàng cấm. Tỉ lệ các kiện hành lí có chứa hàng cấm là 1%.

Chọn ngẫu nhiên một kiện hành lí để soi bằng máy trên. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

M: "Kiện hành lí có chứa hàng cấm và máy phát chuông cảnh báo";

N: "Kiện hành lí không chứa hàng cấm và máy phát chuông cảnh báo".

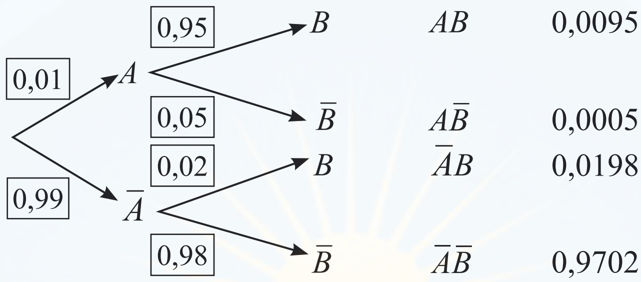
Giải

Gọi A là biến cố "Kiện hành lí có chứa hàng cấm" và B là biến cố "Máy phát chuông cảnh báo". Ta có

$$P(B|A) = 0,95;\ P(B|\overline{A}) = 0,02;\ P(A) = 0,01.$$

Do đó $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,99$; $P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A) = 0,05$; $P(\overline{B}|\overline{A}) = 1 - P(B|\overline{A}) = 0,98$.

Ta có sơ đồ hình cây như sau:



Do $M = AB$ nên $P(M) = P(AB) = 0,0095$.

Do $N = \overline{A}B$ nên $P(N) = P(\overline{A}B) = 0,0198$.

Hộp thứ nhất có 4 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 5 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai.

Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

A: "Viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất có màu xanh và viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có màu đỏ";

B: "Hai viên bi lấy ra có cùng màu".

Một trường đại học tiến hành khảo sát tình trạng việc làm sau khi tốt nghiệp của sinh viên. Kết quả khảo sát cho thấy tỉ lệ người tìm được việc làm đúng chuyên ngành là 85% đối với sinh viên tốt nghiệp loại giỏi và 70% đối với sinh viên tốt nghiệp loại khác.

Tỉ lệ sinh viên tốt nghiệp loại giỏi là 30%. Gặp ngẫu nhiên một sinh viên đã tốt nghiệp của trường.

Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

C: "Sinh viên tốt nghiệp loại giỏi và tìm được việc làm đúng chuyên ngành";

D: "Sinh viên không tốt nghiệp loại giỏi và tìm được việc làm đúng chuyên ngành".

BÀI TẬP

1. Một thư viện có 35% tổng số sách là sách khoa học, 14% tổng số sách là sách khoa học tự nhiên. Chọn ngẫu nhiên một quyển sách của thư viện. Tính xác suất để quyển sách được chọn là sách khoa học tự nhiên, biết rằng đó là quyển sách về khoa học.

2. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}8$ và $P(A|\overline{B}) = 0{,}5$. Tính $P(A\overline{B})$ và $P(A|B)$.

3. Mỗi bạn học sinh trong lớp của Minh lựa chọn học một trong hai ngoại ngữ là tiếng Anh hoặc tiếng Nhật. Xác suất chọn tiếng Anh của mỗi bạn học sinh nữ là 0,6 và của mỗi bạn học sinh nam là 0,7. Lớp của Minh có 25 bạn nữ và 20 bạn nam. Chọn ra ngẫu nhiên một bạn trong lớp.

Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

A: "Bạn được chọn là nam và học tiếng Nhật";

B: "Bạn được chọn là nữ và học tiếng Anh".

4. Máy tính và thiết bị lưu điện (UPS) được kết nối như Hình 5. Khi xảy ra sự cố điện, UPS bị hỏng với xác suất 0,02. Nếu UPS bị hỏng khi xảy ra sự cố điện, máy tính sẽ bị hỏng với xác suất 0,1; ngược lại, nếu UPS không bị hỏng, máy tính sẽ không bị hỏng.

a) Tính xác suất để cả UPS và máy tính đều không bị hỏng khi xảy ra sự cố điện.

b) Tính xác suất để cả UPS và máy tính đều bị hỏng khi xảy ra sự cố điện.

Hình 5

Bài 2. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

Từ khoá: Công thức xác suất toàn phần; Công thức Bayes.

Một loại xét nghiệm nhanh SARS-CoV-2 cho kết quả dương tính với 76,2% các ca thực sự nhiễm virus và kết quả âm tính với 99,1% các ca thực sự không nhiễm virus (*nguồn*: https://tapchiyhocvietnam.vn/index.php/vmj/article/view/2124/1921). Giả sử tỉ lệ người nhiễm virus SARS-CoV-2 trong một cộng đồng là 1%. Một người trong cộng đồng đó làm xét nghiệm và nhận được kết quả dương tính. Hỏi khả năng người đó thực sự nhiễm virus là cao hay thấp?

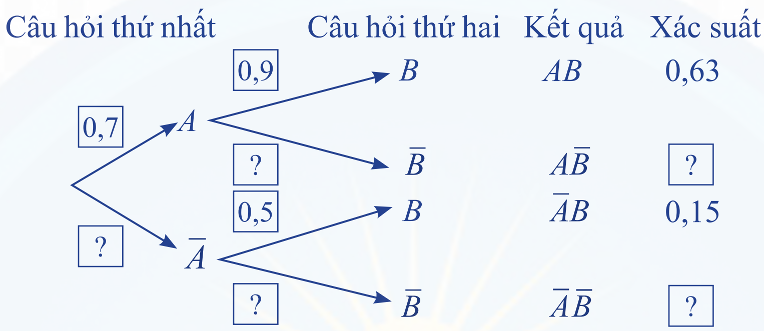
1. Công thức xác suất toàn phần

Chị An trả lời hai câu hỏi. Xác suất trả lời đúng câu hỏi thứ nhất là 0,7. Xác suất trả lời đúng câu hỏi thứ hai là 0,9 nếu chị An trả lời đúng câu hỏi thứ nhất và là 0,5 nếu chị An không trả lời đúng câu hỏi thứ nhất.

Gọi A là biến cố "Chị An trả lời đúng câu hỏi thứ nhất" và B là biến cố "Chị An trả lời đúng câu hỏi thứ hai".

Hình 1

Hãy tìm các giá trị thích hợp điền vào các ô $\boxed{?}$ ở sơ đồ hình cây sau:



Ta thấy biến cố B là hợp của hai biến cố xung khắc AB và $\overline{A}B$. Do đó

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = 0{,}63 + 0{,}15 = 0{,}78.$$

Một cách tổng quát, ta có

Cho hai biến cố A và B với $0 < P(B) < 1$. Khi đó

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

gọi là ***công thức xác suất toàn phần***.

Chú ý: Công thức xác suất toàn phần cũng đúng với biến cố B bất kì.

