KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – NGUYỄN HUY ĐOAN (đồng Chủ biên)
NGUYỄN CAO CƯỜNG – TRẦN MẠNH CƯỜNG
DOÃN MINH CƯỜNG – TRẦN PHƯƠNG DUNG
SĨ ĐỨC QUANG – LƯU BÁ THẮNG – ĐẶNG HÙNG THẮNG

TOÁN 9

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA

Môn: Toán – Lớp 9

*(Theo Quyết định số 1551/QĐ-BGDĐT ngày 05 tháng 06 năm 2023
của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)*

ĐOÀN QUỲNH (Chủ tịch), NGUYỄN TIẾN QUANG (Phó Chủ tịch)
PHẠM ĐỨC TÀI (Ủy viên, Thư kí), VŨ THỊ BÌNH – LÊ THỊ THU HÀ
TẠ MINH HIẾU – NGUYỄN THỊ HỢP – BÙI THỊ HẠNH LÂM
NGUYỄN VĂN NGƯ – VŨ ĐÌNH PHƯỢNG – TẠ CÔNG SƠN (Ủy viên)

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – NGUYỄN HUY ĐOAN (đồng Chủ biên)
NGUYỄN CAO CƯỜNG – TRẦN MẠNH CƯỜNG – DOÃN MINH CƯỜNG
TRẦN PHƯƠNG DUNG – SĨ ĐỨC QUANG – LƯU BÁ THẮNG – ĐẶNG HÙNG THẮNG

TOÁN 9

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

1. Mỗi bài học được thiết kế gồm:

- Phần **Định hướng**: Chỉ rõ các thuật ngữ, khái niệm và các kiến thức, kĩ năng mà các em cần chú ý trong bài học.
- Phần **Mở đầu**: Thường là một bài toán hay một tình huống có liên quan đến nội dung mới của bài học.
- Phần **Hình thành kiến thức mới**: Gồm các hoạt động *Tìm tòi – Khám phá* ( ) và *Đọc hiểu – Nghe hiểu* ( ) cùng với *Chú ý* hay *Nhận xét*.
- Kiến thức trọng tâm được đặt trong khung màu vàng.
- Câu hỏi ( ) giúp đánh giá kết quả sau hoạt động *Đọc hiểu – Nghe hiểu*.
- Phần **Luyện tập và củng cố**: Gồm *Ví dụ*, *Luyện tập*, *Thực hành* để hình thành và phát triển các kĩ năng gắn với kiến thức mới vừa học.
- Phần **Vận dụng**: Gồm các hoạt động *Vận dụng*, *Tranh luận* ( ) và *Thử thách nhỏ* ( ) để giải quyết các tình huống, vấn đề trong thực tiễn và mở rộng kiến thức.

2. Các em sẽ được đồng hành với anh Pi, các bạn Tròn, Vuông trong các bài học để việc học hấp dẫn hơn nhé.

3. Các em có thể tham khảo thêm mục *Em có biết?* để mở rộng hiểu biết của mình. Cuối sách là *Bảng tra cứu thuật ngữ* và *Bảng giải thích thuật ngữ*.

MỤC LỤC

Chương VI

HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

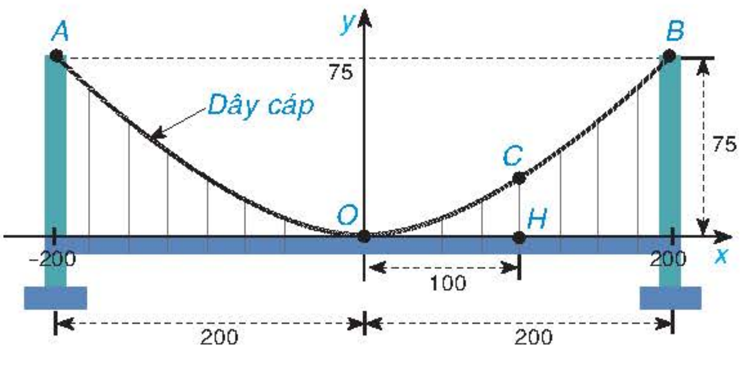
ĐẠI SỐ

Chương này trình bày cách vẽ và tính chất đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$, cách giải phương trình bậc hai một ẩn và những ứng dụng thực tiễn liên quan.

Bài 18 HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ • Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ • Đỉnh • Trục đối xứng	• Thiết lập bảng giá trị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. • Vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. • Nhận biết tính đối xứng trục và trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. • Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.

Một cây cầu treo có trụ tháp đôi cao 75 m so với mặt của cây cầu và cách nhau 400 m. Các dây cáp có dạng đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ như Hình 6.1 và được treo trên các đỉnh tháp. Tìm chiều cao CH của dây cáp biết điểm H cách tâm O của cây cầu 100 m (giả sử mặt của cây cầu là bằng phẳng).



Hình 6.1

1 HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Nhận biết hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

HĐ1 Khi thả một vật rơi tự do và bỏ qua sức cản của không khí, quãng đường của chuyển động s (mét) của vật được cho bằng công thức $s = 4{,}9t^2$, trong đó t là thời gian chuyển động của vật (giây).

a) Hoàn thành bảng sau vào vở:

t (giây)	0	1	2
s (m)	?	?	?

b) Giả sử một vật rơi tự do từ độ cao 19,6 m so với mặt đất. Hỏi sau bao lâu vật chạm đất?

HĐ2 a) Viết công thức tính diện tích S của hình tròn bán kính r.

b) Hoàn thành bảng sau vào vở (lấy $\pi = 3{,}14$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai):

r (cm)	1	2	3	4
S (cm^2)	?	?	?	?

Những công thức tính s theo t (trong HĐ1), tính S theo r (trong HĐ2) biểu thị những hàm số có cùng một dạng, gọi là hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.

Nhận xét. Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ xác định với mọi giá trị x thuộc $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1 Cho hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$. Hoàn thành bảng giá trị sau vào vở:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	?	?	?	?	?	?	?

Giải

Bảng giá trị:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{27}{2}$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6	$\frac{27}{2}$

Luyện tập 1 Cho hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$. Hoàn thành bảng giá trị sau vào vở:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	?	?	?	?	?	?	?

Vận dụng 1

Một vật rơi tự do từ độ cao 98 m so với mặt đất. Quãng đường chuyển động s (m) của vật rơi phụ thuộc vào thời gian t (giây) được cho bởi công thức $s = 4{,}9t^2$.

a) Sau 2 giây, vật này cách mặt đất bao nhiêu mét?

b) Hỏi sau bao lâu kể từ khi bắt đầu rơi, vật này chạm đất?

2 ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

HĐ3 Cho hàm số $y = 2x^2$.

a) Hoàn thành bảng giá trị sau vào vở:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	?	?	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, biểu diễn các điểm $(x;\ y)$ trong bảng giá trị ở câu a. Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $(x;\ 2x^2)$ với $x \in \mathbb{R}$ và nối lại, ta được đồ thị của hàm số $y = 2x^2$.

Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

- Lập bảng ghi một số cặp giá trị tương ứng của x và y.
- Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, biểu diễn các cặp điểm $(x;\ y)$ trong bảng giá trị trên và nối chúng lại để được một đường cong là đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.

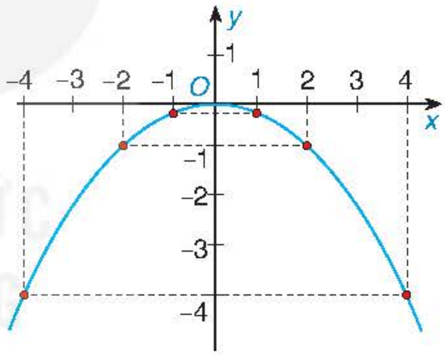
Ví dụ 2 Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Giải

Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y:

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

Biểu diễn các điểm $(-4; -4)$; $(-2; -1)$; $(-1; -\frac{1}{4})$; $(0; 0)$; $(1; -\frac{1}{4})$; $(2; -1)$ và $(4; -4)$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy và nối chúng lại ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ như Hình 6.2.



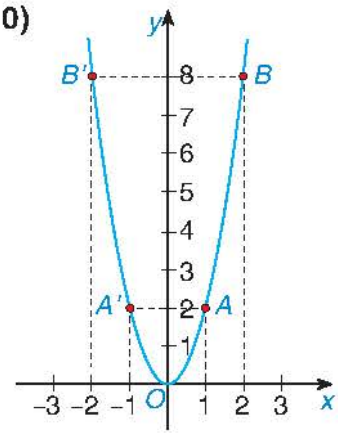
Hình 6.2

Nhận biết tính đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

HĐ4 Xét đồ thị của hàm số $y = 2x^2$ đã vẽ ở HĐ3 (H.6.3).

a) Đồ thị nằm phía trên hay phía dưới trục hoành? Điểm nào là điểm thấp nhất của đồ thị?

b) So sánh hoành độ và tung độ của các cặp điểm thuộc đồ thị: $A(1; 2)$ và $A'(-1; 2)$; $B(2; 8)$ và $B'(-2; 8)$. Từ đó hãy nhận xét mối liên hệ về vị trí giữa các cặp điểm nêu trên.

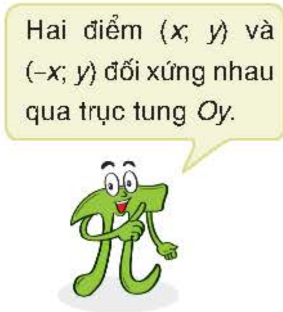


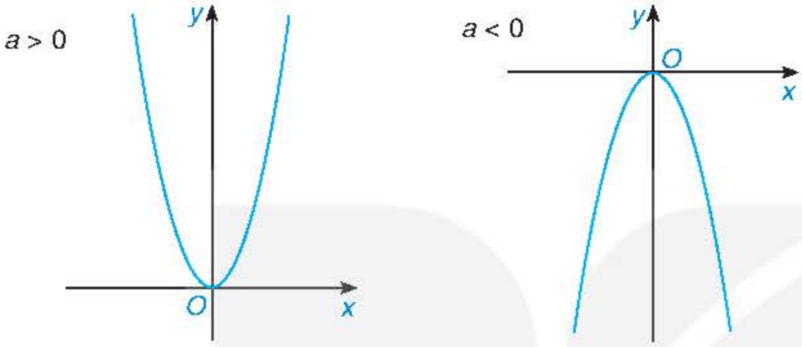
Hình 6.3

c) Tìm điểm C có hoành độ $x = \frac{1}{2}$ thuộc đồ thị. Xác định toạ độ của điểm C' đối xứng với điểm C qua trục tung Oy và cho biết điểm C' có thuộc đồ thị đã cho hay không.

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là một đường cong, gọi là *đường parabol*, có các tính chất sau:

- Có đỉnh là gốc toạ độ O;
- Có trục đối xứng là Oy;
- Nằm phía trên trục hoành nếu $a > 0$ và nằm phía dưới trục hoành nếu $a < 0$.





Hình 6.4. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Ví dụ 3

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x^2$.

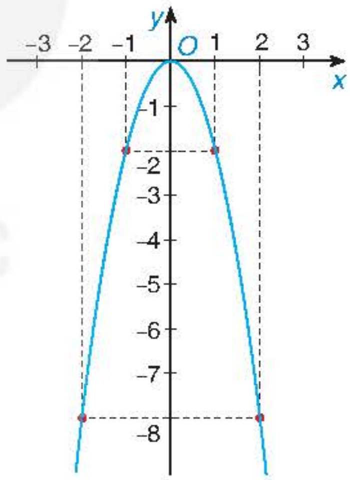
b) Tìm toạ độ các điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $-\frac{1}{2}$ và nhận xét về tính đối xứng giữa các điểm đó.

Giải

a) Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8

Biểu diễn các điểm $(-2; -8)$, $(-1; -2)$, $(0; 0)$, $(1; -2)$ và $(2; -8)$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy và nối chúng lại ta được đồ thị của hàm số $y = -2x^2$ như Hình 6.5.



Hình 6.5

b) Ta có: $y = -\frac{1}{2}$ nên $-2x^2 = -\frac{1}{2}$, hay $x^2 = \frac{1}{4}$. Suy ra $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy có hai điểm cần tìm là $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Hai điểm này đối xứng với nhau qua trục tung Oy.

Nhận xét. • Khi vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$, ta cần xác định tối thiểu 5 điểm thuộc đồ thị là gốc toạ độ O và hai cặp điểm đối xứng với nhau qua trục tung Oy.

• Do đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ nhận trục tung Oy là trục đối xứng nên ta có thể lập bảng giá trị của hàm số này với những giá trị x không âm và vẽ phần đồ thị tương ứng ở bên phải trục tung, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị đã vẽ qua trục tung ta sẽ được đồ thị của hàm số đã cho.

Luyện tập 2

Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$. Tìm các điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng 2 và nhận xét về tính đối xứng giữa các điểm đó.

Vận dụng 2

Giải quyết bài toán ở *tình huống mở đầu*.

BÀI TẬP

6.1. Cho hàm số $y = 0,25x^2$. Hoàn thành bảng giá trị sau vào vở:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	?	?	?	?	?	?	?

6.2. Cho hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh a (cm) và chiều cao 10 cm.

a) Viết công thức tính thể tích V của lăng trụ theo a và tính giá trị của V khi $a = 2$ cm.

b) Nếu độ dài cạnh đáy tăng lên hai lần thì thể tích của hình lăng trụ thay đổi thế nào?

6.3. Diện tích toàn phần S (cm^2) của hình lập phương, tức là tổng diện tích xung quanh và diện tích của hai mặt đáy là một hàm số của độ dài cạnh a (cm).

a) Viết công thức của hàm số này.

b) Sử dụng công thức nhận được ở câu a để tính độ dài cạnh của một hình lập phương có diện tích toàn phần là 54 cm^2.

6.4. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

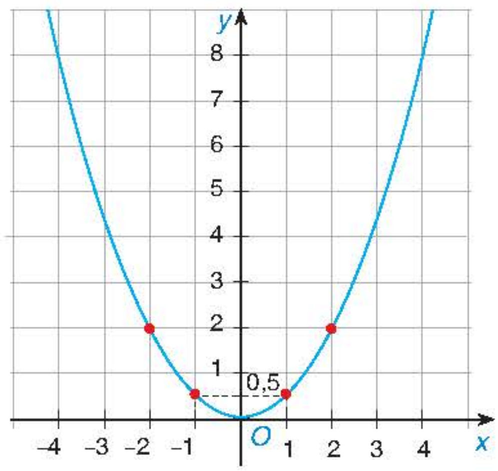
a) $y = 3x^2$;   b) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

6.5. Biết rằng đường cong trong Hình 6.6 là một parabol $y = ax^2$.

a) Tìm hệ số a.

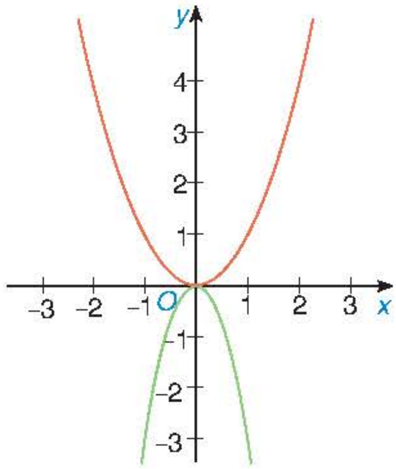
b) Tìm tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ $x = -2$.

c) Tìm các điểm thuộc parabol có tung độ $y = 8$.



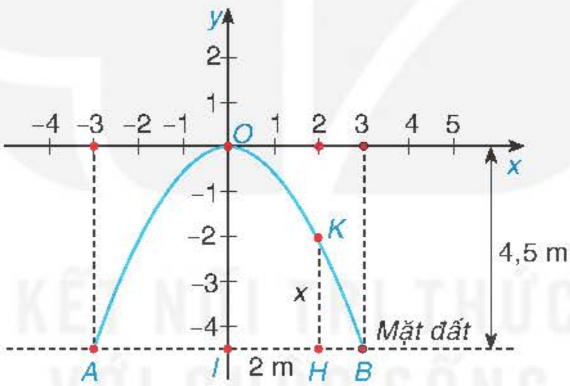
Hình 6.6

6.6. Trong Hình 6.7 có hai đường cong là đồ thị của hai hàm số $y = -3x^2$ và $y = x^2$. Hãy cho biết đường nào là đồ thị của hàm số $y = -3x^2$.



Hình 6.7

6.7. Một cổng vòm được thiết kế dạng parabol $y = ax^2$ như Hình 6.8. Biết chiều rộng của chân cổng là $AB = 6$ m và chiều cao của cổng là $OI = 4,5$ m.



Hình 6.8

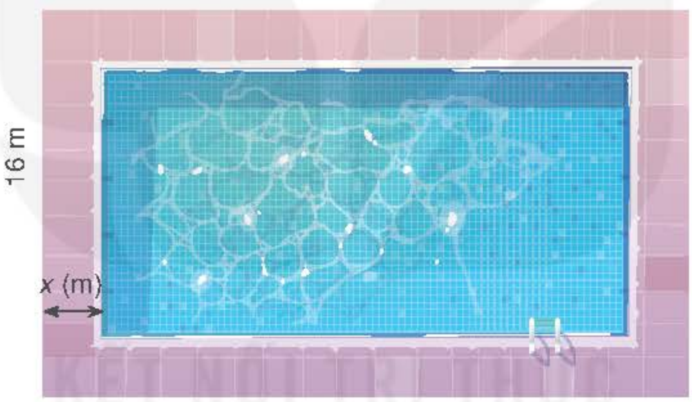
a) Tìm hệ số a dựa vào các dữ kiện trên. Từ đó, tính độ dài đoạn HK biết H cách điểm chính giữa cổng I là 2 m.

b) Để vận chuyển hàng qua cổng, người ta dự định sử dụng một xe tải có chiều rộng 2 m, chiều cao 3 m. Hỏi xe tải này có thể đi qua được cổng vòm đó hay không?

Bài 19 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Phương trình bậc hai một ẩn • Công thức nghiệm • Biệt thức	• Nhận biết khái niệm phương trình bậc hai một ẩn. • Giải phương trình bậc hai một ẩn. • Tính nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn bằng máy tính cầm tay. • Vận dụng phương trình bậc hai vào giải quyết bài toán thực tiễn.

Trên một mảnh đất hình chữ nhật có kích thước 28 m × 16 m, người ta dự định làm một bể bơi có đường đi xung quanh (H.6.9). Hỏi bề rộng của đường đi là bao nhiêu để diện tích của bể bơi là 288 m^2?



Hình 6.9

1 ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Nhận biết phương trình bậc hai một ẩn

Xét bài toán trong *tình huống mở đầu.*

HĐ1 Gọi x (m) là bề rộng của mặt đường ($0 < x < 8$). Tính chiều dài và chiều rộng của bể bơi theo x.

HĐ2 Dựa vào kết quả HĐ1, tính diện tích của bể bơi theo x.

HĐ3 Sử dụng giả thiết và kết quả HĐ2, hãy viết phương trình để tìm x.

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$.

Ví dụ 1 Trong các phương trình sau, những phương trình nào là phương trình bậc hai ẩn x? Chỉ rõ các hệ số a, b, c của mỗi phương trình đó.

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$; b) $x^2 - 3 = 0$;

c) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + 3 \cdot \dfrac{1}{x} + 2 = 0$; d) $-5x^2 = 0$.

Giải

a) Phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$ là phương trình bậc hai với $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$.

b) Phương trình $x^2 - 3 = 0$ là phương trình bậc hai với $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$.

c) Phương trình $\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + 3 \cdot \dfrac{1}{x} + 2 = 0$ không phải là phương trình bậc hai.

d) Phương trình $-5x^2 = 0$ là phương trình bậc hai với $a = -5$, $b = 0$, $c = 0$.

Luyện tập 1 Trong các phương trình sau, những phương trình nào là phương trình bậc hai ẩn x? Chỉ rõ các hệ số a, b, c của mỗi phương trình đó.

a) $x^2 + 5 = 0$; b) $2x^2 + 7x = 0$;

c) $\dfrac{x^2 - 2x + 5}{x} = 0$; d) $0{,}5x^2 = 0$.

Tranh luận

Phương trình (ẩn x) $mx^2 + 2x + 1 = 0$ (m là một số cho trước) là một phương trình bậc hai với $a = m$, $b = 2$, $c = 1$.

Ý kiến của em thế nào?

2 CÁCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN CÓ DẠNG ĐẶC BIỆT

Cách giải phương trình bậc hai một ẩn dạng khuyết

Giải một phương trình bậc hai là tìm tất cả các nghiệm của nó. Dưới đây, thông qua một số ví dụ đơn giản, ta trình bày cách giải một số phương trình bậc hai dạng $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), mà khuyết số hạng bậc nhất (tức là $b = 0$) hoặc khuyết số hạng tự do (tức là $c = 0$), bằng phương pháp đặt nhân tử chung đưa về dạng tích hoặc dùng hằng đẳng thức để đưa vế trái về một bình phương.

- Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.
- Nếu $A^2 = B$ ($B \geq 0$) thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

Ví dụ 2

Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 - 4x = 0$; b) $3x^2 + 8x = 0$.

Giải

a) $2x^2 - 4x = 0$

$2x(x - 2) = 0$

$x = 0$ hoặc $x = 2$.

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

b) $3x^2 + 8x = 0$

$x(3x + 8) = 0$

$x = 0$ hoặc $x = -\frac{8}{3}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{3}$.

Luyện tập 2 Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 + 6x = 0$;

b) $5x^2 + 11x = 0$.

Ví dụ 3 Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 9 = 0$;

b) $(x+1)^2 = 3$.

Giải

a) $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = 3$ hoặc $x = -3$.

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

b) $(x+1)^2 = 3$

$x+1 = \sqrt{3}$ hoặc $x+1 = -\sqrt{3}$

$x = -1+\sqrt{3}$ hoặc $x = -1-\sqrt{3}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$x_1 = -1+\sqrt{3}, x_2 = -1-\sqrt{3}$.

Luyện tập 3 Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 25 = 0$;

b) $(x+3)^2 = 5$.

Chú ý. Để giải phương trình bậc hai dạng $x^2 + bx = c$, ta có thể cộng thêm vào hai vế của phương trình với cùng một số thích hợp để vế trái có thể biến đổi thành một bình phương. Từ đó có thể giải phương trình đã cho.

Ví dụ 4 Cho phương trình $x^2 - 4x = 1$.

a) Hãy cộng vào cả hai vế của phương trình với cùng một số thích hợp để được một phương trình mà vế trái có thể biến đổi thành một bình phương.

b) Dựa vào câu a và cách giải Ví dụ 3b, hãy giải phương trình đã cho.

Giải

a) $x^2 - 4x = 1$

$x^2 - 4x + 4 = 1 + 4$

$(x-2)^2 = 5$.

b) Từ kết quả câu a, ta có:

$x - 2 = \sqrt{5}$ hoặc $x - 2 = -\sqrt{5}$, suy ra là $x = 2+\sqrt{5}$ hoặc $x = 2-\sqrt{5}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 2+\sqrt{5}$, $x_2 = 2-\sqrt{5}$.

Luyện tập 4 Cho phương trình $x^2 + 6x = 1$.

Hãy cộng vào cả hai vế của phương trình với cùng một số thích hợp để được một phương trình mà vế trái có thể biến đổi thành một bình phương. Từ đó, hãy giải phương trình đã cho.

3 CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Xây dựng công thức nghiệm của phương trình bậc hai

HĐ4 Thực hiện lần lượt các bước sau để giải phương trình:

$$2x^2 - 8x + 3 = 0.$$

a) Chuyển hạng tử tự do sang vế phải.

b) Chia cả hai vế của phương trình cho hệ số của x^2.

c) Thêm vào hai vế của phương trình nhận được ở câu b với cùng một số để vế trái có thể biến đổi thành một bình phương. Từ đó tìm nghiệm x.

Cách giải phương trình bậc hai

Tương tự HĐ4, để giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) trong trường hợp tổng quát, ta làm như sau:

– Chuyển hạng tử tự do c sang vế phải: $ax^2 + bx = -c$.

– Chia cả hai vế của phương trình cho hệ số a của x^2: $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

– Cộng vào hai vế của phương trình nhận được với $\frac{b^2}{4a^2}$ để vế trái có thể biến đổi thành bình phương của một biểu thức: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ hay $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Kí hiệu $\Delta = b^2 - 4ac$ và gọi là *biệt thức* của phương trình (Δ đọc là "đenta"). Khi đó, ta có thể viết lại phương trình cuối dưới dạng $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

Từ đây, ta có kết quả sau:

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 5 Cho phương trình $3x^2+7x-1=0$.

a) Xác định các hệ số a, b, c.

b) Tính biệt thức Δ.

c) Áp dụng công thức nghiệm, giải phương trình đã cho.

Giải

a) Ta có: $a=3$, $b=7$, $c=-1$.

b) Ta có: $\Delta=b^2-4ac=7^2-4\cdot3\cdot(-1)=49+12=61$.

c) Do $\Delta>0$, áp dụng công thức nghiệm, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-7+\sqrt{61}}{6},\ x_2=\frac{-7-\sqrt{61}}{6}.$$

Ví dụ 6

Giải các phương trình sau:

a) $x^2-6x+9=0$;

b) $2x^2+3x+5=0$.

Giải

a) Ta có: $\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=0$. Do đó, phương trình có nghiệm kép:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2}=3.$$

b) Ta có: $\Delta=3^2-4\cdot2\cdot5=9-40=-31<0$. Do đó, phương trình vô nghiệm.

Luyện tập 5

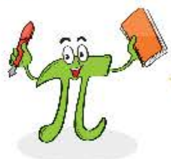
Áp dụng công thức nghiệm, giải các phương trình sau:

a) $2x^2-5x+1=0$;

b) $x^2+8x+16=0$;

c) $x^2-x+1=0$.

Thử thách nhỏ



Có thể nói gì về nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ nếu a và c trái dấu?

Em hãy trả lời câu hỏi của anh Pi.

Chú ý. Xét phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$, với $b=2b'$ và $\Delta'=b'^2-ac$.

- Nếu $\Delta'>0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a};\ x_2=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}.$$

- Nếu $\Delta'=0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1=x_2=-\dfrac{b'}{a}$.
- Nếu $\Delta'<0$ thì phương trình vô nghiệm.

Các công thức ở trên gọi là *công thức nghiệm thu gọn*.

Ví dụ 7

Xác định a, b', c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn giải các phương trình sau:

a) $2x^2 + 6x + 1 = 0$; b) $x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 = 0$.

Giải

a) Ta có: $a = 2$, $b' = 3$, $c = 1$ và $\Delta' = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7 > 0$. Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}$; $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$.

b) Ta có: $a = 1$, $b' = -2\sqrt{3}$, $c = 12$ và $\Delta' = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 1 \cdot 12 = 0$. Do đó, phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = 2\sqrt{3}$.

Luyện tập 6

Xác định a, b', c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn giải các phương trình sau:

a) $3x^2 + 8x - 3 = 0$; b) $x^2 + 6\sqrt{2}x + 2 = 0$.

Vận dụng Giải bài toán trong *tình huống mở đầu.*

4 TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể dễ dàng tìm nghiệm của các phương trình bậc hai một ẩn.

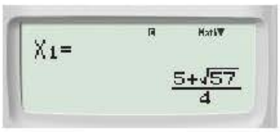
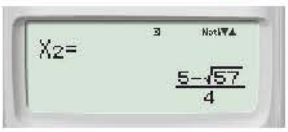
Ví dụ 8

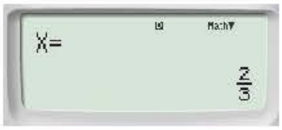
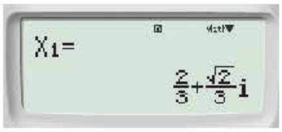
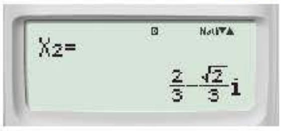
Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x^2 - 5x - 4 = 0$; b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$; c) $-3x^2 + 4x - 2 = 0$.

Giải. Với một loại máy tính cầm tay, sau khi mở máy ta bấm phím $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{3}$ để chuyển về chế độ giải phương trình bậc hai.

Tiếp theo, với từng phương trình ta thực hiện như sau:

Tìm nghiệm của phương trình	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết luận
$2x^2 - 5x - 4 = 0$	$\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$	 Bấm tiếp phím $\boxed{=}$ 	Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{57}}{4}$; $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{57}}{4}$.

$9x^2 - 12x + 4 = 0$	9 = − 1 2 = 4 = =		Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$.
$-3x^2 + 4x - 2 = 0$	− 3 = 4 = − 2 = =	 Bấm tiếp phím = 	Phương trình vô nghiệm.

Chú ý. Để hiển thị kết quả xấp xỉ ở dạng số thập phân sau khi nhận kết quả ta bấm phím S⇔D.

Luyện tập 7

Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các phương trình sau:

a) $5x^2 + 2\sqrt{10}x + 2 = 0$;

b) $3x^2 - 5x + 7 = 0$;

c) $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

BÀI TẬP

6.8. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và xác định các hệ số a, b, c của phương trình đó.

a) $3x^2 + 2x - 1 = x^2 - x$;

b) $(2x + 1)^2 = x^2 + 1$.

6.9. Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 + \frac{1}{3}x = 0$;

b) $(3x + 2)^2 = 5$.

6.10. Không cần giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c, tính biệt thức Δ và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $11x^2 + 13x - 1 = 0$;

b) $9x^2 + 42x + 49 = 0$;

c) $x^2 - 2x + 3 = 0$.

6.11. Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai, giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 2\sqrt{5} + 2 = 0$;

b) $4x^2 + 28x + 49 = 0$;

c) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1 = 0$.

6.12. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các phương trình sau:

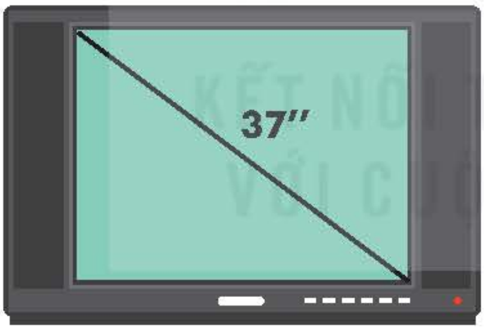
a) $0{,}1x^2 + 2{,}5x - 0{,}2 = 0$;

b) $0{,}01x^2 - 0{,}05x + 0{,}0625 = 0$;

c) $1{,}2x^2 + 0{,}75x + 2{,}5 = 0$;

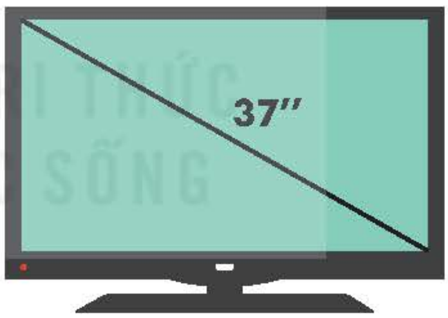
6.13. Độ cao h (mét) so với mặt đất của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 19{,}6$ m/s cho bởi công thức $h = 19{,}6t - 4{,}9t^2$, ở đó t là thời gian kể từ khi phóng (giây) (theo *Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016*). Hỏi sau bao lâu kể từ khi phóng, vật sẽ rơi trở lại mặt đất?

6.14. Kích thước màn hình ti vi hình chữ nhật được xác định bằng độ dài đường chéo. Ti vi truyền thống có định dạng 4 : 3, nghĩa là tỉ lệ giữa chiều dài và chiều rộng của màn hình là 4 : 3. Hỏi diện tích của màn hình ti vi truyền thống 37 in là bao nhiêu? Diện tích của màn hình ti vi LCD 37 in có định dạng 16 : 9 là bao nhiêu? Màn hình ti vi nào có diện tích lớn hơn? Ở đây, các diện tích của màn hình được tính bằng inch vuông.



Ti vi truyền thống

4 : 3



Ti vi LCD

16 : 9

6.15. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài 6 m và có diện tích là 140 m^2. Tính các kích thước của mảnh vườn đó.

LUYỆN TẬP CHUNG

Ví dụ 1 Cho hai hàm số: $y = \frac{3}{2}x^2$ và $y = -x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Tìm điểm A thuộc đồ thị $y = \frac{3}{2}x^2$, điểm B thuộc đồ thị $y = -x^2$, biết rằng A và B đều có hoành độ $x = -\frac{3}{2}$.

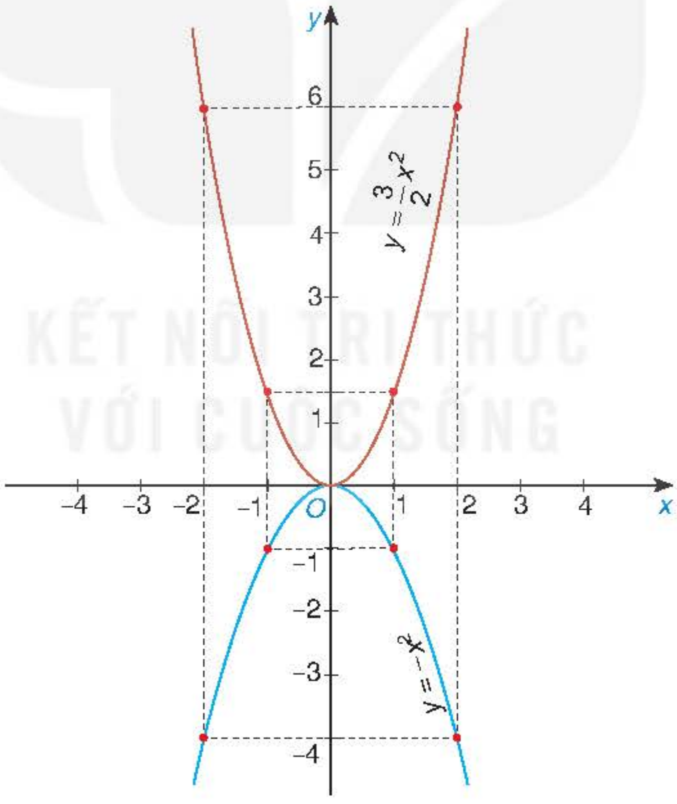
Giải

a) Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y của hai hàm số đã cho:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Từ đó vẽ được đồ thị của hai hàm số này như Hình 6.10:



Hình 6.10

b) Với $x = -\frac{3}{2}$, thay vào công thức $y = \frac{3}{2}x^2$ ta có: $y = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{27}{8}$. Vậy $A\left(-\frac{3}{2}; \frac{27}{8}\right)$.

Với $x = -\frac{3}{2}$, thay vào công thức $y = -x^2$ ta có: $y = -\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$. Vậy $B\left(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}\right)$.

Ví dụ 2

Giả sử số lượng cá trong một hồ nào đó tăng, giảm theo công thức:

$$P = 50\left(100 + 15t - t^2\right),\ 0 \le t \le 15.$$

Ở đây P là số lượng cá trong hồ sau t năm tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2020, khi lần đầu tiên số lượng cá trong hồ được ước tính. Hỏi theo mô hình này, thì:

a) Vào thời điểm nào, số lượng cá trong hồ sẽ là 7 500 con?

b) Vào thời điểm nào, số lượng cá trong hồ sẽ trở lại như tại thời điểm ban đầu vào ngày 01 tháng 01 năm 2020?

Giải

a) Ta cần tìm t sao cho:

$$P = 7\,500,\ \text{tức là } 50(100 + 15t - t^2) = 7\,500,\ \text{hay } t^2 - 15t + 50 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai này ta được hai nghiệm là $t = 5$ hoặc $t = 10$. Cả hai nghiệm này đều thích hợp.

Giá trị $t = 5$ ứng với thời điểm vào ngày 01-01-2025.

Giá trị $t = 10$ ứng với thời điểm vào ngày 01-01-2030.

Vậy theo mô hình đã cho, có hai thời điểm mà số cá trong hồ là 7 500 con, đó là vào ngày 01-01-2025 hoặc vào ngày 01-01-2030.

b) Số lượng cá trong hồ tại thời điểm ban đầu (ngày 01-01-2020) là:

$$P(0) = 50 \cdot 100 = 5\,000 \text{ (con)}.$$

Ta cần tìm t sao cho: $P = 5\,000$, hay $15t - t^2 = 0$, tức là $t = 0$ hoặc $t = 15$.

Giá trị $t = 0$ ứng với thời điểm ban đầu, tức là ngày 01-01-2020.

Giá trị $t = 15$ ứng với thời điểm ngày 01-01-2035.

Vậy theo mô hình đã cho, thì vào ngày 01-01-2035, số lượng cá sẽ trở lại như tại thời điểm ban đầu.

BÀI TẬP

6.16. Biết rằng parabol $y = ax^2$ ($a \ne 0$) đi qua điểm $A\left(2; 4\sqrt{3}\right)$.

a) Tìm hệ số a và vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ với a vừa tìm được.

b) Tìm tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ $x = -1$.

c) Tìm các điểm thuộc parabol có tung độ $y = 5\sqrt{3}$.

6.17. Công thức $E = \frac{1}{2}mv^2$ (J) được dùng để tính động năng của một vật có khối lượng m (kg) khi chuyển động với vận tốc v (m/s) (theo *Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016*).

a) Giả sử một quả bóng có khối lượng 2 kg đang bay với vận tốc 6 m/s. Tính động năng của quả bóng đó.

b) Giả sử động năng của quả bóng đang bay có khối lượng 1,5 kg là 48 J, hãy tính vận tốc bay của quả bóng đó.

6.18. Chiều dài l (mét) của một con lắc đơn tỉ lệ thuận với bình phương chu kì T (giây) của nó (chu kì là thời gian để thực hiện một dao động). Con lắc đơn có chiều dài 223,4 cm thì có chu kì 3 giây.

a) Tìm công thức liên hệ giữa l và T.

b) Tìm chiều dài của con lắc có chu kì 5 giây.

c) Chu kì của con lắc có chiều dài 0,98 m là bao nhiêu?

(Trong tất cả các câu trên, kết quả được tính chính xác đến hàng phần mười).

6.19. Sử dụng công thức nghiệm hoặc công thức nghiệm thu gọn, giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$; b) $3x^2 - 9x + 3 = 0$;

c) $11x^2 - 13x + 5 = 0$; d) $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = 0$.

6.20. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai):

a) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$;

b) $x^2 - (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{7} = 0$.

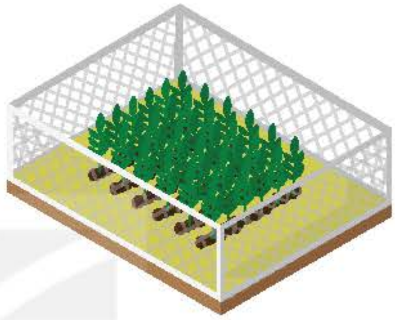
6.21. Từ một tấm tôn hình vuông, người ta cắt bỏ bốn hình vuông có độ dài cạnh 8 cm ở bốn góc, sau đó gập thành một chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp và có thể tích là 200 cm^3. Tính độ dài cạnh của tấm tôn hình vuông ban đầu.

