

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán (chuyên)

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Khóa thi ngày: 04 - 06/6/2024

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{x-5\sqrt{x}+6}$, với $x \geq 0$, $x \neq 4$ và $x \neq 9$. Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A > -1$.

b) Cho parabol (P): $y = -x^2$ và điểm A thuộc (P) có hoành độ bằng -2 . Đường thẳng (d) đi qua điểm $B(0; -3)$, song song với OA (O là gốc tọa độ) và cắt (P) tại hai điểm M, N. Tìm tọa độ của M và N, biết M có hoành độ âm.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x^2 + x + 3} = x + 2 + \sqrt{2x + 5}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3xy + y^2 + 2x - 10y - 1 = 0 \\ (3xy + y^2)(2x - 1) - 21y^2 = 0 \end{cases}$.

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho hình bình hành ABCD có góc BAD là góc tù, $AB < AD$ và tia phân giác của góc BAD cắt cạnh BC tại K sao cho $CK < AB$. Trên cạnh AB lấy điểm L sao cho $AL = CK$. Hai đoạn thẳng AK và CL cắt nhau tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ALM cắt đường thẳng AD tại N (N khác A).

a) Chứng minh $AB \cdot NL = AK \cdot NM$.

b) Chứng minh $\widehat{CNL} = 90^\circ$.

c) Gọi I là giao điểm của BD và KL, chứng minh $\frac{BA}{BL} + \frac{BC}{BK} = \frac{BD}{BI}$.

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có AE là đường phân giác (E thuộc cạnh BC). Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với AE lấy điểm D sao cho góc BCD bằng 90° . Trên cạnh AB lấy điểm F sao cho góc DEF bằng 90° .

a) Chứng minh tứ giác ADCE nội tiếp đường tròn và $BE^2 = BA \cdot BF$.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, đường thẳng đi qua E và song song với AC cắt cạnh AB tại P. Chứng minh OP vuông góc với AE và điểm O thuộc đường thẳng BD.

Câu 5. (2,0 điểm)

a) Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a > 1$, $b > c > 1$ và $abc + 1$ chia hết cho $ab - b + 1$. Chứng minh b chia hết cho a .

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{x-1}{x+3} + \frac{y-1}{y+4} \geq \frac{6}{z+5}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (2x+2)(2y+3)(2z+4)$.

----- HẾT -----

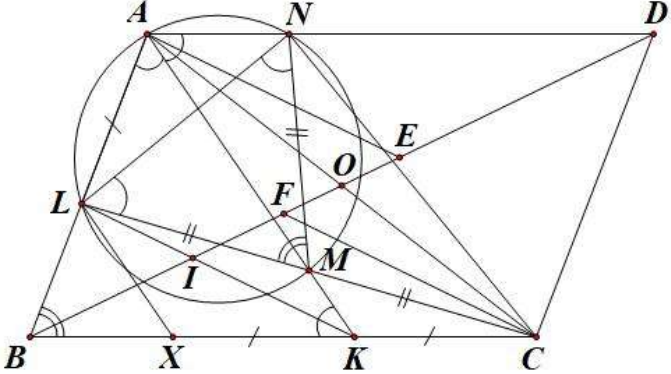
* Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

* Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

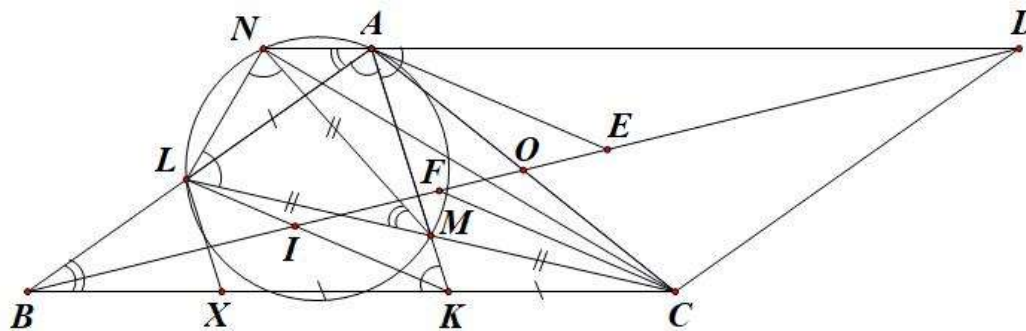
Câu	Nội dung	Điểm
	a) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{x-5\sqrt{x}+6}$, với $x \geq 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$. Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A > -1$.	1,0
	$A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2 - (\sqrt{x}-3)^2 + 1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
	$= \frac{x-4\sqrt{x}+4 - (x-6\sqrt{x}+9) + 1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2}{\sqrt{x}-3}$	0,25
	$A > -1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-3} > -1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-3} + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} > 0$ Trường hợp 1: $\begin{cases} \sqrt{x}-1 > 0 \\ \sqrt{x}-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow x > 9$ (nhận).	0,25
Câu 1	Trường hợp 2: $\begin{cases} \sqrt{x}-1 < 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 0 \leq x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$ (nhận). Vậy $x > 9$ hoặc $0 \leq x < 1$.	0,25
	b) Cho parabol (P): $y = -x^2$ và điểm A thuộc (P) có hoành độ bằng -2 . Đường thẳng (d) đi qua điểm B(0; -3), song song với OA (O là gốc tọa độ) và cắt (P) tại hai điểm M, N. Tìm tọa độ của M và N, biết M có hoành độ âm.	1,0
	Tung độ điểm A là $y = -(-2)^2 = -4$, suy ra A(-2; -4).	0,25
	Đường thẳng OA: $y = 2x$. Gọi đường thẳng (d): $y = ax + b$. Vì (d) song song OA nên hệ số góc $a = 2, b \neq 0$. Vì (d) đi qua B(0; -3) nên $b = -3$. Suy ra (d): $y = 2x - 3$.	0,25
	Các hoành độ của M và N là các nghiệm của phương trình: $-x^2 = 2x - 3$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ Phương trình này có 2 nghiệm: $x = 1, x = -3$.	0,25
	Vì M có hoành độ âm nên M(-3; -9) và N(1; -1).	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	a) Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x^2 + x + 3} = x + 2 + \sqrt{2x + 5}$ (1)	1,0
	$x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều kiện: $2x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2}$.	0,25
	(1) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 + \sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{2x + 5} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 + \frac{(x^2 + x + 3) - (2x + 5)}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{2x + 5}} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 + \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{2x + 5}} = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - x - 2) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{2x + 5}}\right) = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ (vì $1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{2x + 5}} > 0$ với mọi $x \geq -\frac{5}{2}$)	0,25
	Phương trình này có 2 nghiệm: $x = -1, x = 2$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x = -1, x = 2$.	0,25
Câu 2	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3xy + y^2 + 2x - 10y - 1 = 0 \\ (3xy + y^2)(2x - 1) - 21y^2 = 0 \end{cases}$ (1)	1,0
	- Xét $y = 0$: Hệ (1) có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$	0,25
	- Xét $y \neq 0$: Hệ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} (3xy + y^2) + (2x - 1) = 10y \\ (3xy + y^2)(2x - 1) = 21y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3xy + y^2}{y} + \frac{2x - 1}{y} = 10 \\ \left(\frac{3xy + y^2}{y}\right) \left(\frac{2x - 1}{y}\right) = 21 \end{cases}$ (2)	0,25
	Đặt $a = \frac{3xy + y^2}{y}, b = \frac{2x - 1}{y}$, hệ (2) trở thành: $\begin{cases} a + b = 10 \\ ab = 21 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases}$	
	Với $\begin{cases} a = 7 \\ b = 3 \end{cases}$, ta có $\begin{cases} \frac{3xy + y^2}{y} = 7 \\ \frac{2x - 1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy + y^2 = 7y \\ 2x - 1 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$	0,25