Ví dụ 1. Trong ▶, hãy tính xác suất người làm xét nghiệm có kết quả dương tính.

Giải

Gọi A là biến cố "Người làm xét nghiệm có kết quả dương tính" và B là biến cố "Người làm xét nghiệm thực sự nhiễm virus".

Do xét nghiệm cho kết quả dương tính với 76,2% các ca thực sự nhiễm virus nên $P(A|B) = 0{,}762$.

Do xét nghiệm cho kết quả âm tính với 99,1% các ca thực sự không nhiễm virus nên $P(\overline{A}|\overline{B}) = 0{,}991$. Suy ra

$$P(A|\overline{B}) = 1 - 0{,}991 = 0{,}009.$$

Do tỉ lệ người nhiễm virus trong cộng đồng là 1% nên $P(B) = 0{,}01$ và $P(\overline{B}) = 0{,}99$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có xác suất người làm xét nghiệm có kết quả dương tính là

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}) = 0{,}01\ .\ 0{,}762 + 0{,}99\ .\ 0{,}009 = 0{,}01653.$$

Vào mỗi buổi sáng ở tuyến phố H, xác suất xảy ra tắc đường khi trời mưa và không mưa lần lượt là 0,7 và 0,2. Xác suất có mưa vào một buổi sáng là 0,1. Tính xác suất để sáng đó tuyến phố H bị tắc đường.

Hình 2

2. Công thức Bayes

Khảo sát thị lực của 100 học sinh, ta thu được bảng số liệu sau:

Giới tính / Thị lực	Nữ	Nam
Có tật khúc xạ	12	18
Không có tật khúc xạ	38	32

Chọn ngẫu nhiên 1 bạn trong 100 học sinh trên.

a) Biết rằng bạn đó có tật khúc xạ, tính xác suất bạn đó là học sinh nam.

b) Biết rằng bạn đó là học sinh nam, tính xác suất bạn đó có tật khúc xạ.

Bảng số liệu trên được gọi là *bảng số liệu* 2×2. Từ bảng số liệu, ta thấy có 50 học sinh nam và 50 học sinh nữ tham gia khảo sát, trong đó có $12 + 18 = 30$ học sinh có tật khúc xạ và $38 + 32 = 70$ học sinh không có tật khúc xạ.

Gọi A là biến cố "Học sinh được chọn bị tật khúc xạ" và B là biến cố "Học sinh được chọn là nữ". Từ bảng số liệu trên, ta tính được các xác suất sau:

$$P(A) = \frac{12+18}{100} = 0,3;\ \ P(B) = \frac{12+38}{100} = 0,5;\ \ P(AB) = \frac{12}{100} = 0,12.$$

Hơn nữa, ta cũng tính được các xác suất có điều kiện sau:

$$P(A|B) = \frac{12}{12+38} = 0,24;\ \ P(B|A) = \frac{12}{12+18} = 0,4.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{0,5\ .\ 0,24}{0,3} = 0,4 = P(B|A),$$

và

$$\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,3\ .\ 0,4}{0,5} = 0,24 = P(A|B).$$

Một cách tổng quát, từ định nghĩa xác suất có điều kiện với $P(A) > 0$, ta có

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}.$$

Kết hợp công thức trên với công thức xác suất toàn phần, ta có:

Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thoả mãn $P(A) > 0$ và $0 < P(B) < 1$. Khi đó,

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

gọi là ***công thức Bayes***.

Chú ý: Với $P(A) > 0$, công thức $P(B|A) = \dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$ cũng được gọi là công thức Bayes.

Ví dụ 2. Một nhà máy có hai phân xưởng I và II. Phân xưởng I sản xuất 40% số sản phẩm và phân xưởng II sản xuất 60% số sản phẩm. Tỉ lệ sản phẩm bị lỗi của phần xưởng I là 2% và của phân xưởng II là 1%.

a) Kiểm tra ngẫu nhiên 1 sản phẩm của nhà máy và tính xác suất để sản phẩm đó bị lỗi.

b) Biết rằng sản phẩm được chọn bị lỗi. Hỏi xác suất sản phẩm đó do phân xưởng nào sản xuất cao hơn?

Giải

a) Gọi A là biến cố "Sản phẩm bị lỗi" và B là biến cố "Sản phẩm lấy ra do phân xưởng I sản xuất".

Do phân xưởng I sản xuất 40% số sản phẩm và phân xưởng II sản xuất 60% số sản phẩm nên

$$P(B) = 0,4 \text{ và } P(\overline{B}) = 1 - 0,4 = 0,6.$$

Do tỉ lệ sản phẩm bị lỗi của phân xưởng I là 2% và của phân xưởng II là 1% nên

$$P(A|B) = 0,02 \text{ và } P(A|\overline{B}) = 0,01.$$

Xác suất để sản phẩm lấy ra bị lỗi là

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}) = 0,4.0,02 + 0,6.0,01 = 0,014.$$

b) Nếu sản phẩm lấy ra bị lỗi thì xác suất sản phẩm đó do phân xưởng I sản xuất là

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{0,4 \,.\, 0,02}{0,014} = \frac{4}{7}.$$

Nếu sản phẩm lấy ra bị lỗi thì xác suất sản phẩm đó do phân xưởng II sản xuất là

$$P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A) = \frac{3}{7}.$$

Vậy nếu sản phẩm lấy ra bị lỗi thì xác suất sản phẩm đó do phân xưởng I sản xuất cao hơn xác suất sản phẩm đó do phân xưởng II sản xuất.

Ví dụ 3. Trong ▶, một người làm xét nghiệm và nhận được kết quả dương tính. Tính xác suất người đó thực sự nhiễm virus (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Giải

Sử dụng kí hiệu các biến cố như ở Ví dụ 1.

Xác suất một người thực sự nhiễm virus khi người đó có kết quả xét nghiệm dương tính là $P(B|A)$. Ta có

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{0,01\,.\,0,762}{0,01653}\approx 0,461.$$

Khi phát hiện một vật thể bay, xác suất một hệ thống radar phát cảnh báo là 0,9 nếu vật thể bay đó là mục tiêu thật và là 0,05 nếu đó là mục tiêu giả. Có 99% các vật thể bay là mục tiêu giả. Biết rằng hệ thống radar đang phát cảnh báo khi phát hiện một vật thể bay. Tính xác suất vật thể đó là mục tiêu thật.

Hình 3

Người ta điều tra thấy ở một địa phương nọ có 2% tài xế sử dụng điện thoại di động khi lái xe. Trong các vụ tai nạn ở địa phương đó, người ta nhận thấy có 10% là do tài xế có sử dụng điện thoại khi lái xe gây ra. Hỏi việc sử dụng điện thoại di động khi lái xe làm tăng xác suất gây tai nạn lên bao nhiêu lần?

Hình 4

BÀI TẬP

1. Hộp thứ nhất có 3 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ hai.

a) Tính xác suất để hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ.

b) Biết rằng 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ, tính xác suất viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng là bi đỏ.

2. Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 52%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ nghệ thuật lần lượt là 18% và 15%. Gặp ngẫu nhiên 1 học sinh của trường.

a) Tính xác suất học sinh đó có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật.

b) Biết rằng học sinh có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật. Tính xác suất học sinh đó là nam.

3. Tỉ lệ người dân đã tiêm vắc xin phòng bệnh A ở một địa phương là 65%. Trong số những người đã tiêm phòng, tỉ lệ mắc bệnh A là 5% còn trong số những người chưa tiêm, tỉ lệ mắc bệnh A là 17%. Gặp ngẫu nhiên một người ở địa phương đó.

a) Tính xác suất người đó mắc bệnh A.

b) Biết rằng người đó mắc bệnh A. Tính xác suất người đó không tiêm vắc xin phòng bệnh A.

4. Ở một khu rừng nọ có 7 chú lùn, trong đó có 4 chú luôn nói thật, 3 chú còn lại nói thật với xác suất 0,5. Bạn Tuyết gặp ngẫu nhiên một chú lùn. Gọi A là biến cố "Chú lùn đó luôn nói thật" và B là biến cố "Chú lùn đó tự nhận mình luôn nói thật".

a) Tính xác suất của các biến cố A và B.

b) Biết rằng chú lùn mà bạn Tuyết gặp tự nhận mình là người luôn nói thật. Tính xác suất để chú lùn đó luôn nói thật.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}5$ và $P(AB) = 0{,}2$.

a) Xác suất của biến cố A với điều kiện B là

A. 0,4. B. 0,5. C. 0,25. D. 0,625

b) Xác suất biến cố B không xảy ra với điều kiện biến cố A xảy ra là

A. 0,6. B. 0,5. C. 0,75. D. 0,25

c) Giá trị của biểu thức

$$\frac{P(A\,|\,B)}{P(A)} - \frac{P(B\,|\,A)}{P(B)} \text{ là}$$

A. –0,5. B. 0. C. 0,5. D. 1.

2. Một nhà máy thực hiện khảo sát toàn bộ công nhân về sự hài lòng của họ về điều kiện làm việc tại phân xưởng. Kết quả khảo sát như sau:

	Hài lòng	Không hài lòng
Số công nhân phân xưởng I	37	13
Sô công nhân phân xưởng II	63	27

Gặp ngẫu nhiên một công nhân của nhà máy. Gọi A là biến cố "Công nhân đó làm việc tại phân xưởng I" và B là biến cố "Công nhân đó hài lòng với điều kiện làm việc tại phân xưởng".

a) Xác suất của biến cố A là

A. $\frac{37}{140}$. B. $\frac{37}{50}$. C. $\frac{5}{14}$. D. $\frac{1}{2}$.

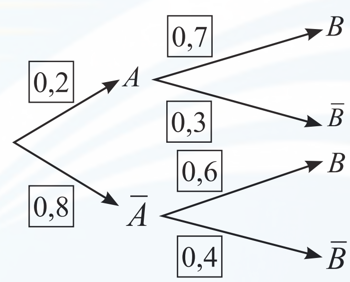
b) Xác suất của biến cố A với điều kiện B là

A. 0,37. B. 0,5. C. $\frac{37}{50}$ D. $\frac{5}{14}$.

c) Xác suất của biến cố B với điều kiện A không xảy ra là

A. $\frac{2}{7}$. B. 0,9. C. 0,7. D. $\frac{9}{20}$.

3. Cho sơ đồ hình cây dưới đây.



a) Xác suất của biến cố cả A và B đều không xảy ra là

A. 0,32. B. 0,4. C. 0,8. D. 0,92.

b) Xác suất của biến cố B là

A. 0,42. B. 0,62. C. 0,28. D. 0,48.

c) Xác suất điều kiện $P(A\,|\,B)$ là

A. $\frac{7}{31}$. B. 0,7. C. $\frac{7}{50}$ D. 0,48.

d) Giá trị của biểu thức $\dfrac{P(B)P(\overline{A}\,|\,B)}{P(\overline{A})}$ là

A. 0,48. B. 0,3. C. 0,5. D. 0,6.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

4. Một khu dân cư có 85% các hộ gia đình sử dụng điện để đun nấu. Hơn nữa, có 21% các hộ gia đình sử dụng bếp từ để đun nấu. Chọn ngẫu nhiên một hộ gia đình, tính xác suất hộ đó sử dụng bếp từ để đun nấu, biết hộ đó sử dụng điện để đun nấu.

5. Cho hai biến cố ngẫu nhiên A và B. Biết rằng $P(A|B) = 2P(B|A)$ và $P(AB) \neq 0$.

Tính tỉ số $\dfrac{P(A)}{P(B)}$.

6. Phòng công nghệ của một công ty có 4 kĩ sư và 6 kĩ thuật viên. Chọn ra ngẫu nhiên đồng thời 3 người từ phòng. Tính xác suất để cả 3 người được chọn đều là kĩ sư, biết rằng trong 3 người được chọn có ít nhất 2 kĩ sư.

7. Có hai cái hộp giống nhau, hộp thứ nhất chứa 5 quả bóng bàn màu trắng và 3 quả bóng bàn màu vàng, hộp thứ hai chứa 4 quả bóng bàn màu trắng và 6 quả bóng bàn màu vàng. Minh lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp thứ nhất. Nếu quả bóng đó là bóng vàng thì Minh lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 quả bóng từ hộp thứ hai, còn nếu quả bóng đó màu trắng thì Minh lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 3 quả bóng từ hộp thứ hai.

a) Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất để có đúng 1 quả bóng màu vàng trong các quả bóng lấy ra từ hộp thứ hai.

b) Biết rằng các quả bóng lấy ra từ hộp thứ hai đều có màu trắng. Tính xác suất để quả bóng lấy ra từ hộp thứ nhất có màu vàng.

8. Hộp thứ nhất có 1 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thứ hai.

a) Tính xác suất để hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ.

b) Biết rằng 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ. Tính xác suất để 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng là bi đỏ.

9. Một doanh nghiệp có 45% nhân viên là nữ. Tỉ lệ nhân viên nữ và tỉ lệ nhân viên nam mua bảo hiểm nhân thọ lần lượt là 7% và 5%. Gặp ngẫu nhiên một nhân viên của doanh nghiệp.

a) Tính xác suất nhân viên đó có mua bảo hiểm nhân thọ.

b) Biết rằng nhân viên đó có mua bảo hiểm nhân thọ. Tính xác suất nhân viên đó là nam.

Hình 1

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Bài 1. Tính giá trị gần đúng tích phân bằng máy tính cầm tay

MỤC ĐÍCH

– Thực hành sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị gần đúng của tích phân xác định.

– Ôn tập và minh hoạ giá trị của tích phân xác định.

CHUẨN BỊ

– Máy tính cầm tay.

– Sách giáo khoa Toán 12, tập hai – bộ sách Chân trời sáng tạo.