6.22. Giả sử doanh thu (nghìn đồng) của một cửa hàng bán phở trong một ngày có thể mô hình hoá bằng công thức $R(x) = x(220 - 4x)$ với $30 \le x \le 50$, trong đó x (nghìn đồng) là giá tiền của một bát phở. Nếu muốn doanh thu của cửa hàng đạt 3 triệu đồng thì giá bán của mỗi bát phở phải là bao nhiêu?

Bài 20 ĐỊNH LÍ VIÈTE VÀ ỨNG DỤNG

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
Định lí Viète	• Giải thích định lí Viète. • Vận dụng định lí Viète để tính nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai, tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng.

Bác An có 40 m hàng rào lưới thép. Bác muốn dùng nó để rào xung quanh một mảnh đất trống (đủ rộng) thành một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 96 m^2 để trồng rau. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó.



1 ĐỊNH LÍ VIÈTE

Khám phá định lí Viète

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. Giả sử $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

HĐ1 Nhắc lại công thức tính hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình trên.

HĐ2 Từ kết quả HĐ1, hãy tính $x_1 + x_2$ và x_1x_2.

Từ kết quả HĐ2, ta có định lí Viète như sau:

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Ví dụ 1 Không giải phương trình, hãy tính biệt thức Δ (hoặc Δ') để kiểm tra điều kiện có nghiệm, rồi tính tổng và tích các nghiệm của các phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 + 11x + 7 = 0$; b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Giải

a) Ta có: $\Delta = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 65 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo định lí Viète, ta có:

$$x_1 + x_2 = -\frac{11}{2}; \quad x_1x_2 = \frac{7}{2}.$$

b) Ta có: $\Delta' = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm trùng nhau x_1, x_2.

Theo định lí Viète, ta có:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-12}{4} = 3; \quad x_1x_2 = \frac{9}{4}.$$

Luyện tập 1

Không giải phương trình, hãy tính biệt thức Δ (hoặc Δ') để kiểm tra điều kiện có nghiệm, rồi tính tổng và tích các nghiệm của các phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$;

b) $25x^2 - 20x + 4 = 0$;

c) $2\sqrt{2}x^2 - 4 = 0$.

Tranh luận

Không cần giải, tớ biết ngay tổng và tích hai nghiệm của phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ đều bằng 1.

Ý kiến của em thế nào?

2 ÁP DỤNG ĐỊNH LÍ VIÈTE ĐỂ TÍNH NHẨM NGHIỆM

Giải phương trình bậc hai khi biết một nghiệm của nó

HĐ3 Cho phương trình $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

a) Xác định các hệ số a, b, c rồi tính $a + b + c$.

b) Chứng tỏ rằng $x_1 = 1$ là một nghiệm của phương trình.

c) Dùng định lí Viète để tìm nghiệm còn lại x_2 của phương trình.

HĐ4 Cho phương trình $3x^2 + 5x + 2 = 0$.

a) Xác định các hệ số a, b, c rồi tính $a - b + c$.

b) Chứng tỏ rằng $x_1 = -1$ là một nghiệm của phương trình.

c) Dùng định lí Viète để tìm nghiệm còn lại x_2 của phương trình.

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = \frac{c}{a}$.
- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là

$$x_2 = -\frac{c}{a}.$$

Ví dụ 2 Bằng cách nhẩm nghiệm, hãy giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$; b) $5x^2 + 14x + 9 = 0$.

Giải

a) Ta có: $a + b + c = 1 + (-6) + 5 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

b) Ta có: $a - b + c = 5 - 14 + 9 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{9}{5}$.

Ví dụ 3 Giải phương trình $x^2 - 7x + 12 = 0$, biết phương trình có một nghiệm là $x_1 = 3$.

Giải

Gọi x_2 là nghiệm còn lại của phương trình. Theo định lí Viète, ta có: $x_1x_2 = 12$.

Do đó, $x_2 = \frac{12}{x_1} = \frac{12}{3} = 4$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Luyện tập 2 Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $3x^2 - 11x + 8 = 0$;

b) $4x^2 + 15x + 11 = 0$;

c) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0$, biết phương trình có một nghiệm là $x = -\sqrt{2}$.

Thử thách nhỏ

Hãy tìm một phương trình bậc hai mà tổng và tích các nghiệm của phương trình là hai số đối nhau.

Tớ tìm ra rồi! Đó là phương trình $x^2 + x + 1 = 0$.

Em có đồng ý với ý kiến của Tròn không? Vì sao?

3 TÌM HAI SỐ KHI BIẾT TỔNG VÀ TÍCH CỦA CHÚNG

Thiết lập phương trình bậc hai để tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

HĐ5 Giả sử hai số có tổng $S = 5$ và tích $P = 6$. Thực hiện các bước sau để lập phương trình bậc hai nhận hai số đó làm nghiệm.

a) Gọi một số là x. Tính số kia theo x.

b) Sử dụng kết quả câu a và giả thiết, hãy lập phương trình để tìm x.

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

Ví dụ 4

Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 9, tích của chúng bằng 20.

Giải

Hai số cần tìm là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 9x + 20 = 0$.

Ta có: $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 1$; $\sqrt{\Delta} = 1$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \dfrac{9-1}{2} = 4$; $x_2 = \dfrac{9+1}{2} = 5$.

Vậy hai số cần tìm là 4 và 5.

Luyện tập 3

Tìm hai số biết tổng của chúng bằng -11, tích của chúng bằng 28.

Vận dụng

Giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

BÀI TẬP

6.23. Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm (nếu có) của các phương trình sau:

a) $x^2 - 12x + 8 = 0$; b) $2x^2 + 11x - 5 = 0$;

c) $3x^2 - 10 = 0$; d) $x^2 - x + 3 = 0$.

6.24. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x^2 - 9x + 7 = 0$; b) $3x^2 + 11x + 8 = 0$;

c) $7x^2 - 15x + 2 = 0$, biết phương trình có một nghiệm $x_1 = 2$.

6.25. Tìm hai số u và v, biết:

a) $u + v = 20$, $uv = 99$; b) $u + v = 2$, $uv = 15$.

6.26. Chứng tỏ rằng nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 thì đa thức $ax^2 + bx + c$ phân tích được thành nhân tử như sau:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Áp dụng: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 + 11x + 18$; b) $3x^2 + 5x - 2$.

6.27. Một bể bơi hình chữ nhật có diện tích 500 m^2 và chu vi là 150 m. Tính các kích thước của bể bơi này.

Bài 21 GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
Giải toán bằng cách lập phương trình	Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với phương trình bậc hai một ẩn.

Bác Lan gửi tiết kiệm 100 triệu đồng vào ngân hàng với kì hạn 12 tháng theo thể thức lãi kép. Sau năm thứ nhất, do chưa có nhu cầu sử dụng nên bác Lan không rút tiền ra mà tiếp tục gửi 12 tháng nữa, với lãi suất như cũ. Sau hai năm bác Lan rút tiền ra thì nhận được 118,81 triệu đồng cả vốn lẫn lãi. Hỏi lãi suất gửi tiết kiệm là bao nhiêu?

Giải toán bằng cách lập phương trình

Xét bài toán ở *tình huống mở đầu.*

HĐ1 Gọi x là lãi suất gửi tiết kiệm của bác Lan (x được cho dưới dạng số thập phân). Hãy biểu thị số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác Lan sau kì gửi thứ nhất theo x.

HĐ2 Hết kì gửi thứ nhất, bác Lan không rút tiền ra mà tiếp tục gửi tiết kiệm kì thứ hai với lãi suất như cũ. Hãy biểu thị số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác Lan sau kì gửi thứ hai theo x.

HĐ3 Dựa vào đề bài, viết phương trình ẩn x thu được và giải phương trình này để tìm x. Từ đó, trả lời câu hỏi trong *tình huống mở đầu.*

Nhận xét. Các bước giải một bài toán bằng cách lập phương trình:

Bước 1. Lập phương trình:

– Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.

– Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

Ví dụ 1

Một sân bóng đá 7 người có chiều rộng nhỏ hơn chiều dài 30 m và có diện tích bằng 1 800 m^2. Tính chiều dài và chiều rộng của sân bóng đó.

Giải

Gọi x (m) là chiều rộng của sân bóng. Điều kiện: $x > 0$.

Khi đó, chiều dài của sân bóng là $x + 30$ (m).

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$x(x + 30) = 1\,800 \text{ hay } x^2 + 30x - 1\,800 = 0.$$

Ta có: $\Delta' = 15^2 + 1\,800 = 2\,025$, $\sqrt{\Delta'} = 45$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-15 - 45}{1} = -60 \text{ (loại)}; \; x_2 = \frac{-15 + 45}{1} = 30 \text{ (thoả mãn điều kiện).}$$

Vậy sân bóng có chiều dài 60 m và chiều rộng 30 m.

Ví dụ 2

Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 36 km. Một tàu du lịch đi từ bến A đến bến B, nghỉ 30 phút ở bến B rồi quay lại bến A. Thời gian kể từ lúc khởi hành đến khi về đến bến A là 5,5 giờ. Hãy tìm vận tốc thực của tàu du lịch (tức là vận tốc của tàu khi nước yên lặng), biết rằng vận tốc của dòng nước là 3 km/h.

Giải

Gọi x (km/h) là vận tốc thực của tàu du lịch. Vì vận tốc của dòng nước là 3 km/h nên phải có điều kiện $x > 3$ để tàu có thể chạy ngược dòng.

Vận tốc của tàu khi xuôi dòng là $x + 3$ (km/h), thời gian để tàu đi xuôi dòng là $\frac{36}{x+3}$ (giờ).

Vận tốc của tàu khi ngược dòng là $x - 3$ (km/h), thời gian để tàu đi ngược dòng là $\frac{36}{x-3}$ (giờ).

Thời gian tàu nghỉ tại bến B là 30 phút = 0,5 giờ.

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$\frac{36}{x+3} + 0,5 + \frac{36}{x-3} = 5,5 \text{ hay } \frac{36}{x+3} + \frac{36}{x-3} = 5.$$

Để giải phương trình này, ta quy đồng mẫu vế trái của phương trình:

$$\frac{36(x-3) + 36(x+3)}{(x+3)(x-3)} = 5.$$

Nhân cả hai vế của phương trình với $(x + 3)(x - 3)$ để khử mẫu, ta được phương trình bậc hai

$$36(x-3) + 36(x+3) = 5(x+3)(x-3), \text{ hay } 5x^2 - 72x - 45 = 0.$$

Ta có: $\Delta' = 36^2 - 5 \cdot (-45) = 1\,521$; $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{1\,521} = 39$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{36 - 39}{5} = \frac{-3}{5} \text{ (loại)}; \; x_2 = \frac{36 + 39}{5} = 15 \text{ (thoả mãn điều kiện).}$$

Vậy vận tốc thực của tàu du lịch là 15 km/h.

Luyện tập

Một đội xe gồm các xe tải cùng loại, cần phải chở 120 tấn hàng. Tuy nhiên khi làm việc, có hai xe phải điều chuyển đi nơi khác nên mỗi xe phải chở thêm 3 tấn hàng. Hỏi đội xe đó có bao nhiêu chiếc xe tải?

BÀI TẬP

6.28. Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 360 m^2. Nếu tăng chiều rộng 3 m và giảm chiều dài 4 m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tìm các kích thước của mảnh đất đó.

6.29. Sau hai năm, số dân của một thành phố tăng từ 1 200 000 người lên 1 452 000 người. Hỏi trung bình mỗi năm dân số của thành phố đó tăng bao nhiêu phần trăm?

6.30. Một thanh sô cô la có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 12 cm, chiều rộng 7 cm và độ dày 3 cm. Do giá nguyên liệu ca cao tăng nhưng vẫn muốn giữ nguyên giá bán nên nhà sản xuất quyết định giảm 10% thể tích của mỗi thanh sô cô la. Để thực hiện việc này, nhà sản xuất dự định làm thanh sô cô la mới có cùng độ dày 3 cm như thanh cũ, nhưng chiều dài và chiều rộng sẽ giảm đi cùng một số centimét. Hỏi kích thước của thanh sô cô la mới là bao nhiêu?

6.31. Một máy bay khởi hành từ Hà Nội vào Thành phố Hồ Chí Minh, sau đó nghỉ 96 phút và tiếp tục bay về Hà Nội với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 100 km/h. Tổng thời gian của cả hành trình, kể từ khi xuất phát từ Hà Nội đến khi quay về Hà Nội là 6 giờ. Tính vận tốc của máy bay lúc đi, biết quãng đường bay Hà Nội – Thành phố Hồ Chí Minh dài khoảng 1 200 km.

6.32. Một ô tô khách khởi hành từ Hà Nội đi Hải Phòng. Sau đó 30 phút, một ô tô con xuất phát từ cùng địa điểm ở Hà Nội và cũng đi về Hải Phòng trên cùng tuyến đường, với vận tốc lớn hơn vận tốc của ô tô khách là 20 km/h. Hai xe đến cùng một địa điểm ở Hải Phòng tại cùng một thời điểm. Hãy tính vận tốc của mỗi ô tô, biết rằng quãng đường Hà Nội – Hải Phòng dài khoảng 120 km.

6.33. Một xưởng may phải may 1 500 chiếc áo trong thời gian quy định. Để hoàn thành sớm kế hoạch, mỗi ngày xưởng đã may được nhiều hơn 10 chiếc áo so với số áo phải may trong một ngày theo kế hoạch. Do đó, ba ngày trước khi hết thời hạn, xưởng đã may được 1 320 áo. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng đó phải may xong bao nhiêu chiếc áo?

LUYỆN TẬP CHUNG

Ví dụ 1

Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 7x + 5 = 0$.

a) Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Tính $A = x_1^2 + x_2^2$.

Giải

a) Ta có: $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 5 = 29 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 7$, $x_1x_2 = 5$.

Do đó $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7^2 - 2 \cdot 5 = 39$.

Ví dụ 2

Có hai miếng kim loại: miếng thứ nhất nặng 600 g; miếng thứ hai nặng 640 g. Thể tích của miếng thứ nhất lớn hơn thể tích của miếng thứ hai là 120 cm^3, nhưng khối lượng riêng của miếng thứ nhất nhỏ hơn khối lượng riêng của miếng thứ hai là 5 g/cm^3. Tìm khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại.

Giải

Gọi x (g/cm^3) là khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất. Điều kiện: $x > 0$.

Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là $x + 5$ (g/cm^3).

Thể tích của miếng kim loại thứ nhất là $\dfrac{600}{x}$ (cm^3).

Thể tích của miếng kim loại thứ hai là $\dfrac{640}{x+5}$ (cm^3).

Theo đề bài, ta có phương trình: $\dfrac{600}{x} - \dfrac{640}{x+5} = 120$.

Nhân cả hai vế của phương trình với $x(x+5)$ để khử mẫu, ta được:

$$600(x+5) - 640x = 120x(x+5), \text{ hay } 3x^2 + 16x - 75 = 0.$$

Ta có: $\Delta' = 8^2 - 3 \cdot (-75) = 289$; $\sqrt{\Delta'} = 17$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-8-17}{3} = \frac{-25}{3} \text{ (loại)}; \; x_2 = \frac{-8+17}{3} = 3 \text{ (thoả mãn điều kiện)}.$$

Vậy khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất là 3 g/cm^3 và khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là 8 g/cm^3.

BÀI TẬP

6.34. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $\sqrt{2}x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+1=0$;

b) $2x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x-3+\sqrt{3}=0$.

6.35. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2-5x+3=0$. Không giải phương trình, hãy tính:

a) $x_1^2+x_2^2$;

b) $(x_1-x_2)^2$.

6.36. Tìm hai số u và v, biết:

a) $u+v=15$, $uv=56$;

b) $u^2+v^2=125$, $uv=22$.

6.37. Một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật, không có nắp, có đáy là hình vuông, tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là 800 cm^2. Chiều cao của hộp là 10 cm. Tính độ dài cạnh đáy của chiếc hộp (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm).

6.38. Nhu cầu của khách hàng đối với một loại áo phông tại một cửa hàng được cho bởi phương trình $p=100-0{,}02x$, trong đó p là giá tiền của mỗi chiếc áo (nghìn đồng) và x là số lượng áo phông bán được. Doanh thu R (nghìn đồng) khi bán được x chiếc áo phông là:

$$R=xp=x(100-0{,}02x).$$

Hỏi cần phải bán được bao nhiêu chiếc áo phông để doanh thu đạt 120 triệu đồng?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

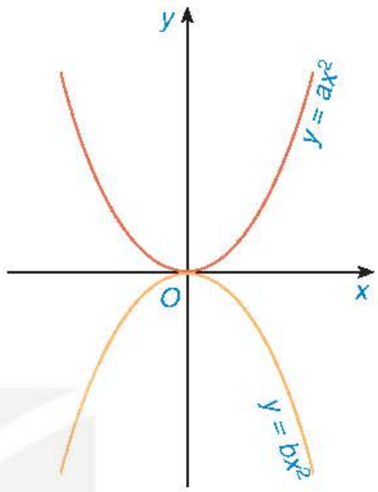
A. TRẮC NGHIỆM

6.39. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$?

A. (1; 2). B. (2; 1).

C. (−1; 2). D. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

6.40. Hình 6.11 là hai đường parabol trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*. Khẳng định nào sau đây là đúng?



Hình 6.11

A. $a < 0 < b$. B. $a < b < 0$.

C. $a > b > 0$. D. $a > 0 > b$.

6.41. Các nghiệm của phương trình $x^2 + 7x + 12 = 0$ là

A. $x_1 = 3$; $x_2 = 4$. B. $x_1 = -3$; $x_2 = -4$.

C. $x_1 = 3$; $x_2 = -4$. D. $x_1 = -3$; $x_2 = 4$.

6.42. Phương trình bậc hai có hai nghiệm $x_1 = 13$ và $x_2 = 25$ là

A. $x^2 - 13x + 25 = 0$. B. $x^2 - 25x + 13 = 0$.

C. $x^2 - 38x + 325 = 0$. D. $x^2 + 38x + 325 = 0$.

6.43. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$. Khi đó, giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ là

A. 13. B. 19.

C. 25. D. 5.

6.44. Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật có chu vi 20 cm và diện tích 24 cm² là

A. 5 cm và 4 cm. B. 6 cm và 4 cm.

C. 8 cm và 3 cm. D. 10 cm và 2 cm.

B. TỰ LUẬN

6.45. Vẽ đồ thị của các hàm số $y = \frac{5}{2}x^2$ và $y = -\frac{5}{2}x^2$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

6.46. Cho hàm số $y = ax^2$. Xác định hệ số a, biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(3; 3)$. Vẽ đồ thị của hàm số trong trường hợp đó.

6.47. Giải các phương trình sau:

a) $5x^2 - 6\sqrt{5}x + 2 = 0$;

b) $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = 0$.

6.48. Cho phương trình $x^2 - 11x + 30 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính:

a) $x_1^2 + x_2^2$; b) $x_1^3 + x_2^3$.

6.49. Tìm hai số u và v, biết:

a) $u + v = 13$ và $uv = 40$; b) $u - v = 4$ và $uv = 77$.

6.50. Các kĩ sư đảm bảo an toàn của đường cao tốc thường sử dụng công thức $d = 0{,}05v^2 + 1{,}1v$ để ước tính khoảng cách an toàn tối thiểu d (feet) (tức là độ dài quãng đường mà xe đi được kể từ khi đạp phanh đến khi xe dừng lại) đối với một phương tiện di chuyển với tốc độ v (dặm/giờ) (theo *Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008*). Giả sử giới hạn tốc độ trên một đường cao tốc nào đó là 70 dặm/giờ. Nếu một ô tô có thể dừng lại sau 300 feet kể từ khi đạp phanh thì ô tô đó có chạy nhanh hơn giới hạn tốc độ của đường cao tốc này không?

6.51. Bác Hương gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 12 tháng. Sau một năm, do chưa có nhu cầu sử dụng nên bác chưa rút sổ tiết kiệm này ra mà gửi tiếp và gửi thêm một sổ tiết kiệm mới với số tiền 50 triệu đồng, cũng với kì hạn 12 tháng. Sau hai năm (kể từ khi gửi lần đầu), bác Hương nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là 176 triệu đồng. Tính lãi suất năm của hình thức gửi tiết kiệm này (giả sử lãi suất không đổi trong suốt quá trình gửi).

6.52. Hai khối học sinh lớp 8 và lớp 9 của một trường trung học cơ sở tham gia lao động. Nếu làm chung thì sẽ hoàn thành công việc sau 1 giờ 12 phút. Nếu mỗi khối lớp làm riêng thì khối lớp 9 làm xong nhanh hơn khối lớp 8 là 1 giờ. Hỏi nếu mỗi khối lớp làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?

Chương VII
TẦN SỐ VÀ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

THỐNG KÊ

"Bạn có thể có dữ liệu không chứa thông tin nhưng bạn không thể có thông tin nếu thiếu dữ liệu."

Daniel Keys Moran,
Nhà viết truyện khoa học viễn tưởng người Mỹ.

Bài 22 BẢNG TẦN SỐ VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Tần số • Bảng tần số • Biểu đồ tần số	• Thiết lập bảng tần số, biểu đồ tần số. • Giải thích ý nghĩa và vai trò của tần số trong thực tiễn.

Với dãy dữ liệu x_1, x_2,..., x_n có nhiều giá trị giống nhau thì có cách nào biểu diễn dãy dữ liệu này thuận tiện hơn không? Chúng ta sẽ tìm hiểu vấn đề này trong bài học.

1 BẢNG TẦN SỐ

Tần số và bảng tần số

HĐ1 Bạn Minh muốn tìm hiểu về dự định của các bạn học sinh khối lớp 9 trong trường sau khi tốt nghiệp Trung học cơ sở. Em hãy giúp bạn Minh thực hiện khảo sát ý kiến của các bạn trong lớp mình theo mẫu phiếu bên.

Dự định của bạn sau khi học xong lớp 9?
(Chỉ chọn một lựa chọn)

A. Học trung học phổ thông trong nước.
B. Đi du học.
C. Đi học nghề.
D. Lựa chọn khác.

a) Bạn Minh muốn khảo sát ý kiến của những ai? Em đã giúp bạn Minh khảo sát ý kiến của tất cả những người đó?

b) Liệt kê dãy dữ liệu thu được và đếm số học sinh theo mỗi lựa chọn.

Nhận xét. Dữ liệu mà bạn Minh muốn có là dữ liệu về ý kiến của tất cả học sinh khối lớp 9 trong trường. Dãy dữ liệu mà em thu được trong khảo sát trên là một phần của dữ liệu bạn Minh muốn có và được gọi là *mẫu dữ liệu*. Số giá trị của mẫu dữ liệu được gọi là *cỡ mẫu*.

• Tần số của một giá trị là số lần xuất hiện giá trị đó trong mẫu dữ liệu.

• Bảng tần số là bảng thống kê cho biết tần số của các giá trị trong mẫu dữ liệu. Bảng tần số có dạng sau:

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	m_1	m_2	...	m_k

trong đó m_1 là tần số của x_1, m_2 là tần số của x_2,..., m_k là tần số của x_k.

Lập bảng tần số cho mẫu dữ liệu thu được trong HĐ1.

Chú ý. Người ta còn cho bảng tần số ở dạng cột: cột thứ nhất ghi các giá trị, cột thứ hai ghi tần số của các giá trị đó.

Ví dụ 1

Để mua giày thể thao cho các bạn nam trong lớp luyện tập chuẩn bị cho giải bóng đá của trường, Huy đã thu thập cỡ giày của các bạn nam trong lớp và thu được kết quả như sau:

40, 36, 37, 36, 40, 38, 39, 38, 37, 36, 40, 39, 36, 38, 37, 38, 38, 37, 38, 38, 38, 36.

a) Bạn Huy cần mua giày các cỡ nào? Mỗi loại bao nhiêu đôi?

b) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên. Từ bảng tần số, cho biết cỡ giày nào phù hợp với nhiều bạn nam trong lớp nhất.

Giải

a) Bạn Huy cần mua giày với các cỡ 36, 37, 38, 39, 40. Giày cỡ 36 cần 5 đôi; cỡ 37 cần 4 đôi; cỡ 38 cần 8 đôi; cỡ 39 cần 2 đôi; cỡ 40 cần 3 đôi.

b) Bảng tần số:

Cỡ giày	36	37	38	39	40
Tần số	5	4	8	2	3

Giày cỡ 38 phù hợp với nhiều bạn nam trong lớp nhất.

Luyện tập 1

Bảng sau đây ghi lại tên các bạn đạt điểm tốt vào các ngày trong tuần của lớp 9E, mỗi điểm tốt ghi tên một lần.

Ngày	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu
Tên bạn đạt điểm tốt	Bình Nam	Tuấn Thảo	Bình	Yến Nam	Nam Thảo

a) Trong tuần những bạn nào đạt điểm tốt? Mỗi bạn đạt được mấy điểm tốt?

b) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu này. Bạn nào có số lần đạt điểm tốt nhiều nhất?

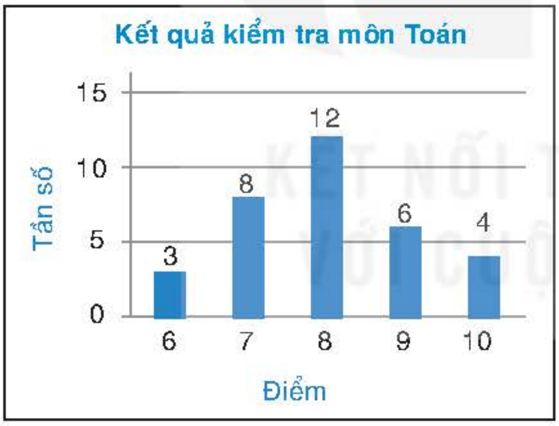
Nhận xét. Trong bảng tần số, ta chỉ liệt kê các giá trị x_i khác nhau. Các giá trị x_i này có thể không là số.

Tần số của một giá trị cho biết giá trị đó xuất hiện trong mẫu dữ liệu nhiều hay ít, từ đó ta dễ dàng xác định được giá trị xuất hiện nhiều nhất, ít nhất.

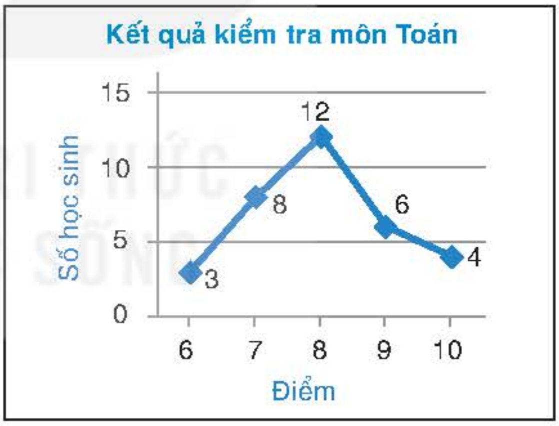
2 BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

Tìm hiểu về biểu đồ tần số

HĐ2 Cho hai biểu đồ sau:



Hình 7.1. Biểu đồ A



Hình 7.2. Biểu đồ B

a) Đọc và giải thích mỗi biểu đồ trên.

b) Hai biểu đồ trên có biểu diễn cùng một dữ liệu không? Lập bảng thống kê cho dữ liệu đó. Bảng thống kê thu được có phải là bảng tần số hay không?

Biểu đồ biểu diễn bảng tần số được gọi là biểu đồ tần số. Biểu đồ tần số thường gặp là biểu đồ tần số dạng cột (H.7.1) và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng (H.7.2).

Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng còn gọi là đa giác tần số (frequency polygon).

Nhận xét. Để vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ trục ngang để biểu diễn các giá trị trong dãy dữ liệu, vẽ trục đứng thể hiện tần số.

Bước 2. Với mỗi giá trị trên trục ngang và tần số tương ứng ta xác định một điểm. Nối các điểm liên tiếp với nhau.

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ.

Ví dụ 2

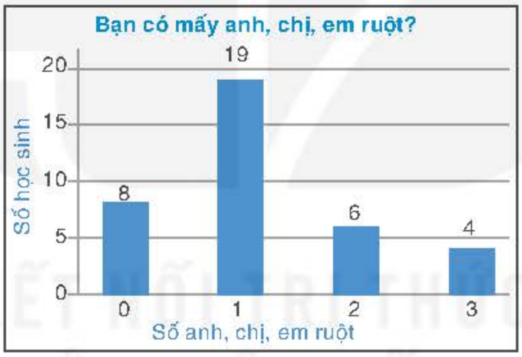
Bạn Bình thống kê số anh, chị, em ruột của các bạn trong lớp và thu được bảng sau:

Số anh, chị, em ruột	0	1	2	3
Số bạn	8	19	6	4

Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng thống kê trên.

Giải

• Vẽ biểu đồ tần số dạng cột (H.7.3).



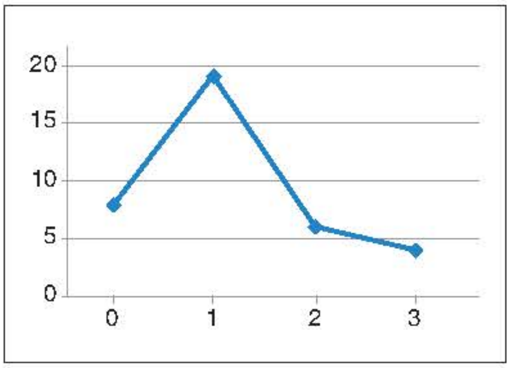
Hình 7.3

• Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng.

Bước 1. Vẽ các trục (H.7.4).

Bước 2. Xác định các điểm và nối các điểm liên tiếp với nhau (H.7.4).

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ (H.7.5).



Hình 7.4

Hình 7.5

Luyện tập 2

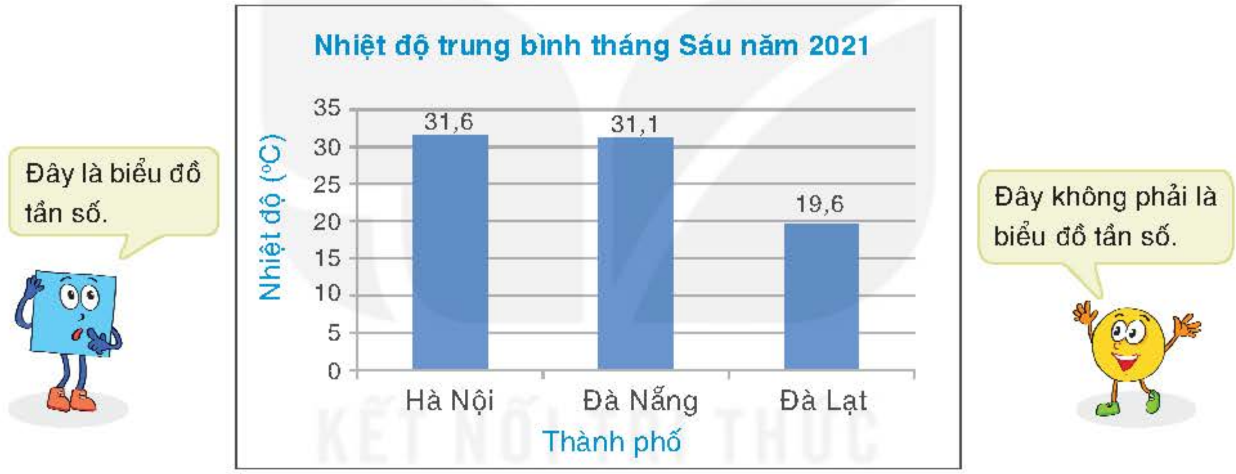
Bảng tần số sau cho biết số học sinh của lớp 9D dự đoán đội bóng vô địch World Cup 2022 trước khi giải đấu bắt đầu.

Đội bóng	Brazil	Anh	Pháp	Argentina
Số bạn dự đoán	8	15	12	5

Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng tần số trên.

Tranh luận

Biểu đồ cột sau biểu diễn nhiệt độ trung bình tháng Sáu tại ba thành phố của Việt Nam năm 2021.



Hình 7.6 (Theo *Tổng cục Thống kê*)

Em ủng hộ Vuông hay Tròn? Vì sao?

BÀI TẬP

7.1. Một nhóm học sinh đã khảo sát ý kiến về ý thức giữ gìn vệ sinh công cộng của các bạn trong trường với các mức đánh giá Tốt, Khá, Trung bình, Kém và thu được kết quả như sau:

Tốt, Trung bình, Tốt, Trung bình, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Tốt, Khá, Trung bình, Kém, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Trung bình, Khá, Tốt, Tốt, Tốt, Khá, Kém, Trung bình, Tốt, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Khá, Khá.

a) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên.

b) Từ bảng tần số, hãy cho biết mức đánh giá nào chiếm ưu thế nhất. Vì sao?

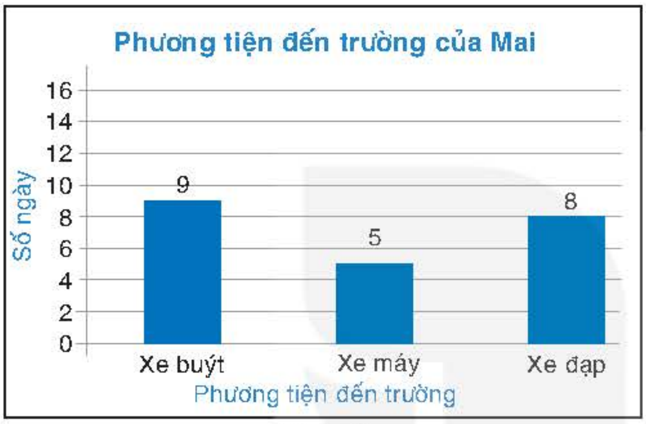
7.2. Cho biểu đồ tranh biểu diễn số lượng học sinh trong lớp đăng kí tham gia các câu lạc bộ của trường như sau:

Câu lạc bộ võ thuật	Câu lạc bộ tiếng Anh	Câu lạc bộ nghệ thuật
		

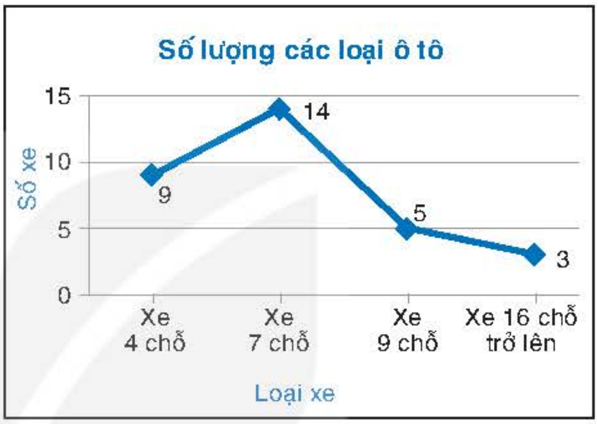
(*Mỗi*  *biểu diễn cho 1 học sinh*)

Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trong biểu đồ tranh trên.

7.3. Biểu đồ Hình 7.7 cho biết số ngày sử dụng phương tiện đến trường của bạn Mai trong tháng Chín. Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.



Hình 7.7



Hình 7.8

7.4. Người ta thống kê các loại ô tô chạy qua một trạm thu phí trong 1 giờ và vẽ được biểu đồ tần số như Hình 7.8.

a) Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Từ bảng tần số, hãy cho biết loại xe nào đi qua trạm thu phí nhiều nhất.

7.5. Bảng thống kê sau cho biết số lượng các thiên tai xảy ra tại Việt Nam giai đoạn 1990 – 2021.

Loại thiên tai	Hạn hán	Bệnh dịch	Lũ lụt	Sạt lở đất	Bão
Số lượng	6	9	71	6	94

(Theo *vietnam.opendevelopmentmekong.net*)

Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng thống kê trên.

Bài 23 BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Tần số tương đối • Bảng tần số tương đối	• Thiết lập bảng tần số tương đối, biểu đồ tần số tương đối. • Giải thích ý nghĩa và vai trò của tần số tương đối trong thực tiễn.

Ở bài trước chúng ta đã được học các cách biểu diễn dãy dữ liệu để dễ dàng thấy được tần số xuất hiện của mỗi giá trị trong dãy. Trong bài này, chúng ta sẽ tìm hiểu các cách biểu diễn dãy dữ liệu để dễ dàng thấy được tỉ lệ xuất hiện của các giá trị trong dãy.

1 BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

Tần số tương đối và bảng tần số tương đối

HĐ1 Có một túi kín đựng 10 quả bóng, mỗi quả có một trong các màu xanh, đỏ hoặc vàng. Thực hiện 30 lần lấy bóng, mỗi lần lấy 1 quả, ghi lại màu quả bóng được lấy ra sau đó trả lại bóng vào túi và trộn đều.

a) Từ dữ liệu ghi lại, cho biết tần số xuất hiện của các quả bóng màu xanh, đỏ, vàng. Lập tỉ số giữa tần số và số lần lấy bóng.

b) Đoán xem trong túi số lượng bóng có màu gì là ít nhất, nhiều nhất.

Cho dãy dữ liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tần số tương đối f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số của x_i (gọi là m_i) với n.

Bảng sau đây được gọi là bảng tần số tương đối.

Giá trị	x_1	...	x_k
Tần số tương đối	f_1	...	f_k

trong đó $n = m_1 + \ldots + m_k$ và $f_1 = \dfrac{m_1}{n} \cdot 100(\%)$ là tần số tương đối của x_1,..., $f_k = \dfrac{m_k}{n} \cdot 100(\%)$ là tần số tương đối của x_k.

Tần số tương đối còn gọi là tần suất.

? Lập bảng tần số tương đối cho dãy dữ liệu thu được trong HĐ1.

Chú ý. Người ta còn cho bảng tần số tương đối ở dạng cột: cột thứ nhất ghi các giá trị, cột thứ hai ghi tần số tương đối của các giá trị đó.

Ví dụ 1 Thu thập dữ liệu về chất lượng không khí tại một địa điểm trong 30 ngày mùa xuân cho kết quả như sau:

M1, M1, M2, M2, M2, M2, M1, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2,

M4, M3, M3, M3, M3, M4, M4, M1, M1, M1, M1, M3, M3, M3, M1.

(M1: Tốt; M2: Trung bình; M3: Kém; M4: Xấu)

a) Lập bảng tần số tương đối cho dãy dữ liệu trên.

b) Trong một ngày xuân, khả năng cao nhất địa điểm này có chất lượng không khí ở mức nào?