	<p>Với $\begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases}$, ta có $\begin{cases} \frac{3xy+y^2}{y}=3 \\ \frac{2x-1}{y}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy+y^2=3y \\ 2x-1=7y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=3 \\ 2x-7y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{22}{23} \\ y=\frac{3}{23} \end{cases}$</p> <p>Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm: $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{22}{23} \\ y=\frac{3}{23} \end{cases}$.</p>	0,25
	<p>Cách khác giải câu 2b)</p> <p>Đặt $u = 3xy + y^2$, $v = 2x - 1$, hệ (1) viết lại: $\begin{cases} u+v=10y \\ uv=21y^2 \end{cases}$, khi đó u, v thỏa mãn phương trình: $X^2 - 10y.X + 21y^2 = 0 \Leftrightarrow (X - 7y)(X - 3y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 7y \\ X = 3y \end{cases}$.</p> <p>+ Với $\begin{cases} u = 7y \\ v = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3xy + y^2 = 7y \\ 2x - 1 = 3y \end{cases}$, tìm được nghiệm $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.</p> <p>+ Với $\begin{cases} u = 3y \\ v = 7y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3xy + y^2 = 3y \\ 2x - 1 = 7y \end{cases}$, tìm được nghiệm $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{22}{23} \\ y = \frac{3}{23} \end{cases}$.</p> <p>Kết luận hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{22}{23} \\ y = \frac{3}{23} \end{cases}$.</p>	

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>Cho hình bình hành ABCD có góc BAD là góc tù, $AB < AD$ và tia phân giác của góc BAD cắt cạnh BC tại K sao cho $CK < AB$. Trên cạnh AB lấy điểm L sao cho $AL = CK$. Hai đoạn thẳng AK và CL cắt nhau tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ALM cắt đường thẳng AD tại N (N khác A).</p>	2,0
	a) Chứng minh $AB \cdot NL = AK \cdot NM$	0,75
	 <p>Hình vẽ phục vụ câu a): 0,25 điểm</p>	0,25
	<p>Tứ giác ALMN nội tiếp đường tròn nên $\widehat{BAK} = \widehat{MNL}$ (1) Ta có: $\widehat{ABK} = 180^\circ - \widehat{LAN} = \widehat{NML}$ (2)</p>	0,25
Câu 3	<p>Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABK$ và $\triangle NML$ đồng dạng. Do đó $\frac{AB}{NM} = \frac{AK}{NL}$ hay $AB \cdot NL = AK \cdot NM$.</p>	0,25
	b) Chứng minh $\widehat{CNL} = 90^\circ$.	0,75
	<p>Vì $\widehat{NAM} = \widehat{LAM}$ nên $NM = LM$ (3)</p>	0,25
	<p>Kẻ $LX \parallel AK$, X thuộc BC. Vì $\widehat{AKX} = \widehat{KAD} = \widehat{KAL}$ nên tứ giác ALXK là hình thang cân, suy ra $XK = AL = CK$.</p>	0,25
	<p>Tam giác CLX có $XK = CK$ và $MK \parallel XL$ nên $LM = CM$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $NM = LM = CM$. Do đó $\triangle CNL$ vuông tại N hay $\widehat{CNL} = 90^\circ$.</p>	0,25
	c) Gọi I là giao điểm của BD và KL, chứng minh $\frac{BA}{BL} + \frac{BC}{BK} = \frac{BD}{BI}$.	0,5
	<p>Kẻ $AE \parallel KL$ và $CF \parallel KL$ (E, F thuộc BD), gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có: $\frac{BA}{BL} + \frac{BC}{BK} = \frac{BE}{BI} + \frac{BF}{BI} = \frac{BO + OE}{BI} + \frac{BO - OF}{BI} = \frac{2BO + OE - OF}{BI}$</p>	0,25
	<p>Hai tam giác AOE và COF bằng nhau (g-c-g), suy ra $OE = OF$. Do đó $\frac{BA}{BL} + \frac{BC}{BK} = \frac{2BO}{BI} = \frac{BD}{BI}$.</p>	0,25

Với hình vẽ sau, cách chứng minh (1), (2), (3):