HƯỚNG DẪN CHỨC NĂNG CỦA MÁY TÍNH CẦM TAY

Để tính tích phân xác định $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ta thực hiện các thao tác sau:

1. Ấn phím để chọn phép toán tích phân xác định: [∫▭].
2. Nhập hàm số $f(x)$.
3. Nhập hai cận tích phân: a, b.
4. Tính giá trị gần đúng của tích phân xác định.

Hình 1

TỔ CHỨC HOẠT ĐỘNG

Chia lớp thành các nhóm, mỗi nhóm từ 4 đến 8 học sinh.

Nhóm trưởng phân công các thành viên trong nhóm thực hiện công việc theo các hoạt động sau:

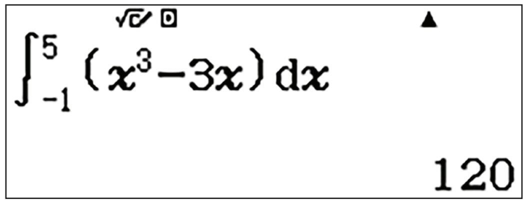
HOẠT ĐỘNG 1. Sử dụng máy tính cầm tay để tính gần đúng $\int_{-1}^{5}(x^3-3x)\mathrm{d}x$

Sau khi mở máy, ấn phím [∫▭] để chọn phép toán tích phân xác định.

Nhập hàm số và hai cận tích phân bằng cách ấn liên tiếp các phím sau:

[(] [ALPHA] [(] [$x^{\blacksquare}$] [3] [▶] [−] [3] [ALPHA] [(] [)] [▼] [(−)] [1] [▲] [5] [=]

Ta được $\int_{-1}^{5}(x^3-3x)\mathrm{d}x = 120$ (Hình 2).



Hình 2

1 Sử dụng máy tính cầm tay để tính gần đúng $\int_{0}^{10}(x^3+x^2-5x)\mathrm{d}x$.

HOẠT ĐỘNG 2. Sử dụng máy tính cầm tay để tính gần đúng $\int_{0}^{5}\frac{x-1}{x+1}\mathrm{d}x$

Sau khi mở máy, ấn phím [∫▭] để chọn phép toán tích phân xác định.

Nhập hàm số và hai cận tích phân bằng cách ấn liên tiếp các phím sau:

[▭] [ALPHA] [(] [−] [1] [▼] [ALPHA] [(] [+] [1] [▼] [0] [▲] [5] [=]

Ta được $\int_{0}^{5}\frac{x-1}{x+1}\mathrm{d}x \approx 1{,}416481062$ (Hình 3).

Hình 3

2 Sử dụng máy tính cầm tay để tính gần đúng $\int_{2}^{8}\frac{2x+3}{x+1}\mathrm{d}x$.

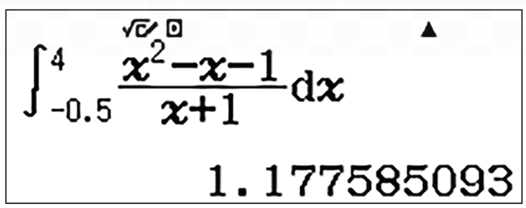
HOẠT ĐỘNG 3. Sử dụng máy tính cầm tay để tính gần đúng $\int_{-0,5}^{4}\frac{x^2-x-1}{x+1}\mathrm{d}x$

Sau khi mở máy, ấn phím [∫▭] để chọn phép toán tích phân xác định.

Nhập hàm số và hai cận tích phân bằng cách ấn liên tiếp các phím sau:

[▭] [ALPHA] [(] [x^2] [−] [ALPHA] [(] [−] [1] [▼] [ALPHA] [(] [+] [1] [▼] [−] [0] [•] [5] [▲] [4] [=]

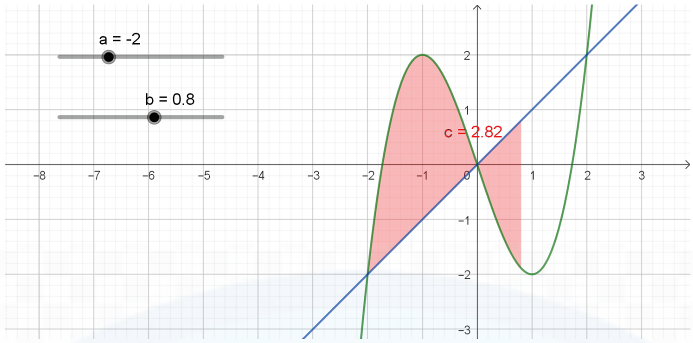
Ta được $\int_{-0,5}^{4}\frac{x^2-x-1}{x+1}\mathrm{d}x \approx 1{,}177585093$ (Hình 4).



Hình 4

3 Sử dụng máy tính cầm tay để tính gần đúng $\int_{0}^{10}\frac{2x^2+x+7}{x+1}\mathrm{d}x$.

Bài 2. Minh hoạ và tính tích phân bằng phần mềm GeoGebra



MỤC ĐÍCH

– Thực hành sử dụng phần mềm GeoGebra để minh hoạ và tính tích phân xác định.

– Xem xét, mô phỏng các bài toán tích phân xác định.

– Ôn tập và minh hoạ các khái niệm đã học về tích phân.

CHUẨN BỊ

– Máy tính xách tay có cài đặt phần mềm GeoGebra hoặc có kết nối Internet.

– Máy chiếu hoặc màn hình ti vi lớn.

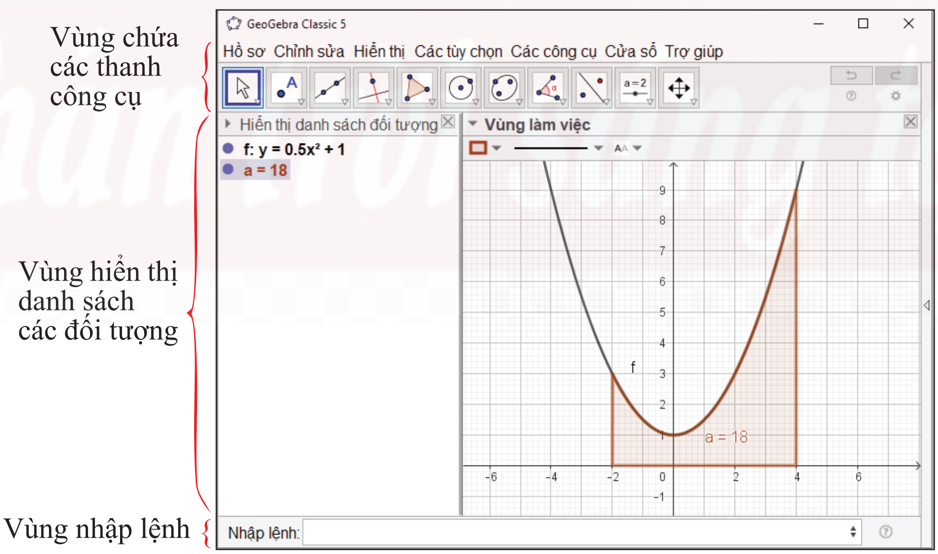
– Thực hành trong phòng máy nếu các trường có điều kiện.