Giải

a) Tổng số quan sát là $n = 30$. Số ngày có chất lượng không khí ở các mức M1, M2, M3, M4 tương ứng là $m_1 = 8$, $m_2 = 12$, $m_3 = 7$, $m_4 = 3$. Do đó các tần số tương đối cho các mức M1, M2, M3, M4 lần lượt là:

$$f_1 = \frac{8}{30} \approx 26{,}7\%;\ f_2 = \frac{12}{30} = 40\%;\ f_3 = \frac{7}{30} \approx 23{,}3\%;\ f_4 = \frac{3}{30} = 10\%.$$

Ta có bảng tần số tương đối sau:

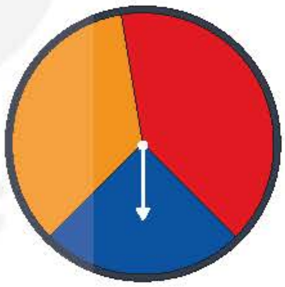
Chất lượng không khí	M1	M2	M3	M4
Tần số tương đối	26,7%	40%	23,3%	10%

b) Trong một ngày xuân, khả năng cao nhất là địa điểm này có chất lượng không khí ở mức M2, tức là mức Trung bình.

Nhận xét. Tần số tương đối của một giá trị là ước lượng cho xác suất xuất hiện giá trị đó.

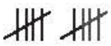
Luyện tập 1

Quay 50 lần một tấm bìa hình tròn được chia thành ba hình quạt với các màu xanh, đỏ, vàng. Quan sát và ghi lại mũi tên chỉ vào hình quạt có màu nào khi tấm bìa dừng lại. Kết quả thu được như sau:



Xanh: 

Đỏ: 

Vàng: 

a) Lập bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.

b) Ước lượng xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu đỏ.

2 BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

Tìm hiểu về biểu đồ tần số tương đối

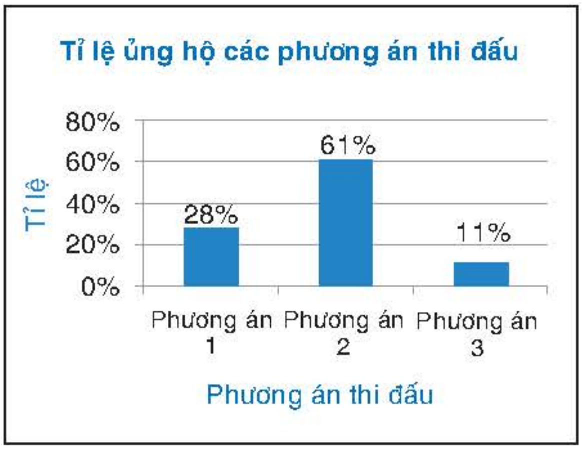
HĐ2 Có ba phương án thi đấu tại giải bóng đá khối lớp 9 của một trường như sau:

Phương án 1: Các đội đấu vòng tròn, tính điểm;

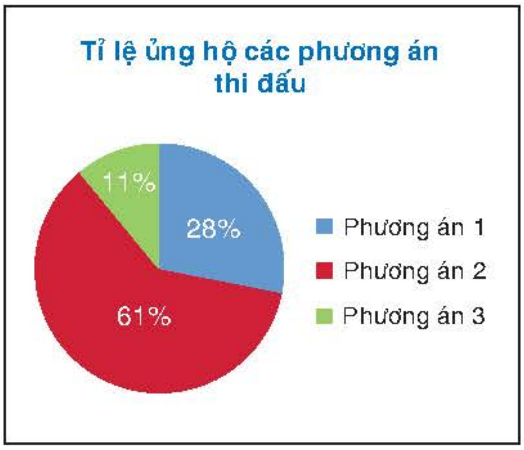
Phương án 2: Chia các đội thành hai bảng, mỗi bảng lấy hai đội vào trận bán kết;

Phương án 3: Các đội bốc thăm ghép cặp, đấu loại trực tiếp.

Ban tổ chức đã lấy phiếu khảo sát ý kiến. Kết quả được Bình và Nam biểu diễn bằng các biểu đồ như sau:



Hình 7.9. Biểu đồ cột



Hình 7.10. Biểu đồ hình quạt tròn

a) Đọc và giải thích mỗi biểu đồ trên.

b) Lập bảng tần số tương đối cho kết quả khảo sát ý kiến.

• Biểu đồ biểu diễn bảng tần số tương đối được gọi là biểu đồ tần số tương đối. Dạng thường gặp của biểu đồ tần số tương đối là biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn.

• Để vẽ biểu đồ hình quạt tròn ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt dùng để biểu diễn tần số tương đối của các giá trị theo công thức $360^o \cdot f_i$ với $i = 1, ..., k$.

Bước 2. Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt có số đo cung tương ứng được xác định trong Bước 1.

Bước 3. Định dạng các hình quạt tròn (thường bằng cách tô màu), ghi tần số tương đối, chú giải và tiêu đề.

Ví dụ 2

Cho bảng tần số tương đối về loại phim yêu thích của các học sinh trong lớp 9A như sau:

Loại phim	Hài	Khoa học viễn tưởng	Kinh dị
Tỉ lệ bạn yêu thích	50%	37,5%	12,5%

Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối trên.

Giải

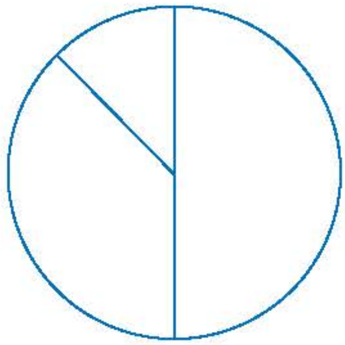
Bước 1. Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt biểu diễn các tần số tương đối cho mỗi loại phim:

Hài: $360^o \cdot 50\% = 180^o$;

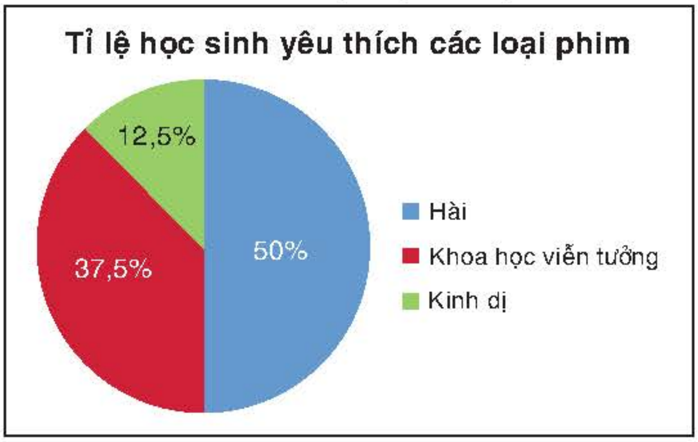
Khoa học viễn tưởng: $360^o \cdot 37,5\% = 135^o$;

Kinh dị: $360^o \cdot 12,5\% = 45^o$.

Bước 2. Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt (H.7.11).



Hình 7.11



Hình 7.12

Bước 3. Định dạng các hình quạt tròn, ghi tỉ lệ phần trăm, chú giải và tiêu đề (H.7.12).

Luyện tập 2

Bảng tần số tương đối sau cho biết tỉ lệ học sinh đánh giá độ khó của đề thi học kì môn Toán theo các mức độ.

Đánh giá	Rất khó	Khó	Trung bình	Dễ
Tỉ lệ	10%	25%	45%	20%

Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối này.

Tranh luận

Bạn Bình phát phiếu (H.7.13) lấy ý kiến bình chọn của 40 bạn trong lớp về địa điểm đi dã ngoại. Kết quả bạn Bình thu được như sau:

Địa điểm	Vườn quốc gia Ba Vì	Vườn quốc gia Cát Bà	Vườn quốc gia Cúc Phương
Tỉ lệ bạn bình chọn	70%	30%	50%

PHIẾU BÌNH CHỌN ĐỊA ĐIỂM ĐI DÃ NGOẠI

(Bạn có thể lựa chọn nhiều hơn 1 địa điểm)

A. Vườn quốc gia Ba Vì.

B. Vườn quốc gia Cát Bà.

C. Vườn quốc gia Cúc Phương.

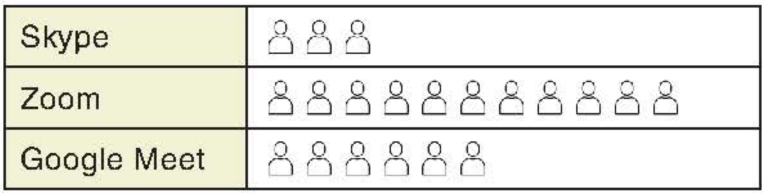
Hình 7.13

Ý kiến của bạn thế nào?

BÀI TẬP

7.6. Lớp 9A có 40 bạn, trong đó 20 bạn mặc áo cỡ M, 13 bạn mặc áo cỡ S, 7 bạn mặc áo cỡ L. Hãy lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu này.

7.7. Biểu đồ tranh sau đây biểu diễn số lượng học sinh lớp 9B bình chọn phần mềm học trực tuyến được yêu thích nhất:



(Mỗi biểu diễn cho 2 học sinh)

Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trong biểu đồ tranh trên.

7.8. Quay 150 lần một tấm bìa hình tròn được chia thành bốn hình quạt với các màu xanh, đỏ, tím, vàng. Quan sát mũi tên chỉ vào hình quạt màu gì và ghi lại, thu được kết quả sau:

Màu	Xanh	Đỏ	Tím	Vàng
Số lần	60	30	40	20

a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.

b) Ước lượng các xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu xanh, màu vàng.

c) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

7.9. Theo Tổng cục Thống kê, vào năm 2021 trong số 50,5 triệu lao động Việt Nam từ 15 tuổi trở lên có 13,9 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực nông nghiệp, lâm nghiệp và thuỷ sản; 16,9 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực công nghiệp và xây dựng; 19,7 triệu lao động đang làm việc trong lĩnh vực dịch vụ.

a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

c) Tính tỉ lệ lao động không làm việc trong lĩnh vực nông nghiệp, lâm nghiệp và thuỷ sản.

7.10. Bảng thống kê sau cho biết tỉ lệ tăng trưởng GDP năm 2022 theo khu vực kinh tế.

Khu vực kinh tế	Nông nghiệp, lâm nghiệp và thuỷ sản	Công nghiệp và xây dựng	Dịch vụ
Mức tăng trưởng	3,36%	7,78%	9,99%

(Theo *Tổng cục Thống kê*)

a) Bảng thống kê trên có là bảng tần số tương đối hay không?

b) Lựa chọn loại biểu đồ thích hợp và biểu diễn bảng thống kê trên bằng loại biểu đồ đó.

LUYỆN TẬP CHUNG

Ví dụ 1

Một vận động viên bắn 30 viên đạn vào bia với các điểm số thu được như sau:

10, 8, 9, 9, 10, 9, 9, 9, 8, 7, 10, 10, 9, 8, 7, 10, 9, 8, 7, 9, 9, 9, 10, 9, 10, 8, 9, 8, 8, 10.

a) Lập bảng tần số và tần số tương đối cho dãy dữ liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng cho bảng tần số thu được ở câu a.

Giải

a) Số lần vận động viên được 10, 9, 8, 7 điểm tương ứng là 8, 12, 7, 3. Ta có bảng tần số sau:

Điểm	10	9	8	7
Tần số	8	12	7	3

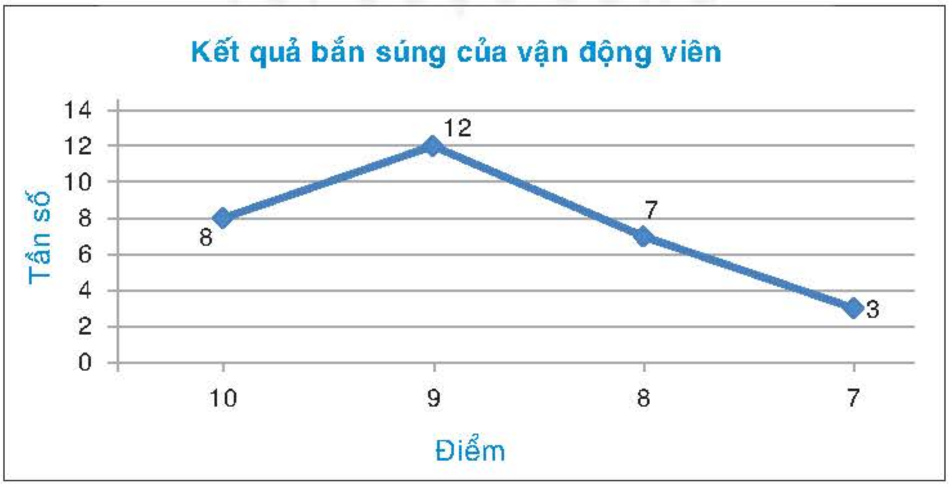
Tổng số lần bắn là $n = 30$.

Tỉ lệ được 10, 9, 8, 7 điểm tương ứng là $\frac{8}{30} \approx 26,7\%$; $\frac{12}{30} = 40\%$; $\frac{7}{30} \approx 23,3\%$; $\frac{3}{30} = 10\%$.

Ta có bảng tần số tương đối sau:

Điểm	10	9	8	7
Tần số tương đối	26,7%	40%	23,3%	10%

b) Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng (H.7.14).



Hình 7.14

Ví dụ 2 Bảng thống kê sau cho biết số lượt mượn các loại sách trong một tuần tại thư viện của một trường Trung học cơ sở.

Loại sách	Sách giáo khoa	Sách tham khảo	Truyện ngắn	Tiểu thuyết
Số lượt	20	80	70	30

a) Lập bảng tần số tương đối cho bảng thống kê trên.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

Giải

a) Tổng số lượt mượn sách là $20 + 80 + 70 + 30 = 200$.

Tỉ lệ lượt mượn sách giáo khoa, sách tham khảo, truyện ngắn, tiểu thuyết tương ứng là

$$\frac{20}{200} = 10\%;\quad \frac{80}{200} = 40\%;\quad \frac{70}{200} = 35\%;\quad \frac{30}{200} = 15\%.$$

Ta có bảng tần số tương đối như sau:

Loại sách	Sách giáo khoa	Sách tham khảo	Truyện ngắn	Tiểu thuyết
Tần số tương đối	10%	40%	35%	15%

b) Số đo cung tương ứng của các hình quạt biểu diễn tỉ lệ các loại sách được mượn là:

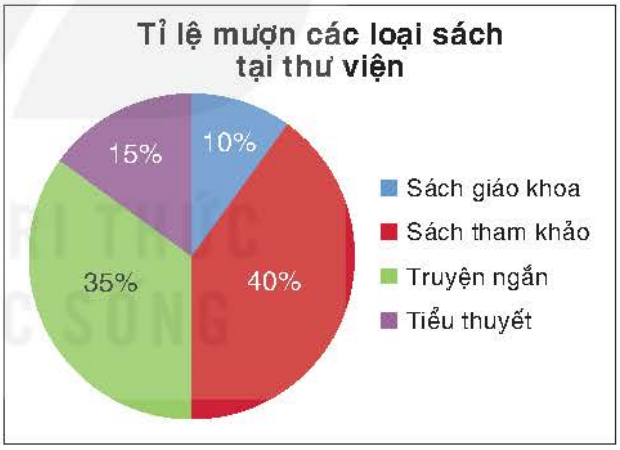
Sách giáo khoa: $360^\circ \cdot 10\% = 36^\circ$;

Sách tham khảo: $360^\circ \cdot 40\% = 144^\circ$;

Truyện ngắn: $360^\circ \cdot 35\% = 126^\circ$;

Tiểu thuyết: $360^\circ \cdot 15\% = 54^\circ$.

Biểu đồ hình quạt tròn như Hình 7.15.



Hình 7.15

BÀI TẬP

7.11. Bảng thống kê sau cho biết số lượng học sinh của lớp 9B theo mức độ cận thị.

Mức độ	Không cận thị	Cận thị nhẹ	Cận thị vừa	Cận thị nặng
Số học sinh	10	13	12	5

a) Lập bảng tần số tương đối cho bảng thống kê trên.

b) Đa số học sinh của lớp 9B cận thị hay không cận thị?

7.12. Tỉ lệ bình chọn các tiết mục văn nghệ của các lớp 9A, 9B, 9C, 9D tham gia hội diễn văn nghệ khối lớp 9 như sau:

Lớp	9A	9B	9C	9D
Tỉ lệ học sinh bình chọn	35%	25%	30%	10%

Biết rằng có 300 học sinh tham gia bình chọn. Lập bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn cho tiết mục văn nghệ của mỗi lớp.

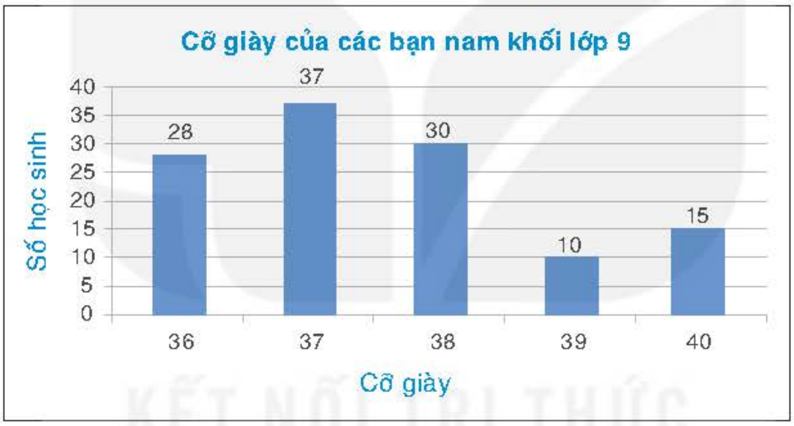
7.13. Bạn Hoàng khảo sát ý kiến của các bạn trong tổ về chất lượng phục vụ của căng tin trường thu được kết quả sau:

A, B, C, B, A, A, B, A, B, A,

trong đó A là mức Tốt, B là mức Trung bình, C là mức Kém.

Hãy lập bảng tần số và bảng tần số tương đối biểu diễn kết quả bạn Hoàng thu được.

7.14. Biểu đồ cột Hình 7.16 cho biết cỡ giày của các bạn nam khối lớp 9 trong trường.



Hình 7.16

Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

7.15. Cho bảng tần số sau:

Điểm thi môn Toán	6	7	8	9	10
Số học sinh	5	8	12	10	4

Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng cho bảng tần số trên.

7.16. Theo dõi thời tiết tại một điểm du lịch trong 30 ngày người ta thu được bảng sau:

Thời tiết	Không mưa	Mưa nhỏ	Mưa to
Số ngày	10	8	12

a) Lập bảng tần số tương đối và vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được.

b) Ước lượng xác suất để một ngày trời có mưa ở điểm du lịch này.

Bài 24 BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM VÀ BIỂU ĐỒ

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Bảng tần số ghép nhóm • Bảng tần số tương đối ghép nhóm • Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm	• Thiết lập bảng tần số ghép nhóm, bảng tần số tương đối ghép nhóm. • Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm.

Để tìm hiểu về thời gian tự học trong ngày của học sinh, giáo viên chủ nhiệm lớp 9C đã phát phiếu hỏi theo mẫu bên cho các bạn trong lớp.

Chúng ta biểu diễn dữ liệu thu được như thế nào? Hãy cũng tìm hiểu trong bài học này!

Mỗi tối trong tuần em dành bao nhiêu thời gian để tự học?

A. Từ 0 đến dưới 1 giờ.

B. Từ 1 đến dưới 2 giờ.

C. Từ 2 đến dưới 3 giờ.

D. Từ 3 đến dưới 4 giờ.

1 BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM

Tìm hiểu bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm

HĐ1 Giáo viên chủ nhiệm lớp 9C đã thu được kết quả như sau: Thời gian tự học dưới 1 giờ có 10 bạn; từ 1 giờ đến dưới 2 giờ có 15 bạn; từ 2 giờ đến dưới 3 giờ có 8 bạn; từ 3 giờ đến dưới 4 giờ có 7 bạn. Dựa vào dữ liệu trên, hãy hoàn thiện các bảng sau vào vở:

Thời gian (giờ)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)
Tần số	?	?	?	?

Bảng 7.1

Thời gian (giờ)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)
Tần số tương đối	?	?	?	?

Bảng 7.2

Nhóm số liệu $[a; b)$ là nhóm gồm các số liệu lớn hơn hoặc bằng a và nhỏ hơn b.

Bảng 7.1 được gọi là *bảng tần số ghép nhóm*, bảng 7.2 được gọi là *bảng tần số tương đối ghép nhóm*.

Trong nhiều trường hợp, ta khó biết giá trị chính xác của số liệu mà chỉ biết nó thuộc một nhóm số liệu nào đó. Nhóm số liệu thường gặp là $[a; b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.

Bảng tần số ghép nhóm là bảng tần số của các nhóm số liệu:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	m_2	...	m_k

Bảng 7.3. Bảng tần số ghép nhóm

Tần số m_i của nhóm $[a_i; a_{i+1})$ là số giá trị của mẫu số liệu lớn hơn hoặc bằng a_i và nhỏ hơn a_{i+1}.

Bảng tần số tương đối ghép nhóm là bảng tần số tương đối của các nhóm số liệu:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số tương đối	f_1	f_2	...	f_k

Bảng 7.4. Bảng tần số tương đối ghép nhóm

trong đó $n = m_1 + ... + m_k$ và

$f_1 = \dfrac{m_1}{n}.100(\%)$ là tần số tương đối của nhóm $[a_1; a_2)$,...,

$f_k = \dfrac{m_k}{n}.100(\%)$ là tần số tương đối của nhóm $[a_k; a_{k+1})$.

Ví dụ 1 Đo chiều cao (đơn vị là cm) của học sinh lớp 9C cho kết quả như sau:

156 157 164 166 166 165 157 154 155 158 160 163 163
161 162 159 159 160 160 160 159 158 160 160 158 163
162 162 162 161 162 161 163 161 163 161 164 166 165 165.

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm cho mẫu số liệu này với các nhóm [155; 158), [158; 161), [161; 164), [164; 167).

Giải. Số học sinh có chiều cao từ 150 cm đến dưới 158 cm là 5 học sinh; từ 158 cm đến dưới 161 cm là 12 học sinh; từ 161 đến dưới 164 cm là 15 học sinh; từ 164 đến dưới 167 cm là 8 học sinh. Do đó, tần số tương ứng với các nhóm là $m_1 = 5$, $m_2 = 12$, $m_3 = 15$, $m_4 = 8$. Ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Chiều cao (cm)	[150; 158)	[158; 161)	[161; 164)	[164; 167)
Số học sinh	5	12	15	8

Tổng số học sinh trong lớp là $n = 5 + 12 + 15 + 8 = 40$. Tỉ lệ học sinh có chiều cao từ 150 cm đến dưới 158 cm là $\dfrac{5}{40} = 12,5\%$; từ 158 cm đến dưới 161 cm là $\dfrac{12}{40} = 30\%$; từ 161 cm đến dưới 164 cm là $\dfrac{15}{40} = 37,5\%$; từ 164 cm đến dưới 167 cm là $\dfrac{8}{40} = 20\%$.

Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau:

Chiều cao (cm)	[150; 158)	[158; 161)	[161; 164)	[164; 167)
Tần số tương đối	12,5%	30%	37,5%	20%

Luyện tập 1 Cho bảng tần số ghép nhóm về tuổi thọ của một số ong mật cái như sau:

Tuổi thọ (ngày)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)
Tần số	12	23	15

a) Đọc và giải thích bảng thống kê trên.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê này.

Ví dụ 2 Chỉ số chất lượng không khí (AQI) cho biết tình trạng chất lượng không khí và mức độ ảnh hưởng đến sức khoẻ con người. Chất lượng không khí là *Tốt* nếu AQI từ 0 đến dưới 50; là *Trung bình* nếu AQI từ 50 đến dưới 100; là *Kém* nếu AQI từ 100 đến dưới 150; là *Xấu* nếu AQI từ 150 đến dưới 200. Chất lượng không khí tại Hà Nội từ ngày 4-2-2023 đến 5-3-2023 được cho như sau:

Trung bình, Trung bình, Trung bình, Trung bình, Trung bình,Trung bình,
Trung bình, Trung bình, Kém, Kém, Kém, Kém, Xấu, Xấu, Kém, Xấu,
Xấu, Xấu, Kém, Kém, Kém, Kém, Kém, Xấu, Kém, Xấu, Xấu, Xấu, Xấu, Xấu.

(Theo *iqair.com*)

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo chỉ số AQI cho dãy dữ liệu trên.

Giải. Có 8 ngày chất lượng không khí ở mức *Trung bình* tương ứng với chỉ số AQI từ 50 đến dưới 100; có 11 ngày chất lượng không khí ở mức *Kém* tương ứng với chỉ số AQI từ 100 đến dưới 150; có 11 ngày chất lượng không khí ở mức *Xấu* tương ứng với chỉ số AQI từ 150 đến dưới 200. Ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

Chỉ số AQI	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)
Tần số	8	11	11

Tỉ lệ ngày có chất lượng không khí ở mức *Trung bình* là $\frac{8}{30} \approx 26,6\%$; ở mức *Kém* là $\frac{11}{30} \approx 36,7\%$; ở mức *Xấu* là $\frac{11}{30} \approx 36,7\%$. Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Chỉ số AQI	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)
Tần số tương đối	26,6%	36,7%	36,7%

Luyện tập 2 Chỉ số phát triển con người (HDI) là chỉ tiêu tổng hợp phản ánh các mặt thu nhập, sức khoẻ, giáo dục của người dân trong một quốc gia. Các nước và vùng lãnh thổ trên thế giới được chia thành bốn nhóm theo HDI: Nhóm 1 (rất cao) có HDI từ 0,8 trở lên; Nhóm 2 (cao) có HDI từ 0,7 đến dưới 0,8; Nhóm 3 (trung bình) có HDI từ 0,55 đến dưới 0,7; Nhóm 4 (thấp) có HDI dưới 0,55. Năm 2021, chỉ số HDI của 11 quốc gia Đông Nam Á như sau:

0,939 0,829 0,803 0,8 0,705 0,703 0,699 0,607 0,607 0,593 0,585.

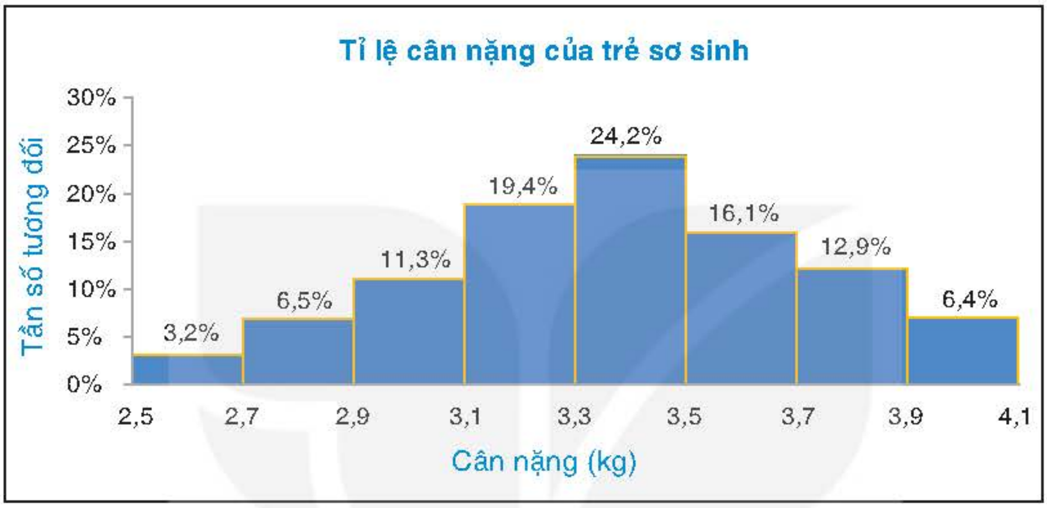
Dựa vào dữ liệu trên, hãy hoàn thành bảng tần số ghép nhóm sau:

Chỉ số HDI	[0; 0,55)	[0,55; 0,7)	[0,7; 0,8)	[0,8; 1,0)
Tần số	?	?	?	?

2 BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM DẠNG CỘT

Tìm hiểu về biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột

HĐ2 Biểu đồ Hình 7.17 cho biết tỉ lệ cân nặng của 62 trẻ sơ sinh tại một bệnh viện.



Hình 7.17

a) Đọc và giải thích số liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Lập bảng thống kê cho số liệu được biểu diễn trên biểu đồ. Bảng thống kê đó có phải là bảng tần số tương đối ghép nhóm không?

• Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột là biểu đồ gồm các cột liền nhau để biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm. Trong biểu đồ này, chiều cao mỗi cột biểu diễn tần số tương đối của nhóm số liệu.

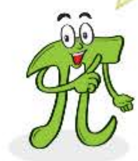
• Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm với các nhóm số liệu có độ dài bằng nhau ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ trục đứng, trục ngang. Trên trục đứng xác định đơn vị độ dài phù hợp với các tần số tương đối. Trên trục ngang xác định các nhóm số liệu cần biểu diễn.

Bước 2. Dựng các hình cột (kề nhau) ứng với các nhóm dữ liệu, mỗi hình cột có chiều cao bằng tần số tương đối của nhóm số liệu.

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các cột và tiêu đề cho biểu đồ.

Biểu đồ tần số tương đối (tần số) ghép nhóm dạng cột còn gọi là tổ chức đồ (histogram).



Chú ý. Trong biểu đồ trên, nếu chiều cao mỗi cột biểu diễn tần số của nhóm số liệu thì ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột.

Ví dụ 3

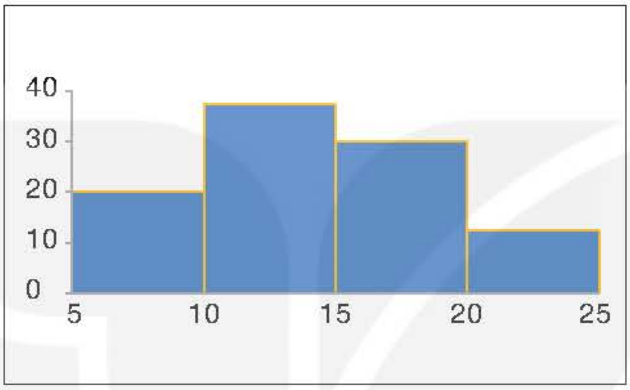
Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê sau về thời gian đi từ nhà tới trường của một số bạn trong lớp 9D.

Thời gian (phút)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)
Tần số tương đối	20%	37,5%	30%	12,5%

Giải

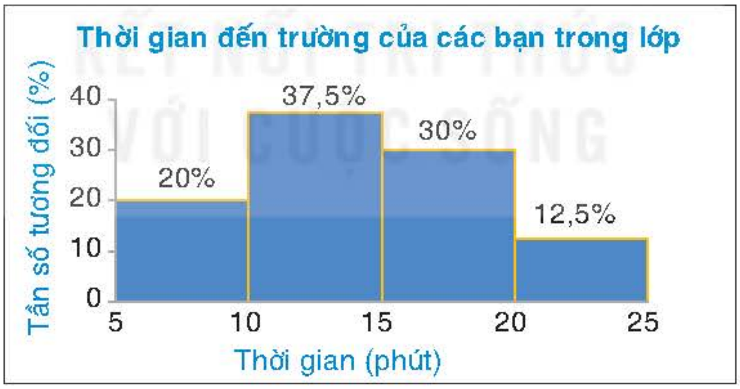
Bước 1. Vẽ các trục của biểu đồ, xác định đơn vị độ dài trên trục đứng, các nhóm trên trục ngang (H.7.18).

Bước 2. Dựng các hình cột kề nhau ứng với các nhóm số liệu (H.7.18).



Hình 7.18

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các cột và tiêu đề của biểu đồ (H.7.19).



Hình 7.19

Luyện tập 3

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng sau về chiều cao của một số cây chà là giống 3 tháng tuổi.

Chiều cao (cm)	[30; 34)	[34; 38)	[38; 42)	[42; 46)
Tần số tương đối	20%	35%	30%	15%

3 BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM DẠNG ĐOẠN THẲNG

Để biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm ta cũng có thể dùng biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng.

Cách vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Chọn giá trị $x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$ đại diện cho nhóm số liệu $[a_i; a_{i+1})$ với $i = 1, 2, ..., k$.

Bước 2. Vẽ trục ngang để biểu diễn các giá trị đại diện cho các nhóm số liệu, vẽ trục đứng thể hiện tần số tương đối.

Bước 3. Với mỗi giá trị đại diện x_i trên trục ngang và tần số tương đối f_i tương ứng, ta xác định một điểm $M_i(x_i; f_i)$. Nối các điểm liên tiếp với nhau.

Bước 4. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ.

Chú ý. Trong cách vẽ biểu đồ trên, nếu thay tần số tương đối bằng tần số thì ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dạng đoạn thẳng.

Ví dụ 4 Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm sau về tuổi thọ của một loại bóng đèn.

Tuổi thọ (năm)	[1; 1,5)	[1,5; 2)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)
Tần số tương đối	15%	20%	30%	25%	10%

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê trên.

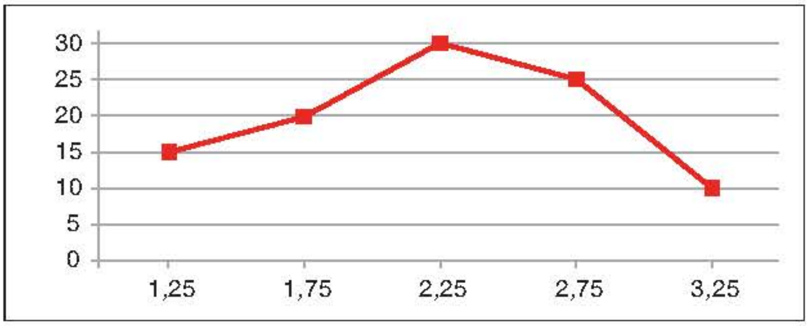
Giải

Bước 1. Chọn giá trị đại diện cho các nhóm số liệu ta có bảng sau:

Tuổi thọ (năm)	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25
Tần số tương đối	15%	20%	30%	25%	10%

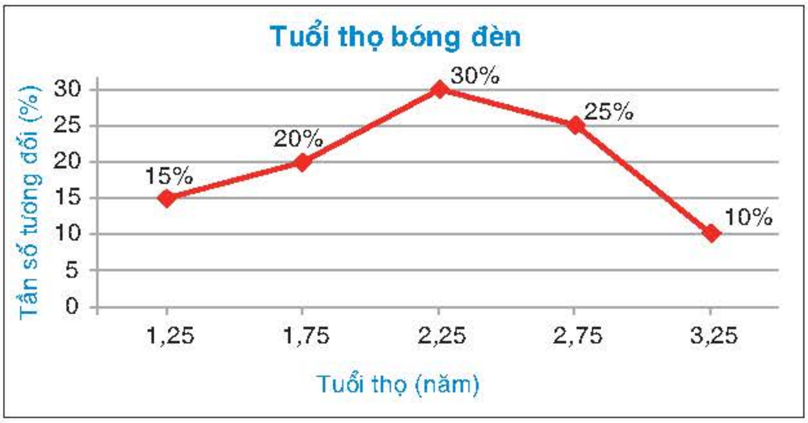
Bước 2. Vẽ các trục (H.7.20).

Bước 3. Xác định các điểm, nối các điểm liên tiếp với nhau (H.7.20).



Hình 7.20

Bước 4. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm (H.7.21).



Hình 7.21

Chú ý. Trên trục ngang ta cũng có thể điền các nhóm số liệu thay cho các giá trị đại diện.

Luyện tập 4 Cho bảng tần số ghép nhóm sau về thời gian gọi (phút) của một số cuộc điện thoại.

Thời gian (phút)	[0,5; 2,5)	[2,5; 4,5)	[4,5; 6,5)	[6,5; 8,5)	[8,5; 10,5)
Số cuộc gọi	6	14	20	12	8

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê trên.

EM CÓ BIẾT? ***(Đọc thêm)***

Để biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm với các nhóm $[a_i; a_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, k$ có độ dài $l_i = a_{i+1} - a_i$ không bằng nhau bằng biểu đồ tần số tương đối dạng cột người ta dựng các cột có đáy bằng l_i và chiều cao là $y_i = \frac{f_i}{l_i}$, tức là diện tích của mỗi cột chính bằng tần số tương đối của nhóm $[a_i; a_{i+1})$.

BÀI TẬP

7.17. Một cuộc điều tra về thời gian dùng mạng Internet trong ngày của học sinh lớp 9 tại một thành phố cho kết quả như sau:

Thời gian (giờ)	[0; 0,5)	[0,5; 1,0)	[1,0; 1,5)	[1,5; 2,0)	[2,0; 2,5)
Tỉ lệ	15%	27%	23%	18%	17%

a) Đọc và giải thích bảng thống kê trên.

b) Để thu được bảng thống kê trên, người ta đã lập phiếu điều tra và thu về tổng cộng 2 000 phiếu trả lời. Lập bảng tần số ghép nhóm cho kết quả thu được.

7.18. Ghi lại cấp độ động đất của các trận động đất xảy ra tại một vùng trong 10 năm người ta thu được kết quả sau:

I, V, II, III, VI, V, IV, II, III, V, VI, VII, VIII, I, I, II, VI, VII, IV.

Biết rằng theo thang Richter thì trận động đất cấp I có độ lớn từ 1 đến dưới 3; cấp II và III có độ lớn từ 3 đến dưới 4; cấp IV và V có độ lớn từ 4 đến dưới 5; cấp VI và VII có độ lớn từ 5 đến dưới 6; cấp VIII có độ lớn từ 6 đến dưới 6,9.

Lập bảng tần số ghép nhóm cho độ lớn các trận động đất xảy ra ở vùng này theo thang Richter.

7.19. Giáo viên ghi lại thời gian chạy cự li 100 mét của các học sinh lớp 9A cho kết quả như sau:

Thời gian (giây)	[13; 15)	[15; 17)	[17; 19)	[19; 21)
Số học sinh	5	20	13	2

a) Nêu các nhóm số liệu và tần số tương ứng.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

7.20. Người ta trồng cà rốt và thử nghiệm một loại phân bón mới. Khi thu hoạch người ta đo chiều dài các củ cà rốt thu được kết quả sau:

Chiều dài (cm)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)	[19;20)	[20; 21)
Số củ cà rốt	8	17	30	28	12	5

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

7.21. Thời gian chờ mua vé xem bóng đá của một số cổ động viên được cho như sau:

Thời gian (phút)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số cổ động viên	15	38	50	27	20	10

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê thu được ở câu a.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A. TRẮC NGHIỆM

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời các bài tập từ 7.22 đến 7.24.