Câu a)

Tứ giác AMLN nội tiếp đường tròn nên $\widehat{BAK} = \widehat{MNL}$ (1)

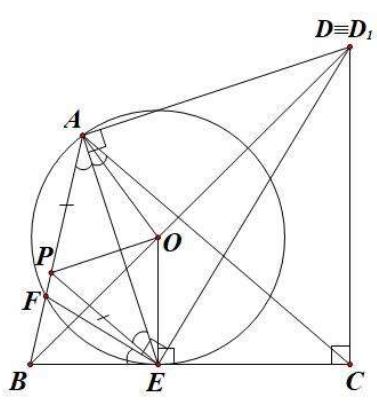
$\widehat{ABK} = \widehat{NAL}$, $\widehat{NAL} = \widehat{NML} \Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{NML}$ (2)

Câu b)

$\widehat{MLN} = \widehat{MAD}$ (do tứ giác AMLN nội tiếp đường tròn)

$= \widehat{MAL} = \widehat{MNL}$

Suy ra ΔNML cân tại M hay $NM = LM$ (3)

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có AE là đường phân giác (E thuộc cạnh BC). Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với AE lấy điểm D sao cho góc BCD bằng 90°. Trên cạnh AB lấy điểm F sao cho góc DEF bằng 90°.</p>	2,0
	<p>a) Chứng minh tứ giác ADCE nội tiếp đường tròn và $BE^2 = BA \cdot BF$.</p>	1,0
	<div style="text-align: center;">  <p>Hình vẽ phục vụ câu a): 0,25 điểm</p> </div>	0,25
Câu 4	<p>Theo giả thiết: $\widehat{DAE} = 90^\circ$ và $\widehat{DCE} = 90^\circ$. Vì $\widehat{DAE} + \widehat{DCE} = 180^\circ$ nên tứ giác ADCE nội tiếp đường tròn (đường kính DE).</p>	0,25
4	<p>$\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$, $\widehat{CAE} = \widehat{CDE}$ (cùng chắn cung CE của đường tròn đường kính DE), $\widehat{CDE} = 180^\circ - 90^\circ - \widehat{CED} = \widehat{BEF} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BEF}$.</p>	0,25
	<p>Do đó $\triangle BAE$ và $\triangle BEF$ đồng dạng. Do đó $\frac{BA}{BE} = \frac{BE}{BF}$ hay $BE^2 = BA \cdot BF$.</p>	0,25
	<p>b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, đường thẳng đi qua E và song song với AC cắt cạnh AB tại P. Chứng minh OP vuông góc với AE và điểm O thuộc đường thẳng BD.</p>	1,0
	<p>Vì $\widehat{AEP} = \widehat{EAC} = \widehat{EAP}$ nên $\triangle AEP$ cân tại P hay $PA = PE$. Vì $PA = PE$ và $OA = OE$ nên OP là đường trung trực của đoạn thẳng AE. Suy ra $OP \perp AE$.</p>	0,25
	<p>Vì $\widehat{BEF} = \widehat{BAE}$ (theo câu a)) nên BE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$, suy ra $OE \perp BC \Rightarrow OE \parallel CD$. Vì $OP \parallel DA$, $OE \parallel DC$, $EP \parallel CA$ nên $\triangle OEP$ đồng dạng với $\triangle DCA$, suy ra $\frac{OE}{DC} = \frac{EP}{CA}$. (1)</p>	0,25
	<p>$EP \parallel CA \Rightarrow \frac{EP}{CA} = \frac{BE}{BC}$ (2). Giả sử BO cắt CD tại D_1; $OE \parallel D_1C \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{OE}{D_1C}$ (3)</p>	0,25
	<p>Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{OE}{DC} = \frac{OE}{D_1C} \Leftrightarrow DC = D_1C$, mà D và D_1 nằm cùng phía đối với đường thẳng BC nên D trùng D_1. Vậy điểm O thuộc đường thẳng BD.</p>	0,25
	<p>Cách khác: Từ (1) và (2) suy ra $\frac{OE}{DC} = \frac{BE}{BC}$, mà $\widehat{BEO} = \widehat{BCD} = 90^\circ$ nên $\triangle BEO$ và $\triangle BCD$ đồng dạng. Suy ra $\widehat{EBO} = \widehat{CBD}$, mà O và D nằm cùng phía đối với đường thẳng BC nên hai tia BO và BD trùng nhau. Vậy điểm O thuộc đường thẳng BD.</p>	