– Sách giáo khoa Toán 12, tập hai – bộ sách Chân trời sáng tạo.

HƯỚNG DẪN CHỨC NĂNG CỦA GEOGEBRA

Để minh hoạ tích phân trên phần mềm GeoGebra, ta thực hiện các thao tác trên bốn vùng sau:

1. Vùng chứa các thanh công cụ;
2. Vùng hiển thị danh sách các đối tượng;
3. Vùng làm việc: chứa hình biểu diễn tích phân xác định;
4. Vùng nhập lệnh: để nhập công thức các hàm số và biểu thức.



Hình 1. Các vùng làm việc của GeoGebra Classic 5

– Danh sách cú pháp lệnh tính nguyên hàm và tích phân cơ bản.

<table>
<tr><th colspan="2">Đối tượng</th><th>Cú pháp lệnh</th><th>Chú ý</th></tr>
<tr><td>Nguyên hàm</td><td>$\int f(x)\mathrm{d}x$</td><td>TíchPhân(f)</td><td rowspan="3">– Phải định nghĩa trước hai hàm số $f(x)$, $g(x)$.
– Có thể khai báo trước hai tham số a, b rồi dùng chuột để điều chỉnh giá trị của a, b.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tích phân</td><td>$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$</td><td>TíchPhân(f, a, b)</td></tr>
<tr><td>$\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$</td><td>TíchPhân(f, g, a, b)</td></tr>
</table>

TỔ CHỨC HOẠT ĐỘNG

Chia lớp thành các nhóm, mỗi nhóm từ 4 đến 8 học sinh.

Nhóm trưởng phân công các thành viên trong nhóm thực hiện công việc theo các hoạt động sau:

HOẠT ĐỘNG 1. Sử dụng phần mềm GeoGebra để tính gần đúng $\int_1^2 \frac{1}{3}x^3\mathrm{d}x$

1. Khởi động phần mềm GeoGebra đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web: https://www.geogebra.org/ để sử dụng phiên bản online.

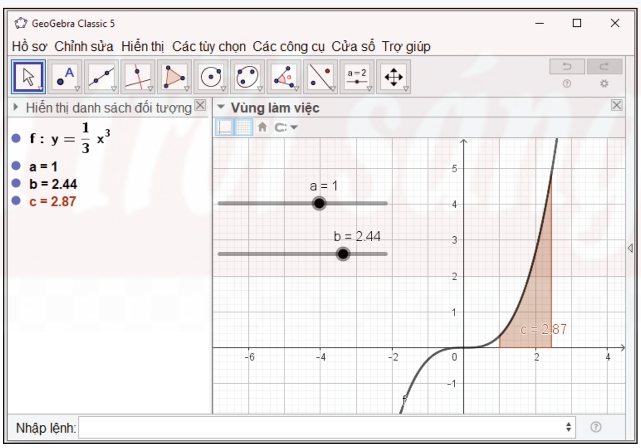
2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

– Nhập hàm số theo cú pháp f:y=(1/3)x^3.

– Nhập tích phân theo cú pháp TíchPhân(f, 1, 2).

3. Quan sát kết quả như Hình 2.

Chú ý: Nếu đã tạo các thanh trượt a, b biểu thị giá trị đầu và giá trị cuối của tích phân thì nhập theo cú pháp TíchPhân(f, a, b), rồi dùng chuột để điều chỉnh giá trị các thanh trượt của a, b.



Hình 2

1 Sử dụng phần mềm GeoGebra để minh hoạ và tính gần đúng $\int_{-2}^{\sqrt{2}}(x^3-3x)\mathrm{d}x$.

HOẠT ĐỘNG 2. Sử dụng phần mềm GeoGebra để tính gần đúng $\int_1^3\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)dx$

1. Khởi động phần mềm GeoGebra đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web: https://www.geogebra.org/ để sử dụng phiên bản online.

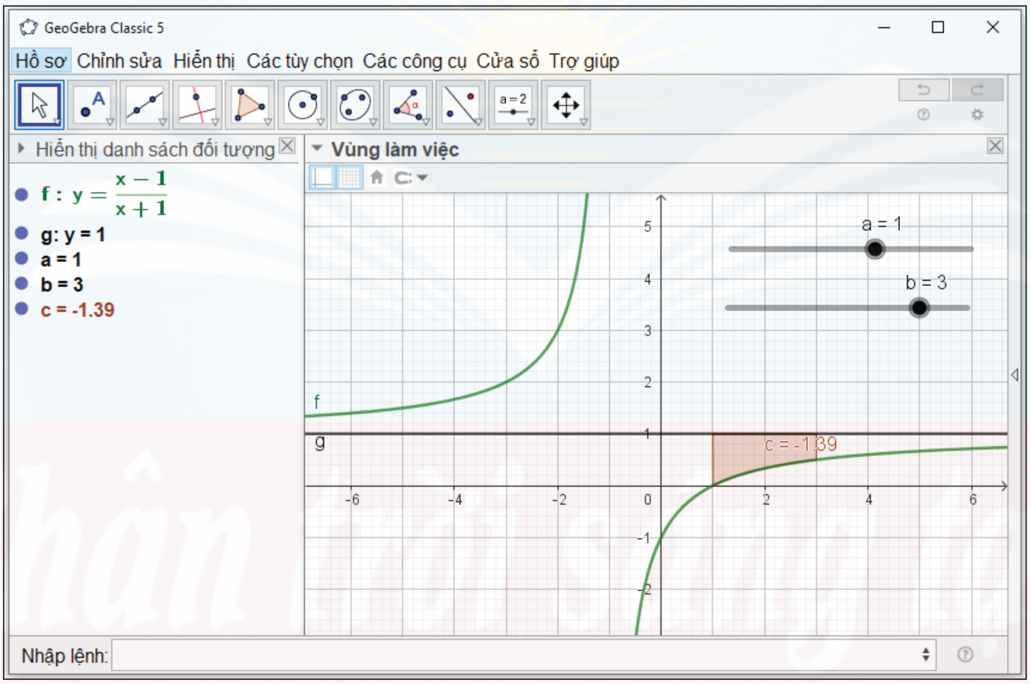
2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

– Nhập hàm số theo cú pháp f:y=(x–1)/(x+1); g:y=1.

– Nhập tích phân theo cú pháp TíchPhânGiữaHaiHàmSố(f, g, 1, 3).

Chú ý: Nếu đã tạo các thanh trượt *a*, *b* biểu thị giá trị đầu và giá trị cuối của tích phân thì nhập theo cú pháp TíchPhânGiữaHaiHàmSố(f, g, a, b), rồi dùng chuột để điều chỉnh giá trị các thanh trượt của *a*, *b*.

3. Quan sát kết quả như Hình 3.



Hình 3

Sử dụng phần mềm GeoGebra để minh hoạ và tính gần đúng $\int_2^4\left(\frac{2x+2}{x-1}-2\right)dx$.