Gieo một con xúc xắc 50 lần cho kết quả như sau:

Số chấm xuất hiện	1	2	3	4	5	6
Tần số	8	7	?	8	6	11

7.22. Tần số xuất hiện của mặt 3 chấm là

A. 9. B. 10. C. 11. D. 12.

7.23. Tần số tương đối xuất hiện của mặt 5 chấm là

A. 6%. B. 8%. C. 12%. D. 14%.

7.24. Để biểu diễn bảng thống kê trên, **không** thể dùng loại biểu đồ nào sau đây?

A. Biểu đồ tranh. B. Biểu đồ tần số dạng cột.

C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng. D. Biểu đồ cột kép.

7.25. Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm về thời gian đi từ nhà đến trường của học sinh lớp 9A như sau:

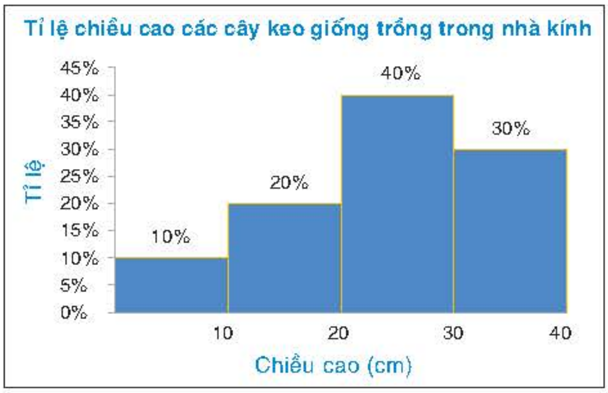
Thời gian đến trường (phút)	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)
Tần số tương đối	20%	55%	25%

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng, ta dùng giá trị nào đại diện cho nhóm số liệu [10; 20)?

A. 10. B. 15. C. 20. D. 30.

B. TỰ LUẬN

7.26. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm Hình 7.22 cho biết tỉ lệ chiều cao của các cây keo giống do một kĩ sư lâm nghiệp đã trồng trong nhà kính.



Hình 7.22

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

7.27. Kĩ sư lâm nghiệp trên cũng trồng một số cây keo giống khác ngoài trời thu được kết quả như sau:

Chiều cao (cm)	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)
Số cây	5	9	4	2

a) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

b) Từ biểu đồ vừa vẽ và biểu đồ cho trong bài tập 7.26, hãy so sánh chiều cao của các cây keo giống được trồng trong nhà kính và trồng ngoài trời.

7.28. Tỉ lệ học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường được cho trong bảng sau:

Cầu thủ	Huy	Minh	An	Thảo
Tỉ lệ học sinh bình chọn	30%	25%	10%	35%

Biết rằng có 500 học sinh tham gia bình chọn.

a) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối trên.

b) Lập bảng tần số biểu diễn số học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường.

7.29. Qua đợt khám mắt, lớp 9A có 20 học sinh bị cận thị trong đó có 10 học sinh cận thị nhẹ, 8 học sinh cận thị vừa và 2 học sinh cận thị nặng. Biết rằng cận thị có số đo từ 0,25 đến dưới 3,25 dioptre là cận thị nhẹ; từ 3,25 đến dưới 6,25 dioptre là cận thị vừa; từ 6,25 đến dưới 10,25 dioptre là cận thị nặng.

a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo độ cận thị của các học sinh này.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.

7.30. Lương của các công nhân một nhà máy được cho trong bảng sau:

Lương (triệu đồng)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số công nhân	20	50	70	40	20

a) Nêu các nhóm số liệu và tần số. Giải thích ý nghĩa cho một nhóm số liệu và tần số của nó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên.

Chương VIII

XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ MÔ HÌNH XÁC SUẤT ĐƠN GIẢN

XÁC SUẤT

Trong chương này các em sẽ được học cách tính xác suất của một số biến cố liên quan tới phép thử gồm một hoặc hai hành động, thực nghiệm đơn giản tiến hành liên tiếp hay đồng thời.

Bài 25 PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Phép thử ngẫu nhiên • Không gian mẫu của phép thử	Nhận biết phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu của phép thử.

Ở lớp 8 ta đã làm quen với những hành động, thực nghiệm đơn giản, mà kết quả của chúng không thể biết được trước khi thực hiện. Trong bài học này, chúng ta sẽ gặp những hành động, thực nghiệm phức tạp hơn hoặc được tiến hành liên tiếp hay đồng thời.

Một cửa hàng muốn tặng hai phần quà cho hai trong bốn khách hàng có lượng mua nhiều nhất trong tháng bằng cách rút thăm ngẫu nhiên. Việc rút thăm được tiến hành như sau: Nhân viên viết tên 4 khách hàng đó vào 4 lá phiếu để vào một chiếc hộp. Nhân viên rút ngẫu nhiên một lá phiếu trong hộp. Lá phiếu rút ra không trả lại vào hộp. Sau đó, nhân viên tiếp tục rút ngẫu nhiên một lá phiếu từ ba lá phiếu còn lại. Hai khách hành có tên trong hai lá phiếu được rút ra là hai khách hàng được tặng quà. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

HĐ Xét *tình huống mở đầu*.

a) Hỏi trước khi rút thăm có thể nói trước hai khách hàng nào được chọn hay không?

b) Cho ví dụ về ba trường hợp có thể xảy ra.

• Một hoặc một số hành động, thực nghiệm được tiến hành liên tiếp hay đồng thời mà kết quả của chúng không thể biết được trước khi thực hiện nhưng có thể liệt kê được tất cả các kết quả có thể xảy ra, được gọi là một **phép thử ngẫu nhiên**, gọi tắt là *phép thử*.

• Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử (gọi tắt là tập tất cả các kết quả có thể của phép thử) được gọi là **không gian mẫu của phép thử**.

Không gian mẫu của phép thử được kí hiệu là Ω.

Ví dụ 1

Bạn Lan gieo một con xúc xắc và bạn Hoà gieo một đồng xu. Quan sát số chấm xuất hiện trên con xúc xắc và mặt xuất hiện của đồng xu.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Giải

a) Phép thử là bạn Lan gieo một con xúc xắc và bạn Hoà gieo một đồng xu. Kết quả của phép thử là số chấm xuất hiện trên con xúc xắc và mặt xuất hiện của đồng xu (mặt sấp (S), mặt ngửa (N)).

b) Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng sau:

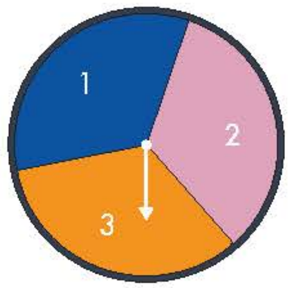
Xúc xắc / Đồng xu	1	2	3	4	5	6
S	(1, S)	(2, S)	(3, S)	(4, S)	(5, S)	(6, S)
N	(1, N)	(2, N)	(3, N)	(4, N)	(5, N)	(6, N)

Mỗi ô là một kết quả có thể. Không gian mẫu là tập hợp 12 ô của bảng trên. Do đó không gian mẫu của phép thử là Ω = {(1, S); (2, S); (3, S); (4, S) (5, S) (6, S); (1, N); (2, N); (3, N); (4, N); (5, N); (6, N)}. Vậy không gian mẫu có 12 phần tử.

Luyện tập 1 Một tấm bìa cứng hình tròn được chia làm ba hình quạt bằng nhau, đánh số 1; 2; 3 và được gắn vào trục quay có mũi tên cố định ở tâm (H.8.1). Bạn Hiền quay tấm bìa liên tiếp hai lần và quan sát xem mũi tên chỉ vào hình quạt nào khi tấm bìa dừng lại.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?



Hình 8.1

Gợi ý. Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng như mẫu sau:

Lần 1 \ Lần 2	1	2	3
1	(1, 1)	...	...
2	...	...	...
3	...	...	(3, 3)

Ví dụ 2 Một hộp kín đựng 4 quả bóng có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số 1; 2; 3; 4. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả bóng từ hộp, quả bóng được lấy ra lần đầu không trả lại vào hộp. Quan sát hai số ghi trên hai quả bóng được lấy ra.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Giải

a) Phép thử là lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả bóng từ hộp, quả bóng được lấy ra lần đầu không trả lại vào hộp.

Kết quả của phép thử là một cặp số (a, b), trong đó a và b tương ứng là số ghi trên quả bóng được lấy ra ở lần thứ nhất và lần thứ hai. Vì quả bóng được lấy ra lần đầu không trả lại vào hộp nên $a \neq b$.

b) Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng như sau:

Lần 1 \ Lần 2	1	2	3	4
1	~~(1, 1)~~	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
2	(2, 1)	~~(2, 2)~~	(2, 3)	(2, 4)
3	(3, 1)	(3, 2)	~~(3, 3)~~	(3, 4)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	~~(4, 4)~~

Chú ý rằng $a \neq b$ nên cặp có hai phần tử trùng nhau không được tính, tức là trong bảng ta phải xoá 4 ô: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4). Do đó không gian mẫu của phép thử là

$\Omega = \{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3)\}$.

Vậy không gian mẫu có 12 phần tử.

Luyện tập 2 Trở lại *tình huống mở đầu.*

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Gợi ý. Kí hiệu bốn khách hàng có lượng mua nhiều nhất lần lượt là A, B, C và D rồi làm tương tự như Ví dụ 2.

Vận dụng Màu hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: màu vàng và màu xanh, có hai gene ứng với hai kiểu hình này allele trội A và allele lặn a. Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn, có hai gene ứng với hai kiểu hình này allele trội B và allele lặn b.

Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cây con lấy ngẫu nhiên một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ để hình thành một cặp gene. Phép thử là cho lai hai cây đậu Hà Lan, trong đó cây bố có kiểu gene là (AA, Bb), cây mẹ có kiểu gene là (Aa, Bb).

Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử trên. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Gợi ý. Về kiểu gene, có hai kiểu gene ứng với màu hạt của cây con là AA; Aa.

Có bốn kiểu gene ứng với hình dạng hạt của cây con là BB; Bb; bB; bb.

Liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng theo mẫu sau:

Dạng hạt / Màu hạt	BB	Bb	bB	bb
AA	...	...	...	...
Aa	...	...	...	...

BÀI TẬP

8.1. Chọn ngẫu nhiên một gia đình có hai con và quan sát giới tính của hai người con đó.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

8.2. Một hộp đựng 5 tấm thẻ ghi các số 1; 2; 3; 4; 5. Rút ngẫu nhiên lần lượt hai tấm thẻ từ hộp, tấm thẻ rút ra lần đầu không trả lại vào hộp.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

8.3. Có hai nhóm học sinh: Nhóm I có ba học sinh nam là Huy, Sơn, Tùng; nhóm II có ba học sinh nữ là Hồng, Phương, Linh. Giáo viên chọn ngẫu nhiên một học sinh từ mỗi nhóm.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

8.4. Xếp ngẫu nhiên ba bạn Mai, Việt, Lan trên một chiếc ghế dài.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Bài 26 XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ LIÊN QUAN TỚI PHÉP THỬ

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Biến cố • Kết quả thuận lợi	Biết tính xác suất của biến cố liên quan đến phép thử gồm một hoặc hai hành động, thực nghiệm đơn giản tiến hành liên tiếp hay đồng thời.

Màu hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình là vàng và xanh. Có hai gene ứng với hai kiểu hình này là allele trội A và allele lặn a. Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình là hạt trơn và hạt nhăn. Có hai gene ứng với hai kiểu hình này là allele trội B và allele lặn b. Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cặp gene của cây con được lấy ngẫu nhiên một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ. Phép thử là cho lai hai cây đậu Hà Lan, trong đó cây bố và cây mẹ có kiểu hình là "hạt vàng và trơn". Hỏi xác suất để cây con có kiểu hình như cây bố và cây mẹ là bao nhiêu?

1 KẾT QUẢ THUẬN LỢI CHO MỘT BIẾN CỐ LIÊN QUAN TỚI PHÉP THỬ

Kết quả thuận lợi cho một biến cố

HĐ Bạn Tùng gieo một con xúc xắc liên tiếp hai lần. Xét các biến cố sau:

E: "Cả hai lần gieo con xúc xắc đều xuất hiện mặt có số chấm là số nguyên tố";

F: "Cả hai lần gieo con xúc xắc đều không xuất hiện mặt có số chấm là số chẵn".

a) Phép thử là gì?

b) Giả sử số chấm xuất hiện trên con xúc xắc trong lần gieo thứ nhất, thứ hai tương ứng là 2 và 5 chấm. Khi đó, biến cố nào xảy ra? Biến cố nào không xảy ra?

Cho phép thử *T*. Xét biến cố *E*, ở đó việc xảy ra hay không xảy ra của *E* tuỳ thuộc vào kết quả của phép thử *T*. Kết quả của phép thử *T* làm cho biến cố *E* xảy ra gọi là kết quả thuận lợi cho *E*.

Ví dụ 1 Một tấm bìa cứng hình tròn được chia làm bốn hình quạt bằng nhau, đánh số 1; 2; 3; 4 và được gắn vào trục quay có mũi tên ở tâm (H.8.2). Bạn Tuấn quay tấm bìa hai lần, quan sát và ghi lại số của hình quạt mà mũi tên chỉ vào.

a) Phép thử là gì? Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Hình 8.2

b) Xét biến cố E: "Tổng hai số ghi trên hai hình quạt ở hai lần quay bằng 5". Mô tả các kết quả thuận lợi cho biến cố E.

c) Xét biến cố F: "Tích hai số ghi trên hai hình quạt ở hai lần quay bằng 4". Mô tả các kết quả thuận lợi cho biến cố F.

Giải

a) Phép thử là quay tấm bìa hai lần. Kết quả của phép thử là một cặp số (a, b), trong đó a và b tương ứng là số ghi trên các hình quạt mà mũi tên chỉ vào ở lần quay thứ nhất và thứ hai.

Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng như sau:

Lần 1 \ Lần 2	1	2	3	4
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

Mỗi ô trong bảng là một kết quả có thể. Không gian mẫu là tập hợp 16 ô của bảng trên. Như vậy, không gian mẫu của phép thử là

$\Omega = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}$.

b) Các kết quả thuận lợi cho biến cố E là (1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1).

c) Các kết quả thuận lợi cho biến cố F là (1, 4); (2, 2); (4, 1).

Luyện tập 1 Bạn Hoàng lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ một túi đựng 2 quả cầu gồm một quả màu đen và một quả màu trắng, có cùng khối lượng và kích thước. Bạn Hải rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ một hộp đựng 3 tấm thẻ A, B, C.

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

b) Xét các biến cố sau:

E: "Bạn Hoàng lấy được quả cầu màu đen";

F: "Bạn Hoàng lấy được quả cầu màu trắng và bạn Hải không rút được tấm thẻ A".

Hãy mô tả các kết quả thuận lợi cho hai biến cố E và F.

2 TÍNH XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ LIÊN QUAN ĐẾN PHÉP THỬ KHI CÁC KẾT QUẢ CỦA PHÉP THỬ ĐỒNG KHẢ NĂNG

Giả sử rằng các kết quả có thể của phép thử T là đồng khả năng. Khi đó xác suất $P(E)$ của biến cố E bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố E và số phần tử của tập Ω:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)},$$

trong đó Ω là không gian mẫu của T; $n(E)$ là số kết quả thuận lợi cho biến cố E và $n(\Omega)$ là số phần tử của tập Ω.

Cách tính xác suất của một biến cố

Việc tính xác suất của một biến cố E gồm các bước sau:

Bước 1. Mô tả không gian mẫu của phép thử. Từ đó xác định số phần tử của không gian mẫu Ω.

Bước 2. Chứng tỏ các kết quả có thể của phép thử là đồng khả năng.

Bước 3. Mô tả các kết quả thuận lợi cho biến cố E. Từ đó xác định số kết quả thuận lợi cho biến cố E.

Bước 4. Lập tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố E với số phần tử của không gian mẫu Ω.

Ví dụ 2 Ba bạn Bảo, Châu, Dương được xếp ngẫu nhiên ngồi trên một hàng ghế có ba chỗ ngồi. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) E: "Bảo không ngồi ngoài cùng bên phải";

b) F: "Châu và Dương không ngồi cạnh nhau".

Giải

Kí hiệu ba bạn Bảo, Châu, Dương lần lượt là B, C, D.

Ta liệt kê các kết quả có thể xảy ra:

- Bảo ngồi ngoài cùng bên trái: có 2 cách xếp là BCD và BDC.
- Bảo ngồi giữa: có 2 cách xếp là CBD và DBC.
- Bảo ngồi ngoài cùng bên phải: có 2 cách xếp là CDB và DCB.

Vậy không gian mẫu của phép thử là Ω = {BCD; BDC; CBD; DBC; CDB; DCB}. Tập Ω có 6 phần tử.

Vì việc xếp chỗ ngồi là ngẫu nhiên nên các kết quả có thể là đồng khả năng.

a) Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố E là BCD, BDC, CBD và DBC. Vậy $P(E)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

b) Có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố F là CBD và DBC. Vậy $P(F)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Luyện tập 2 Cho hai túi I và II, mỗi túi chứa 3 tấm thẻ được ghi các số 2; 3; 7. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi ra một tấm thẻ và ghép thành số có hai chữ số với chữ số trên tấm thẻ rút từ túi I là chữ số hàng chục. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Số tạo thành chia hết cho 4";

b) B: "Số tạo thành là số nguyên tố".

Ví dụ 3 Để trả lời câu hỏi trong *tình huống mở đầu* ta cần biết kiểu gene của cây bố và cây mẹ. Giả sử cây bố có kiểu gene là (AA, Bb), cây mẹ có kiểu gene là (Aa, Bb). Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tính xác suất để cây con có hạt vàng và trơn.

Giải

Ở Bài 25, ta đã biết không gian mẫu là:

Ω = {(AA, BB); (AA, Bb); (AA, bB); (AA, bb); (Aa, BB); (Aa, Bb); (Aa, bB); (Aa, bb)}.

Tập Ω có 8 phần tử. Phép thử có 8 kết quả có thể. Do cây con chọn ngẫu nhiên một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ nên các kết quả có thể trên là đồng khả năng.

Gọi M là biến cố "Cây con có hạt vàng và trơn".

Cây con có hạt vàng và trơn nếu trong gene màu hạt có ít nhất một allele trội A và trong gene dạng hạt có ít nhất một allele trội B.

Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố M là (AA, BB); (AA, Bb); (AA, bB); (Aa, BB); (Aa, Bb); (Aa, bB).

Vậy $P(M) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Luyện tập 3

Trở lại Ví dụ 3, tính xác suất để cây con có hạt vàng và nhăn.

BÀI TẬP

8.5. Chọn ngẫu nhiên một gia đình có hai con. Giả thiết rằng biến cố "Sinh con trai" và biến cố "Sinh con gái" là đồng khả năng. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Gia đình đó có cả con trai và con gái";

B: "Gia đình đó có con trai".

8.6. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất I và II. Tính xác suất các biến cố sau:

E: "Có đúng một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm";

F: "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm";

G: "Tích của hai số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn hoặc bằng 6".

8.7. Bạn An gieo một đồng xu cân đối và bạn Bình rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp chứa 5 tấm thẻ ghi các số 1; 2; 3; 4; 5. Tính xác suất của các biến cố sau:

E: "Rút được tấm thẻ ghi số lẻ";

F: "Rút được tấm thẻ ghi số chẵn và đồng xu xuất hiện mặt sấp";

G: "Rút được tấm thẻ ghi số 5 hoặc đồng xu xuất hiện mặt ngửa".

8.8. Có hai túi I và II mỗi túi chứa 4 tấm thẻ được đánh số 1; 2; 3; 4. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi ra một tấm thẻ và nhân hai số ghi trên hai tấm thẻ với nhau. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Kết quả là một số lẻ";

B: "Kết quả là 1 hoặc một số nguyên tố".

Ví dụ Tấm bìa cứng A hình tròn được chia thành 3 hình quạt có diện tích bằng nhau, đánh số 1; 2; 3 và tấm bìa cứng B hình tròn được chia thành 5 hình quạt có diện tích bằng nhau, đánh số 1; 2; 3; 4; 5 (H.8.3). Trục quay của A và B được gắn mũi tên ở tâm. Bạn Nam quay tấm bìa A, bạn Bình quay tấm bìa B. Quan sát xem mũi tên dừng ở hình quạt nào trên hai tấm bìa.

Tấm bìa A Tấm bìa B

Hình 8.3

a) Phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

c) Tính xác suất của các biến cố sau:

E: "Tích hai số ở hình quạt mà hai mũi tên chỉ vào bằng 6";

F: "Tích hai số ở hình quạt mà hai mũi tên chỉ vào nhỏ hơn 5";

G: "Tích hai số ở hình quạt mà hai mũi tên chỉ vào là số chẵn".

Giải

a) Phép thử là bạn Nam quay tấm bìa A, bạn Bình quay tấm bìa B.

b) Ta lập bảng sau:

B \ A	1	2	3
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)

Mỗi ô trong bảng trên là một kết quả có thể. Các kết quả có thể này là đồng khả năng.

Không gian mẫu là Ω = {(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (5, 1); (5, 2); (5, 3)}.

Không gian mẫu có 15 phần tử.

c) • Có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố E là (3, 2) và (2, 3). Vậy $P(E) = \dfrac{2}{15}$.

• Các kết quả thuận lợi cho biến cố F: Có một ô có tích hai số bằng 1 là (1, 1); các ô có tích hai số bằng 2 là (1, 2); (2, 1); các ô có tích hai số bằng 3 là (1, 3); (3, 1); các ô có tích hai số bằng 4 là (2, 2); (4, 1). Do đó, có 7 kết quả thuận lợi cho biến cố F là (1, 1); (1, 2); (2, 1); (1, 3); (3, 1); (2, 2); (4, 1). Vậy $P(F) = \dfrac{7}{15}$.

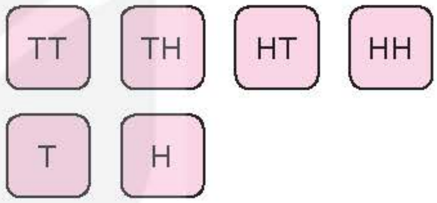
• Tích ab là số chẵn khi và chỉ khi trong cặp (a, b) có ít nhất một số chẵn.

Do đó, có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố G là (1, 2); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (3, 2); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (5, 2).

Vậy $P(G) = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$.

BÀI TẬP

8.9. Có hai túi đựng các tấm thẻ. Túi I đựng 4 tấm thẻ ghi các chữ cái TT, TH, HT và HH. Túi II đựng 2 tấm thẻ ghi các chữ cái T và H. Từ mỗi túi rút ngẫu nhiên ra một tấm thẻ rồi ghép hai thẻ lại với nhau để được ba chữ cái, trong đó thẻ hai chữ cái đặt trước, chẳng hạn tấm thẻ TT ghép với tấm thẻ H được ba chữ cái TTH. Tính xác suất của các biến cố sau:



a) E: "Trong ba chữ cái, có hai chữ H và một chữ T";

b) F: "Trong ba chữ cái, có nhiều nhất hai chữ T".

8.10. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất I và II. Tính xác suất của các biến cố sau:

G: "Không có con xúc xắc nào xuất hiện mặt 6 chấm";

H: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc I là số lẻ và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc II lớn hơn 4";

K: "Số chấm xuất hiện trên cả hai con xúc xắc lớn hơn 2".

8.11. Trên một dãy phố có ba quán ăn A, B, C. Hai bạn Văn và Hải mỗi người chọn ngẫu nhiên một quán ăn để ăn trưa.

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

b) Tính xác suất của các biến cố sau:

E: "Hai bạn cùng vào một quán";

F: "Cả hai bạn không chọn quán C";

G: "Có ít nhất một bạn chọn quán B".

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A. TRẮC NGHIỆM

8.12. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Xác suất để "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 10" là

A. $\frac{7}{36}$. B. $\frac{2}{9}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{5}{36}$.

8.13. Có hai túi **I** và **II**. Túi **I** chứa 4 tấm thẻ, đánh số **1**; 2; 3; 4. Túi **II** chứa 5 tấm thẻ, đánh số **1**; 2; 3; 4; 5. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ mỗi túi **I** và **II**. Xác suất để cả hai tấm thẻ rút ra đều ghi số chẵn là

A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{3}{20}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{4}{21}$.

8.14. Một túi đựng 4 viên bi có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số **1**; 2; 3; 4. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi từ trong túi. Xác suất để tích hai số ghi trên hai viên bi lớn hơn 3 là

A. $\frac{5}{7}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{5}{6}$.

B. TỰ LUẬN

8.15. Có hai túi **I** và **II**. Túi **I** chứa 3 tấm thẻ, đánh số 2; 3; 4. Túi **II** chứa 2 tấm thẻ, đánh số 5; 6. Từ mỗi túi **I** và **II**, rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Hai số ghi trên hai tấm thẻ chênh nhau 2 đơn vị";

B: "Hai số ghi trên hai tấm thẻ chênh nhau lớn hơn 2 đơn vị";

C: "Tích hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số chẵn";

D: "Tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số nguyên tố".

8.16. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất **I** và **II**. Tính xác suất của các biến cố sau:

E: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng **11**";

F: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 8 hoặc 9";

G: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn 6".

8.17. Hai bạn Minh và Huy chơi một trò chơi như sau: Minh chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp {5; 6; 7; 8; 9; 10}; Huy chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp {4; 5; 7; 8; 9; **11**}. Bạn nào chọn được số lớn hơn sẽ là người thắng cuộc. Nếu hai số chọn được bằng nhau thì kết quả là hoà. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) *A*: "Bạn Minh thắng";

b) *B*: "Bạn Huy thắng".

Chương IX

ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

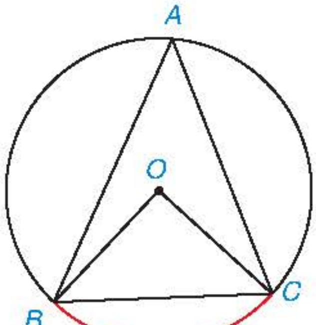
HÌNH HỌC PHẲNG

Trong chương này chúng ta sẽ tìm hiểu về những đường tròn đi qua các đỉnh của tam giác, tứ giác hay lục giác và những đường tròn lớn nhất có thể vẽ được nằm bên trong hình đó. Những đường tròn đó lần lượt được gọi là các đường tròn ngoại tiếp và các đường tròn nội tiếp.

Bài 27 GÓC NỘI TIẾP

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Góc nội tiếp • Cung bị chắn	• Nhận biết góc nội tiếp của một đường tròn. • Nhận biết cung bị chắn bởi góc nội tiếp của một đường tròn. • Giải thích mối liên hệ giữa số đo góc nội tiếp với số đo góc ở tâm chắn cùng một cung.

Chúng ta đã biết số đo góc ở tâm BOC của đường tròn (O) trong Hình 9.1 bằng số đo của cung bị chắn $\overset{\frown}{BC}$. Vậy số đo của góc này có mối quan hệ gì với số đo của góc BAC?



Hình 9.1

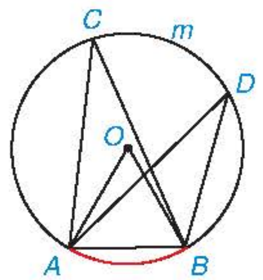
Góc nội tiếp và cung bị chắn

HĐ Vẽ đường tròn tâm O có bán kính bằng 2 cm và dây cung AB có độ dài bằng 2 cm. Lấy một điểm C tuỳ ý nằm trên cung lớn AmB (H.9.2).

a) Cho biết số đo của góc ở tâm AOB và số đo của cung bị chắn AB.

b) Đo góc ACB và so sánh với kết quả của bạn bên cạnh.

c) Lấy điểm D tuỳ ý nằm trên cung ACB. Đo góc ADB và so sánh với các góc ACB và AOB.



Hình 9.2

Các góc ACB và ADB ở Hình 9.2 được gọi là các *góc nội tiếp* của đường tròn (O) và $\overset{\frown}{AB}$ là *cung bị chắn*.

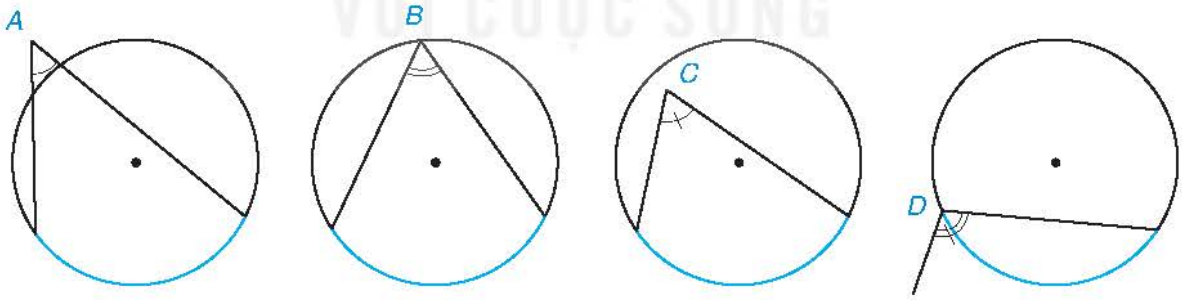
Tổng quát, chúng ta có định nghĩa về góc nội tiếp như sau:

Định nghĩa

Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

Ví dụ 1

Trong các góc A, B, C, D ở Hình 9.3, góc nào là góc nội tiếp, góc nào không phải góc nội tiếp? Vì sao?



Hình 9.3

Giải

Các góc A và C không phải góc nội tiếp của đường tròn vì đỉnh không nằm trên đường tròn. Góc D có một cạnh không chứa dây cung của đường tròn nên cũng không là góc nội tiếp của đường tròn. Góc B có đỉnh B nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn nên là góc nội tiếp của đường tròn.

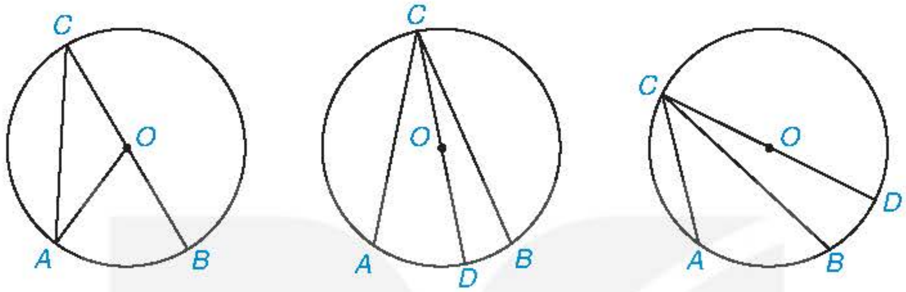
Định lí sau cho biết mối liên hệ giữa góc nội tiếp với cung bị chắn:

Định lí

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

GT	$A, B, C \in (O)$.
KL	$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ (cung AB không chứa C).

Chứng minh. Ta xét ba trường hợp sau (H.9.3).



Trường hợp 1 *Trường hợp 2* *Trường hợp 3*

Hình 9.4

Trường hợp 1: Tâm O nằm trên một cạnh của góc ACB. Giả sử $O \in CB$. Do tam giác OAC cân tại O và có tổng các góc bằng 180° nên:

$$2\widehat{ACB} = \widehat{ACO} + \widehat{CAO} = 180^\circ - \widehat{AOC} = \widehat{AOB}.$$

Do $\widehat{AOB} =$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ (vì $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm chắn cung AB) nên $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AB}$.

Trường hợp 2: Tâm O nằm bên trong góc ACB. Vẽ đường kính CD. Áp dụng *Trường hợp 1* cho các góc nội tiếp ACD và DCB với cạnh CD đi qua O, ta được:

$$\widehat{ACD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\ \overset{\frown}{AD} \text{ và } \widehat{DCB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\ \overset{\frown}{DB}.$$

Suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{ACD} + \widehat{DCB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\ \overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\text{sđ}\ \overset{\frown}{DB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\ \overset{\frown}{AB}$.

Trường hợp 3: Tâm O nằm ngoài góc ACB. Vẽ đường kính CD. Áp dụng *Trường hợp 1* cho các góc nội tiếp ACD và BCD với cạnh CD đi qua O, tương tự như trên ta được:

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACD} - \widehat{BCD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\ \overset{\frown}{AD} - \frac{1}{2}\text{sđ}\ \overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\ \overset{\frown}{AB}.$$

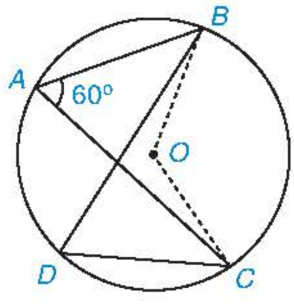
Nhận xét. Từ định lí trên ta có các khẳng định sau:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Các góc nội tiếp chắn cung nhỏ thì có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Hãy cho biết số đo góc nội tiếp tìm được trong Hình 9.3 ở Ví dụ 1, biết rằng số đo của các cung màu xanh trong hình đều bằng 120°.

Ví dụ 2

Cho đường tròn (O) và các điểm A, B, C, D trên (O) như Hình 9.5. Biết rằng $\widehat{BAC} = 60^\circ$, hãy tính số đo của các góc BOC và BDC.



Hình 9.5

Giải (H.9.5). Xét đường tròn (O), ta có:

- Do hai góc nội tiếp $\widehat{BDC}$ và $\widehat{BAC}$ cùng chắn cung BC nên

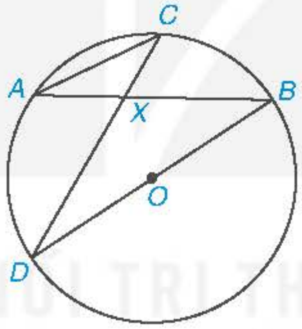
$$\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 60^\circ;$$

- Vì góc nội tiếp $\widehat{BAC}$ và góc ở tâm $\widehat{BOC}$ cùng chắn cung nhỏ BC nên

$$\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ.$$

Luyện tập

Cho đường tròn tâm O và hai dây cung AB, CD cắt nhau tại điểm X nằm trong đường tròn (H.9.6). Chứng minh rằng $\Delta AXC \backsim \Delta DXB$.



Hình 9.6

Vận dụng

Trở lại *tình huống mở đầu*, hãy tính số đo của góc BAC nếu biết đường tròn có bán kính 2 cm và dây cung $BC = 2\sqrt{2}$ cm.

Tam giác BOC có phải tam giác vuông không?

BÀI TẬP

9.1. Những khẳng định nào sau đây là đúng?

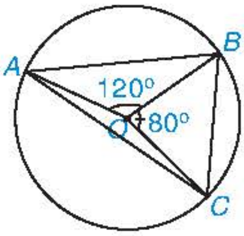
a) Hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn cùng một cung.

b) Góc nội tiếp nhỏ hơn 90° có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.

c) Góc nội tiếp chắn cung nhỏ có số đo bằng số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.

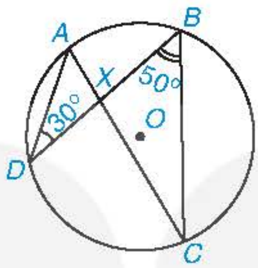
d) Hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn hai cung bằng nhau.

9.2. Cho các điểm như Hình 9.7. Tính số đo các góc của tam giác *ABC*, biết rằng $\widehat{AOB} = 120^\circ$, $\widehat{BOC} = 80^\circ$.



Hình 9.7

9.3. Cho đường tròn (*O*) và hai dây cung *AC*, *BD* cắt nhau tại *X* (H.9.8). Tính số đo góc *AXB* biết rằng $\widehat{ADB} = 30^\circ$ và $\widehat{DBC} = 50^\circ$.

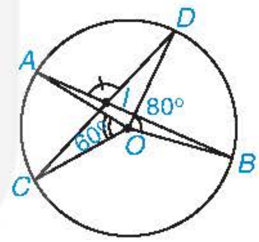


Hình 9.8

9.4. Cho đường tròn (*O*) và hai dây cung *AB*, *CD* cắt nhau tại điểm *I* nằm trong (*O*) (H.9.9).

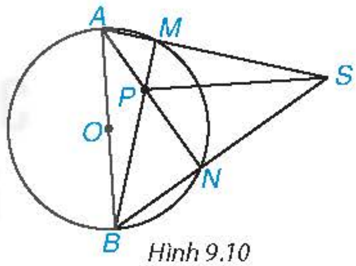
a) Biết rằng $\widehat{AOC} = 60^\circ$, $\widehat{BOD} = 80^\circ$. Tính số đo của góc *AID*.

b) Chứng minh rằng $IA \cdot IB = IC \cdot ID$.



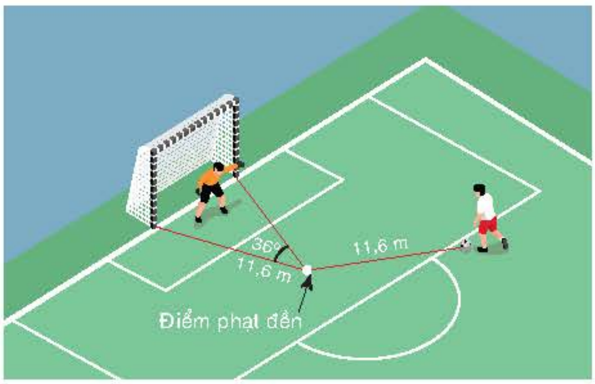
Hình 9.9

9.5. Cho đường tròn (*O*), đường kính *AB* và điểm *S* nằm ngoài (*O*). Cho hai đường thẳng *SA*, *SB* lần lượt cắt (*O*) tại *M* (khác *A*) và *N* (khác *B*). Gọi *P* là giao điểm của *BM* và *AN* (H.9.10). Chứng minh rằng *SP* vuông góc với *AB*.



Hình 9.10

9.6. Trên sân bóng, khi trái bóng được đặt tại điểm phạt đền thì có góc sút bằng 36° và trái bóng cách mỗi cọc gôn 11,6 m (H.9.11). Hỏi khi trái bóng đặt ở vị trí cách điểm phạt đền 11,6 m thì góc sút bằng bao nhiêu?



Hình 9.11

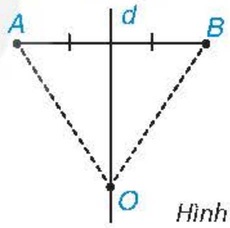
Bài 28 ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP CỦA MỘT TAM GIÁC

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Đường tròn ngoại tiếp tam giác • Đường tròn nội tiếp tam giác	• Nhận biết định nghĩa đường tròn ngoại tiếp tam giác. • Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác, trong đó có tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông, tam giác đều. • Nhận biết định nghĩa đường tròn nội tiếp tam giác. • Xác định tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác, trong đó có tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều.

Cho trước một tam giác *ABC*. Bằng thước kẻ và compa, em có thể vẽ được một đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác và đường tròn tiếp xúc với cả ba cạnh của tam giác hay không?