Câu	Nội dung	Điểm
	a) Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a > 1, b > c > 1$ và $abc + 1$ chia hết cho $ab - b + 1$. Chứng minh b chia hết cho a .	1,0
	Ta có: $(abc + 1) - (ab - b + 1) = b(ac - a + 1)$ Vì $(abc + 1) : (ab - b + 1)$ nên $b(ac - a + 1) : (ab - b + 1)$ (1)	0,25
	Vì $ab - b + 1 = (a - 1)b + 1$ nên $ab - b + 1$ và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Do đó (1) $\Rightarrow (ac - a + 1) : (ab - b + 1)$ hay $(ac - a + 1) = k.(ab - b + 1), k \in \mathbb{N}^*$. (2)	0,25
	Ta có: $ac - a + 1 = a(c - 1) + 1 > 0$. $2(ab - b + 1) - (ac - a + 1) = ab - ac + ab - 2b + a + 1$ $= a(b - c) + (a - 2)b + a + 1 > 0.$	0,25
	Do đó $0 < ac - a + 1 < 2(ab - b + 1) \Leftrightarrow 0 < k.(ab - b + 1) < 2(ab - b + 1) \Rightarrow k = 1$ (3)	
	Từ (2) và (3) suy ra: $ac - a + 1 = ab - b + 1 \Rightarrow b = ab - ac + a = a(b - c + 1) \Rightarrow b : a$.	0,25
	b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{x-1}{x+3} + \frac{y-1}{y+4} \geq \frac{6}{z+5}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (2x+2)(2y+3)(2z+4)$.	1,0
Câu 5	$\frac{x-1}{x+3} + \frac{y-1}{y+4} - \frac{6}{z+5} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x+3} + 1 - \frac{5}{y+4} - \frac{6}{z+5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x+3} + \frac{5}{y+4} + \frac{6}{z+5} \leq 2$ Ta có: $\frac{2x+2}{x+3} = 2 - \frac{4}{x+3} \geq \frac{5}{y+4} + \frac{6}{z+5} \geq 2\sqrt{\frac{5}{y+4} \cdot \frac{6}{z+5}}$ (1) (Bất đẳng thức $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ cho hai số a, b không âm)	0,25
	Tương tự ta có: $\frac{2y+3}{y+4} = 2 - \frac{5}{y+4} \geq \frac{4}{x+3} + \frac{6}{z+5} \geq 2\sqrt{\frac{4}{x+3} \cdot \frac{6}{z+5}}$ (2) $\frac{2z+4}{z+5} = 2 - \frac{6}{z+5} \geq \frac{4}{x+3} + \frac{5}{y+4} \geq 2\sqrt{\frac{4}{x+3} \cdot \frac{5}{y+4}}$ (3)	0,25
	Nhân (1), (2) và (3) vế theo vế, ta được: $\frac{2x+2}{x+3} \cdot \frac{2y+3}{y+4} \cdot \frac{2z+4}{z+5} \geq 8 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{(x+3)(y+4)(z+5)} \Leftrightarrow (2x+2)(2y+3)(2z+4) \geq 960$	0,25
	Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \frac{4}{x+3} + \frac{5}{y+4} + \frac{6}{z+5} = 2 \\ \frac{4}{x+3} = \frac{5}{y+4} = \frac{6}{z+5} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{7}{2} \\ z = 4 \end{cases}$	0,25
	Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 960, đạt được khi $x = 3, y = \frac{7}{2}, z = 4$.	

----- HẾT -----

* **Lưu ý:** Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong HDC nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như HDC quy định.