HOẠT ĐỘNG 3. Sử dụng phần mềm GeoGebra để tính gần đúng

$$\int_0^2 \left[\left(\frac{x^2-x-1}{x+1}\right)-(x-2)\right]dx$$

1. Khởi động phần mềm GeoGebra đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web: https://www.geogebra.org/ để sử dụng phiên bản online.

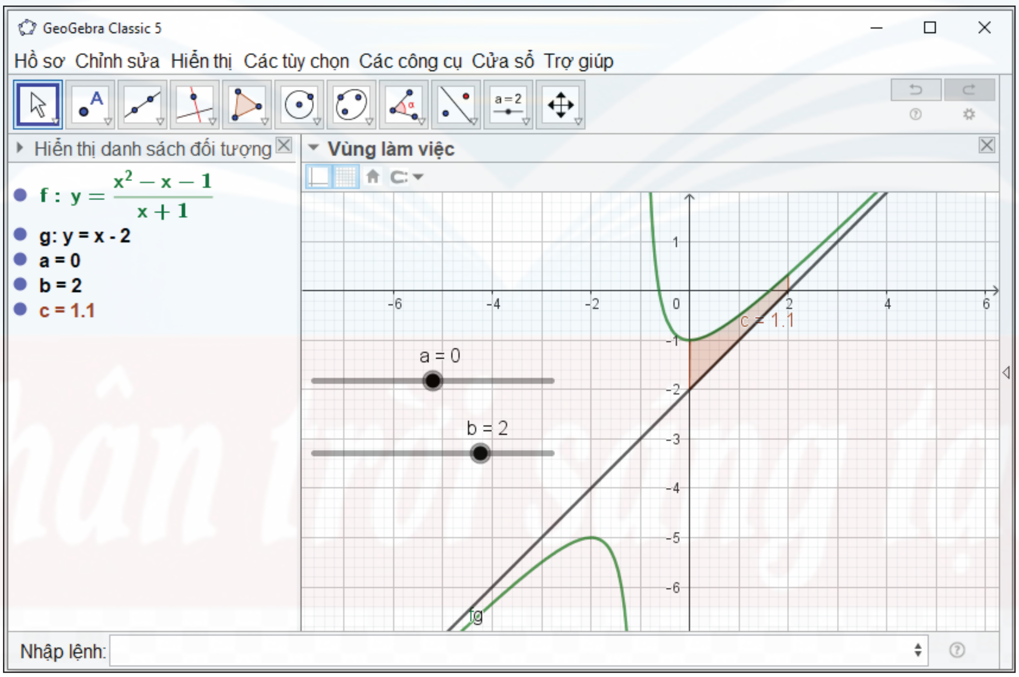
2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

– Nhập hàm số theo cú pháp f:y=(x^2–x–1)/(x+1); g:y=x–2.

– Nhập tích phân theo cú pháp TíchPhânGiữaHaiHàmSố(f, g, 0, 2).

Chú ý: Nếu đã tạo các thanh trượt *a*, *b* biểu thị giá trị đầu và giá trị cuối của tích phân thì nhập theo cú pháp TíchPhânGiữaHaiHàmSố(f, g, a, b), rồi dùng chuột để điều chỉnh giá trị các thanh trượt của *a*, *b*.

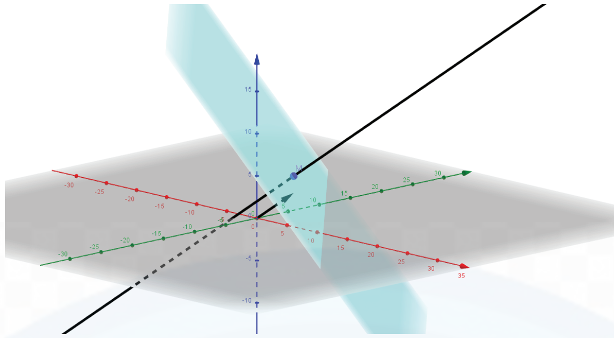
3. Quan sát kết quả như Hình 4.



Hình 4

Sử dụng phần mềm GeoGebra để minh hoạ và tính gần đúng $\int_2^3 \left(\frac{x^2+x-3}{x-1}-2\right)dx$.

Bài 3. Sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn hình học toạ độ trong không gian



MỤC ĐÍCH

– Thực hành sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn hình học toạ độ trong không gian.
– Biểu diễn điểm, vectơ, các phép toán vectơ trong hệ trục toạ độ *Oxyz*.
– Vẽ đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu trong hệ trục toạ độ *Oxyz*.
– Xem xét sự thay đổi hình dạng khi thay đổi các yếu tố trong phương trình của chúng.
– Xem xét, mô phỏng các bài toán toạ độ không gian.
– Ôn tập và minh hoạ các khái niệm của hình học toạ độ.

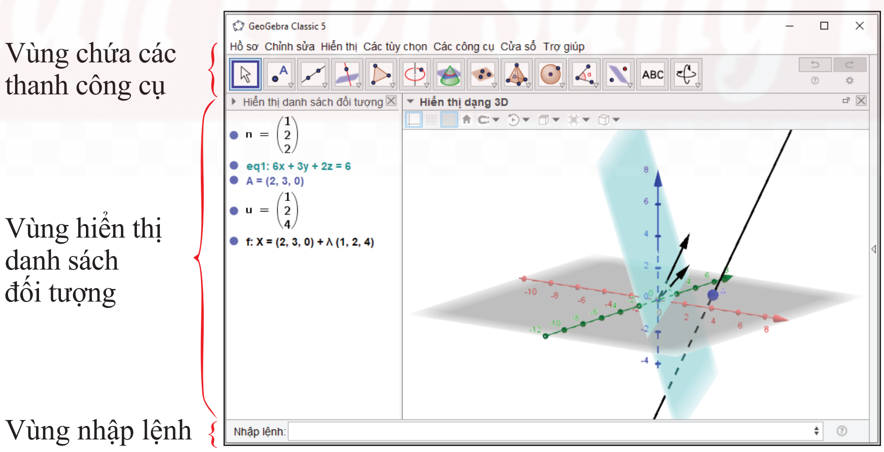
CHUẨN BỊ

– Máy tính xách tay có cài đặt phần mềm GeoGebra hoặc có kết nối Internet.
– Máy chiếu hoặc màn hình ti vi lớn.
– Thực hành trong phòng máy nếu các trường có điều kiện.
– Sách giáo khoa Toán 12, tập hai – bộ sách Chân trời sáng tạo.

HƯỚNG DẪN CHỨC NĂNG CỦA GEOGEBRA

Để biểu diễn hình học toạ độ trong không gian trên GeoGebra ta thực hiện các thao tác trên vùng sau:

1. Vùng chứa các thanh công cụ;
2. Vùng hiển thị danh sách các đối tượng;
3. Vùng hiển thị dạng 3D: chứa các điểm, vectơ và mặt phẳng trong hệ trục toạ độ *Oxyz*;
4. Vùng nhập lệnh: để nhập toạ độ các điểm, vectơ và mặt phẳng.