1 ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP MỘT TAM GIÁC

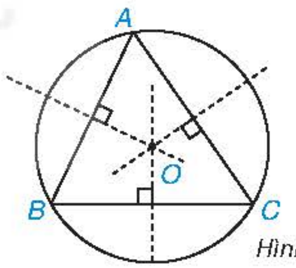
Khái niệm đường tròn ngoại tiếp tam giác



Hình 9.12

HĐ1 Cho *d* là đường trung trực của đoạn thẳng *AB* và *O* là một điểm trên *d* (H.9.12). Hỏi đường tròn tâm *O* đi qua *A* thì có đi qua *B* không?

HĐ2 Cho tam giác *ABC* có ba đường trung trực đồng quy tại *O* (H.9.13). Hãy giải thích tại sao đường tròn (*O*; *OA*) đi qua ba đỉnh của tam giác *ABC*.



Hình 9.13

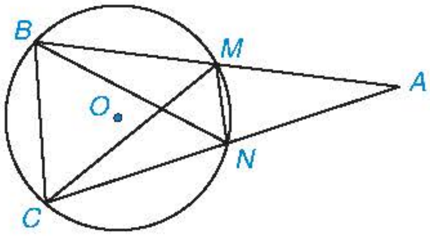
Đường tròn (*O*; *OA*) như trên gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

> **Đường tròn ngoại tiếp** một tam giác là đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó.

Trong Hình 9.13, đường tròn (*O*) ngoại tiếp tam giác *ABC*. Ta cũng nói tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (*O*), hay (*O*) là đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Tâm *O* là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác *ABC*.

Hãy kể tên bốn tam giác nội tiếp đường tròn (O) trong Hình 9.14.



Hình 9.14

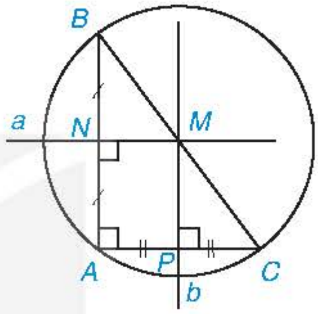
Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông

HĐ3 Cho tam giác ABC vuông tại đỉnh A (H.9.15). Gọi N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

a) Vẽ hai đường trung trực a, b của các cạnh AB, AC, cắt nhau tại M.

b) Hãy giải thích vì sao MN, MP là các đường trung bình của tam giác ABC.

c) Hãy giải thích vì sao M là trung điểm của BC, từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC có tâm M và bán kính $MB = MC = \dfrac{BC}{2}$.



Hình 9.15

Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền và bán kính bằng một nửa cạnh huyền.

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2$ cm, $AC = 4$ cm. Vẽ đường tròn (O; R) ngoại tiếp tam giác ABC và tính bán kính R.

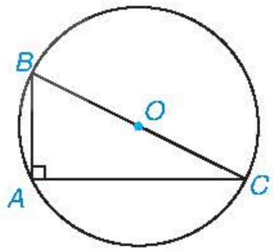
Giải (H.9.16).

Lấy O là trung điểm của BC và vẽ đường tròn (O) đi qua A. Khi đó, (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Theo định lí Pythagore, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4 + 16 = 20$, hay $BC = 2\sqrt{5}$ cm.

Vậy đường tròn (O) có bán kính $R = \dfrac{BC}{2} = \sqrt{5}$ cm.

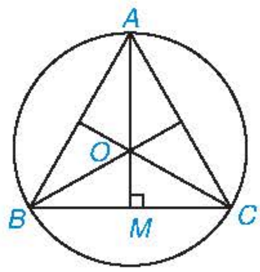


Hình 9.16

Luyện tập 1 Cho tam giác ABC có $AC = 3$ cm, $AB = 4$ cm và $BC = 5$ cm. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều

HĐ4 a) Vẽ tam giác đều ABC. Hãy trình bày cách xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vẽ đường tròn đó.



Hình 9.17

b) Giải thích vì sao tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC trùng với trọng tâm của tam giác đó (H.9.17).

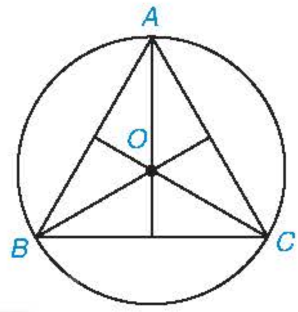
c) Giải thích vì sao $\widehat{OBM} = 30^o$ và $OB = \frac{\sqrt{3}}{3}BC$ (với M là trung điểm của BC).

Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Ví dụ 2 Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 3 cm. Vẽ đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác ABC. Tính bán kính R.

Giải (H.9.18).

Lấy O là giao điểm của ba đường trung tuyến của tam giác ABC và vẽ đường tròn (O) đi qua A. Đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính $R = \frac{\sqrt{3}}{3}BC = \sqrt{3}$ cm.



Hình 9.18

Luyện tập 2 Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) có bán kính bằng 4 cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác.

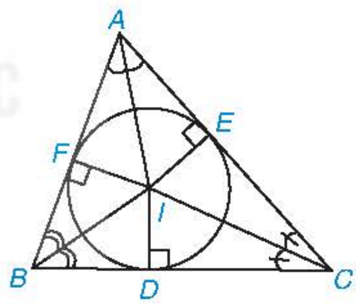
2 ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP MỘT TAM GIÁC

Đường tròn nội tiếp tam giác

HĐ5 Cho tam giác ABC có ba đường phân giác đồng quy tại điểm I. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ I xuống các cạnh BC, CA và AB (H.9.19).

a) Hãy giải thích vì sao các điểm D, E, F cùng nằm trên một đường tròn có tâm I.

b) Gọi (I) là đường tròn trên. Hãy giải thích vì sao (I) tiếp xúc với các cạnh của tam giác ABC.



Hình 9.19

Đường tròn (I) như trên được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Ta cũng nói tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) (H.9.19).

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là **đường tròn nội tiếp** tam giác. Tam giác đó được gọi là ngoại tiếp đường tròn. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác của tam giác.

❓ Mỗi tam giác có bao nhiêu đường tròn nội tiếp? Có bao nhiêu tam giác cùng ngoại tiếp một đường tròn?

Đường tròn nội tiếp tam giác đều

HĐ6 Cho tam giác *ABC* đều có trọng tâm *G*.

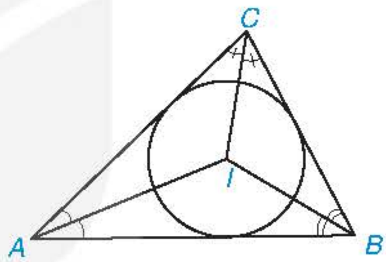
a) Giải thích vì sao *G* cũng là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*.

b) Từ đó, giải thích vì sao bán kính đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* bằng một nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* và bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}BC$.

Đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh *a* có tâm là trọng tâm của tam giác đó và bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

Ví dụ 3

Cho tam giác *ABC* ngoại tiếp đường tròn (*I*). Biết rằng $\widehat{A} = 40^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$. Tính số đo của các góc *BIC*, *CIA* và *AIB*.



Hình 9.20

Giải (H.9.20).

Vì tổng ba góc của tam giác *ABC* bằng 180° nên $\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 80^\circ$.

Vì tam giác *ABC* ngoại tiếp đường tròn (*I*) nên *I* là giao điểm các đường phân giác của tam giác *ABC*. Do đó, ta có: $\widehat{CAI} = \widehat{BAI} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 20^\circ$;

$$\widehat{CBI} = \widehat{ABI} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = 30^\circ;\ \widehat{ACI} = \widehat{BCI} = \frac{\widehat{ACB}}{2} = 40^\circ.$$

Vì tổng các góc trong tam giác *BIC* bằng 180° nên

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - \widehat{CBI} - \widehat{BCI} = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ.$$

Tương tự, $\widehat{CIA} = 180^\circ - \widehat{ACI} - \widehat{CAI} = 120^\circ$ và $\widehat{AIB} = 180^\circ - \widehat{ABI} - \widehat{BAI} = 130^\circ$.

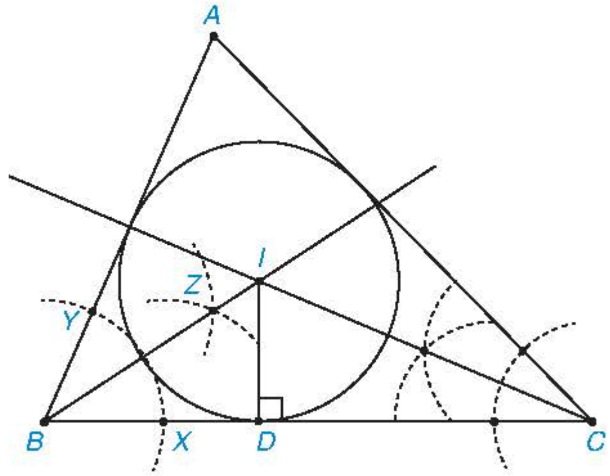
Thực hành

Vẽ đường tròn nội tiếp của tam giác *ABC* bằng thước kẻ và compa theo các bước sau:

– Vẽ tia phân giác góc *B* như sau: Dùng compa vẽ một cung tròn tâm *B* cắt hai cạnh *BC*, *BA* lần lượt tại *X* và *Y*. Vẽ hai cung tròn tâm *X*, *Y* có cùng bán kính, hai cung này cắt nhau tại một điểm *Z* khác *B*. Kẻ tia *BZ* ta được tia phân giác góc *B*.

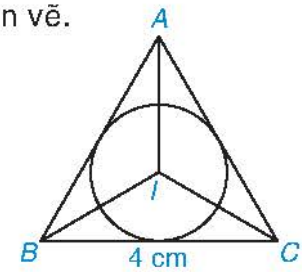
– Tương tự, vẽ tia phân giác góc *C*, cắt tia *BZ* tại *I*.

– Vẽ đường cao *ID* từ *I* xuống *BC* (*D* thuộc *BC*). Vẽ đường tròn (*I*; *ID*) (H.9.21).



Hình 9.21

Khi đó đường tròn $(I; ID)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC cần vẽ.



Hình 9.22

Luyện tập 3

Cho tam giác đều ABC (H.9.22).

a) Vẽ đường tròn $(I; r)$ nội tiếp tam giác ABC.

b) Biết rằng $BC = 4$ cm, hãy tính bán kính r.

BÀI TẬP

9.7. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Tính bán kính của (O), biết rằng tam giác ABC vuông cân tại A và có cạnh bên bằng $2\sqrt{2}$ cm.

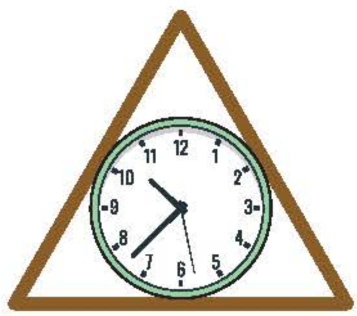
9.8. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng đường tròn (O) có bán kính bằng 3 cm. Tính diện tích tam giác ABC.

9.9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

9.10. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm trên các cạnh AB, AC lần lượt là E, F. Chứng minh rằng $\widehat{EIF} + \widehat{BAC} = 180^\circ$.

9.11. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết rằng bán kính của (I) bằng 1 cm.

9.12. Người ta muốn làm một khung gỗ hình tam giác đều để đặt vừa khít một chiếc đồng hồ hình tròn có đường kính 30 cm (H.9.23). Hỏi độ dài các cạnh (phía bên trong) của khung gỗ phải bằng bao nhiêu?


Hình 9.23

EM CÓ BIẾT ?

(Đọc thêm) ĐƯỜNG TRÒN BÀNG TIẾP TAM GIÁC

Chúng ta biết rằng đường tròn nội tiếp một tam giác thì tiếp xúc với ba cạnh của tam giác và nằm bên trong tam giác. Ngoài ra, mỗi tam giác cho trước còn có ba đường tròn khác cũng tiếp xúc với ba đường thẳng chứa các cạnh của tam giác, nhưng chúng nằm ngoài tam giác. Các đường tròn đó gọi là các đường tròn bàng tiếp.

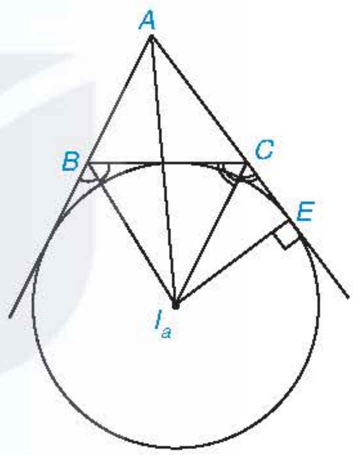
Cụ thể, ta có định nghĩa sau: Đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC trong góc A là đường tròn tiếp xúc với cạnh BC và tiếp xúc với các tia đối của tia BA và tia CA.

Tương tự, ta cũng có đường tròn bàng tiếp trong các góc B và C của tam giác ABC.

Vẽ đường tròn bàng tiếp. Ta vẽ đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC như sau:

– Vẽ hai đường phân giác ngoài góc B và C của tam giác ABC. Gọi I_a là giao điểm của hai đường phân giác ngoài này. Khi đó, I_a nằm ngoài tam giác ABC và cách đều các đường thẳng AB, BC, CA.

– Kẻ đường thẳng qua I_a vuông góc với AC và cắt AC tại điểm E. Vẽ đường tròn $(I_a; I_aE)$. Khi đó, đường tròn$(I_a; I_aE)$ sẽ tiếp xúc với cạnh BC và tiếp xúc với các tia đối của tia BA, CA. Vậy $(I_a; I_aE)$ là đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC như hình bên.

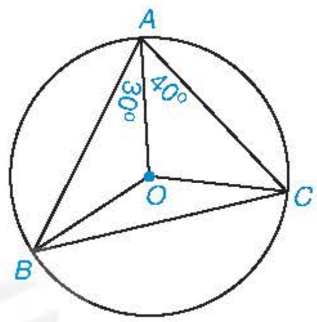


LUYỆN TẬP CHUNG

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng $\widehat{OAB} = 30^\circ$, $\widehat{OAC} = 40^\circ$. Hãy tính số đo của các góc ABC và ACB.

Giải (H.9.24).



Hình 9.24

Vì $OA = OB$ nên tam giác OAB cân tại O.

Suy ra $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = 30^\circ$.

Do tổng các góc trong tam giác OAB bằng 180° nên

$\widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{OAB} - \widehat{OBA} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

Tương tự, tam giác OAC cân tại O vì $OA = OC$.

Do đó $\widehat{OCA} = \widehat{OAC} = 40^\circ$.

Do tổng các góc trong tam giác OAC bằng 180° nên

$\widehat{AOC} = 180^\circ - \widehat{OAC} - \widehat{OCA} = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$.

Xét đường tròn (O) ta có:

Vì góc nội tiếp ABC và góc ở tâm AOC cùng chắn cung nhỏ AC nên

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 50^\circ;$$

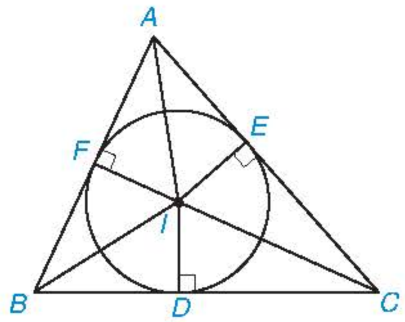
Vì góc nội tiếp ACB và góc ở tâm AOB cùng chắn cung nhỏ AB nên

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 60^\circ.$$

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có diện tích S và ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$. Chứng minh rằng $S = \frac{1}{2}r(BC + CA + AB)$.

Giải (H.9.25).



Hình 9.25

Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn $(I; r)$ với BC, CA và AB.

Ta có: $S = S_{\triangle BIC} + S_{\triangle CIA} + S_{\triangle AIB}$

$$= \frac{1}{2}ID \cdot BC + \frac{1}{2}IE \cdot CA + \frac{1}{2}IF \cdot AB$$

$$= \frac{1}{2}r(BC + CA + AB).$$

BÀI TẬP

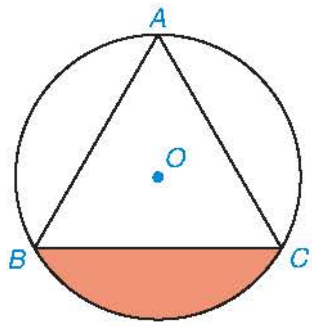
9.13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng $\widehat{BOC} = 120^\circ$ và $\widehat{OCA} = 20^\circ$. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

9.14. Cho ABC là tam giác đều có cạnh bằng 4 cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

9.15. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 3 cm và nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.26.

a) Tính bán kính R của đường tròn (O).

b) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC.



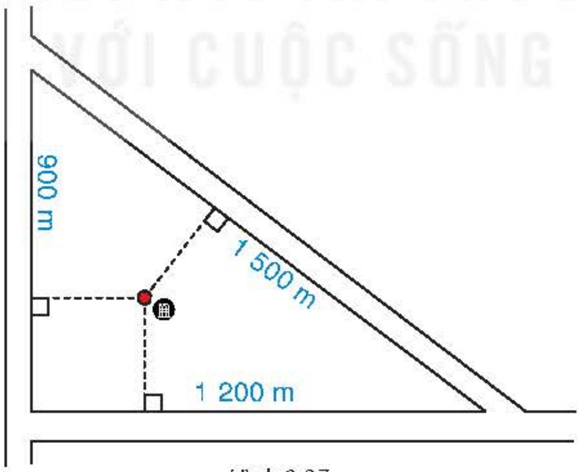
Hình 9.26

9.16. Trong một khu vui chơi có dạng hình tam giác đều với cạnh bằng 60 m, người ta muốn tìm một vị trí đặt bộ phát sóng wifi sao cho ở chỗ nào trong khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng. Biết rằng bộ phát sóng đó có tầm phát sóng tối đa là 50 m, hỏi rằng có thể tìm được vị trí để đặt bộ phát sóng như vậy hay không?

9.17. Người ta vẽ bản quy hoạch của một khu định cư được bao xung quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là 900 m, 1 200 m và 1 500 m (H.9.27).

a) Tính chu vi và diện tích của phần đất giới hạn bởi tam giác trên.

b) Họ muốn xây dựng một khách sạn bên trong khu dân cư cách đều cả ba con đường đó. Hỏi khi đó khách sạn sẽ cách mỗi con đường một khoảng là bao nhiêu?



Hình 9.27

Bài 29 TỨ GIÁC NỘI TIẾP

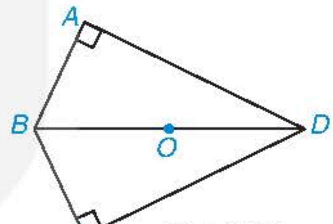
Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Tứ giác nội tiếp • Đường tròn ngoại tiếp tứ giác	• Nhận biết tứ giác nội tiếp đường tròn và giải thích định lí về tổng hai góc đối của tứ giác nội tiếp bằng 180°. • Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật, hình vuông. • Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với đường tròn.

Với mỗi tam giác cho trước luôn có một đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó. Điều này có đúng với tứ giác hay không? Trong bài học này, các em sẽ tìm hiểu vấn đề đó.

1 ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP MỘT TỨ GIÁC

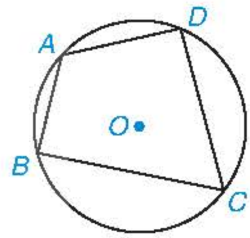
Đường tròn đi qua bốn đỉnh của một tứ giác

HĐ1 Cho tứ giác *ABCD* có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$ (H.9.28). Hãy giải thích vì sao bốn đỉnh của tứ giác *ABCD* cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung điểm *O* của đoạn thẳng *BD*.



Hình 9.28

HĐ2 Trên đường tròn (*O*), lấy các điểm *A*, *B*, *C*, *D* sao cho *ABCD* là tứ giác lồi (H.9.29). Các đường trung trực của các cạnh *AB*, *BC*, *CD*, *DA* có đồng quy hay không?

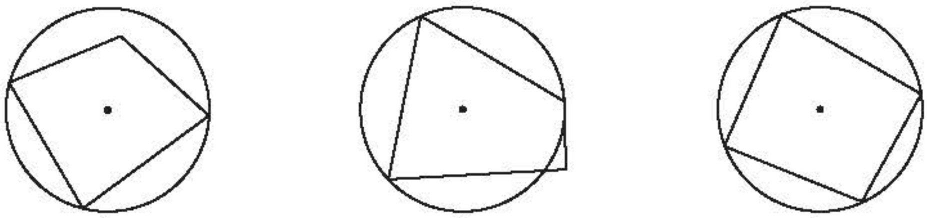


Hình 9.29

Các tứ giác *ABCD* như Hình 9.28 và Hình 9.29 được gọi là nội tiếp đường tròn (*O*) và ta cũng nói đường tròn (*O*) ngoại tiếp tứ giác *ABCD*. Cụ thể, ta có định nghĩa sau:

Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là **tứ giác nội tiếp** đường tròn (hoặc đơn giản là tứ giác nội tiếp) và đường tròn được gọi là **đường tròn ngoại tiếp tứ giác**.

Ví dụ 1 Trong các hình sau (H.9.30), hình nào vẽ một tứ giác nội tiếp một đường tròn?



Hình 9.30

Giải. Hình a và b không vẽ tứ giác nào nội tiếp một đường tròn vì mỗi tứ giác có ba đỉnh nằm trên đường tròn và đỉnh còn lại không nằm trên đường tròn.

Hình c vẽ một tứ giác nội tiếp một đường tròn vì tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn.

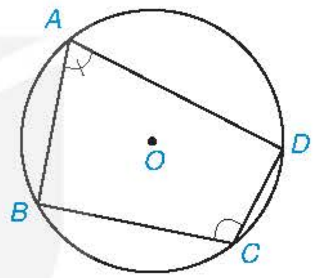
HĐ3 Em hãy đo các góc đối nhau A và C của tứ giác $ABCD$ trong HĐ2 và tính tổng $\widehat{A}+\widehat{C}$. So sánh kết quả của em với các bạn.

Tổng quát, chúng ta có định lí sau đây về tổng số đo các góc đối nhau của một tứ giác nội tiếp.

Định lí

Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180°.

GT	Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O).
KL	$\widehat{A}+\widehat{C}=180^\circ$; $\widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ$.



Hình 9.31

Chứng minh

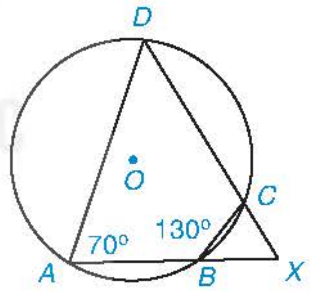
Do hai điểm B, D chia đường tròn (O) thành hai cung $\overset{\frown}{BCD}$ và $\overset{\frown}{BAD}$ nên sđ $\overset{\frown}{BCD}$ + sđ $\overset{\frown}{BAD}$ = 360°.

Do $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ là các góc nội tiếp của đường tròn (O) lần lượt chắn cung $\overset{\frown}{BCD}$ và $\overset{\frown}{BAD}$ nên

$$\widehat{A}+\widehat{C}=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BCD}+\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BAD}=180^\circ.$$

Tương tự, $\widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ$.

Ví dụ 2 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.32. Hai đường thẳng AB và DC cắt nhau tại X. Biết rằng $\widehat{DAB}=70^\circ$, $\widehat{ABC}=130^\circ$. Tính số đo của các góc BCD và BXC.



Hình 9.32

Giải. Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) nên các góc đối diện có tổng số đo bằng 180°.

Do đó $\widehat{DAB}+\widehat{BCD}=180^\circ$, hay $\widehat{BCD}=180^\circ-\widehat{DAB}=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

Tương tự, ta có: $\widehat{ABC}+\widehat{CDA}=180^\circ$, hay $\widehat{CDA}=180^\circ-\widehat{ABC}=180^\circ-130^\circ=50^\circ$.

Vì tổng các góc trong tam giác AXD bằng 180° nên:

$$\widehat{BXC}=\widehat{AXD}=180^\circ-\widehat{DAB}-\widehat{CDA}=180^\circ-70^\circ-50^\circ=60^\circ.$$

Luyện tập 1 Cho tam giác ABC có các đường cao BE, CF. Biết rằng $\widehat{B}=60^\circ$, $\widehat{C}=80^\circ$.

a) Chứng tỏ rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp một đường tròn có tâm là trung điểm của cạnh BC.

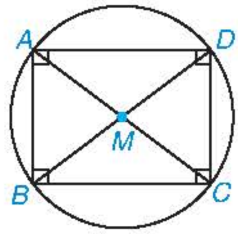
b) Tính số đo của các góc BFE và CEF.

Thử thách nhỏ 1

Cho tứ giác $ABCD$, biết rằng các đường trung trực của ba đoạn thẳng AB, AC, AD đồng quy tại một điểm. Hãy giải thích vì sao $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

2 ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP HÌNH CHỮ NHẬT VÀ HÌNH VUÔNG

Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông

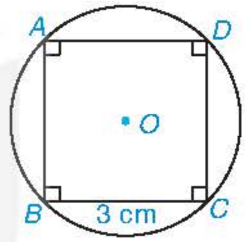


Hình 9.33

HĐ4 Vẽ hình chữ nhật $ABCD$ và giao điểm M của hai đường chéo AC và BD (H.9.33).

a) Hãy giải thích vì sao điểm M cách đều bốn đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

b) Chứng tỏ rằng hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp một đường tròn có bán kính bằng nửa đường chéo hình chữ nhật.



Hình 9.34

HĐ5 Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 3 cm (H.9.34).

Hãy xác định tâm, vẽ đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và cho biết bán kính của đường tròn đó.

Từ hai hoạt động trên, ta có khẳng định sau:

> Hình chữ nhật và hình vuông là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

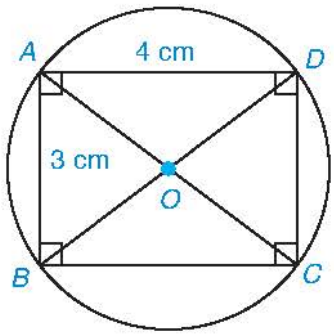
? Với điểm A cho trước nằm trên đường tròn (O), có bao nhiêu hình vuông có một đỉnh là A nội tiếp đường tròn (O)?

Ví dụ 3

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3$ cm, $AD = 4$ cm. Vẽ đường tròn (O; R) ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và tính bán kính R.

Giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vẽ đường tròn tâm O bán kính $R = OA$. Đường tròn (O; R) vừa vẽ ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ (H.9.35).



Hình 9.35

Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác ABD vuông tại A, ta có:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ nên $BD = 5$ cm.

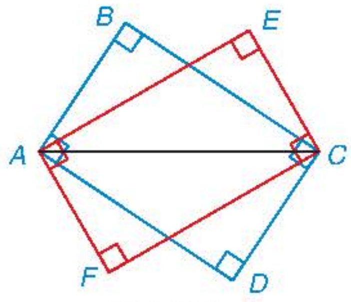
Do đó, ta có $R = \dfrac{BD}{2} = 2,5$ cm.

Luyện tập 2

Cho hình thoi $ABCD$ có các cạnh bằng 3 cm. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA, AD. Chứng tỏ rằng tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật và tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp của tứ giác đó.

Thử thách nhỏ 2

Nếu các hình chữ nhật có chung một đường chéo (ví dụ như hai hình chữ nhật $ABCD$ và $AECF$ trong Hình 9.36) thì các đỉnh của chúng có cùng nằm trên một đường tròn không?



Hình 9.36

BÀI TẬP

9.18. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo của các góc còn lại của tứ giác trong mỗi trường hợp sau:

a) $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 80^\circ$;

b) $\widehat{B} = 70^\circ$, $\widehat{C} = 90^\circ$;

c) $\widehat{C} = 100^\circ$, $\widehat{D} = 60^\circ$;

d) $\widehat{D} = 110^\circ$, $\widehat{A} = 80^\circ$.

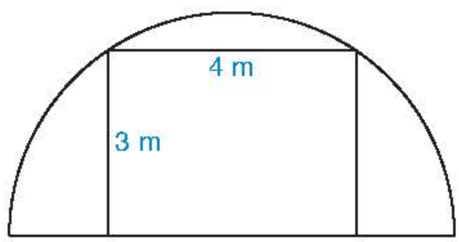
9.19. Cho điểm I nằm ngoài đường tròn (O). Qua I kẻ hai đường thẳng lần lượt cắt (O) tại bốn điểm A, B và C, D sao cho A nằm giữa B và I, C nằm giữa D và I. Chứng minh rằng $\widehat{IBD} = \widehat{ICA}, \widehat{IAC} = \widehat{IDB}$ và $IA \cdot IB = IC \cdot ID$.

9.20. Cho hình bình hành $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng $ABCD$ là hình chữ nhật.

9.21. Cho hình thang $ABCD$ (AB song song với CD) nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang cân.

9.22. Tính diện tích của một hình chữ nhật, biết rằng hình chữ nhật đó có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2,5 cm.

9.23. Người ta muốn dựng một khung cổng hình chữ nhật rộng 4 m và cao 3 m, bên ngoài khung cổng được bao bởi một khung thép dạng nửa đường tròn như Hình 9.37. Tính chiều dài của đoạn thép làm khung nửa đường tròn đó.



Hình 9.37

Bài 30 ĐA GIÁC ĐỀU

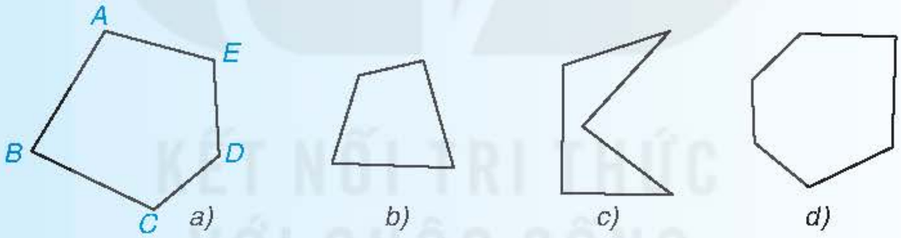
Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Đa giác, đa giác đều • Đỉnh, cạnh, góc của đa giác • Phép quay	• Nhận dạng đa giác đều. Nhận biết những hình phẳng đều trong tự nhiên, nghệ thuật, kiến trúc, công nghệ chế tạo,... • Nhận biết vẻ đẹp của thế giới tự nhiên biểu hiện qua tính đều. • Nhận biết phép quay. Mô tả được các phép quay giữ nguyên hình đa giác đều.

Chúng ta đã biết tam giác đều được tạo bởi ba cạnh bằng nhau, hình vuông được tạo bởi bốn cạnh bằng nhau. Hơn nữa, các góc trong mỗi hình đó bằng nhau. Trong bài này các em sẽ được học về những hình tương tự như vậy nhưng số cạnh có thể nhiều hơn, chúng được gọi chung là các đa giác đều.

1 ĐA GIÁC ĐỀU

Đa giác

– Những hình như Hình 9.38 được gọi chung là các đa giác.



Hình 9.38

– Các đa giác *ABCDE* (H.9.38a) là những hình gồm năm đoạn thẳng *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng. Đa giác *ABCDE* có năm đỉnh là các điểm *A*, *B*, *C*, *D*, *E*; năm cạnh là các đoạn thẳng *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA* và năm góc là các góc *EAB*, *ABC*, *BCD*, *CDE*, *DEA*.

– Nếu với một cạnh bất kì, các đỉnh không thuộc cạnh đó đều nằm về một phía đối với đường thẳng chứa cạnh đó thì đa giác được gọi là đa giác lồi. Các đa giác trong Hình 9.38 a, b, d là các đa giác lồi. Đa giác trong Hình 9.38c không phải đa giác lồi.

Đa giác đều

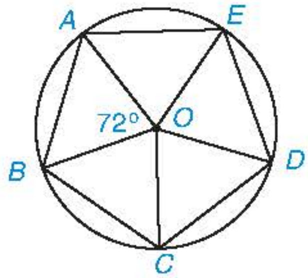
HĐ1 Ta đã biết các tam giác đều và hình vuông có các đỉnh nằm trên một đường tròn. Ta dựng một đa giác lồi 5 cạnh có các đỉnh nằm trên một đường tròn như sau:

– Vẽ đường tròn tâm *O* bán kính *R*.

– Lần lượt lấy các điểm A, B, C, D, E trên đường tròn theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ (hoặc theo chiều kim đồng hồ) sao cho:

$$\overset{\frown}{AOB} = \overset{\frown}{BOC} = \overset{\frown}{COD} = \overset{\frown}{DOE} = \overset{\frown}{EOA} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

Em hãy giải thích vì sao các cạnh và các góc của đa giác $ABCDE$ bằng nhau (H.9.39).



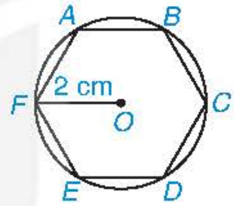
Hình 9.39

Đa giác $ABCDE$ như Hình 9.39 được gọi là một đa giác đều. Tổng quát, ta có định nghĩa:

Đa giác đều là một đa giác lồi có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

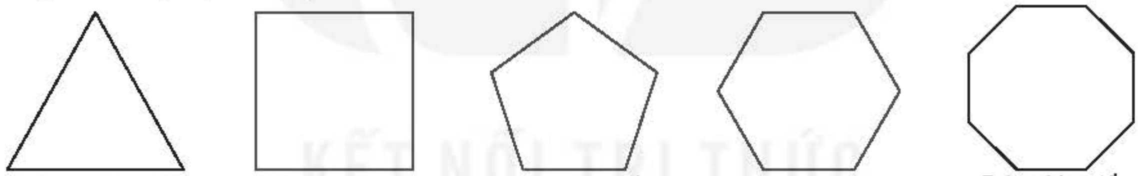
Người ta chứng minh được rằng các đỉnh của mỗi đa giác đều luôn cùng nằm trên một đường tròn, được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác, tâm đường tròn được gọi là tâm của đa giác và đa giác được gọi là nội tiếp đường tròn đó.

? Nếu một lục giác đều (đa giác đều 6 cạnh) nội tiếp đường tròn bán kính 2 cm (H.9.40) thì độ dài các cạnh của lục giác đều bằng bao nhiêu centimét? Số đo các góc của lục giác đều bằng bao nhiêu độ?



Hình 9.40

Ví dụ 1 a) Dưới đây là hình các đa giác đều thường gặp trong hình học (H.9.41).



Tam giác đều *Hình vuông* *Ngũ giác đều* *Lục giác đều* *Bát giác đều*

Hình 9.41

b) Trong nghệ thuật, kiến trúc, công nghệ chế tạo và thế giới tự nhiên có nhiều hình phẳng có dạng đa giác đều. Những hình phẳng này không chỉ đẹp vì sự cân đối hài hoà mà còn tối ưu trong việc sắp xếp và sử dụng (H.9.42).


Gạch lát hình vuông


Trang trí bằng tam giác đều


Mặt bàn hình bát giác đều

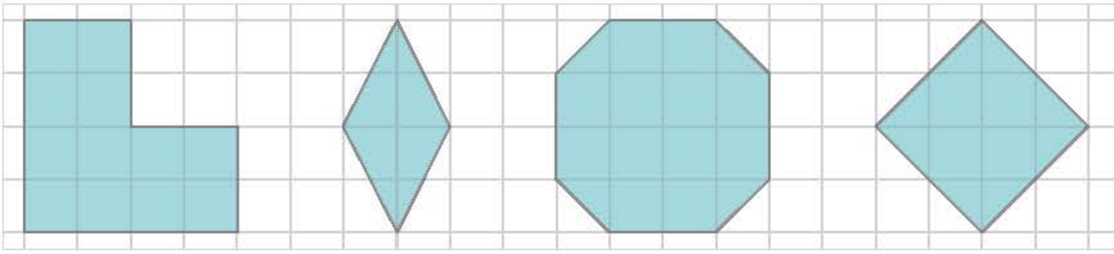

Mặt đế đinh ốc


Hộp đựng bánh kẹo


Các lỗ tổ ong

Hình 9.42

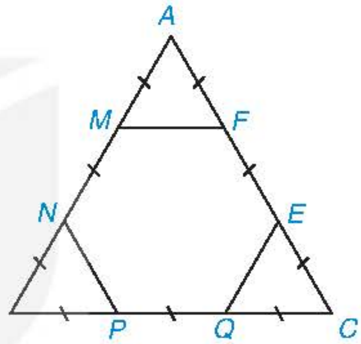
Ví dụ 2 Trong các hình phẳng dưới đây, hình phẳng nào có dạng là một đa giác đều?



Hình a *Hình b* *Hình c* *Hình d*

Giải. Ta thấy đa giác trong hình a không phải đa giác lồi, đa giác trong hình b là hình thoi có các góc không bằng nhau, đa giác trong hình c là bát giác có các cạnh không bằng nhau, đa giác trong hình d là hình vuông. Do vậy chỉ có hình phẳng trong hình d có dạng đa giác đều.

Ví dụ 3 Cho tam giác đều *ABC* có cạnh 6 cm. Trên cạnh *AB* lấy các điểm *M*, *N*; trên cạnh *BC* lấy các điểm *P*, *Q*; trên cạnh *CA* lấy các điểm *E*, *F*, sao cho các đoạn thẳng *AM, MN, NB, BP, PQ, QC, CE, EF, FA* đều bằng 2 cm như Hình 9.43. Hỏi *MNPQEF* có là một lục giác đều hay không?



Hình 9.43

Giải (H.9.43).

Theo Hình 9.43, ta thấy *MNPQEF* là một đa giác lồi.

Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$. Theo định lí Thalès đảo cho tam giác *ABC* và đường thẳng *MF* thì $MF \parallel BC$.

Suy ra $\frac{MF}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$. Do đó $MF = \frac{BC}{3} = 2$ cm. Tương tự, $NP = QE = 2$ cm.

Vậy lục giác *MNPQEF* có tất cả các cạnh bằng nhau.

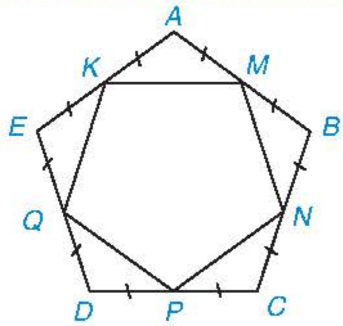
Mặt khác, tam giác *AMF* là tam giác đều vì $AM = MF = FA = 2$ cm nên

$$\widehat{FMA} = 60^\circ \text{ và } \widehat{FMN} = 180^\circ - \widehat{FMA} = 120^\circ.$$

Tương tự các góc tại các đỉnh *N, P, Q, E, F* của lục giác *MNPQEF* đều bằng nhau và bằng 120°. Vậy lục giác *MNPQEF* có các cạnh và các góc bằng nhau. Do đó *MNPQEF* là lục giác đều.

Luyện tập 1

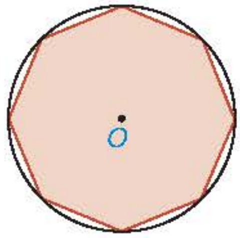
Cho *M*, *N*, *P*, *Q*, *K* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB*, *BC*, *CD*, *DE* và *EA* của ngũ giác đều *ABCDE* (H.9.44). Hỏi *MNPQK* có phải là ngũ giác đều hay không?



Hình 9.44

Thử thách nhỏ 1

Cho một bát giác đều (đa giác đều 8 cạnh) nội tiếp một đường tròn tâm O (H.9.45). Hỏi mỗi góc của bát giác đều có số đo bằng bao nhiêu?



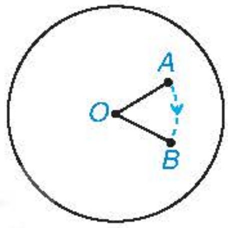
Hình 9.45

2 PHÉP QUAY

Phép quay

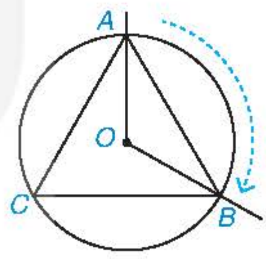
HĐ2 Để bày bàn ăn cho nhiều người, các nhà hàng thường sử dụng bàn xoay có hình tròn và quay được quanh tâm của hình tròn. Đặt một chiếc cốc nhỏ ở vị trí điểm A trên bàn xoay hình tròn với tâm O sao cho điểm A khác điểm O. Khi quay bàn xoay thuận chiều kim đồng hồ (H.9.46) thì chiếc cốc di chuyển đến một vị trí mới là điểm B.

Em hãy so sánh khoảng cách từ hai điểm A và B đến điểm O. Hai điểm A, B có cùng nằm trên một đường tròn tâm O hay không?



Hình 9.46

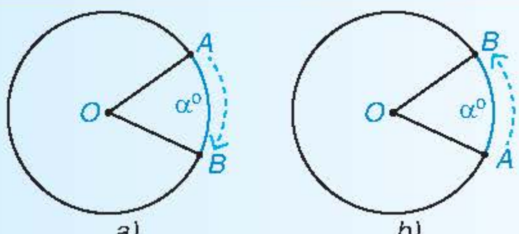
HĐ3 Trên bàn xoay tâm O, vẽ tam giác đều ABC nội tiếp một đường tròn (O) và hai tia OA, OB (H.9.47). Khi quay bàn xoay thuận chiều kim đồng hồ để tia OA di chuyển trùng với tia OB (ở vị trí ban đầu), điểm A có di chuyển đến vị trí của điểm B không và sẽ di chuyển trên cung tròn nào của đường tròn (O)? Khi đó, điểm C sẽ di chuyển đến vị trí của điểm nào?



Hình 9.47

Trong HĐ2 và HĐ3, ta đã thực hiện một phép quay tâm O để quay tia OA theo chiều kim đồng hồ đến tia OB và điểm A khi di chuyển tạo thành cung AB của đường tròn $(O; OA)$. Ta nói phép quay này biến điểm A thành điểm B. Cụ thể ta có khái niệm phép quay như sau:

> Phép quay thuận chiều α^o ($0^o < \alpha^o < 360^o$) tâm O giữ nguyên điểm O, biến điểm A khác điểm O thành điểm B thuộc đường tròn $(O; OA)$ sao cho tia OA quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OB thì điểm A tạo nên cung AB có số đo α^o (H.9.48a). Định nghĩa tương tự cho phép quay ngược chiều α^o tâm O (H.9.48b).
>
> Phép quay 0^o và phép quay 360^o giữ nguyên mọi điểm.

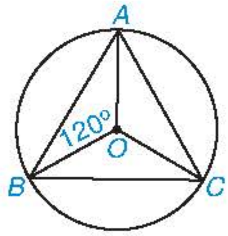


Hình 9.48

a) Phép quay ngược chiều 180° tâm O biến điểm A thành điểm A'. Hỏi điểm A' có đối xứng với điểm A qua O hay không?

b) Nếu phép quay thuận chiều α^o tâm O biến điểm A thành điểm B thì phép quay ngược chiều α^o tâm O có biến điểm B thành điểm A hay không?

Ví dụ 4 Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.49. Hãy cho biết các phép quay ngược chiều lần lượt 120°, 240°, 360° với tâm O sẽ biến các đỉnh A, B, C thành những điểm nào?



Hình 9.49

Giải. Các phép quay ngược chiều lần lượt 120°, 240°, 360° với tâm O biến các điểm A, B, C thành những điểm tương ứng được cho bởi bảng sau:

Phép quay ngược chiều \ Đỉnh	A	B	C
120°	B	C	A
240°	C	A	B
360°	A	B	C

Người ta nói ba phép quay trên biến tam giác đều ABC thành chính nó, hay các phép quay này giữ nguyên tam giác đều ABC. Tổng quát, ta có khái niệm và kết quả sau:

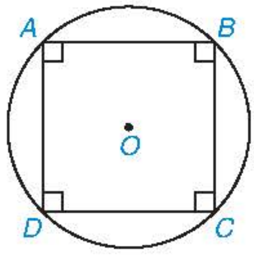
> Một phép quay được gọi là giữ nguyên một đa giác đều $\mathcal{H}$ nếu phép quay đó biến mỗi điểm của $\mathcal{H}$ thành một điểm của $\mathcal{H}$.
>
> Người ta chỉ ra rằng nếu một phép quay biến các đỉnh của đa giác đều $\mathcal{H}$ thành các đỉnh của $\mathcal{H}$ thì phép quay đó giữ nguyên $\mathcal{H}$.

Luyện tập 2

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.50.

a) Phép quay thuận chiều 90° tâm O biến các điểm A, B, C, D thành những điểm nào? Phép quay này có giữ nguyên hình vuông $ABCD$ không?

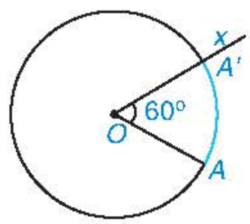
b) Hãy liệt kê thêm ba phép quay khác với tâm O theo chiều kim đồng hồ giữ nguyên hình vuông $ABCD$.



Hình 9.50

Thực hành Cho điểm O và điểm A khác điểm O (H.9.51).

Phép quay ngược chiều 60° tâm O biến điểm A thành điểm A'. Xác định điểm A' theo hướng dẫn sau: Vẽ đường tròn $(O; OA)$ và tia Ox sao cho $\widehat{AOx} = 60^\circ$, tia Ox cắt đường tròn $(O; OA)$ tại điểm A' (H.9.51).



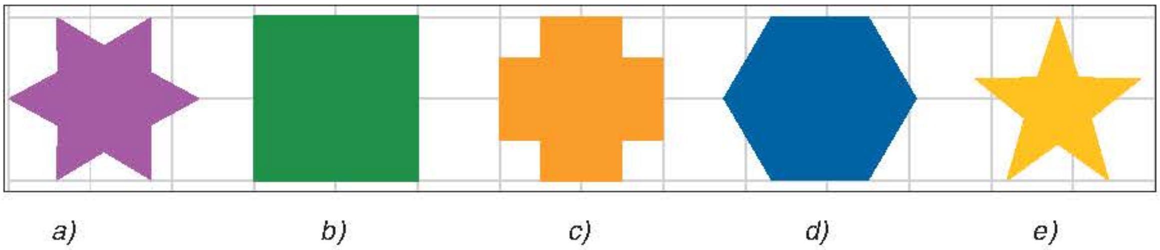
Hình 9.51

Thử thách nhỏ 2

Hãy liệt kê 6 phép quay giữ nguyên một lục giác đều nội tiếp một đường tròn (O).

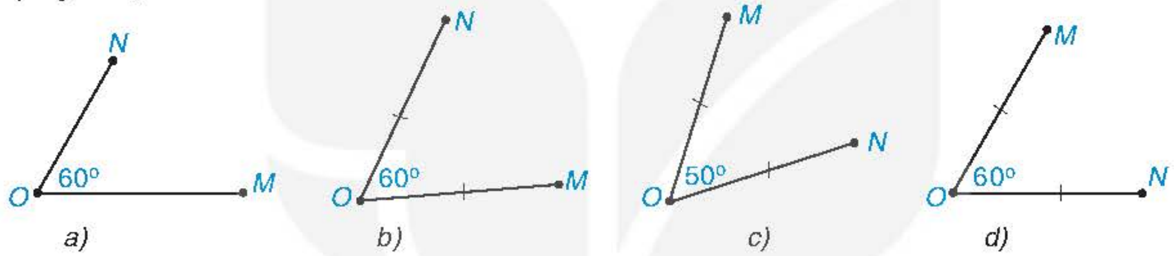
BÀI TẬP

9.24. Trong các hình phẳng sau (H.9.52), hình nào là hình phẳng có dạng đa giác đều?



Hình 9.52

9.25. Trong các hình dưới đây (H.9.53), hình nào vẽ hai điểm M và N thoả mãn phép quay thuận chiều 60^o tâm O biến điểm M thành điểm N?

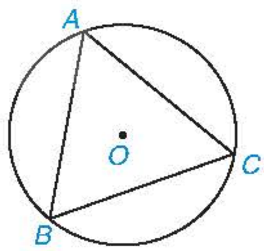


Hình 9.53

9.26. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính 2 cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

9.27. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^{\circ}$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $MBNPDQ$ là lục giác đều.

9.28. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.54. Phép quay ngược chiều 60^o tâm O biến các điểm A, B, C lần lượt thành các điểm D, E, F. Chứng minh rằng $ADBECF$ là một lục giác đều.



Hình 9.54

9.29. Liệt kê năm phép quay giữ nguyên một ngũ giác đều nội tiếp một đường tròn tâm O.

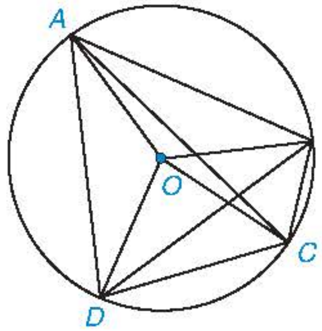
9.30. Cho vòng quay mặt trời gồm tám cabin như Hình 9.55. Hỏi để cabin A di chuyển đến vị trí cao nhất thì vòng quay phải quay thuận chiều kim đồng hồ quanh tâm bao nhiêu độ?

Hình 9.55

LUYỆN TẬP CHUNG

Ví dụ 1

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng $\widehat{AOB} = 120^\circ$, $\widehat{BOC} = 40^\circ$, $\widehat{COD} = 80^\circ$. Tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$.



Hình 9.56

Giải (H.9.56). Xét đường tròn (O), ta có:

$\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 60^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$);

$\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 20^\circ$ (các góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$);

$\widehat{CAD} = \frac{1}{2}\widehat{COD} = 40^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{CD}$).

Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 60^\circ$ và $\widehat{ADC} = \widehat{ADB} + \widehat{BDC} = 80^\circ$.

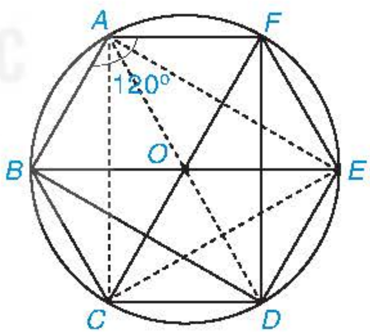
Vì các góc đối nhau của tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tổng bằng 180° nên $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 100^\circ$ và $\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 120^\circ$.

Ví dụ 2

Cho lục giác đều $ABCDEF$.

a) Tính số đo các góc BCF, BDF, BEF.

b) Gọi O là tâm của lục giác đều. Hãy chỉ ra ba phép quay tâm O giữ nguyên tam giác ACE.



Hình 9.57

Giải (H.9.57).

a) Lục giác đều $ABCDEF$ có các góc bằng 120° và nội tiếp một đường tròn (O). Khi đó, các tứ giác $ABCF$, $ABDF$, $ADEF$ nội tiếp (O).

Vì vậy $\widehat{BCF} = 180^\circ - \widehat{BAF} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

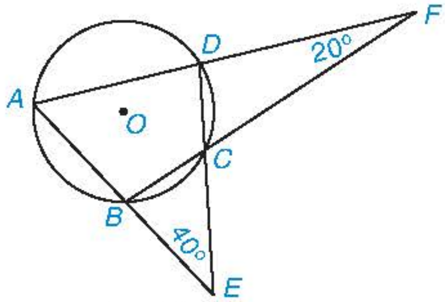
Tương tự, $\widehat{BDF} = \widehat{BEF} = 60^\circ$.

b) Tương tự câu a, các góc của tam giác ACE đều bằng 60°, hay ACE là tam giác đều và nội tiếp đường tròn (O). Như vậy, ba phép quay tâm O giữ nguyên tam giác ACE là ba phép quay thuận chiều lần lượt 120°, 240°, 360° với tâm O

BÀI TẬP

9.31. Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF. Chứng minh rằng $BCEF$, $CAFD$, $ABDE$ là những tứ giác nội tiếp.

9.32. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F như Hình 9.58. Biết $\widehat{BEC} = 40^\circ$ và $\widehat{DFC} = 20^\circ$, tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$.



Hình 9.58

9.33. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4 cm. Tính chu vi, diện tích của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

9.34. Biết rằng bốn đỉnh A, B, C, D của một hình vuông cùng nằm trên một đường tròn (O) theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ. Phép quay thuận chiều 45^o biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm E, F, G, H.

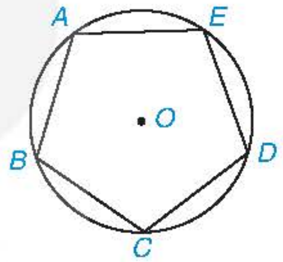
a) Vẽ đa giác $EAFBGCHD$.

b) Đa giác $EAFBGCHD$ có phải là một bát giác đều hay không? Vì sao?

9.35. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.59.

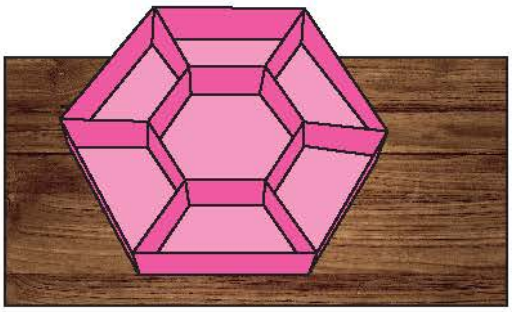
a) Hãy tìm một phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm C.

b) Phép quay trên sẽ biến các điểm B, C, D, E lần lượt thành những điểm nào? Phép quay này có giữ nguyên ngũ giác đều $ABCDE$ không?



Hình 9.59

9.36. Người ta muốn làm một khay đựng bánh kẹo hình lục giác đều có cạnh 10 cm và chia thành 7 ngăn gồm một lục giác đều nhỏ và 6 hình thang cân như Hình 9.60. Hỏi lục giác đều nhỏ phải có cạnh bằng bao nhiêu để nó có diện tích bằng hai lần diện tích mỗi hình thang?



Hình 9.60

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A. TRẮC NGHIỆM

9.37. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Góc nội tiếp có số đo bằng số đo cung bị chắn.

B. Góc có hai cạnh chứa các dây cung của đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.

C. Góc nội tiếp có số đo bằng một nửa số đo cung bị chắn.

D. Góc có đỉnh nằm trên đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.

9.38. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp một đường tròn có $\widehat{A}-\widehat{C}=100^\circ$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\widehat{A}=80^\circ$. B. $\widehat{C}=80^\circ$. C. $\widehat{B}+\widehat{D}=100^\circ$. D. $\widehat{A}=140^\circ$.

9.39. Đa giác nào dưới đây **không** nội tiếp một đường tròn?

A. Đa giác đều. B. Hình chữ nhật.

C. Hình bình hành. D. Tam giác.

B. TỰ LUẬN

9.40. Cho tam giác *ABC* có các đường cao *BE*, *CF* cắt nhau tại *H*. Gọi *M* là trung điểm của *BC* và *I* là trung điểm của *AH*. Chứng minh rằng:

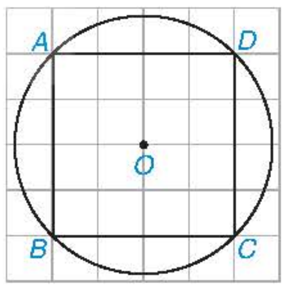
a) Tứ giác *AEHF* nội tiếp đường tròn tâm *I*;

b) *ME*, *MF* tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tứ giác *AEHF*.

9.41. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (*O*). Gọi *M*, *N*, *P* lần lượt là trung điểm của các cạnh *BC*, *CA*, *AB*. Chứng minh rằng các tứ giác *ANOP*, *BPOM*, *CMON* là các tứ giác nội tiếp.

9.42. Cho một hình lục giác đều và một hình vuông cùng nội tiếp một đường tròn. Biết rằng hình vuông có cạnh bằng 3 cm. Tính chu vi và diện tích của một hình lục giác đều đã cho.

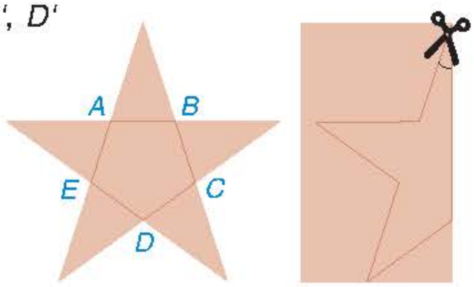
9.43. a) Phép quay thuận chiều 45° tâm *O* biến các điểm *A*, *B*, *C*, *D* lần lượt thành các điểm *A'*, *B'*, *C'*, *D'* (H.9.61). Hãy vẽ tứ giác *A'B'C'D'*.



Hình 9.61

b) Phép quay trong câu a biến các điểm *A'*, *B'*, *C'*, *D'* thành những điểm nào?

9.44. Bạn Lan muốn cắt hình ngôi sao có dạng như Hình 9.62 (trong đó *ABCDE* là một ngũ giác đều). Lan gấp đôi tờ giấy, vẽ một nửa ngôi sao và cắt theo nét vẽ. Góc tạo bởi lưỡi kéo và nếp gấp lúc đầu bằng bao nhiêu?



Hình 9.62

Chương X
MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN

HÌNH HỌC TRỰC QUAN

Có rất nhiều các vật dụng trong đời sống hằng ngày có dạng hình trụ, hình cầu hay hình nón. Chương này sẽ giúp các em tìm hiểu một vài yếu tố quan trọng của các hình này. Qua đó các em sẽ biết cách tính, chẳng hạn một thùng hình trụ chứa được bao nhiêu lít nước, hay làm một chiếc nón giấy cho đội văn nghệ như thế nào,...

Bài 31 HÌNH TRỤ VÀ HÌNH NÓN

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Hình trụ • Hình nón • Đường sinh	• Mô tả đường sinh, chiều cao, bán kính đáy của hình trụ; đỉnh, đường sinh, chiều cao, bán kính đáy của hình nón. • Tạo lập hình trụ và hình nón. • Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ, hình nón. • Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với việc tính thể tích, diện tích xung quanh của hình trụ, hình nón.

Đèn lồng, nón lá ở Hình 10.1 là những vật dụng quen thuộc có dạng hình trụ, hình nón. Trong bài học này, chúng ta sẽ tìm hiểu một số yếu tố cơ bản về hình trụ, hình nón và những vấn đề thực tiễn gắn với việc tính diện tích, thể tích của chúng.

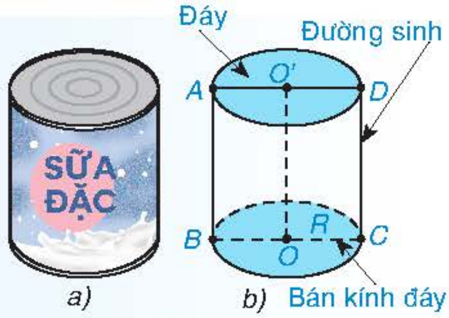
Hình 10.1

1 HÌNH TRỤ

Nhận biết hình trụ

1. Hộp sữa (H.10.2a) có dạng một hình trụ.

Một số yếu tố của hình trụ được chỉ ra trên Hình 10.2b.



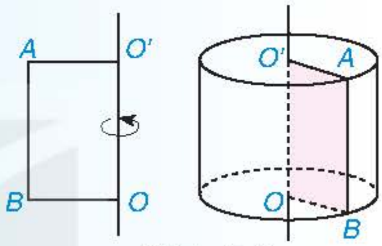
Hình 10.2

2. Khi quay hình chữ nhật $O'ABO$ một vòng quanh OO' cố định thì ta được một hình trụ (H.10.3), trong đó:

– Hai đáy của hình trụ là hai hình tròn bằng nhau $(O'; O'A)$ và $(O; OB)$.

– Mỗi đường sinh là một vị trí của AB khi quay. Vậy hình trụ có vô số đường sinh. $R = O'A = OB$ gọi là bán kính đáy của hình trụ.

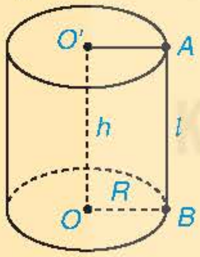
– Độ dài của đoạn OO' gọi là chiều cao của hình trụ. Các đường sinh bằng nhau và bằng OO'.



Hình 10.3

Nêu một số đồ vật có dạng hình trụ trong đời sống.

Một số yếu tố của hình trụ:



Chiều cao: $h = O'O$.

Bán kính đáy: $R = OB$.

Đường sinh: $l = AB$.

Ví dụ 1

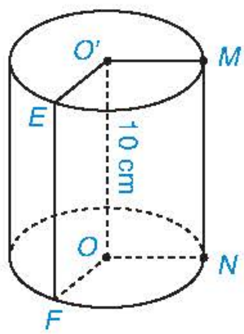
Hãy kể tên một bán kính đáy và một đường sinh của hình trụ trong Hình 10.4. Cho biết chiều cao của hình trụ này.

Giải

$O'M$ là một bán kính đáy của hình trụ.

EF là một đường sinh của hình trụ.

Chiều cao $O'O = 10$ cm.

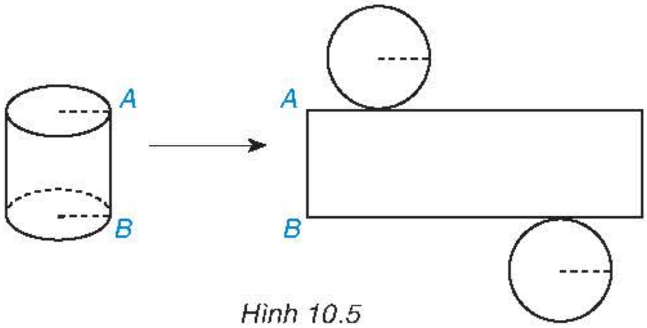


Hình 10.4

Luyện tập 1

Kể tên các bán kính đáy và đường sinh còn lại của hình trụ có trong Hình 10.4.

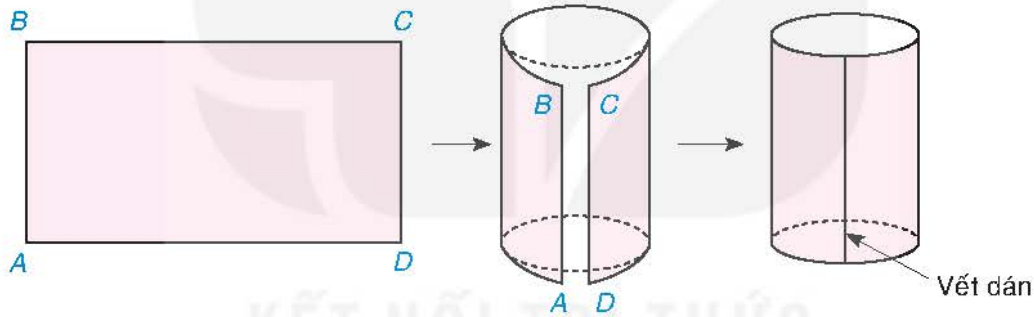
Chú ý. Từ một hình trụ, nếu ta cắt rời hai đáy và cắt theo một đường sinh nào đó rồi trải phẳng ra thì ta được một hình phẳng (gồm hai hình tròn và một hình chữ nhật) như Hình 10.5 gọi là *hình khai triển của hình trụ* đã cho.



Hình 10.5

Thực hành 1

Chuẩn bị một băng giấy cứng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 8$ cm, $BC = 15$ cm. Cuộn băng giấy lại sao cho hai cạnh AB và DC sát vào nhau như Hình 10.6 (dùng băng keo dán), ta được một hình trụ (không có đáy). Hãy cho biết chiều cao và chu vi đáy của hình trụ đó.



Hình 10.6

Diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ

HĐ1 Người ta coi diện tích hình chữ nhật $ABCD$ chính là diện tích xung quanh của hình trụ được tạo thành (xem Thực hành 1). Cho hình trụ có chiều cao $h = 9$ cm và bán kính đáy $R = 5$ cm. Tính diện tích mặt xung quanh của hình trụ.

Một cách tổng quát, ta có công thức tính *diện tích mặt xung quanh* (gọi tắt là *diện tích xung quanh*, kí hiệu là S_{xq}) của hình trụ như sau:

$$S_{xq} = 2\pi Rh,$$

trong đó R là bán kính đáy,

h là chiều cao.

HĐ2 Hãy nhắc lại công thức tính thể tích của hình lăng trụ đứng tam giác (hoặc hình lăng trụ đứng tứ giác) có diện tích đáy S và chiều cao h.

Tương tự, đối với hình trụ ta cũng có công thức tính thể tích V như sau:

$$V = S_{\text{đáy}} \cdot h = \pi R^2 h,$$

trong đó $S_{\text{đáy}}$ là diện tích đáy,

R là bán kính đáy,

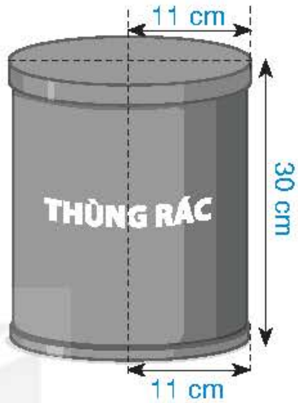
h là chiều cao.

Ví dụ 2

Bác Khôi dự định sơn lại một thùng rác có dạng hình trụ (sơn mặt ngoài và một đáy là nắp) có bán kính đáy bằng 11 cm, chiều cao bằng 30 cm (H.10.7).

a) Tính diện tích phần cần sơn của thùng rác.

b) Tính thể tích của thùng rác (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^3).



Hình 10.7

Giải

a) Phần cần sơn bao gồm mặt xung quanh và một đáy của hình trụ.

Theo đề bài, ta có $R = 11$ cm và $h = 30$ cm. Do đó:

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 11 \cdot 30 = 660\pi \text{ (cm}^2\text{)};$$

$$S_{\text{đáy}} = \pi R^2 = \pi \cdot 11^2 = 121\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích cần sơn là $S = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = (660 + 121)\pi = 781\pi$ (cm^2).

b) Thể tích của thùng rác là $V = S_{\text{đáy}} \cdot h = 121\pi \cdot 30 = 3\,630\pi \approx 11\,404$ (cm^3).

Luyện tập 2

Một thùng nước có dạng hình trụ với chiều cao bằng 1,6 m và bán kính đáy bằng 0,5 m.

a) Tính diện tích xung quanh của thùng nước.

b) Hỏi thùng chứa được bao nhiêu lít nước?

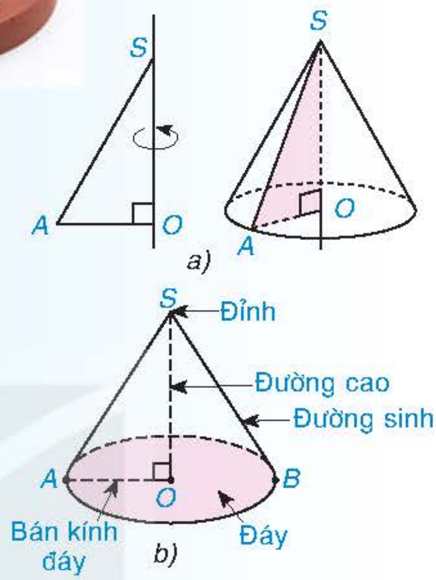
(Coi chiều dày của thùng không đáng kể và làm tròn kết quả ở câu b đến hàng đơn vị của lít).

2 HÌNH NÓN

Nhận biết hình nón

1. Đồ chơi, chi tiết cơ khí (H.10.8) có dạng một hình nón. Một số yếu tố của hình nón được thể hiện trên Hình 10.9b.

Hình 10.8



Hình 10.9

2. Khi quay tam giác vuông SOA (vuông ở O) một vòng quanh SO cố định thì ta được một hình nón **đỉnh** S (H.10.9a), trong đó:

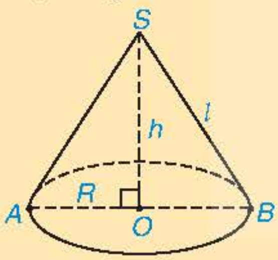
– **Đáy** của hình nón là hình tròn $(O; OA)$, $R = OA$ gọi là **bán kính đáy** của hình nón.

– Mỗi **đường sinh** là một vị trí của SA khi quay. Vậy hình nón có vô số đường sinh dài bằng nhau.

– SO gọi là **đường cao** của hình nón. Độ dài đoạn SO được gọi là chiều cao của hình nón.

Nêu một số đồ vật có dạng hình nón trong đời sống.

Một số yếu tố của hình nón:



Đỉnh: S.

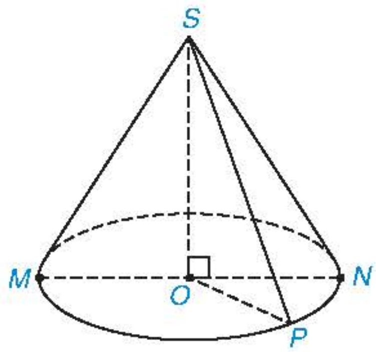
Chiều cao: $h = SO$.

Đường sinh: $l = SA = SB$.

Bán kính đáy: $R = OA$.

Ví dụ 3

Hãy kể tên đỉnh, đường cao, một bán kính đáy và một đường sinh của hình nón trong Hình 10.10.



Hình 10.10

Giải

Đỉnh: S.

Đường cao: SO.

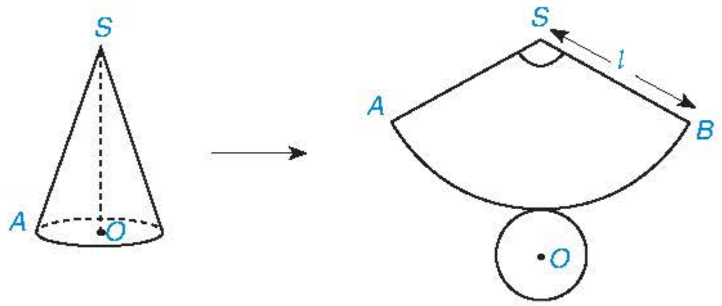
Một bán kính đáy: OM.

Một đường sinh: SM.

Luyện tập 3

Kể tên các bán kính đáy và các đường sinh còn lại của hình nón trong Hình 10.10.

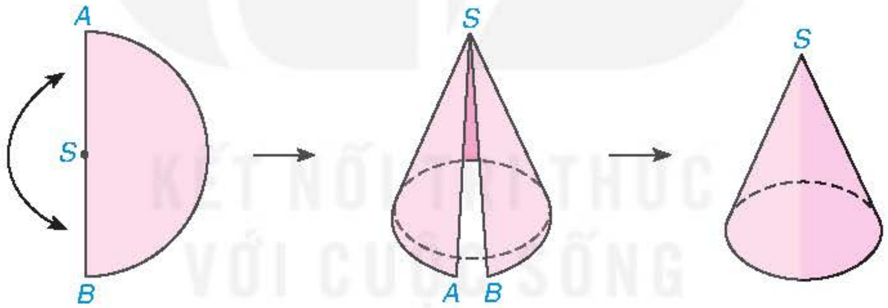
Chú ý. Cho một hình nón. Nếu ta cắt rời đáy và cắt mặt xung quanh của nó theo đường sinh SA rồi trải phẳng ra thì được một hình phẳng (gồm một hình tròn và một hình quạt tròn) như Hình 10.11 gọi là *hình khai triển của hình nón* đã cho.



Hình 10.11

Thực hành 2

Cắt một nửa hình tròn bằng giấy cứng, có đường kính $AB = 20$ cm và tâm là S. Cuộn nửa hình tròn đó lại sao cho SA và SB sát vào nhau như Hình 10.12 (dùng băng keo dán), ta được một hình nón đỉnh S. Hãy cho biết độ dài đường sinh và chu vi đáy của hình nón đó.



Hình 10.12

Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón

HĐ3 Người ta coi diện tích của hình quạt tròn SAB (xem Thực hành 2) chính là diện tích xung quanh của hình nón được tạo thành. Cho hình nón có đường sinh $l = 9$ cm và bán kính đáy $r = 5$ cm. Tính diện tích mặt xung quanh của hình nón.

Một cách tổng quát, ta có công thức tính *diện tích mặt xung quanh* (gọi tắt là *diện tích xung quanh*, kí hiệu là S_{xq}) của hình nón như sau:

$$S_{xq} = \pi r l,$$

trong đó r là bán kính đáy,

l là độ dài đường sinh.

HĐ4 Hãy nhắc lại công thức tính thể tích của hình chóp tam giác đều (hoặc hình chóp tứ giác đều) có diện tích đáy S và chiều cao h.

Tương tự, ta có công thức tính thể tích của hình nón như sau:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

trong đó $S_{\text{đáy}}$ là diện tích đáy,

r là bán kính đáy,

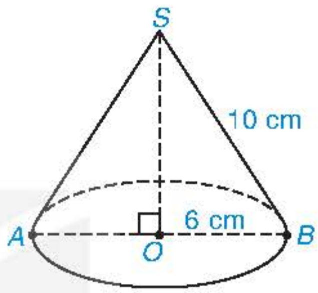
h là chiều cao.

Ví dụ 4

Cho một hình nón có độ dài đường sinh bằng 10 cm, bán kính đáy bằng 6 cm (H.10.13).

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón.

b) Tính thể tích của hình nón.



Hình 10.13

Giải

a) Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi$ (cm^2).

b) Tam giác SOB vuông tại O nên theo định lí Pythagore ta có:

$OB^2 + SO^2 = SB^2$

$6^2 + SO^2 = 10^2$

$SO^2 = 100 - 36 = 64$

$SO = 8$ cm.

Thể tích của hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$ (cm^3).

Luyện tập 4

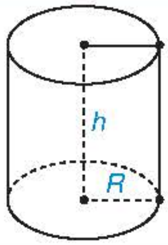
Tính diện tích xung quanh và thể tích của một hình nón có độ dài đường sinh bằng 13 cm và chiều cao bằng 12 cm.

Vận dụng

Người ta đổ muối thu hoạch được trên cánh đồng muối thành từng đống có dạng hình nón với chiều cao khoảng 0,9 m và đường kính đáy khoảng 1,6 m. Hỏi mỗi đống muối có bao nhiêu đềximét khối muối? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

BÀI TẬP

10.1. Thay dấu "?" bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau vào vở:

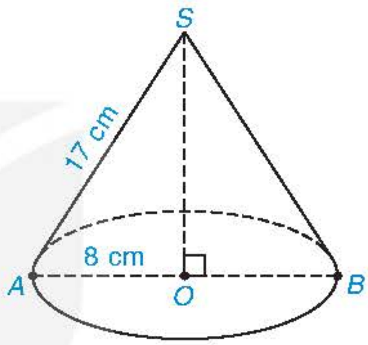
Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	4	6	?	?
	3	5	?	?
	?	10	?	50π
	8	?	192π	?

10.2. Cho hình chữ nhật *ABCD* có $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm. Quay hình chữ nhật quanh cạnh *AB* một vòng, ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ tạo thành.

10.3. Khi cho tam giác *SOA* vuông tại *O* quay quanh cạnh *SO* một vòng, ta được một hình nón. Biết $OA = 8$ cm, $SA = 17$ cm (H.10.14).

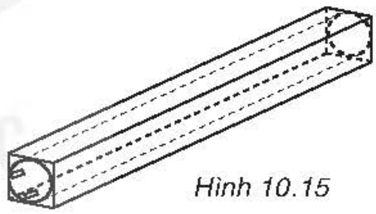
a) Tính diện tích xung quanh của hình nón.

b) Tính thể tích của hình nón.



Hình 10.14

10.4. Một bóng đèn huỳnh quang có dạng hình trụ được đặt khít vào một hộp giấy cứng dạng hình hộp chữ nhật (H.10.15). Hộp giấy có chiều dài bằng 0,6 m, đáy là hình vuông cạnh 4 cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích của bóng đèn (giả sử bề dày của hộp giấy không đáng kể).

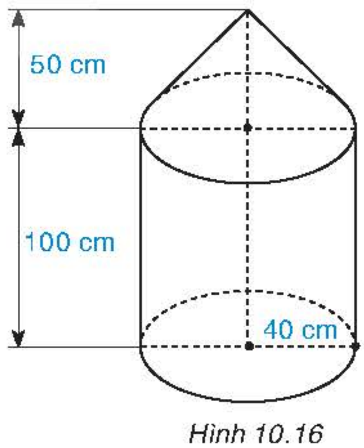


Hình 10.15

10.5. Một dụng cụ gồm một phần có dạng hình trụ và một phần có dạng hình nón với các kích thước như Hình 10.16.

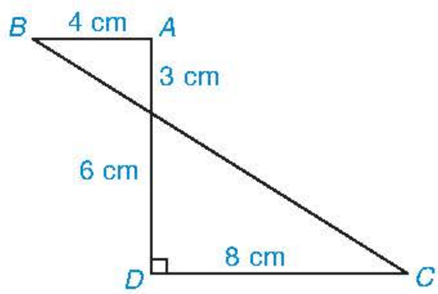
a) Tính thể tích của dụng cụ này.

b) Tính diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính đáy của dụng cụ).



Hình 10.16

10.6. Tính thể tích của hình tạo thành khi cho hình *ABCD* quay quanh *AD* một vòng (H.10.17).



Hình 10.17

Bài 32 HÌNH CẦU

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Hình cầu • Mặt cầu	• Mô tả tâm, bán kính của hình cầu, mặt cầu. • Tạo lập hình cầu, mặt cầu. Nhận biết phần chung của mặt phẳng và hình cầu. • Tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu. • Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với việc tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu.

Quả bóng đá theo tiêu chuẩn FIFA (liên đoàn bóng đá thế giới) có dạng hình cầu với đường kính khoảng 22 cm (H.10.18). Khi bơm căng quả bóng thì thể tích quả bóng bằng bao nhiêu?