Hình 1. Các vùng làm việc của GeoGebra Classic 5

– Danh sách cú pháp lệnh biểu diễn các đối tượng hình học toạ độ trong không gian trên GeoGebra.

Đối tượng		Cú pháp lệnh	Giải thích
Điểm	$M(x; y; z)$	M(x,y,z) hay M=(x,y,z)	
Vectơ	$\vec{u} = (x; y; z)$	u(x,y,z) hay u=(x,y,z)	Kí hiệu vectơ không có mũi tên.
	$\vec{u} = \overrightarrow{MN}$	u=Vecto(M, N)	Nhập hai điểm M và N trước khi nhập $\vec{u}$.
Đường thẳng	Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a_1; a_2; a_3)$	DuongThang(M, u)	Nhập điểm và vectơ chỉ phương trước khi vẽ đường thẳng.
Mặt phẳng	$Ax + By + Cz + D = 0$	Ax+By+Cz+D=0	
	Mặt phẳng đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và vuông góc với đường thẳng d.	MatPhangVuongGoc(M, d)	Nhập điểm và đường thẳng trước khi vẽ mặt phẳng.
	Mặt phẳng đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}$, $\vec{v}$.	MatPhang(M, u, v)	Nhập điểm và cặp vectơ chỉ phương trước khi vẽ mặt phẳng.
	Mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C.	MatPhang(A, B, C)	Nhập 3 điểm A, B, C trước khi vẽ mặt phẳng.
Mặt cầu	Mặt cầu có phương trình: $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 = R^2$.	(x–a)^2+(x–b)^2+(x–c)^2=R^2	
	Mặt cầu (S) tâm I bán kính R.	MatCau(I, R)	Nhập tâm mặt cầu và bán kính trước khi vẽ mặt cầu.
	Mặt cầu (S) tâm I đi qua điểm M.	MatCau(I, M)	Nhập tâm mặt cầu và điểm nằm trên mặt cầu trước khi vẽ mặt cầu.

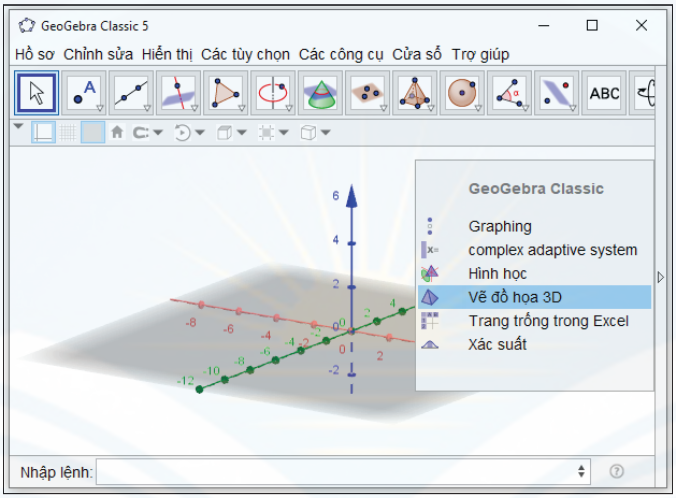
TỔ CHỨC HOẠT ĐỘNG

Chia lớp thành các nhóm, mỗi nhóm từ 4 đến 8 học sinh.

Nhóm trưởng phân công các thành viên trong nhóm thực hiện công việc theo các hoạt động sau:

HOẠT ĐỘNG 1. Sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn điểm, vectơ có toạ độ cho trước

1. Khởi động phần mềm GeoGebra đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web: https://www.geogebra.org/ để sử dụng phiên bản online. Chọn chế độ **Vẽ đồ hoạ 3D** với giao diện là một mặt phẳng nền để biểu diễn điểm, vectơ (Hình 2).



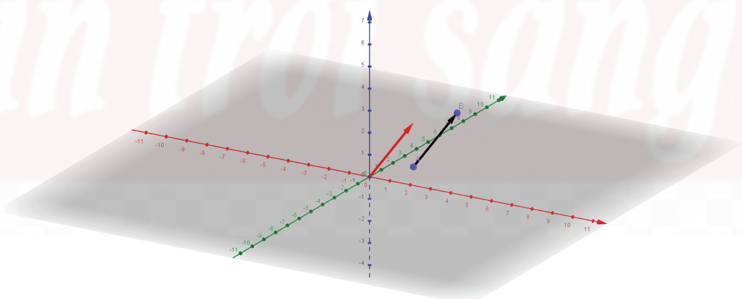
Hình 2

2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

– Nhập toạ độ điểm: $A(1; 2; 0)$, $B(2; 4; 2)$ vào vùng nhập lệnh theo cú pháp A(1,2,0); B(2,4,2).

– Nhập vectơ $\vec{u} = (1; 2; 2)$, $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ theo cú pháp u(1,2,2); n=Vecto(A, B).

3. Quan sát điểm, vectơ được vẽ trên vùng làm việc (Hình 3).



Hình 3

1 a) Sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn các điểm $M(-2; -4; -5)$, $N(3; 5; 0)$, $P(0; 0; -2)$.

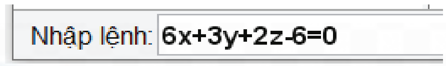
b) Sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn các vectơ $\vec{v} = (-2; -4; -5)$, $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$, $\vec{b} = \overrightarrow{NP}$.

HOẠT ĐỘNG 2. Sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn mặt phẳng: (P): $6x + 3y + 2z - 6 = 0$

1. Khởi động phần mềm GeoGebra đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web: https://www.geogebra.org/ để sử dụng phiên bản online. Chọn chế độ **Vẽ đồ hoạ 3D** với giao diện là một mặt phẳng nền để biểu diễn mặt phẳng.

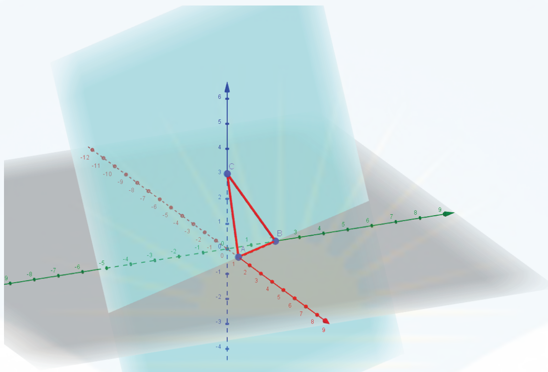
2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

Nhập phương trình mặt phẳng vào vùng nhập lệnh theo cú pháp 6x+3y+2z–6=0 (Hình 4).



Hình 4

3. Quan sát mặt phẳng trên vùng làm việc (Hình 5).



Hình 5

4. Sử dụng chuột để xoay hệ trục để có cảm nhận 3D trong không gian $Oxyz$.

Sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn các mặt phẳng (P): $4x + 2y = 0$, (Q): $x + y + z = 3$, (R): $z = 4$.