Hình 10.18

1 MẶT CẦU VÀ HÌNH CẦU

Nhận biết mặt cầu và hình cầu

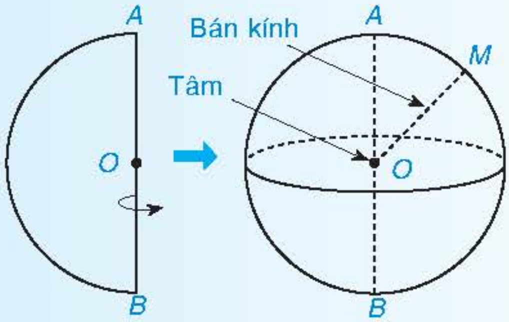
1. Ta đã biết quả bóng (H.10.19) có dạng hình cầu. Một số yếu tố của hình cầu được chỉ ra trên Hình 10.20.

2. • Khi quay *nửa đường tròn* quanh đường kính AB cố định của nó, ta được một mặt cầu.

• Khi quay *nửa hình tròn* quanh đường kính AB cố định của nó, ta được một hình cầu.

Hình 10.19

Tâm và bán kính của nửa đường tròn (hình tròn) cũng là tâm và bán kính của mặt cầu (hình cầu).



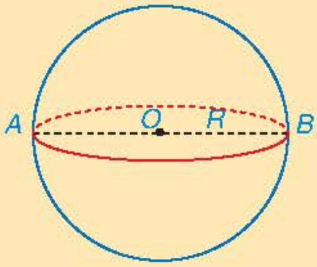
Hình 10.20

Tìm một vài hình ảnh của hình cầu, mặt cầu trong thực tế.

Một số yếu tố của mặt cầu:

Tâm mặt cầu: O.

Bán kính mặt cầu: $R = OB$.



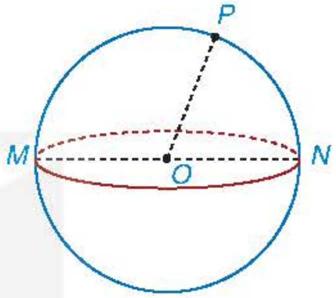
Ví dụ 1

Hãy kể tên tâm và một bán kính của mặt cầu trong Hình 10.21.

Giải

Tâm mặt cầu: O.

Một bán kính: OP.



Hình 10.21

Luyện tập 1

Kể tên các bán kính còn lại của mặt cầu trong Hình 10.21.

Cắt mặt cầu, hình cầu bởi một mặt phẳng

HĐ1 Sọ dừa được xem là có dạng hình cầu. Người ta cắt sọ dừa khô để làm gáo dừa (H.10.22a). Em thấy miệng gáo có dạng hình gì?

HĐ2 Khi cắt đôi một quả cam có dạng hình cầu (H.10.22b), em thấy mặt cắt có dạng hình gì?

a) *b)*

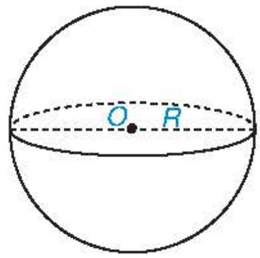
Hình 10.22

Một cách tổng quát:

1. Nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung của mặt phẳng và hình cầu (còn gọi là *mặt cắt*) là một hình tròn.

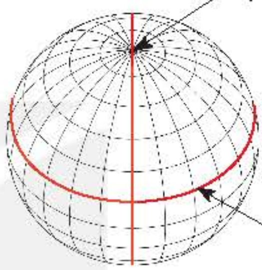
2. Nếu cắt một mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng thì phần chung của mặt phẳng và mặt cầu là một đường tròn (H.10.23).

- Khi mặt phẳng đi qua tâm thì đường tròn đó có bán kính R và được gọi là *đường tròn lớn*.
- Khi mặt phẳng không đi qua tâm thì đường tròn đó có bán kính nhỏ hơn R.



Hình 10.23

Ví dụ 2



Trái Đất của chúng ta được xem là có dạng hình cầu (nên còn gọi là "Địa Cầu") và đường Xích đạo là một đường tròn lớn, dài khoảng 40 075 km. Tính đường kính của Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của km).

Giải

Do đường Xích đạo là một đường tròn lớn nên bán kính của nó bằng bán kính của Trái Đất.

Nếu gọi R là bán kính Trái Đất thì độ dài của đường Xích đạo là $2R\pi \approx 40\ 075$ (km).
Do đó, đường kính của Trái Đất là $2R \approx 40\ 075 : \pi \approx 12\ 756{,}27$ (km).

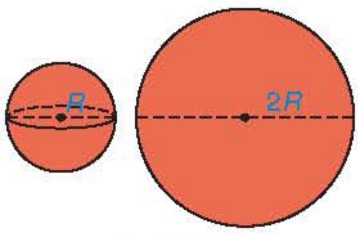
Luyện tập 2

Khi cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng đi qua tâm của hình cầu đó được một hình tròn có diện tích 25π cm^2. Tính bán kính của hình cầu.

2 DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH HÌNH CẦU

Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu

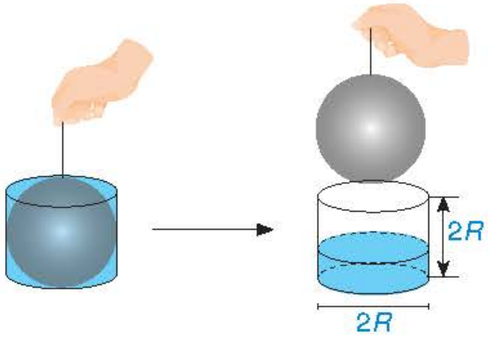
HĐ3 Người ta thấy rằng lượng sơn cần dùng để sơn kín một mặt cầu bán kính R bằng với lượng sơn cần dùng để sơn kín một hình tròn bán kính $2R$ (khi độ dày của lớp sơn như nhau) (H.10.24). Từ đó, em hãy dự đoán công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R.



Hình 10.24

HĐ4 Sử dụng một hình cầu bán kính R và một cốc thuỷ tinh có dạng hình trụ bán kính đáy R, chiều cao $2R$. Ban đầu để hình cầu nằm khít trong chiếc cốc có đầy nước.

Ta nhấc hình cầu ra khỏi cốc thuỷ tinh hình trụ (H.10.25).



Hình 10.25

Đo độ cao cột nước còn lại trong chiếc cốc, ta thấy độ cao này chỉ bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của chiếc cốc hình trụ. Từ đó, em hãy dự đoán công thức tính thể tích hình cầu bán kính R.

Người ta chứng minh được công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu có bán kính R là:

$$S = 4\pi R^2.$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ví dụ 3

Tính diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu có bán kính bằng 10 cm.

Giải

Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi$ (cm^2).

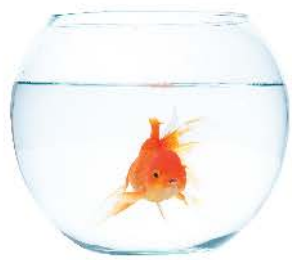
Thể tích hình cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4000\pi}{3}$ (cm^3).

Vận dụng 1

Em hãy trả lời câu hỏi của *tình huống mở đầu*.

Ví dụ 4

Bạn Trang có một bể cá có dạng một phần hình cầu với đường kính bằng 20 cm (H.10.26). Khi nuôi cá, Trang thường đổ vào bể lượng nước có thể tích bằng $\frac{2}{3}$ thể tích của hình cầu. Tính thể tích nước bạn Trang đã đổ vào bể cá. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^3).



Hình 10.26

Giải

Bán kính của hình cầu là 20 : 2 = 10 (cm).

Thể tích của hình cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4\,000\pi}{3}$ (cm^3).

Thể tích nước bạn Trang sử dụng để đổ vào bể cá là:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4000\pi}{3} = \frac{8000\pi}{9} \approx 2\,793 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

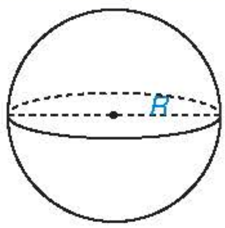
Vận dụng 2

Khinh khí cầu đầu tiên được phát minh bởi anh em nhà Montgolfier (người Pháp) vào năm 1782. Chuyến bay đầu tiên của hai anh em trên khinh khí cầu được thực hiện vào ngày 4 tháng 6 năm 1783 trên bầu trời Place des Cordeliers ở Annonay (nước Pháp) (theo *cand.com.vn*). Giả sử một khinh khí cầu có dạng hình cầu với đường kính bằng 11 m. Tính diện tích mặt khinh khí cầu đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của m^2).

Hình 10.27

BÀI TẬP

10.7. Thay dấu "?" bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau vào vở:

Hình	Bán kính (cm)	Diện tích mặt cầu (cm^2)	Thể tích hình cầu (cm^3)
	3	?	?
	?	100π	?
	?	?	972π

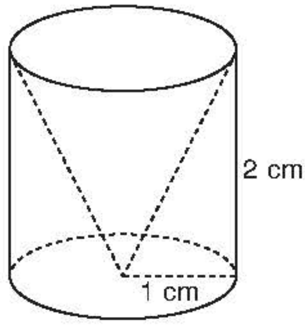
10.8. Một cốc đựng ba viên kem có dạng hình cầu, mỗi viên đều có bán kính bằng 3 cm. Tính thể tích của kem đựng trong cốc (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^3).

10.9. Một quả bóng đá có chu vi của đường tròn lớn bằng 68,5 cm. Quả bóng được ghép nối bởi các miếng da hình lục giác đều màu trắng và đen, mỗi miếng có diện tích bằng 49,83 cm^2. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu miếng da để làm quả bóng trên? (Coi phần mép khâu không đáng kể).

10.10. Hằng năm cứ dịp Tết đến Xuân về, dân làng Thuý Lĩnh, phường Lĩnh Nam, quận Hoàng Mai, Hà Nội lại tổ chức lễ hội vật cầu truyền thống. Trong lễ hội có sử dụng một quả cầu được tiện bằng gỗ, đường kính khoảng 35 cm, sơn đỏ mặt ngoài. Tính diện tích mặt ngoài của quả cầu gỗ nói trên.

LUYỆN TẬP CHUNG

Ví dụ 1 Một hình trụ có bán kính đáy bằng 1 cm và chiều cao bằng 2 cm. Người ta khoan đi một phần có dạng hình nón như Hình 10.28 thì thể tích phần còn lại của hình trụ bằng bao nhiêu?



Hình 10.28

Giải

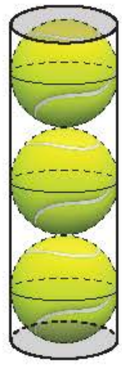
Thể tích của hình trụ là $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$ (cm^3).

Thể tích phần bị khoan có dạng hình nón là:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 2 = \frac{2\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích phần còn lại là $V = V_1 - V_2 = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ (cm^3).

Ví dụ 2 Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ chứa vừa khít ba quả bóng tennis xếp theo chiều dọc (H.10.29). Các quả bóng tennis có dạng hình cầu, đường kính 6,4 cm.


Hình 10.29

a) Tính thể tích hộp đựng bóng (bỏ qua bề dày của vỏ hộp, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^3).

b) Tính thể tích bên trong hộp đựng bóng không bị chiếm bởi ba quả bóng tennis.

Giải

a) Chiều cao hộp đựng bóng hình trụ là $h = 6{,}4 \cdot 3 = 19{,}2$ (cm).

Bán kính đáy hộp đựng bóng hình trụ là $R = 6{,}4 : 2 = 3{,}2$ (cm).

Thể tích hộp đựng bóng hình trụ nói trên là:

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 3{,}2^2 \cdot 19{,}2 \approx 618 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

b) Bán kính quả bóng tennis là $R' = 6{,}4 : 2 = 3{,}2$ (cm).

Thể tích của ba quả bóng tennis có dạng hình cầu là:

$$V' = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \cdot R'^3\right) = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \cdot 3{,}2^3\right) \approx 412 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích bên trong hộp đựng bóng không bị chiếm bởi ba quả bóng tennis là:

$$V'' = V - V' \approx 618 - 412 = 206 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

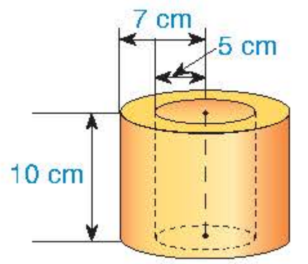
BÀI TẬP

10.11. Cho một hình trụ có đường kính của đáy bằng với chiều cao và có thể tích bằng 2π cm^3.

a) Tính chiều cao của hình trụ.

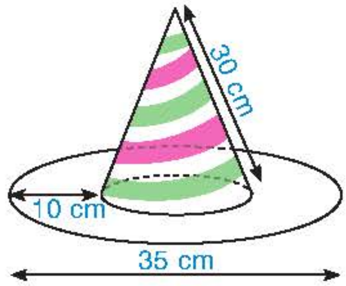
b) Diện tích toàn phần của hình trụ bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy hình trụ. Tính diện tích toàn phần của hình trụ trên.

10.12. Một vòng bi bằng thép có hình dạng (phần thép giữa hai hình trụ) và kích thước như Hình 10.30. Tính thể tích của vòng bi đó.



Hình 10.30

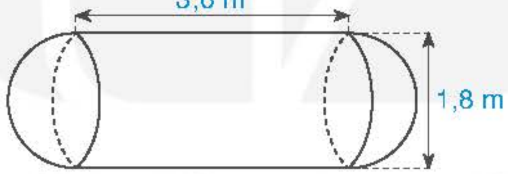
10.13. Chiếc mũ của chú hề với các kích thước như Hình 10.31. Hãy tính tổng diện tích vải cần để làm chiếc mũ (coi mép khâu không đáng kể và làm tròn kết quả đến hàng phần chục của cm^2).



Hình 10.31

10.14. Người ta nhấn chìm hoàn toàn 5 viên bi có dạng hình cầu vào một chiếc cốc hình trụ đựng đầy nước, mỗi viên bi có đường kính 2 cm. Tính lượng nước tràn ra khỏi cốc.

10.15. Một bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu có đường kính bằng 1,8 m và một hình trụ có chiều cao bằng 3,6 m (H.10.32). Tính thể tích của bồn chứa xăng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của m^3).

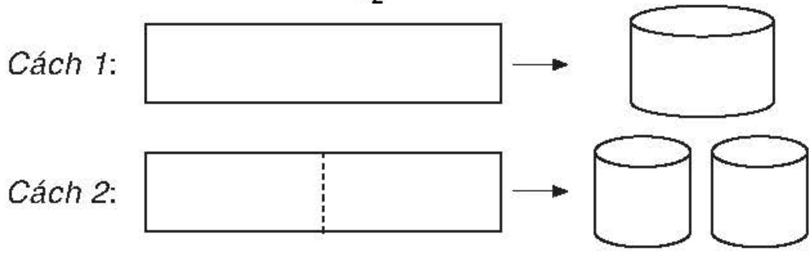


Hình 10.32

10.16. Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 50 cm × 240 cm, người ta làm mặt xung quanh của các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50 cm, theo hai cách sau (H.10.33):

- *Cách 1:* Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng nước hình trụ.
- *Cách 2:* Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau hình chữ nhật, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo *Cách 1* và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo *Cách 2*. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ (giả sử các mối hàn là không đáng kể).



Hình 10.33

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG X

A. TRẮC NGHIỆM

10.17. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ một vòng quanh cạnh AB ta được một hình trụ có bán kính đáy bằng độ dài đoạn thẳng

A. AB. B. CD. C. AD. D. AC.

10.18. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm. Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AC ta được một hình nón có chiều cao bằng

A. 4 cm. B. 3 cm. C. 5 cm. D. 9 cm.

10.19. Diện tích mặt cầu có đường kính 10 cm là

A. 10π cm^2. B. 400π cm^2. C. 50π cm^2. D. 100π cm^2.

10.20. Cho hình nón có bán kính đáy $R = 2$ cm, độ dài đường sinh $l = 5$ cm. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\frac{10\pi}{3}$ cm^2. B. $\frac{50\pi}{3}$ cm^2. C. 20π cm^2. D. 10π cm^2.

10.21. Một mặt phẳng đi qua tâm hình cầu, cắt hình cầu theo một hình tròn có diện tích 9π cm^2. Thể tích của hình cầu bằng

A. 972π cm^3. B. 36π cm^3. C. 6π cm^3. D. 81π cm^3.

B. TỰ LUẬN

10.22. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 20 cm, chiều cao bằng 30 cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

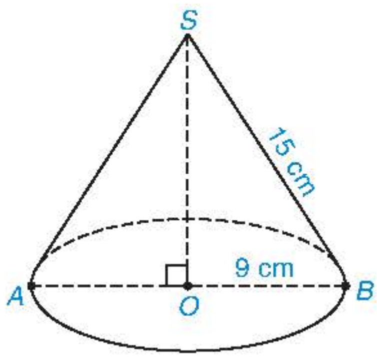
b) Tính thể tích của hình trụ.

10.23. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 9 cm, độ dài đường sinh bằng 15 cm (H.10.34).

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón.

b) Tính thể tích của hình nón.

c) Diện tích toàn phần của hình nón bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy. Tính diện tích toàn phần của hình nón đã cho.



Hình 10.34

10.24. Quả bóng rổ sử dụng trong thi đấu có dạng hình cầu với đường kính bằng 24 cm (H.10.35). Hãy tính:

a) Diện tích bề mặt quả bóng.

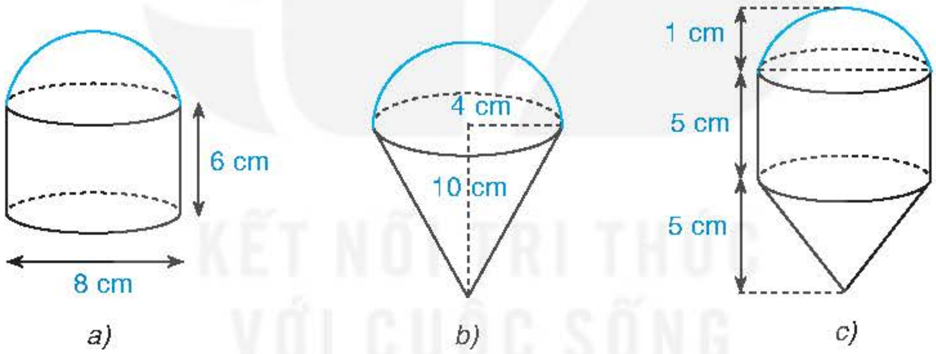
b) Thể tích của quả bóng.

Hình 10.35

10.25. Đèn trời có dạng hình trụ không có một đáy với đường kính đáy bằng 0,8 m và thân đèn cao 1 m (H.10.36). Tính diện tích giấy dán bên ngoài đèn trời.

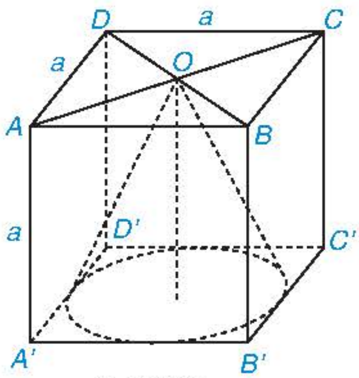
Hình 10.36

10.26. Các hình dưới đây (H.10.37) được tạo thành từ các nửa hình cầu, hình trụ và hình nón (có cùng bán kính đáy). Tính thể tích của các hình đó theo kích thước đã cho.



Hình 10.37

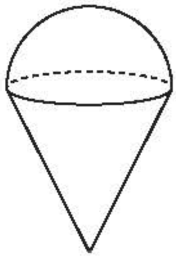
10.27. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính thể tích của hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn tiếp xúc với các cạnh của hình vuông $A'B'C'D'$ (H.10.38).



Hình 10.38

10.28. Bạn Khôi cho một hòn đá cảnh vào một bể nuôi cá hình trụ có đường kính đáy bằng 20 cm thì nước trong bể dâng lên 3 cm. Hỏi hòn đá cảnh đó có thể tích bằng bao nhiêu?

10.29. Một chiếc kem ốc quế gồm hai phần: Phần phía dưới dạng hình nón có chiều cao gấp đôi bán kính đáy, phần trên là nửa hình cầu có đường kính bằng đường kính đáy của hình nón phía dưới (H.10.39). Thể tích phần kem phía trên bằng 200 cm^3. Tính thể tích của cả chiếc kem.



Hình 10.39

10.30. Mái nhà hát Cao Văn Lầu và Trung tâm triển lãm Văn hoá Nghệ thuật tỉnh Bạc Liêu có hình dáng ba chiếc nón lá lớn nhất Việt Nam (H.10.40). Tính diện tích một mái nhà hình nón có đường kính bằng 45 m và chiều cao bằng 24 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của m^2).

Hình 10.40

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ VỚI PHẦN MỀM GEOGEBRA

Mục tiêu

Sử dụng phần mềm GeoGebra để vẽ đồ thị của hàm số, giải phương trình một ẩn và giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

Khởi động phần mềm GeoGebra, chọn Complex Adaptive System (CAS) để thực hiện giải phương trình một ẩn và hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn; chọn Graphic 2 để vẽ đồ thị của hàm số.

1 GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Để giải phương trình nói chung, phương trình bậc hai một ẩn nói riêng, ta dùng lệnh Solve(<phương trình>) hoặc Solutions(<phương trình>) trên ô lệnh của cửa sổ CAS, kết quả sẽ được hiển thị ngay bên dưới.

1 Solutions$(5x^2+2x-3=0)$

$\rightarrow \left\{-1, \frac{3}{5}\right\}$

1 Solutions$\left(x+\frac{1}{x}=2\right)$

$\rightarrow \{1\}$

Nghiệm của phương trình được biểu diễn dưới dạng tập hợp. Chú ý, kí hiệu {} thể hiện phương trình vô nghiệm.

1 Solutions$(3x^2-5x-61=0)$

$\rightarrow \{\}$

1 Solutions$\left(x^2 - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x - 4\sqrt{6} = 0\right)$

$\rightarrow \left\{2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right\}$

1 Solve$\left(\sqrt{5}\,x^2 + 2x - \sqrt{5} = 0\right)$

$\rightarrow \left\{x = \dfrac{-\sqrt{30}-\sqrt{5}}{5}, x = \dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{5}}{5}\right\}$

Chú ý.

- Để nhập căn bậc hai của *a* ta gõ “sqrt(*a*)”.
- Để nhập x^2 ta gõ “x^2”.

2 GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Để giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể sử dụng một trong hai phương pháp sau:

Cách 1. Sử dụng câu lệnh Solve({<phương trình thứ nhất>, <phương trình thứ hai>}, {<biến số thứ nhất>, <biến số thứ hai>}) hoặc Solutions({<phương trình thứ nhất>, <phương trình thứ hai>}, {<biến số thứ nhất>, <biến số thứ hai>}) trên ô lệnh của cửa sổ CAS, kết quả sẽ được hiển thị ngay bên dưới.

1 Solutions$(\{3x + 5y = 1, 2x - y = -8\}, \{x, y\})$

$\rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix}$

Kết quả bên có nghĩa: hệ có nghiệm $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2. \end{cases}$

1 Solutions$(\{2x - y = 1, 4x - 2y = 2\}, \{x, y\})$

$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} & y \end{pmatrix}$

Kết quả bên có nghĩa: hệ có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ y \text{ tuỳ ý.} \end{cases}$

1 Solve$(\{5x + y = 4, x - y = 2\}, \{x, y\})$

$\rightarrow \{\{x = 1, y = -1\}\}$

1 Solve$(\{3x - y = 1, 3x - y = -1\}, \{x, y\})$

$\rightarrow \{\}$

Cách 2. Sử dụng lệnh Intersect (<phương trình thứ nhất>, <phương trình thứ hai>) trên cửa sổ CAS để tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng có phương trình tương ứng.

Intersect$(3x + y = 0, x + y = 2)$

$\rightarrow \{(-1, 3)\}$

3 VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Khởi động GeoGebra và chọn đồng thời hai chế độ Graphic 2 và CAS để vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ và hàm số bậc nhất $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

– Nhập công thức hàm số $y = ax^2$ và $y = ax + b$ vào từng ô lệnh trong cửa sổ CAS.

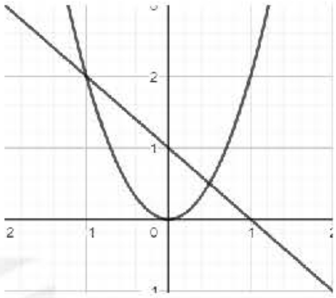
– Nháy chuột chọn nút ○ ở đầu mỗi ô lệnh để vẽ đồ thị hàm số trong cửa sổ Graphic 2.

1 g : y = 2 x^2

→ **g : y = 2 x^2**

2 h : y = −x + 1

→ **h : y = −x + 1**



– Sử dụng lệnh Intersect (<hàm số thứ nhất>, <hàm số thứ hai>) trên cửa sổ CAS. Toạ độ các giao điểm của hai đồ thị hàm số sẽ hiển thị bên dưới ở dạng tập hợp.

3 Intersect$(y = 2x^2, y = -x + 1)$

→ $\left\{(-1, 2), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$

Chú ý. Nếu muốn sử dụng giao diện tiếng Việt, sau khi khởi động GeoGebra, chọn Options → Language → Vietnamese/Tiếng Việt. Khi đó, thay vì cú pháp lệnh tiếng Anh như trình bày ở trên, ta dùng cú pháp lệnh tiếng Việt tương ứng như trong bảng sau (lưu ý rằng cú pháp lệnh tiếng Việt có thể khác nhau tuỳ theo phiên bản GeoGebra).

Lệnh	Cú pháp lệnh tiếng Anh	Cú pháp lệnh tiếng Việt
Giải phương trình	Solve(<*phương trình*>)	Giai(<*phương trình*>)
	Solutions(<*phương trình*>)	CacNghiem(<*phương trình*>)
Giải hệ phương trình	Solve({<*phương trình thứ nhất*>, <*phương trình thứ hai*>}, {<*biến số thứ nhất*>, <*biến số thứ hai*>})	Giai({<*phương trình thứ nhất*>, <*phương trình thứ hai*>}, {<*biến số thứ nhất*>, <*biến số thứ hai*>})
	Solutions({<*phương trình thứ nhất*>, <*phương trình thứ hai*>}, {<*biến số thứ nhất*>, <*biến số thứ hai*>})	CacNghiem({<*phương trình thứ nhất*>, <*phương trình thứ hai*>}, {<*biến số thứ nhất*>, <*biến số thứ hai*>})
Tìm giao điểm của hai đồ thị	Intersect (<*hàm số thứ nhất*>, <*hàm số thứ hai*>)	GiaoĐiem (<*hàm số thứ nhất*>, <*hàm số thứ hai*>)

THỰC HÀNH

Sử dụng phần mềm GeoGebra thực hiện các yêu cầu sau:

1. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 4x + 10 = 0$;

b) $x + \frac{9}{x-1} = 7$;

c) $x^2 - 2\left(\sqrt{3} - 1\right)x - 2\sqrt{3} = 0$;

d) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$.

2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + \sqrt[3]{3}y = 6; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x - 3y = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x\sqrt{5} - \left(1 + \sqrt{3}\right)y = 1 \\ \left(1 - \sqrt{3}\right)x + y\sqrt{5} = 1. \end{cases}$

3. Cho đường thẳng (d): $y = 2x + \sqrt{3}$ và parabol (P): $y = x^2$.

a) Vẽ đường thẳng (d) và parabol (P) trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Tìm toạ độ giao điểm của (d) và (P).

VẼ HÌNH ĐƠN GIẢN VỚI PHẦN MỀM GEOGEBRA

Mục tiêu

Sử dụng phần mềm GeoGebra để vẽ đường tròn, hình quạt tròn và các hình khối đã học như hình cầu, hình nón và hình trụ.

Ở những lớp dưới, các em đã được học về vẽ các đa giác thường gặp bằng phần mềm GeoGebra. Trong bài này, chúng ta sẽ thực hành dùng phần mềm GeoGebra để vẽ đường tròn, hình quạt tròn và các hình khối đã học như hình cầu, hình nón và hình trụ.

HĐ1 Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác

Chúng ta sẽ sử dụng nhóm công cụ đường thẳng và đường tròn trong GeoGebra để vẽ đường tròn ngoại tiếp một tam giác.

Bước 1. Vẽ tam giác *ABC*.

Chọn  → Chọn 

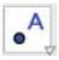
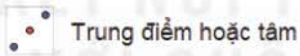
→ Lần lượt chọn điểm *A*, *B*, *C* và nháy nút trái chuột vào điểm *A* lần nữa ta được tam giác *ABC*.

Bước 2. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

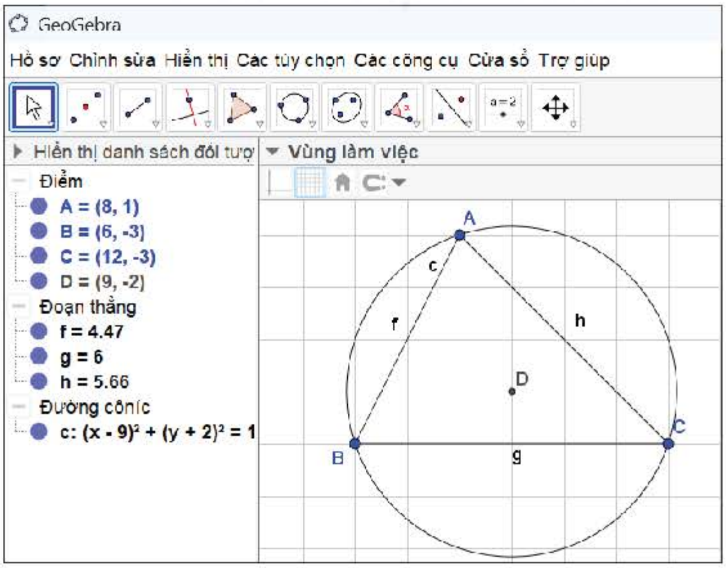
Chọn  → Chọn 

→ Lần lượt nháy nút trái chuột vào các điểm *A*, *B*, *C* ta được đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

Bước 3. Hiển thị tâm của đường tròn.

Chọn  → Chọn 

→ Nháy nút trái chuột vào đường tròn vừa vẽ ta được tâm *D*.



Hình T.1

Kết quả: Ta được đường tròn (*D*) ngoại tiếp tam giác *ABC* như Hình T.1.

Điểm D có nằm trên trung trực các đoạn thẳng AB, BC và CA không? Hãy dùng lệnh vẽ đường trung trực Đường trung trực trong nhóm công cụ vẽ các đường đặc biệt để kiểm tra điều đó.

HĐ2 Vẽ đường tròn nội tiếp tam giác

Chúng ta sẽ sử dụng nhóm công cụ đường thẳng và đường tròn trong GeoGebra để vẽ đường tròn nội tiếp một tam giác.

Bước 1. Vẽ tam giác ABC như Bước 1 trong HĐ1.

Bước 2. Vẽ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

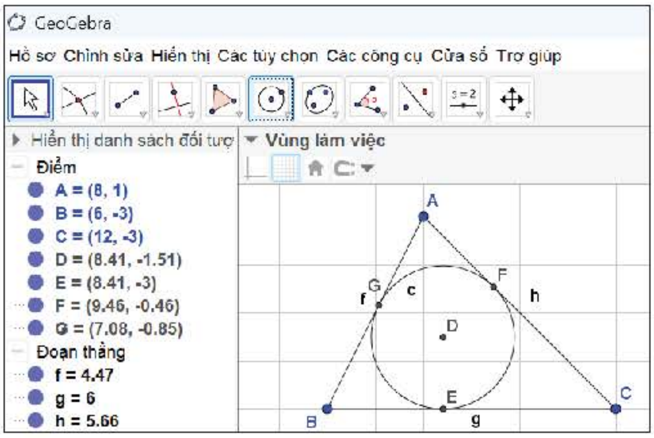
- Chọn → Chọn Đường phân giác → Lần lượt nháy nút trái chuột vào các điểm A, B, C ta được đường phân giác góc B.
- Chọn → Chọn Đường phân giác → Lần lượt nháy nút trái chuột vào các điểm A, C, B ta được đường phân giác góc C.
- Chọn → Chọn Giao điểm của 2 đối tượng → Nháy nút trái chuột vào hai đường phân giác vừa vẽ bên trên ta được điểm D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bước 3. Vẽ đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

- Chọn → Chọn Đường vuông góc → Lần lượt nháy nút trái chuột vào điểm D và đoạn thẳng BC ta được đường thẳng qua D vuông góc với BC.
- Chọn → Chọn Giao điểm của 2 đối tượng → Nháy nút trái chuột vào đoạn thẳng BC và đường thẳng vừa vẽ ta được tiếp điểm E của đường tròn nội tiếp trên cạnh BC.
- Chọn → Chọn Đường tròn khi biết tâm và 1 điểm trên đường tròn → Nháy chuột lần lượt vào điểm D và E ta được đường tròn (D) nội tiếp tam giác ABC.

Bước 4. Vẽ các tiếp điểm trên AC và AB.

- Chọn → Chọn Giao điểm của 2 đối tượng → Nháy nút trái chuột vào đường tròn (D) và đoạn thẳng AC ta được tiếp điểm F.
- Chọn → Chọn Giao điểm của 2 đối tượng → Nháy nút trái chuột vào đường tròn (D) và đoạn thẳng AB ta được tiếp điểm G.



Hình T.2

Kết quả: Ẩn các đường phân giác và đường vuông góc đi, ta được đường tròn (D) nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm trên BC, CA, AB là E, F, G như Hình T.2.

❓ Điểm D có nằm trên đường phân giác góc A không? Hãy dùng lệnh vẽ đường phân giác **Đường phân giác** trong nhóm công cụ vẽ các đường đặc biệt để kiểm tra điều đó.

HĐ3 Vẽ hình quạt tròn

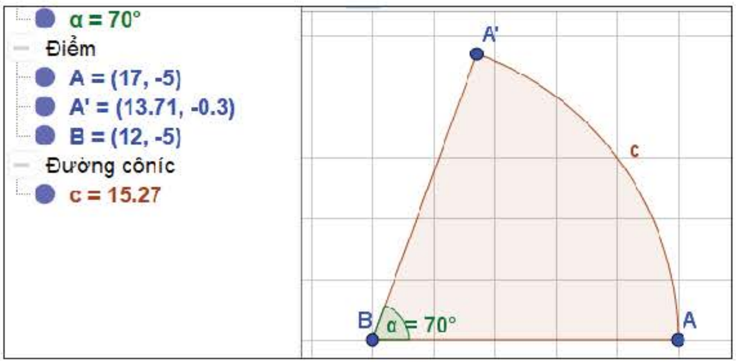
Chúng ta sẽ sử dụng nhóm công cụ góc và đường tròn trong GeoGebra để vẽ hình quạt tròn với số đo góc ở tâm cho trước.

Bước 1. Vẽ góc 70°.

Chọn → Chọn **Góc với độ lớn cho trước** → Lần lượt chọn các điểm A, B và nhập số đo 70 vào cửa sổ mới hiện ra, chọn "ngược chiều kim đồng hồ", ta được ba điểm A, B, A' sao cho góc ABA' có số đo bằng 70°.

Bước 2. Vẽ hình quạt tròn.

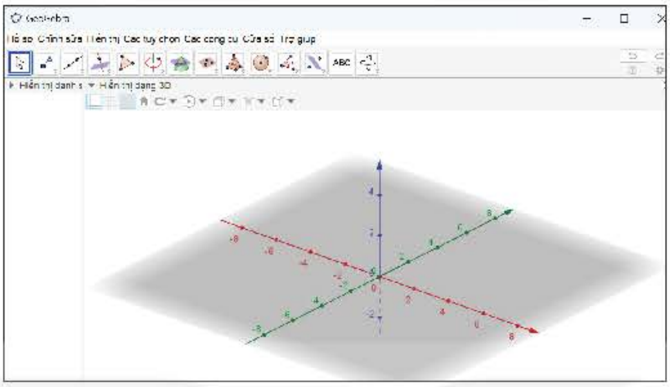
Chọn → Chọn **Hình quạt khi biết tâm và qua 2 điểm trên hình quạt** → Lần lượt nháy nút trái chuột vào các điểm B, A, A' ta được hình quạt tròn với góc ở tâm B bằng 70° như Hình T.3.



Hình T.3

HĐ3 Vẽ hình cầu, hình nón, hình trụ

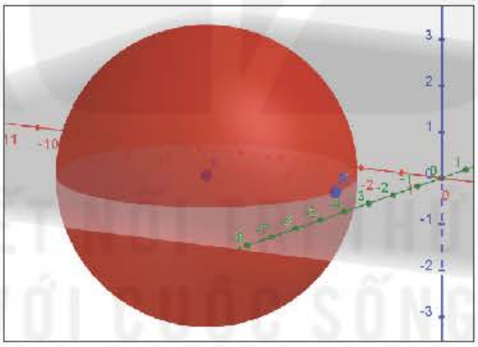
Để vẽ được các hình không gian ba chiều, ta chọn thẻ "Hiển thị" trên thanh công cụ của GeoGebra và chọn "Hiển thị dạng 3D". Vùng làm việc của GeoGebra sẽ hiển thị như Hình T.4. Trong đó phần màu ghi thể hiện là mặt phẳng dưới đáy nơi ta có thể chọn các điểm.



Hình T.4

a) Vẽ mặt cầu tâm *A* đi qua điểm *B* như sau:

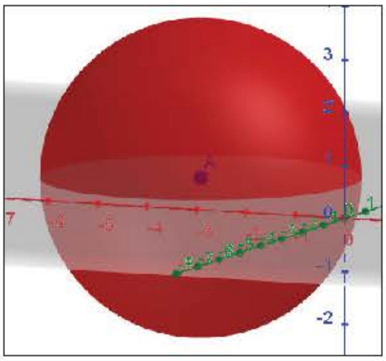
Chọn  → Chọn  Mặt cầu biết tâm và qua 1 điểm → Lần lượt chọn các điểm *A*, *B* ta được mặt cầu tâm *A* đi qua *B* (H.T.5).



Hình T.5

b) Vẽ mặt cầu tâm *A* bán kính bằng 3 như sau:

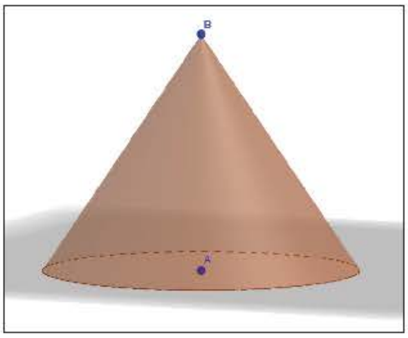
Chọn  → Chọn  Mặt cầu biết tâm và qua 1 điểm → Chọn điểm *A* và nhập bán kính 3, ta được mặt cầu tâm *A* bán kính 3 (H.T.6).



Hình T.6

c) Vẽ hình nón có đáy là hình tròn tâm A bán kính 2, đỉnh B như sau:

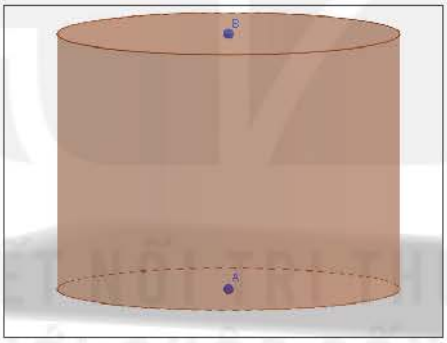
Chọn → Chọn Hình nón → Chọn điểm A, chọn điểm B (nhấn nút trái chuột vào một điểm trên vùng làm việc và kéo thả điểm đó đến vị trí thích hợp), nhập bán kính bằng 2, ẩn các trục ta được hình nón cần dựng (H.T.7).



Hình T.7

d) Vẽ hình trụ có đáy là các hình tròn tâm A, B bán kính 2 như sau:

Chọn → Chọn Hình trụ → Chọn điểm A, chọn điểm B (như phần c), nhập bán kính bằng 2, ẩn các trục toạ độ ta được hình trụ cần dựng (H.T.8).



Hình T.8

THỰC HÀNH

Sử dụng phần mềm GeoGebra thực hiện các yêu cầu sau:

1. Vẽ một đường tròn tâm A bán kính bằng 2.

b) Sử dụng lệnh vẽ tiếp tuyến Các tiếp tuyến, hãy vẽ tam giác EFG ngoại tiếp đường tròn (A) với các tiếp điểm trên EF, FG, GE lần lượt là B, C, D.

c) Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác EFG và lưu thành tệp png.

2. Vẽ một hình trụ và một hình nón có chung đáy và đỉnh của hình nón nằm trên mặt đáy còn lại của hình trụ.

XÁC ĐỊNH TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI, VẼ CÁC BIỂU ĐỒ BIỂU DIỄN BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI BẰNG EXCEL

1 XÁC ĐỊNH TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI VÀ BIỂU DIỄN BẰNG BIỂU ĐỒ

Để xác định tần số, tần số tương đối và biểu diễn bằng biểu đồ (biểu đồ cột, biểu đồ hình quạt tròn từ một dãy dữ liệu dạng liệt kê trong Excel, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Nhập dữ liệu dạng liệt kê vào một cột trong bảng tính.

Bước 2. Tạo bảng dữ liệu bằng cách xác định vùng dữ liệu và đặt tên bảng dữ liệu.

Bước 3. Sử dụng chức năng Pivot Table để tạo bảng tần số, tần số tương đối.

Bước 4. Từ bảng tần số, tần số tương đối vẽ đồ thị biểu diễn.

Chú ý. Việc tạo bảng dữ liệu sẽ giúp ta vẫn có các bảng, các biểu đồ khi thay đổi dữ liệu mà không cần thực hiện lại các bước trên, chỉ cần cập nhật dữ liệu và dùng chức năng Refresh.

Các thao tác cụ thể có thể khác nhau tuỳ thuộc vào phiên bản của Excel.

Ví dụ 1

Trước vòng bán kết giải bóng đá trường, Ban tổ chức đã phát phiếu hỏi các cổ động viên về đội vô địch. Kết quả thu được như sau:

A, B, C, A, A, B, C, A, B, D, A, D, A, A, B, C, B, A, A, C, B, D, D, A, B, C, B, A, C.

PHIẾU THĂM DÒ

Theo bạn, đội bóng lớp nào sẽ vô địch giải bóng đá trường?

A. 9A. B. 8C.

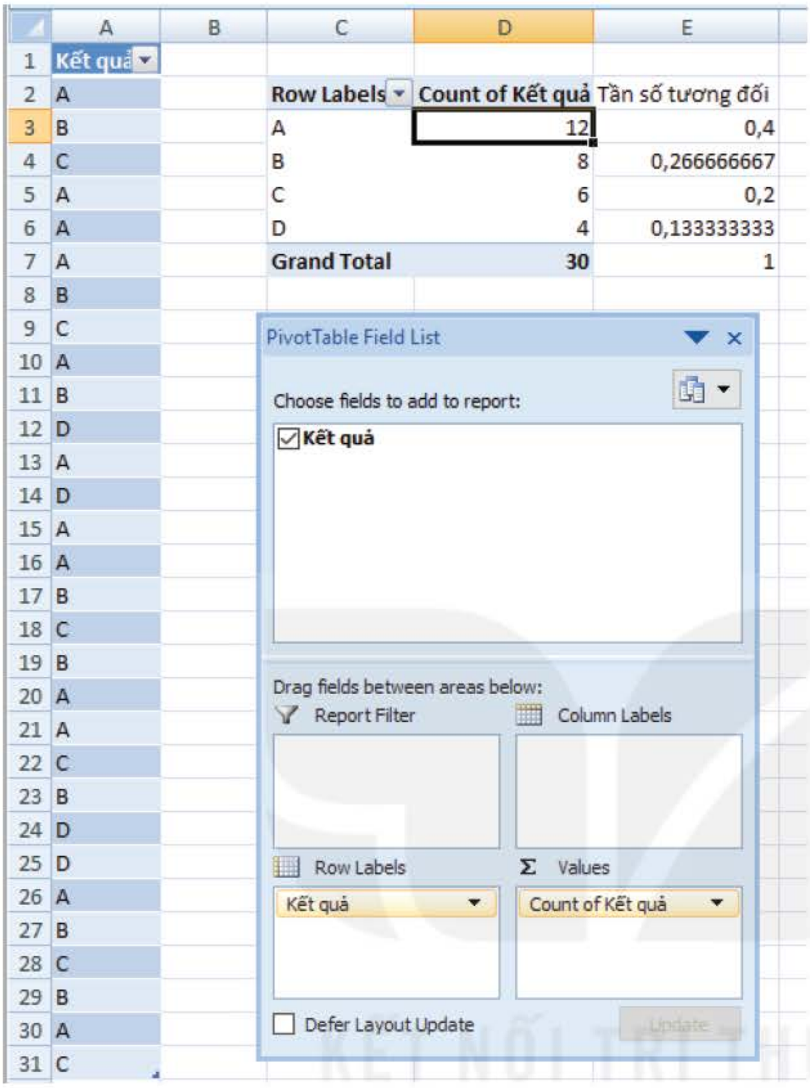
C. 7D. D. 9B.

Để xác định bảng tần số, tần số tương đối cho dãy dữ liệu này trong Excel, ta làm như sau:

Bước 1. Nhập dãy dữ liệu trên vào vùng dữ liệu A2:A31, ô A1 là tên cột "Kết quả".

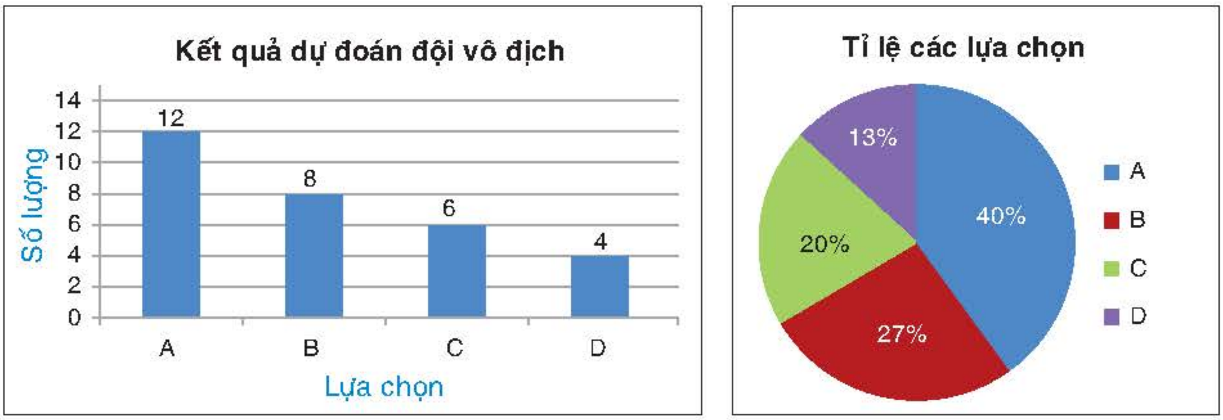
Bước 2. Chọn Insert → Table, chọn vùng dữ liệu \$A\$1:\$A\$31, tích vào ô My table has headers. Trong ô Table Name đặt tên cho bảng dữ liệu là *Dudoandoivodich*.

Bước 3. Chọn Insert → Pivot Table. Trong ô Table Range điền tên bảng dữ liệu *Dudoandoivodich*, chọn Existing Worksheet, trong ô Location chọn một vùng dữ liệu bất kì nào đó để đặt bảng kết quả, chẳng hạn ta chọn vùng C2: E6 thì ô này sẽ hiện Sheet3!\$C\$2:\$E\$6. Chọn OK. Trong bảng Pivot Table Field List, kéo thả trường Kết quả vào 2 ô Rowlabels và Values, ta sẽ thu được bảng tần số. Để thu được tần số tương đối của các giá trị, trong ô E3 ta điền =D3/\$D\$7 và sao chép công thức đến hết ô E6, điền nội dung "Tần số tương đối" vào ô E2 và kiểm tra tổng tần số tương đối bằng cách điền =SUM(E3:E6) vào ô E7. Kết quả thu được như Hình T.9.



Hình T.9

Bước 4. Để vẽ biểu đồ ta chọn vùng dữ liệu C3:D6, sau đó vào Insert chọn biểu đồ cột hoặc biểu đồ hình quạt tròn, điền các thông tin cần thiết để hoàn thiện biểu đồ. Kết quả thu được như Hình T.10.



Hình T.10

Thực hành 1

Hỏi ý kiến của các bạn trong lớp về địa điểm đi dã ngoại với ba lựa chọn: Tràng An, Ba Vì, Đại Lải thu được kết quả sau:

Tràng An, Ba Vì, Tràng An, Tràng An, Ba Vì, Ba Vì, Đại Lải, Tràng An, Tràng An, Ba Vì, Tràng An, Đại Lải, Tràng An, Tràng An, Tràng An, Tràng An, Tràng An, Tràng An, Ba Vì, Đại Lải, Tràng An, Ba Vì, Tràng An, Đại Lải, Ba Vì, Ba Vì, Ba Vì, Ba Vì, Đại Lải, Tràng An.

Sử dụng bảng tính Excel, hãy lập bảng tần số, bảng tần số tương đối cho dãy dữ liệu trên và vẽ các biểu đồ cột, biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn chúng.

2 VẼ CÁC BIỂU ĐỒ BIỂU DIỄN BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM

Để vẽ các biểu đồ biểu diễn dữ liệu ghép nhóm sử dụng bảng tính Excel thích hợp và thực hiện các bước sau đây:

Bước 1. Nhập dữ liệu vào bảng tính Excel và lập bảng tần số tương đối ghép nhóm (nếu cần).

Bước 2. Lựa chọn loại biểu đồ cần biểu diễn.

Bước 3. Hoàn thiện biểu đồ bằng cách xác định tiêu đề của biểu đồ, chú giải cho các trục, gán nhãn dữ liệu biểu diễn.

Ví dụ 2

Chiều cao của các cầu thủ đội bóng Manchester United được cho trong bảng sau:

Chiều cao (cm)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)	[180; 185)	[185; 190)	[190; 195)
Tần số tương đối	7,69%	7,69%	7,69%	26,92%	19,23%	30,77%

(Theo *webthethao.vn*)

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng số liệu ghép nhóm này, ta thực hiện theo các bước sau đây:

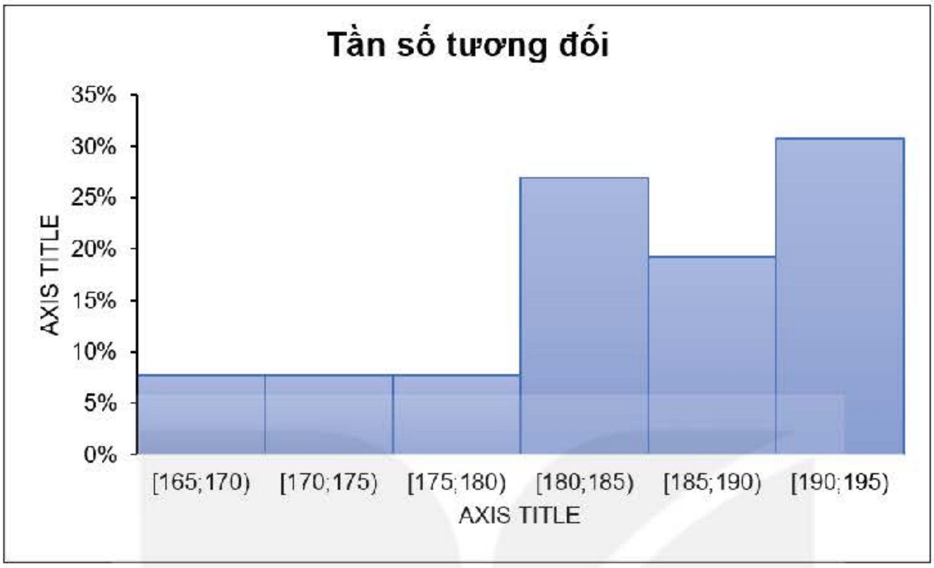
Bước 1. Nhập dữ liệu vào bảng tính Excel (H.T.11).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		Chiều cao (cm)	[165;170)	[170;175)	[175;180)	[180;185)	[185;190)	[190;195)	
4		Tần số tương đối	7.69%	7.69%	7.69%	26.92%	19.23%	30.77%	
5									
6									

Hình T.11

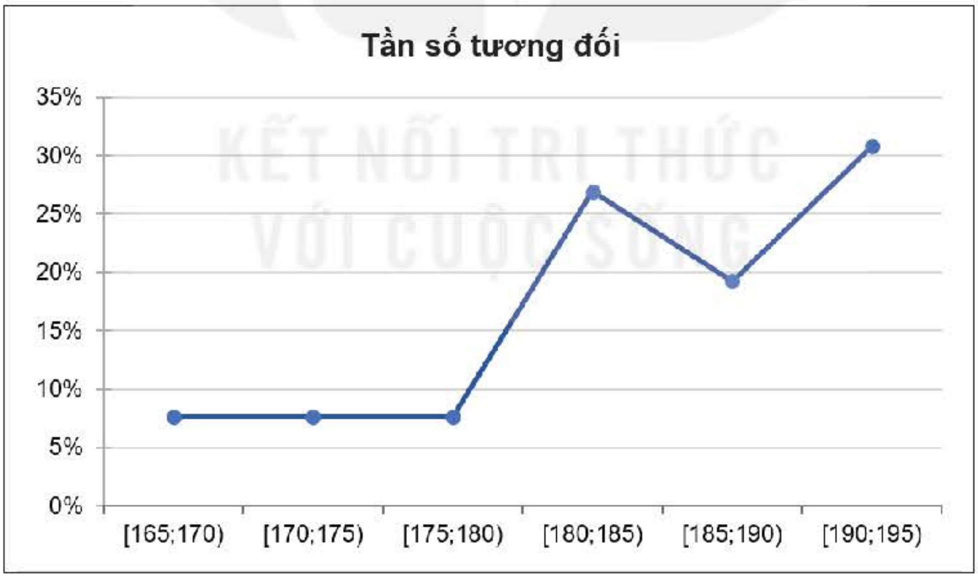
Bước 2. Chọn vùng dữ liệu.

– Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột ta chọn Insert → Columns → 2-D Columns sau đó chọn loại biểu đồ mong muốn. Chọn Design, chọn Layout8 (histogram) trong ô Chart layouts. Kết quả thu được như Hình T.12.



Hình T.12

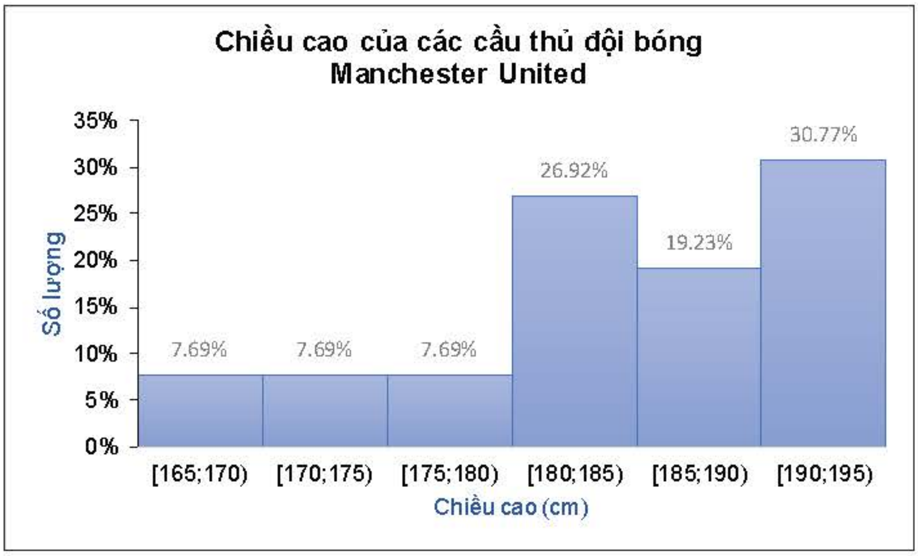
– Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng ta chọn Insert → Line → 2-D lines, sau đó chọn loại biểu đồ mong muốn. Kết quả thu được như Hình T.13.



Hình T.13

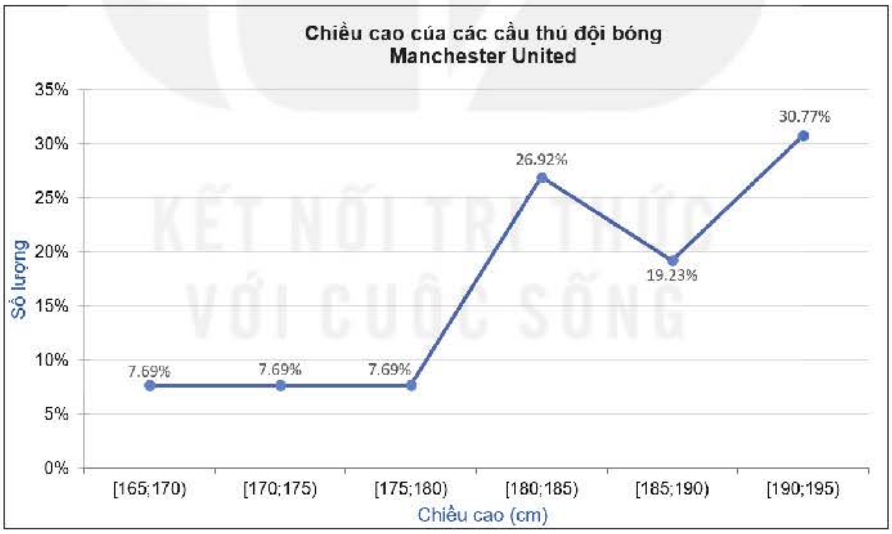
Bước 3. Hoàn thiện biểu đồ:

– Đối với biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột: Xác định tiêu đề của biểu đồ, chú giải cho các trục bằng cách chọn các mục tương ứng và thay nội dung; gán nhãn dữ liệu biểu diễn bằng cách nháy nút phải chuột vào phần các cột của biểu đồ, chọn Add data labels. Kết quả ta thu được biểu đồ như Hình T.14.



Hình T.14

– Đối với biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng: Xác định tiêu đề của biểu đồ bằng cách chọn các mục tương ứng và thay nội dung; ghi chú giải cho các trục bằng cách chọn Layout → Axis titles → Primary Horizontal Axis Title hoặc Primary Vertical Axis Title; gán nhãn dữ liệu biểu diễn bằng cách nháy nút phải chuột vào đường gấp khúc, chọn Add data labels. Kết quả ta thu được biểu đồ như Hình T.15.



Hình T.15

Thực hành 2

Thời gian chờ của bệnh nhân tại một phòng khám bệnh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)
Tần số tương đối	50%	10%	24%	16%

Sử dụng bảng tính Excel, vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê trên.

GENE TRỘI TRONG CÁC THẾ HỆ LAI

Mục tiêu

Kiểm chứng lại các quy luật di truyền của Mendel về tỉ lệ kiểu gene, kiểu hình trong các thế hệ lai, khi lai hai bố mẹ khác nhau về một cặp tính trạng thuần chủng tương phản bằng cách tính xác suất, mô phỏng.

Chuẩn bị:

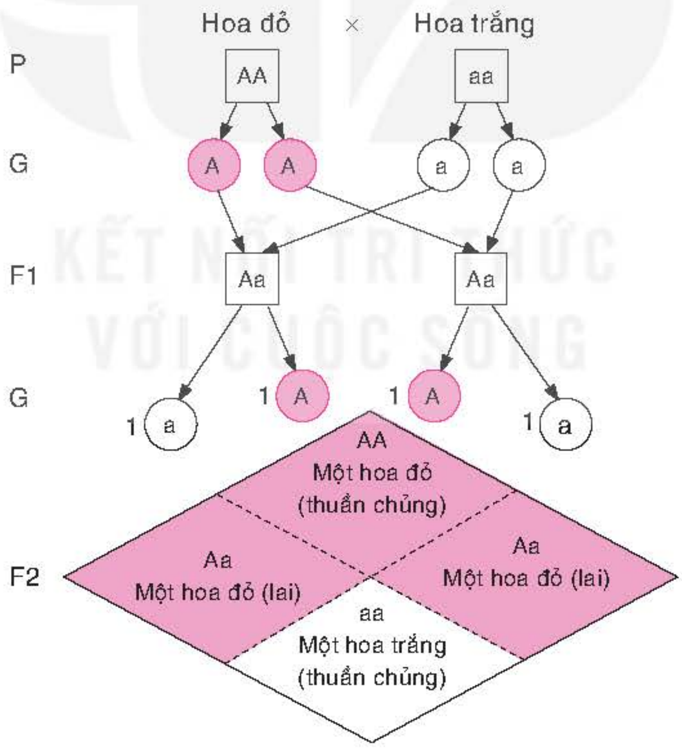
– Hai đồng xu với hai màu khác nhau, chẳng hạn màu xanh và màu đỏ.

– Ôn tập các quy luật di truyền của Mendel.

Thực hiện:

Lai cây đậu Hà Lan hoa đỏ thuần chủng với cây đậu hoa trắng thuần chủng thu được các cây lai đời F1 đều có hoa đỏ. Cho các cây hoa đỏ đời F1 tự thụ phấn, thế hệ lai đời F2 thu được tỉ lệ phân li kiểu hình là 3 cây hoa đỏ : 1 cây hoa trắng.

Theo thuật ngữ của Mendel, màu hoa đỏ là tính trạng trội, màu hoa trắng là tính trạng lặn. Quy ước allele A quy định màu hoa đỏ, allele a quy định màu hoa trắng. Kết quả của phép lai được mô phỏng trong Hình T.16.



Hình T.16. Sơ đồ lai

Mô phỏng

Ta sẽ mô phỏng việc lai "bố" và "mẹ" thuộc đời lai F1 và xem xét kiểu gen, kiểu hình của đời lai F2. Giả sử, đồng xu màu xanh kí hiệu cho "bố", đồng xu màu đỏ kí hiệu cho "mẹ". Trên mỗi đồng xu quy ước một mặt là A, mặt còn lại là a.

Bước 1. Tung mỗi đồng xu 100 lần và hoàn thiện bảng sau vào vở:

STT	Kết quả trên đồng xu màu xanh	Kết quả trên đồng xu màu đỏ	Kiểu gen	Kiểu hình
1	A	a	Aa	Hoa màu đỏ
...	...	...	...	...
100	a	a	aa	Hoa màu trắng

Bảng T.1. Kết quả mô phỏng

Bước 2. Dựa vào kết quả thu được ở Bảng T.1, xác định tần số, tần số tương đối của các kiểu gene, kiểu hình và hoàn thiện các bảng sau vào vở:

Kiểu gene	AA	Aa	aa
Tần số	?	?	?
Tần số tương đối	?	?	?

Bảng T.2. Tỉ lệ kiểu gen

Kiểu gene	Hoa màu đỏ	Hoa màu trắng
Tần số	?	?
Tần số tương đối	?	?

Bảng T.3. Tỉ lệ kiểu hình

Bước 3. Hãy kiểm chứng tỉ lệ kiểu gene, kiểu hình thu được trong đời lai F2 với kết luận của Mendel "Khi lai bố mẹ khác nhau về một cặp tính trạng thuần chủng tương phản thì F1 đồng tính về tính trạng của bố hoặc mẹ, còn F2 có sự phân lí tính trạng theo tỉ lệ trung bình 3 trội : 1 lặn".

Giải thích kết luận của Mendel bằng xác suất

Gọi xy là kiểu gene của một cây đậu trong đời lai F2.

a) Giả thiết rằng khả năng x, y nhận các giá trị A, a là như nhau. Các giá trị có thể có của xy được cho trong bảng sau:

x \ y	A	a
A	AA	aA
a	Aa	aa

Bảng T.4. Các phương án tổ hợp

Hãy liệt kê kiểu gene có thể có của một cây đậu trong đời lai F2. Bốn phương án tổ hợp trong Bảng T.4 có đồng khả năng hay không?

b) Tính xác suất của các sự kiện "Cây đậu trong đời lai F2 có kiểu gene AA", "Cây đậu trong đời lai F2 có kiểu gene aa"; "Cây đậu trong đời lai F2 có hoa màu đỏ"; "Cây đậu trong đời lai F2 có hoa màu trắng".

c) So sánh các xác suất tính được với các kết luận của Mendel về tỉ lệ kiểu gene, kiểu hình trong đời lai F2 khi lai hai bố mẹ khác nhau về một cặp tính trạng thuần chủng tương phản.

Thực hành

Thực hiện mô phỏng theo cách tương tự với các phép lai khác.

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

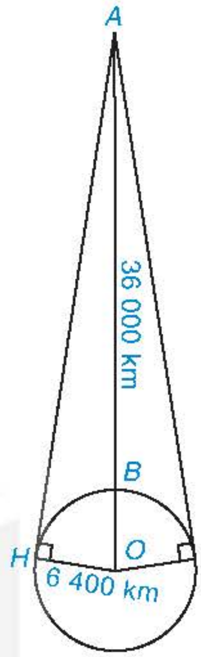
ĐẠI SỐ

1. Xét biểu thức $P = \dfrac{x\sqrt{x} - x + 2\sqrt{x} + 4}{x\sqrt{x} + 8}$ với $x \ge 0$.

a) Chứng minh rằng $P = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2}$.

b) Tính giá trị biểu thức đã cho tại $x = 64$.

2. Một vệ tinh địa tĩnh chuyển động theo quỹ đạo tròn cách bề mặt Trái Đất khoảng $AB = 36\ 000$ km, tâm quỹ đạo trùng với tâm O của Trái Đất như hình bên. Vệ tinh phát tín hiệu vô tuyến theo đường thẳng đến một số vị trí trên bề mặt Trái Đất. Cho biết bán kính Trái Đất khoảng 6 400 km, vị trí xa nhất trên bề mặt Trái Đất có thể nhận được tín hiệu từ vệ tinh cách vệ tinh bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



3. Giải các bất phương trình sau:

a) $-6x + 3(x+1) > 4x - (x-4)$;

b) $(2x+1)(2x-1) < 4x^2 - 4x + 1$.

4. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2 - x + 1} = \dfrac{3}{x^3 + 1}$;

b) $\dfrac{x+1}{2x-1} - \dfrac{2}{2x+1} = \dfrac{2x^2}{4x^2 - 1}$.

5. Kí hiệu (d_1) là đường thẳng $x + 2y = 4$, (d_2) là đường thẳng $x - y = 1$.

a) Vẽ (d_1) và (d_2) trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$ để tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

6. Với mỗi giá trị đã cho của m, hãy giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x\sqrt{2} - 3y = m \\ m^2 x - 3y\sqrt{2} = 2. \end{cases}$$

a) $m = \sqrt{2}$;

b) $m = -\sqrt{2}$;

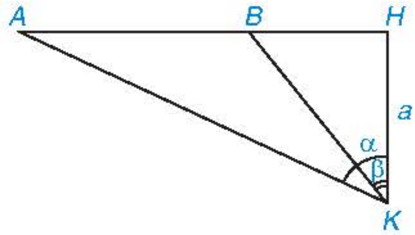
c) $m = 2\sqrt{2}$.

7. Để chuẩn bị làm một ngôi nhà, chú Ba tính rằng tổng diện tích xây dựng là khoảng 100 m^2 và tổng chi phí (tiền vật liệu và tiền công thợ) hết khoảng 600 triệu đồng. Khi thực hiện, diện tích xây dựng tăng thêm 20 m^2 và cứ mỗi mét vuông xây dựng, chi phí tiền vật liệu tăng thêm 10% và tiền công thợ tăng thêm $\dfrac{1}{5}$ so với dự tính ban đầu. Do đó tổng chi phí thực tế là 804 triệu đồng. Hỏi thực tế chú Ba phải trả bao nhiêu tiền vật liệu và bao nhiêu tiền công thợ cho mỗi mét vuông xây dựng?

8. Hai bến A và B trên một dòng sông cách nhau 36 km. Một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B, rồi sau đó ngược dòng từ bến B về bến A hết thời gian bằng thời gian nó đi quãng đường 75 km khi nước yên lặng. Tính vận tốc thực của ca nô (tức là vận tốc của ca nô khi nước yên lặng), biết rằng vận tốc dòng nước là 3 km/h.

HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

9. Để đo khoảng cách giữa hai điểm A và B không tới được, một người đứng ở điểm H sao cho B ở giữa A và H rồi dịch chuyển đến điểm K sao cho KH vuông góc với AB tại H, $HK = a$ (m), ngắm nhìn A với $\widehat{AKH} = \alpha$, ngắm nhìn B với $\widehat{BKH} = \beta$ ($\alpha > \beta$).



a) Hãy biểu diễn AB theo a, α, β.

b) Khi $a = 3$ m, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, hãy tính AB (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba của mét).

10. Cho tam giác ABC vuông tại B có góc $\widehat{A} = 30^\circ$, $AB = 6$ cm. Vẽ tia Bt sao cho $\widehat{tBC} = 30^\circ$, cắt tia AC ở D (C nằm giữa A và D).

a) Chứng minh tam giác ABD cân tại B.

b) Tính khoảng cách từ D đến đường thẳng AB.

11. Tứ giác $ABCD$ có hai góc đối diện B và D vuông, hai góc kia không vuông.

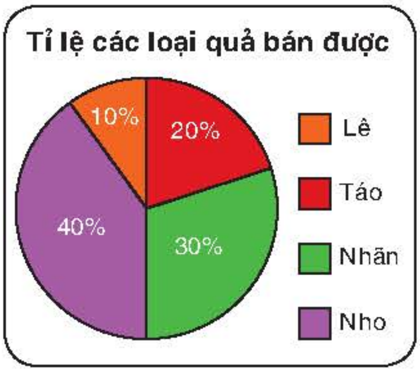
a) Chứng minh rằng có một đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C và D. Ta gọi đó là đường tròn $(\mathscr{C})$.

b) Gọi I và K lần lượt là trung điểm các đường chéo AC và BD của tứ giác. Chứng minh rằng $IK \perp BD$.

c) Kí hiệu các tiếp tuyến của đường tròn $(\mathscr{C})$ tại A, B và C lần lượt là a, b và c. Giả sử b cắt a và c theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng tứ giác $AEFC$ là một hình thang.

d) Chứng minh rằng $EF = AE + CF$.

12. Tỉ lệ các loại quả bán được trong một ngày của một cửa hàng được thể hiện trong biểu đồ hình quạt tròn như hình bên. Số phần trăm ghi trong mỗi hình quạt đúng bằng tỉ số giữa số đo của cung tròn tương ứng và số đo của cả đường tròn (360°).



a) Tính số đo của mỗi cung tròn ứng với hình quạt màu tím, màu cam và màu đỏ.

b) Tính số đo của cung còn lại (ứng với hình quạt màu xanh) bằng hai cách.

13. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) ngoại tiếp đường tròn (I) với các tiếp điểm trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Gọi X và Y lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C xuống CI và BI. Chứng minh rằng:

a) $DBXF$, $DCYE$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Bốn điểm X, Y, E, F thẳng hàng.

14. Bạn Khôi làm một chiếc mũ sinh nhật bằng bìa cứng có dạng hình nón với đường kính đáy bằng 20 cm, độ dài đường sinh bằng 30 cm. Tính diện tích giấy để làm chiếc mũ sinh nhật trên (lấy $\pi \approx 3,14$ và coi mép dán không đáng kể).

THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

15. Chiều cao (cm) của 20 bé trai 24 tháng tuổi được cho như bảng sau:

85,2	87,9	80,3	92,1	93,7	88,5	94,2	83,0	95,1	84,6
84,1	89,6	87,5	90,3	81,2	87,6	93,5	84,8	94,4	85,1

Theo Tổ chức Y tế thế giới WHO, nếu bé trai 24 tháng tuổi có chiều cao dưới 81,7 cm được xem là thấp còi, chiều cao từ 81,7 cm đến dưới 93,9 cm được xem là đạt chuẩn, chiều cao từ 93,9 cm trở lên được xem là cao.

a) Hãy hoàn thiện bảng sau vào vở:

Phân loại theo chiều cao	Thấp còi	Đạt chuẩn	Cao
Số trẻ	?	?	?

b) Tính tỉ lệ bé trai 24 tháng tuổi theo các mức phân loại về chiều cao. Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các tỉ lệ thu được.

c) Ước lượng số bé trai thấp còi, đạt chuẩn, cao trong số 1 200 bé trai 24 tháng tuổi.

16. Một nhóm của lớp 9A có 3 bạn nam và 2 bạn nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 2 bạn trong nhóm để tham gia một phong trào của trường.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Tính xác suất để hai bạn được chọn khác giới.

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH
Bảng tần số	Bảng thống kê cho biết tần số của các giá trị trong mẫu dữ liệu
Bảng tần số ghép nhóm	Bảng tần số của các nhóm số liệu
Bảng tần số tương đối	Bảng thống kê cho biết tần số tương đối của các giá trị trong mẫu dữ liệu
Bảng tần số tương đối ghép nhóm	Bảng tần số tương đối của các nhóm số liệu
Biệt thức Δ	Biệt thức Δ của phương trình bậc hai (ẩn x) $ax^2 + bx + c = 0$ là $\Delta = b^2 - 4ac$
Diện tích toàn phần của hình nón	Tổng diện tích mặt xung quanh và diện tích đáy
Diện tích toàn phần của hình trụ	Tổng diện tích mặt xung quanh và diện tích hai đáy
Đa giác đều	Đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau
Đường tròn ngoại tiếp tam giác	Đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác
Đường tròn nội tiếp tam giác	Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác
Góc nội tiếp	Góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó
Hình cầu	Hình sinh ra khi quay nửa hình tròn tâm O, bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định
Hình nón	Hình sinh ra khi quay tam giác vuông SOA một vòng quanh cạnh góc vuông OA cố định
Hình trụ	Hình sinh ra khi quay hình chữ nhật $O'ABO$ một vòng quanh cạnh OO' cố định
Không gian mẫu của một phép thử ngẫu nhiên	Tập hợp của tất cả các kết quả có thể xảy ra
Phép quay	Phép quay thuận chiều α^o ($0^o < \alpha^o < 360^o$) tâm O giữ nguyên điểm O, biến điểm A khác điểm O thành điểm B thuộc đường tròn $(O; OA)$ sao cho tia OA quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OB thì điểm A tạo nên cung AB có số đo α^o
Phương trình bậc hai một ẩn	Phương trình ẩn x có dạng $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó a, b, c là các hệ số và a khác 0
Tâm của đa giác đều	Trong đa giác đều, tâm của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp trùng nhau và gọi là tâm của đa giác đều
Tần số	Số lần xuất hiện của một giá trị trong mẫu dữ liệu
Tần số tương đối	Cho dãy dữ liệu $x_1, x_2, ..., x_n$. Tần số tương đối f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số của x_i (gọi là m_i) với n
Tần số tương đối ghép nhóm	Cho mẫu số liệu ghép nhóm $[a_1; a_2), [a_2; a_3), ..., [a_k; a_{k+1})$, với các tần số tương ứng là $m_1, m_2, ..., m_k$. Tần số tương đối f_i của nhóm $[a_i; a_{i+1})$ là tỉ số $\frac{m_i}{n} \cdot 100(\%)$, trong đó $n = m_1 + ... + m_k$
Thể tích hình cầu	Thể tích hình cầu bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
Thể tích hình nón	Thể tích hình nón có bán kính đáy r và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Thể tích hình trụ	Thể tích hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao h là $V = \pi R^2 h$
Tứ giác nội tiếp	Tứ giác có bốn đỉnh cùng nằm trên một đường tròn

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: HOÀNG THỊ THANH – NGUYỄN TRỌNG THIỆP
Biên tập mĩ thuật: PHẠM VIỆT QUANG
Thiết kế sách: NGUYỄN HỒNG SƠN
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Minh hoạ: NGUYỄN HỒNG SƠN
Sửa bản in: PHẠM THỊ TÌNH – TẠ THỊ HƯỜNG
Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

TOÁN 9 - TẬP HAI

Mã số:
In ... bản, (QĐ ...) khổ 19 x 26,5 cm.
Đơn vị in: ...
Địa chỉ: ...
Số ĐKXB: 8-2023/CXBIPH/98-2097/GD.
Số QĐXB: .../QĐ - GD - HN ngày ... tháng ... năm ....
In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm 20...
Mã số ISBN: Tập một: 978-604-0-
Tập hai: 978-604-0-

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 9 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Ngữ văn 9, tập một
2. Ngữ văn 9, tập hai
3. Toán 9, tập một
4. Toán 9, tập hai
5. Khoa học tự nhiên 9
6. Công nghệ 9
   Định hướng nghề nghiệp
7. Công nghệ 9
   Trải nghiệm nghề nghiệp
   Mô đun Lắp đặt mạng điện trong nhà
8. Công nghệ 9
   Trải nghiệm nghề nghiệp
   Mô đun Trồng cây ăn quả
9. Công nghệ 9
   Trải nghiệm nghề nghiệp
   Mô đun Chế biến thực phẩm
10. Lịch sử và Địa lí 9
11. Mĩ thuật 9
12. Âm nhạc 9
13. Giáo dục công dân 9
14. Tin học 9
15. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 9
16. Giáo dục thể chất 9
17. Tiếng Anh 9 – Global Success – SHS

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Cào lớp nhũ trên tem rồi quét mã
để xác thực và truy cập học liệu điện tử.

Giá: .... đ