HOẠT ĐỘNG 3. Sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn đường thẳng d:

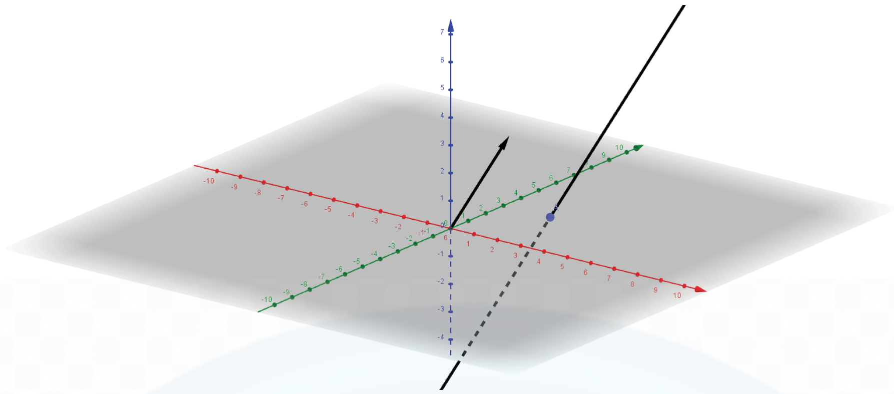
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4t \end{cases}$$

1. Khởi động phần mềm GeoGebra đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web: https://www.geogebra.org/ để sử dụng phiên bản online. Chọn chế độ **Vẽ đồ hoạ 3D** với giao diện là một mặt phẳng nền để biểu diễn đường thẳng.

2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

Nhập phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4t \end{cases}$ vào vùng nhập lệnh theo cú pháp: A(2,3,0); u(1,2,4); DuongThang(A, u).

3. Quan sát đường thẳng trên vùng làm việc (Hình 6).



Hình 6

4. Sử dụng chuột để xoay hệ trục để có cảm nhận 3D của không gian *Oxyz*.

Sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 - t \\ z = -3 + 4t. \end{cases}$

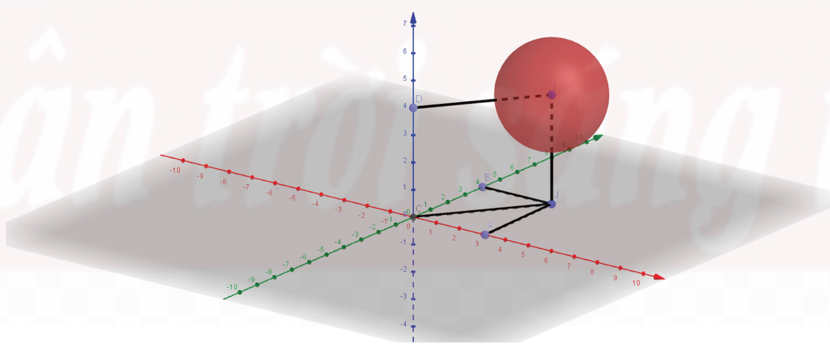
HOẠT ĐỘNG 4. Sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn mặt cầu:

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 + (z - 4)^2 = 4$$

1. Khởi động phần mềm GeoGebra đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web: https://www.geogebra.org/ để sử dụng phiên bản online. Chọn chế độ **Vẽ đồ hoạ 3D** với giao diện là một mặt phẳng nền để biểu diễn mặt cầu.

2. Các bước thao tác: Nhập phương trình mặt cầu $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 + (z - 4)^2 = 4$ vào vùng nhập lệnh theo cú pháp: I(3,5,4); R=2; MatCau(I, R).

3. Quan sát mặt cầu trên vùng làm việc (Hình 7).



Hình 7

4. Sử dụng chuột để xoay hệ trục để có cảm nhận 3D trong không gian *Oxyz*.

Sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ và (S'): $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 2)^2 = 9$.

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

B **Biểu thức dưới dấu tích phân**

Là biểu thức $f(x)\,dx$ trong tích phân $\int_a^b f(x)dx$, còn được gọi là vi phân của hàm số $F(x)$, kí hiệu $dF(x)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Ta có

$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$.

C **Cặp vectơ chỉ phương**

Cặp vectơ chỉ phương của một mặt phẳng là hai vectơ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng.

Cận tích phân

Là hai điểm đầu mút a và b của đoạn $[a; b]$ khi ta lấy tích phân từ a đến b của một hàm số liên tục trên đoạn này; a được gọi là cận dưới, b được gọi là cận trên.

Công thức Bayes

Với mọi biến cố A và B, $P(A) > 0$,

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})}.$$

Công thức nhân xác suất

Cho hai biến cố A và B,

$$P(AB) = P(B)P(A|B).$$

Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A và B,

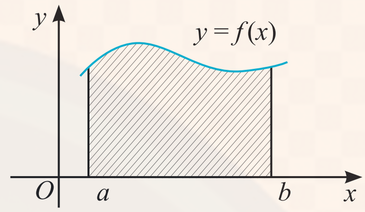
$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}).$$

H **Hàm số dưới dấu tích phân**

Là hàm số $f(x)$ trong tích phân $\int_a^b f(x)\,dx$.

Hình thang cong

Là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.



Diện tích của hình thang cong này bằng $F(b) - F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

N **Nguyên hàm**

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

P **Phương trình chính tắc của đường thẳng**

Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ với a_1, a_2, a_3 đều khác 0 là:

$$d: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Phương trình tham số của đường thẳng

Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm vectơ chỉ phương là:

$$d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

Phương trình của mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R

- $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0, R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Là phương trình có dạng

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0.

T Tích phân

Tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, kí hiệu $\int_a^b f(x)\,dx$, là hiệu số $F(b) - F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

V Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Là vectơ khác $\vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Là vectơ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng.

X Xác suất có điều kiện

Xác suất của biến cố B khi biến cố A xảy ra được gọi là xác suất của B với điều kiện A, kí hiệu là $P(B|A)$.

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: TRẦN THANH HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ
ĐẶNG THỊ THUÝ
Biên tập mĩ thuật: BÙI XUÂN DƯƠNG
Thiết kế sách: BÙI XUÂN DƯƠNG
Trình bày bìa: TỐNG THANH THẢO – ĐẶNG NGỌC HÀ
Minh hoạ: NGỌC KHANG – XUÂN DƯƠNG
Sửa bản in: TRẦN THANH HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ
ĐẶNG THỊ THUÝ – HOÀNG THỊ THU DUNG
Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

TOÁN 12 - TẬP HAI (CHÂN TRỜI SÁNG TẠO)
Mã số:
In………bản, (QĐ in số….) Khổ 19x26,5 cm.
Đơn vị in:……………………..
Cơ sở in:………………………
Số ĐKXB:
Số QĐXB:......... ngày …. tháng…. năm 20 ...
In xong và nộp lưu chiểu tháng ….năm 20….
Mã số ISBN: Tập một:
Tập hai: